МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНБАСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

кафедра методики навчання математики
та методики навчання інформатики

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ З КУРСУ МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА ТА ТЕОРІЯ АЛГОРИТМІВ

РОЗДІЛ "МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА"»
ДЛЯ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 014 *СЕРЕДНЯ ОСВІТА* (*МАТЕМАТИКА*)

СЛОВ'ЯНСЬК – 2019

УДК [510.6+510.5] (075.8)
М 545

Затверджено на засіданні Вченої ради
(протокол № 5 від 26 грудня 2019 р.)

Рецензенти:

Величко В.Є., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри методики навчання математики та методики навчання інформатики ДВНЗ «ДДПУ»;
Решетова І.А., кандидат педагогічних наук, доцент кафедри управління навчальними закладами ДВНЗ «ДДПУ».

М 545 Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Математична логіка та теорія алгоритмів. Розділ "Математична логіка"» для спеціальності 014 Середня освіта (Математика) /Н. В. Кайдан, З. Д. Пащенко. Слов'янськ: Вид Б. І. Маторіна, 2019. 92 с.

Даний навчальний посібник розроблено для практичних занять з математичної логіки. Він охоплює теми: алгебра висловлень, числення висловлень та логіка предикатів. Кожен параграф відповідає одному практичному заняттю і має наступну структуру: тема заняття, мета заняття, необхідні теоретичні відомості, приклади розв'язування задач, вправи для аудиторної роботи та задачі для самостійної.

Рекомендовано для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів.

Зміст

Передмова

Математична логіка займає одне з найважливіших місць у сучасній математичній науці. Вона знайшла таке широке застосування в різноманітніших галузях наукових досліджень, якого ніколи не знала традиційна формальна логіка. Математична логіка та теорія алгоритмів з великим успіхом використовуються в теорії релейно-контактних схем і в теорії автоматів, тобто в кібернетиці, в лінгвістиці, в економічних дослідженнях, у фізіології мозку і психології тощо. Математична логіка дуже важлива для вчителів математики. Вона дає можливість краще зрозуміти структурно-логічну схему шкільного курсу математики, глибше вникнути в суть поняття доведення, з'ясувати зміст поняття логічного слідування, встановити зв'язки між різного роду теоремами тощо.

Історично математична логіка будувалась як алгебраїчна теорія, у якій зв'язки між різними поняттями логіки виражалися за допомогою операцій. Така побудова математичної логіки згодом дістала назву алгебри висловлень і алгебри предикатів. Поряд з потребою змістовної побудови математичної логіки виникла потреба будувати математичну логіку як формально-аксіоматичну теорію, для якої алгебра предикатів є однією з можливих інтерпретацій. Тому замість алгебри висловлень і алгебри предикатів розглядають відповідно числення висловлень і логіку предикатів.

Поняття і методи математичної логіки необхідні для обґрунтування правильності тих чи інших способів отримання істинного знання. Апарат математичної логіки необхідний для адекватного моделювання різноманітних предметних областей, створення сучасних програмних та інформаційних систем.

Предмет навчальної дисципліни «Математична логіка та теорія алгоритмів» включає в себе вивчення базових понять математичної логіки, розгляд семантичних моделей логіки та формально-аксіоматичних логічних систем.

Дані вказівки призначені для студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів та інститутів, а також для викладачів курсу «Математична логіка та теорія алгоритмів». Вивчення даного курсу сприяє формуванню загальнонаукового світогляду і вихованню математичної культури, необхідної майбутньому вчителю для проведення наукових досліджень, для глибокого розуміння цілей і завдань як основного шкільного курсу математики, так і спеціальних факультативних курсів та наукових гуртків. Зміст даних вказівок відповідає діючій програмі вказаного курсу та висвітлює питання теорії алгебри висловлень, числення висловлень та логіки предикатів.

Кожен параграф відповідає одному практичному заняттю і має наступну структуру: тема заняття, мета заняття, необхідні теоретичні відомості, приклади розв’язування задач, вправи для аудиторної роботи та задачі самостійної роботи. При підготовці до кожного практичного заняття студент повинен ознайомитись з темою заняття та усвідомити його мету. Після цього студент повинен вивчити необхідні означення, теореми, факти, властивості, алгоритми та розглянути приклади розв’язування задач. На занятті аналізуються приклади розв'язування задач, розглядаються вправи аудиторної роботи, а вдома студенти розв'язують завдання самостійної роботи. Наведені приклади охоплюють майже всі типові задачі курсу та допомагають засвоєнню матеріалу при індивідуальному навчанні.

Розділ 1. Алгебра висловлень

Заняття №1. Висловлення. Операції алгебри висловлень.

Якщо в світі все безглуздо, – сказала Аліса, – що заважає вигадати якийсь сенс?

Льюїс Керролл «Аліса в країні див»

Мета заняття: засвоїти поняття висловлення та операцій алгебри висловлень.

Необхідні теоретичні матеріали:

Висловлення – це речення, про яке має сенс говорити, що воно істинне або хибне.

– кожне висловлення є або істинним, або хибним (***закон виключеного третього***);

– жодне висловлення не є одночасно істинним і хибним (***закон виключення суперечності***).

Математична логіка – наука, що вивчає формальні закони міркування за допомогою математичних засобів, тобто такі правила, які не залежать від конкретного змісту висловлень.

Вираз який не є висловленням, але стає ним після заміни всіх символів змінних, що входять у цей вираз, назвами відповідних предметів, називається ***висловлювальною формою.***

Однією з основних задач логіки висловлень є дослідження законів (логічних зв'язок), за допомогою яких з певних вихідних висловлень утворюються нові висловлення. Такі закони називаються ***логічними операціями*** та приблизно відповідають виразам мови:

1. «***і***», «***а***», «***але***», «***хоч***», «***незважаючи на …***»;
2. «***або***», «***чи***», «***хоч одне з …***»;
3. «***не***», «***неправильно, що…***»;
4. «***якщо …, то …***», «… ***імплікує*** …», «***з … слідує*** …»;
5. «… ***тоді і тільки тоді, коли*** …», «… ***якщо і тільки якщо*** …», «…***еквівалентне*** …».

Висловлення, які не містять логічних зв’язок, називаються ***елементарними, атомарними***.

В логіці висловлень елементарні висловлення розглядаються як неподільні цілі (внутрішню структуру не аналізують). Висловлення, яке містить хоча б одну логічну зв’язку, називається ***складним*** висловленням.

Надалі істинне значення будемо позначати через ***1***, хибне значення – через ***0***.

Дослідження логічних операцій проводиться в ***алгебрі висловлень***. Логічним операціям в логіці висловлень ставляться у відповідність наступні логічні операції алгебри висловлень:

1. $p \wedge q$ – ***кон’юнкція*** (логічне «і», «&»),
2. $p \vee q$ – ***диз’юнкція*** (логічне «або»),
3. $\bar{p}$ – ***заперечення*** («не p»),
4. $p \to q$ – ***імплікація*** («якщо ..., то ...», p–антецедент (посилка) q–консеквент (висновок)),
5. $p \leftrightarrow q$– ***еквіваленція*** ($p \equiv q$).

З цих операцій заперечення є унарною, а решта – бінарні. В алгебрі висловлень також існують бінарні логічні операції, які не мають аналогів операцій в логіці висловлень:

$p \oplus q$ – ***роздільне «або»*** (значення функції істинності дорівнює арифметичній сумі за модулем 2 істинісних значень компонентів),

$p \downarrow q$ – ***стрілка Пірса***,

$p|q$ – ***штрих Шеффера***.

Операції алгебри висловлень визначаються відповідними таблицями. Ось таблиця для основних операцій алгебри висловлень:

p	**q**	$\bar{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$	$p \oplus q$	$p \downarrow q$	$p\|q$
0	**0**	1	0	0	1	1	0	1	1
0	**1**	1	0	1	1	0	1	0	1
1	**0**	0	0	1	0	0	1	0	1
1	**1**	0	1	1	1	1	0	0	0

Аудиторна робота

Приклад 1.1.

а) «$\pi = 3{,}14$» (*просте*);

б) «4– не є простим числом» (*складне*);

в) «якщо$3 < 2$, то $3^2 < 2^2$» (*складне*).

Δ

Вправа 1.2. Які з виразів є: висловленнями, висловлювальними формами, ні тим, ні іншим?

а) 15 кратне 3, але не кратне 4;

б) $x^2 < 4$;

в) Кожне дійсне число задовольняє нерівність $x^2 \geq 0$;

г) Чи існує дійсне число, більше за 3 і менше від$\sqrt{10}$?

д) Т.Г. Шевченко – автор «Катерина».

е) Чи правильна велика теорема Ферма?

Приклад 1.3. Записати дане твердження у вигляді формули алгебри висловлень і встановити його істинність або хибність: «$18 \vdots 6$ в тому і тільки в тому випадку, коли $18 \vdots 3$ і $18 \vdots 2$».

Розв'язок. Дане твердження складається з трьох простих висловлень. Позначимо їх великими буквами латинського алфавіту:

$A - 18 \vdots 6$ $\quad$ $B - 18 \vdots 3$ $\quad$ $C - 18 \vdots 2$

Сполучнику «тоді і тільки тоді» відповідає в алгебрі висловлень операція еквівалентності, сполучнику «і» - операція кон'юнкції. Тоді дане твердження можна записати у вигляді формули: $A \leftrightarrow B \wedge C$.

Висловлення B і C істинні, тому істинною буде і їх кон'юнкція. Так як висловлення А також істинне, то за означенням операції логічного слідування випливає, що формула $A \leftrightarrow B \wedge C$ приймає істинне значення: $|A \leftrightarrow B \wedge C| = 1 \leftrightarrow 1 \wedge 1 = 1 \leftrightarrow 1 = 1$.

Δ

Вправа 1.4. Визначити істинність чи хибність складних висловлень, вважаючи відомими значення істинності простих висловлень, з яких вони складаються:

а) 171 кратне 11, але не кратне 7.

б) $6 \geq 6$;

в) Якщо $\pi < 3$, то $\pi^2 < 3^2$.

Вправа 1.5. Записати твердження логіко математичною символікою і визначити істинність чи хибність їх:

а) Якщо 3219 кратне 111, то 3219 кратне 37, а якщо 3219 не кратне 37, то 3219 не кратне 111.

б) $x^2 > 4$ тоді і тільки тоді, коли $x > 2$ або $x < -2$;

в) $x^2 > 4$ тоді і тільки тоді, коли $x > 2$ і $x < -2$.

Самостійна робота

Задача 1.1. Визначити істинність чи хибність складних висловлень, вважаючи відомими значення істинності простих висловлень, з яких вони складаються:

а) $-2 > -3$ і $-\frac{1}{2} > -\frac{1}{3}$;

б) $-2 > -3$ але $(-2)^2 < (-3)^2$.

Задача 1.2. Записати твердження логіко математичною символікою і визначити істинність чи хибність їх:

а) $x^2 < 4$ тоді і тільки тоді, коли $x < 2$ і $x > -2$;

б) $x^2 < 4$ тоді і тільки тоді, коли $x < 2$ або $x > -2$.

Заняття №2. Таблиці істинності. Тавтології та протиріччя.

– Не сумуй, – сказала Аліса.
– Рано чи пізно все стане зрозуміло, все стане на свої місця і вишикується в єдину красиву схему, як мережива. Стане зрозуміло, навіщо все було потрібно, тому що все буде правильно.
Льюїс Керролл «Аліса в країні див»

Мета заняття: вивчити поняття формули алгебри висловлень, засвоїти порядок дій логічних операцій, навчитися будувати таблицю істинності формули алгебри висловлень, розпізнавати тотожну істинність формул, засвоїти основні закони алгебри висловлень.

Необхідні теоретичні матеріали:

Формулами алгебри висловлень називатимемо пропозиційні букви і вирази виду $(\bar{A})$, $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$, де A, B – формули. При цьому пропозиційні букви називають ***елементарними формулами***.

З метою спрощення запису формул встановлюються правила скорочення числа дужок. Це такі правила:

1. Зовнішні дужки в записі формули опускаються;

2. Усім логічним операціям приписується певний ранг, який знижується в міру переміщення зліва на право: $\bar{\ }$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Остання по порядку логічна операція в формулі називається ***головною операцією***.

В формулі $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ змінні $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ можуть набувати довільні істинні значення з множини $\{0,1\}$. Кожний розподіл значень істинності всіх пропозиційних букв $p_1, p_2, \dots, p_n$ називають *n*-значним набором $(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Таких наборів існує 2^n. Кожному набору відповідає єдине значення функції істинності формули $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$, яке можна обчислити суто механічно. Таблиці відповідності між 2^n наборами значень змінних і значенням формули називається ***таблицею істинності*** формули.

Серед формул алгебри висловлень особливо цікаві ті формули, які на всіх наборах $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ набирають значення 1 (***тотожно дорівнюють 1***).

Формула алгебри висловлень $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ називається ***тавтологією*** тоді і тільки тоді, коли функція істинності, яка визначається цією формулою, тотожно дорівнює 1.

Позначається $\vDash A(p_1, \dots, p_n)$.

Наведемо приклади деяких найважливіших тавтологій.

1. $p \leftrightarrow \bar{\bar{p}}$ - ***закон подвійного заперечення***;

2. $p \vee \bar{p}$ – ***закон виключеного третього***;

3. $\overline{p \wedge \bar{p}}$ – ***закон виключення суперечності***;

4. $p \rightarrow p$ – ***закон тотожності***;

5. $p \wedge p \leftrightarrow p$ – ***закони ідемпотентності кон'юнкції***;

6. $p \vee p \leftrightarrow p$ – ***закони ідемпотентності диз'юнкції***;

7. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{q} \longrightarrow \bar{p})$ – ***закон контрапозиції***;

8. $p \wedge (p \rightarrow q) \longrightarrow q$ – ***закон «Modus ponens»***;

9. $\bar{q} \wedge (p \rightarrow q) \longrightarrow \bar{p}$ – ***закон «Modus tollens»***;

10. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \longrightarrow (p \rightarrow r)$ – ***закон силогізму***.

Тавтології також називаються тотожно істинними формулами, законами алгебри висловлень. Їх доводять не тільки методом побудови таблиці істинності, а й методом відшукання ***контрприкладу***.

Формула алгебри висловлень $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$, яка набуває значення істинності 0 на всіх 2^n наборах називається ***суперечністю***.

Формула алгебри висловлень, яка не є ні тавтологією, ні суперечністю, називається ***нейтральною***.

Формула алгебри висловлень, яка не є суперечністю, називається ***виконуваною***.

Твердження.

1. Заперечення тавтології є суперечністю і, навпаки, заперечення суперечності є тавтологією.

2. Кожна тавтологія – виконувана формула (але не навпаки).

3. Кожна нейтральна – виконувана формула (але не навпаки).

4. Заперечення виконуваної формули може бути як виконуваною, так і невиконуваною формулою.

5. Теорема (про підстановку): Якщо $A(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)$ – тавтологія, то формула A^*, утворена з формули $A(p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)$ підстановкою довільної формули алгебри висловлень B замість кожного входження пропозиційної букви p_i в A, є також тавтологія (доведення дивись [17, С. 27]).

6. Теорема (про тавтології): Якщо $\vDash \mathrm{A}$ і $\vDash \mathrm{A} \to B$, то $\vDash \mathrm{B}$ (доведення дивись [17, С. 28]).

Логічна структура складного висловлення – це формула алгебри висловлень, яка утворюється з даного складного висловлення заміною в ньому кожного елементарного висловлення пропозиційною змінною.

Висловлення називається ***логічно істинним*** (на базі алгебри висловлень) тоді і тільки тоді, коли його логічна структура є тавтологією.

Аудиторна робота

Вправа 2.1. Знайти значення істинності формули:

а) $A \leftrightarrow B\bar{C} \longrightarrow B \vee \bar{A}C \vee A\bar{B}$ при $|A| = |B| = 1, |C| = 0.$

б) $B \longrightarrow A\bar{C} \vee \bar{A} \leftrightarrow \bar{B} \longrightarrow A(D \vee \bar{B} \longrightarrow C)$ при

$|A| = |C| = 0, |B| = |D| = 1$

Приклад 2.2. Скласти таблицю істинності, встановити, чи є формула $\alpha = (p \to (q \to r)) \to qr \vee \bar{p}$ тавтологією.

Розв'язок. Так як в формулу входять три різні елементарні висловлення, то таблиця складається з 8 рядків. З'ясуємо порядок виконання операцій $\alpha = (p \overset{2}{\to} (q \overset{1}{\to} r)) \overset{6}{\to} q \overset{3}{\wedge} r \overset{5}{\vee} \overset{4}{\bar{p}}$

Складемо таблицю:

$\boldsymbol{p}$	**q**	$\boldsymbol{r}$	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
				$p \to (1)$			$(3) \vee (4)$	$(2) \to (5)$
			$\boldsymbol{q \to r}$	$\boldsymbol{p \to (q \to r)}$	$\boldsymbol{qr}$	$\boldsymbol{\bar{p}}$	$\boldsymbol{qr \vee \bar{p}}$	$\boldsymbol{\alpha}$
0	**0**	**0**	1	1	0	1	1	1
0	**0**	**1**	1	1	0	1	1	1
0	**1**	**0**	0	1	0	1	1	1
0	**1**	**1**	1	1	1	1	1	1
1	**0**	**0**	1	1	0	0	0	0
1	**0**	**1**	1	1	0	0	0	0
1	**1**	**0**	0	0	0	0	0	1
1	**1**	**1**	1	1	1	0	1	1

Так як, формула α приймає істинні значення не на всіх можливих наборах значень істинності елементарних висловлень, що в неї входять, то вона не є тавтологією.

Δ

Вправа 2.3. Побудувати таблиці істинності для формул:

а) $(P \longrightarrow Q) \vee (P \longrightarrow QP)$;

б) $\overline{X \longrightarrow Z} \vee \bar{Y}(X|Y)$;

в) $((A \longrightarrow B) \longrightarrow (C \longrightarrow \bar{A})) \longrightarrow (\bar{B} \oplus \bar{C})$;

г) $((((A \longrightarrow B) \longrightarrow \bar{A}) \longrightarrow \bar{B}) \longrightarrow \bar{C}) \downarrow C$.

Вправа 2.4. Склавши таблиці істинності, визначити, чи є задана формула алгебри висловлень тавтологією, суперечністю, нейтральною, виконуваною:

а) $AC \vee BD \longrightarrow (A \vee B)(C \vee D)$;

б) $(\bar{A} \vee B)(\bar{B} \vee C) \wedge A\bar{C}$;

в) $AB(A \longrightarrow B) \leftrightarrow A$.

Приклад 2.5. Чи має місце логічна еквівалентність, яка визначає розподільну властивість еквівалентності що до кон'юнкції?

Розв'язок. Напишемо розподільну властивість еквівалентності що до кон'юнкції у вигляді формули і складемо для неї таблицю істинності.

$$p \overbrace{\leftrightarrow}^{2} (q \overbrace{\wedge}^{1} r) = (p \overbrace{\leftrightarrow}^{3} q) \overbrace{\wedge}^{5} (p \overbrace{\leftrightarrow}^{4} r)$$

Складемо таблицю:

$\boldsymbol{p}$	$\mathbf{q}$	$\boldsymbol{r}$	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
				$p \leftrightarrow (1)$			$(3) \wedge (4)$
			$\boldsymbol{q \wedge r}$	$\boldsymbol{p \leftrightarrow (q \wedge r)}$	$\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$	$\boldsymbol{p \leftrightarrow r}$	$\boldsymbol{(p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow r)}$
0	**0**	**0**	0	**1**	1	1	**1**
0	**0**	**1**	0	**1**	1	0	**0**
0	**1**	**0**	0	**1**	0	1	**0**
0	**1**	**1**	1	**0**	0	0	**0**
1	**0**	**0**	0	**0**	0	0	**0**
1	**0**	**1**	0	**0**	0	1	**0**
1	**1**	**0**	0	**0**	1	0	**0**
1	**1**	**1**	1	**1**	1	1	**1**

Для того, щоб мала місце логічна еквівалентність, яка визначає розподільну властивість еквівалентності щодо кон'юнкції, в таблиці істинності повинні співпадати значення (2) та (5) при всіх 2^3 значеннях пропозиційних букв. Як бачимо, це не так, тому дана логічна еквівалентність не виконується.

Δ

Приклад 2.6. Перевірити, чи є тавтологією формула алгебри висловлень $(A \longrightarrow \bar{B}) \wedge C \wedge (B \longrightarrow \bar{C}) \wedge (A \longrightarrow D) \longrightarrow D$.

Розв'язок. Припустимо, що формула не є тавтологією. Тоді хоч на одному наборі формула набуде значення 0. Розглянемо цей набір. Оскільки головна операція формули є імплікація, то на розглядуваному наборі $|D| = 0$, а всі кон'юнктивні члени в антецеденті формули матимуть значення 1.

Тоді $|A \longrightarrow D| = 1$ і $|D| = 0$, отже $|A| = 0$.

Далі, $|C| = 1$, $|\bar{C}| = 0$ і $|B \longrightarrow \bar{C}| = 1$, тому $|B| = 0$.

Нарешті, $|A \longrightarrow \bar{B}| = (0 \longrightarrow 1) = 1$. Таким чином, ми знайшли набір (0,0,1), на якому формула приймає значення 0 (контрприклад), тобто вона не тавтологія.

Δ

Приклад 2.7. Способом відшукання контрприкладу встановити тип формули:

$$(A \longrightarrow B)(A \longrightarrow \bar{B})(B \longrightarrow C)(B \longrightarrow \bar{C})(C \longrightarrow A)(C \longrightarrow \bar{A})$$

Розв'язок. Припустимо, що дана формула, яка являє собою кон'юнкцію імплікацій, не є тавтологією. Тоді хоч одна з імплікацій повинна бути хибною. Нехай, наприклад, $|A \longrightarrow B| = 0$. Це можливо лише у випадку, коли $|A| = 1$, $|B| = 0$. Тоді, незалежно від того, яким буде висловлення C, наша формула приймає хибне значення. Отже, вона не є тавтологією.

Перевіримо тепер, чи може бути дана формула суперечністю. Якщо вона не є суперечністю, то при деякому розподілі значень елементарних висловлень A, B і C повинна приймати істинне значення. Це можливо лише у випадку, коли:

$|A \longrightarrow B| = 1, \quad |A \longrightarrow \bar{B}| = 1,$

$|B \longrightarrow C| = 1, \quad |B \longrightarrow \bar{C}| = 1,$

$|C \longrightarrow A| = 1, \quad |C \longrightarrow \bar{A}| = 1.$

Вочевидь, якщо покласти $|A| = |B| = |C| = 0$, то дані умови будуть виконуватися. Отже, наша формула не є суперечністю. Дана формула є виконуваною.

Δ

Вправа 2.8. Які з формул є тавтологіями?

а) $(B \leftrightarrow C) \rightarrow (D \leftrightarrow A) \rightarrow (B \vee D \rightarrow A \vee C)$;

б) $((P \to R) \to (Q \to R)) \to ((P \vee Q) \to R)$.

Вправа 2.9. Довести, що формула алгебри висловлень є тавтологією:

а) $(A \to B) \to ((A \vee C) \to (B \vee C))$;

б) $(A \to B)(A \to \bar{B}) \to \bar{A}$.

Вправа 2.10. Довести тавтології:

а) $p \wedge (p \to q) \longrightarrow q$ – закон «Modus ponens»;

б) $\bar{q} \wedge (p \to q) \longrightarrow \bar{p}$ – закон «Modus tollens»;

в) $(p \to q) \wedge (q \to r) \longrightarrow (p \to r)$ – закон силогізму.

Самостійна робота.

Задача 2.1. Побудувати таблиці істинності для формул:

а) $\overline{XY}(Z \to X)$;

б) $AB \vee A\bar{B} \vee CB(\bar{A}(BC))$;

в) $(A \to B)(C \to B) \leftrightarrow (AC \to B)$.

Задача 2.2. Які з формул є тавтологіями?

а) $AC \vee BD \to (B \vee C)(A \vee D)$;

б) $(A \to C) \to (D \to A) \to (B \vee D \leftrightarrow A \vee C)$.

Задача 2.3. Довести, що формула алгебри висловлень є тавтологією:

а) $(A \to B)(B \to C) \to (A \to BC)$;

б) $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$;

в) $(A \to B) \to (A\bar{B} \to B)$.

Заняття 3. Рівносильність формул алгебри висловлень.

Подумати тільки, що через якийсь речі можна так зменшитися, що перетворитися в ніщо
Льюїс Керролл «Аліса в країні див»

Мета заняття: засвоїти поняття рівносильності формул алгебри висловлень та основні рівносильності алгебри висловлень, навчитись виконувати рівносильні перетворення.

Необхідні теоретичні матеріали:

Формули алгебри висловлень $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ і $B(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ називаються ***рівносильними*** або ***логічно еквівалентними***, якщо їх функції істинності $|A|$ і $|B|$ тотожно рівні, тобто збігаються на всіх 2^nнаборах. Позначається $A \equiv B$

Знак $\equiv$ належить метамові, це символ не операції, а відношення $A \equiv B$ не формула, а твердження.

Основні рівносильності алгебри висловлень

1. $\left.\begin{array}{l} p \wedge q \equiv q \wedge p \\ p \vee q \equiv q \vee p \end{array}\right\}$ – закони комутативності

2. $\left.\begin{array}{l} p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r \\ p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \end{array}\right\}$ – закони асоціативності

3. $\left.\begin{array}{l} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee q \wedge r \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{array}\right\}$ – I та II закони дистрибутивності

4. $\left.\begin{array}{l} \overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q} \\ \overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q} \end{array}\right\}$ – закони де Моргана

5. $p \to q \equiv \bar{p} \vee q$ – закон виключення імплікації

6. $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$ – закон виключення еквіваленції

7. $\bar{\bar{p}} \equiv p$ – закон подвійного заперечення

8. $\left.\begin{matrix} p \wedge p \equiv p \\ p \vee p \equiv p \end{matrix}\right\}$ – закони ідемпотентності

9. $p \to q \equiv \bar{q} \to \bar{p}$ – закон контрапозиції

10. $p \vee \bar{p} \equiv 1$ – закон виключення третього

11. $p \wedge \bar{p} \equiv 0$ – закон суперечності

12. $p \equiv p$ – закон тотожності

13. $p \vee 0 \equiv 0 \vee p = p$ $\quad$ $p \wedge 0 \equiv 0 \wedge p = 0$ – закони двоїстості

$p \vee 1 \equiv 1 \vee p = 1$ $\quad$ $p \wedge 1 \equiv 1 \wedge p = p$ $\quad$ або закони сталих

Два висловлення називаються ***рівносильними*** тоді і тільки тоді, коли формули, що зображають їх логічну структуру, є рівносильними між собою.

Теорема 1. Нехай $A \equiv B$, $A_1(B_1)$ – підформула $A(B)$, $A_2 \equiv A_1(B_2 \equiv B_1)$. Позначимо через $A^*(B^*)$ результат заміни в формулі $A(B)$ підформули $A_1(B_1)$ на $A_2(B_2)$. Тоді $A^*(B^*) \equiv B(A)$.

Інакше, якщо в рівносильності $A \equiv B$ замінити будь-яку підформулу на рівносильну, то рівносильність не порушується.

За теоремою підстановки можна замість пропозиційної змінної підставляти довільну формулу, а за теоремою про заміну підформула замінюється тільки на рівносильну їй формулу.

Теорема 2. $A \equiv B$ тоді і тільки тоді, коли $\vDash A \leftrightarrow B$.

Аудиторна робота

Приклад 3.1. Виходячи з означення, довести рівносильність:

$$A \vee B \to \bar{B} \equiv \bar{B}$$

Розв'язок. За допомогою таблиці істинності доведемо рівносильність:

A	B	$A \vee B$	$\bar{B}$	$A \vee B \to \bar{B}$	$\bar{B}$
0	0	0	1	**1**	**1**
0	1	1	0	**0**	**0**
1	0	1	1	**1**	**1**
1	1	1	0	**0**	**0**

Для того, щоб довести рівносильність в таблиці істинності повинні співпадати значення лівої та правої частин рівності при всіх значеннях пропозиційних букв. Як бачимо, значення $A \vee B \to \bar{B}$ та $\bar{B}$ збігаються, тому рівносильність виконується.

Δ

Вправа 3.2. Виходячи з означення, довести рівносильність:

$$(A \to B) \wedge A \wedge B \equiv (A \to B) \wedge A$$

Приклад 3.3. Показати, що формула $\alpha \equiv ((A \wedge B) \to C) \to (A \to C)$ рівносильна формулі $\beta \equiv \bar{A} \vee B \vee C$.

Розв'язок. Будемо рівносильно перетворювати формулу α, користуючись основними рівносильностями алгебри висловлень:

1) $((A \wedge B) \to C) \to (A \to C)$;

2) $\overline{(A \wedge B) \to C} \vee (A \to C)$ – (закон виключення імплікації);

3) $\overline{\overline{A \wedge B} \vee C} \vee \bar{A} \vee C$ – (закон виключення імплікації);

4) $\left(\overline{\overline{A \wedge B}}\right) \wedge \bar{C} \vee \bar{A} \vee C$ – (закон де Моргана);

5) $(A \wedge B \wedge \bar{C}) \vee \bar{A} \vee C$ – (закон подвійного заперечення);

6) $(A \vee \bar{A} \vee C) \wedge (B \vee \bar{A} \vee C) \wedge (\bar{C} \vee \bar{A} \vee C)$ – (закон дистрибутивності);

7) $(1 \vee C) \wedge (B \vee \bar{A} \vee C) \wedge (1 \vee \bar{A})$ – (закон виключення третього);

8) $1 \wedge (B \vee \bar{A} \vee C) \wedge 1$ – (закон сталих);

9) $\bar{A} \vee B \vee C$ – (закон комутативності).

Δ

Вправа 3.4. За допомогою основних рівносильностей довести:

$$(A \vee B)(C \vee D) \equiv AC \vee BC \vee AD \vee BD.$$

Вправа 3.5. Перетворити наступні формули в рівносильні:

а) $\overline{A \to B} \wedge \overline{C \to B} \vee B$, звівши число логічних операцій до 2;

б) $(A \vee B)(B \to A) \vee AC$, звівши число логічних операцій до 0.

Вправа 3.6. Наступні формули перетворіть рівносильним чином так, щоб вони містили тільки операції $\overline{}$ и $\wedge$:

$$(X \vee Y) \to (\bar{X} \to Z).$$

Вправа 3.7. Наступні формули перетворіть рівносильним чином так, щоб вони містили тільки операції $\overline{}$ и $\vee$:

$$(X \to Y) \to (Y \wedge Z).$$

Самостійна робота

Задача 3.1. Виходячи з означення, довести рівносильність:

$$A \wedge \bar{B} \vee \bar{A} \wedge B \equiv (A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B}).$$

Задача 3.2. За допомогою основних рівносильностей довести:

$$AB \vee CD \equiv (A \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D).$$

Задача 3.3. Наступні формули перетворіть рівносильним чином так, щоб вони містили тільки операції $\overline{}$ и $\wedge$:

$$(\bar{X} \to Y) \vee \overline{X \to Y}.$$

Задача 3.4. Наступні формули перетворіть рівносильним чином так, щоб вони містили тільки операції $\overline{}$ и $\vee$:

$$(\bar{X} \wedge \bar{Y}) \to (X \wedge Y).$$

Задача 3.5. Довести, що відношення рівносильності має властивості рефлексивності, симетричності та транзитивності

Заняття 4. Логічне слідування на базі алгебри висловлень

Просто не знаю, хто я зараз така. Ні, я, звичайно, приблизно знаю, хто така я була вранці, коли встала, але з тих пір я весь час то така, то сяка – словом, якась не така.

Льюїс Керролл «Аліса в країні див»

***Мета заняття*:** навчитися визначати правильність міркувань, опрацювати поняття логічного наслідку шляхом вирішення задач засобами логіки висловлень.

Необхідні теоретичні матеріали:

Нехай задано формули алгебри висловлень A і B, з яких хоча б одна містить пропозиційні змінні $p_1, \dots, p_m$. Говорять, що ***формула В слідує логічно з формули А*** (на базі алгебри висловлень), якщо B набуває значення 1 при кожному розподілі істинісних значень $p_1, \dots, p_m$, при якому A має значення 1. При цьому A називається посилкою, припущенням, гіпотезою, B – логічним висновком та позначається наступним чином $A \models B$.

Говорять, що формула B ***слідує логічно з посилок*** $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{m}$, якщо B набуває значення 1 при кожному такому розподілі істинісних значень $p_1, \dots, p_n$, при якому всі посилки $A_1, \dots, A_m$ мають значення 1. Позначається цей факт: $A_1, \dots, A_m \models B$, для порожньої множини посилок маємо $\models B$

Теорема 1. Формула B логічно слідує з посилок $A_1(p_1, p_2, \dots, p_n)$, …, $A_m(p_1, p_2, \dots, p_n)$ (на базі алгебри висловлень) тоді і тільки тоді, коли формула $A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \to B$ - є тавтологією.

Наслідки.

1. Якщо $A_1, \dots, A_m \vDash B_1$ і $B_1 \vDash B_2$, то $A_1, \dots, A_m \vDash B_2$ – властивість транзитивності;
2. Якщо $A_1, \dots, A_m \vDash B$ і A – довільна формула, то $A_1, \dots, A_m, A \vDash B$ – властивість приєднання посилки;
3. Якщо $A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_m \vDash B$ і $\vDash A_i$, то $A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, A_m \vDash B$ – властивість вилучення тавтології.

Вилучення з числа посилок формули, яка є тавтологією, не порушує даного логічного слідування.

Логічні слідування, якими на практиці часто користуються, називаються ***правилами виводу***:

1. $\alpha, \alpha \to \beta \vDash \beta$ – правило висновку «***modus ponens***» (МР);

2. $\alpha \to \beta, \bar{\beta} \vDash \bar{\alpha}$ – правило заперечення «***modus tollens***» (МТ);

3. $\alpha, \beta \vDash \alpha \wedge \beta$ – правило введення кон’юнкції (ВК);

4. $\alpha \wedge \beta \vDash \alpha, \quad \alpha \wedge \beta \vDash \beta$ – правило зникнення кон’юнкції (ЗК);

5. $\alpha \vDash \alpha \vee \beta, \quad \beta \vDash \alpha \vee \beta$ – правило введення диз’юнкції (ВД);

6. $\alpha \vee \beta, \ \bar{\alpha} \vDash \beta$ – правило зникнення диз’юнкції (ЗД);

7. $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vDash \alpha \to \gamma$ – правило силогізму або ланцюгового висновку (ЛВ);

8. $\alpha \to \beta, \gamma \to \beta \vDash \alpha \vee \gamma \to \beta$ – правило диз’юнктивного силогізму (ДС);

9. $\alpha \to \beta \vDash \bar{\beta} \to \bar{\alpha}$ – правило контрапозиції (ПК);

10. $\alpha \to (\beta \to \gamma) \vDash \beta \to (\alpha \to \gamma)$ – правило перестановки посилок (ППП).

Множина формул Г=(А$_1(p_1,\ldots,p_n),\ldots.A_m(p_1,\ldots,p_n)$) називається ***сумісною (несуперечною)***, якщо існує такий розподіл істинісних значень $p_1, p_2, \ldots, p_m$, при якому
$|A_1(p_1\ldots) \wedge\ldots\wedge A_m(p_1\ldots)| = 1$.

Множина формул, яка не є сумісною, називається ***суперечною***.

Твердження 2. Множина формул алгебри висловлень Г=(А$_1(p_1,\ldots,p_n),\ldots.A_m(p_1,\ldots,p_n)$) є сумісною (суперечною) тоді і тільки тоді, коли хоча б на одному наборі (на всіх наборах) значень $p_1, p_2, \ldots, p_m$ всі формули (хоча б одна з формул) набуває значення 1 (0).

Теорема 3. Якщо Г – суперечна множина формул логіки висловлень, то для довільної формули А має місце слідування Г⊨А.

Аудиторна робота

Приклад 4.1. Чи правильне таке міркування:

Якщо числова послідовність (x_n) обмежена і монотонна, то послідовність (x_n) – збіжна. Послідовність (x_n) не є збіжною. Послідовність (x_n) – обмежена. Отже, послідовність (x_n) – не монотонна.

Розв'язок. Запишемо логічну структуру посилок і очікуваного висновку: $A \wedge B \rightarrow C,\ \bar{C},\ \ A$, отже $\bar{B}$. За теоремою 1, необхідною і достатньою умовою правильності цього міркування є:

$$\models (A \wedge B \rightarrow C) \wedge \bar{C} \wedge A \rightarrow \bar{B}$$

Перевіримо отриману формулу способом відшукання контрприкладу:

$$\left(\underset{1}{A} \underset{1}{\wedge} \underset{1}{B} \underset{\left.\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\}}{\rightarrow} \underset{0}{C}\right) \wedge \underset{1}{\bar{C}} \wedge \underset{1}{A} \underset{0}{\rightarrow} \underset{0}{\bar{B}}$$

Одержана суперечність $|A \wedge B \rightarrow C| = 1$ і 0 (одночасно) доводить, що контрприкладу не існує і отримана формула є логічно істинною. Отже, проведене міркування – правильне.

Кожне правильне міркування має дедуктивний ланцюжок, який починається з посилок і веде до висновку. Кожен наступний рядок після посилок одержується із попередніх рядків за допомогою правил логічного слідування або застосуванням основних рівносильностей алгебри висловлень.

Тоді можна побудувати дедуктивний ланцюжок правильного міркування, що розглядається в цьому прикладі. Запишемо цей ланцюжок:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & A \wedge B \rightarrow C \\ 2) & \bar{C} \\ 3) & A \end{array}\right\} \text{(посилки);}$$

4) $(\overline{A \wedge B})$ (1,2 MT);

5) $\bar{A} \vee \bar{B}$ (закон де Моргана);

6) $\bar{\bar{A}}$ (закон подвійного заперечення).

7) $\bar{B}$ (5,6 ЗД).

Δ

Вправа 4.2. Визначити, чи правильне міркування:

Якщо цех II не буде приймати участь у випуску нового зразка продукції, то не буде приймати участь і цех I. Якщо ж цех II буде приймати участь у випуску нового зразка, то в цій роботі неодмінно повинні бути задіяні цехи І і ІІІ. Чи необхідна участь цеху ІІІ, якщо у випуску нового зразка буде приймати участь цех І?

Вправа 4.3. Користуючись лише означенням логічного висновку на базі алгебри висловлень, визначити, чи формула β_{i} задана таблицею істинності $\mathrm{i} = 1,2,3,4,$ логічно випливає з посилок $\alpha_1(A_1,\ A_2,\ A_3),\ \alpha_2(A_1,\ A_2,\ A_3),\ \alpha_3(A_1,\ A_2,\ A_3)$:

A_1	A_2	A_3	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3	β_4
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1	0	0	1	1

Вправа 4.4. Чи правильно стоїть знак у співвідношенні:

а) $x \to (y \to z),\quad y \models x \to z;$

б) $x \to (y \to (u \vee \bar{v}))\ ,\ x \to u\ ,\ xy \models y \to (u \vee v);$

в) $xy\bar{z},\quad y \to z\ , y \to x \models y \to (x \vee z);$

г) $x \leftrightarrow y\ ,\ y \to (x \to z) \models xyz.$

Самостійна робота

Задача 4.1. Визначити, чи правильне міркування:

Якщо Антон ляже сьогодні пізно (А), то ранком він буде в неробочому стані (В). Якщо він ляже не пізно, то йому буде здаватися, що він багато часу втрачає даремно (С). Отже, або Антон завтра буде в неробочому стані, або йому буде здаватися, що він багато часу втрачає дарма.

Задача 4.2. Користуючись лише означенням логічного висновку на базі алгебри висловлень, визначити, чи формула β_{i} задана таблицею істинності $\mathrm{i} = 1,2,3,4,$ логічно випливає з посилок $\alpha_1(A_1,\ A_2,\ A_3),\ \alpha_2(A_1,\ A_2,\ A_3),\ \alpha_3(A_1,\ A_2,\ A_3)$:

A_1	A_2	A_3	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3
0	0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	1	0

Задача 4.3. Чи правильно стоїть знак у співвідношенні:

а) $x \to y\ ,\ \bar{z} \to \bar{y}\ ,\ xy \models \bar{y} \to \bar{x};$

б) $xy \vee \bar{z}\ ,\ x \to u\ ,\ y \to u\ ,\ \bar{z} \models x \to (y \vee u);$

в) $xy \to z,\quad \bar{u} \to (\overline{v \to w})\ ,\ z \to (v \to w) \models x \to (y \to u);$

г) $\bar{x} \to \bar{y},\ \bar{x} \to (\overline{y \vee z})\ ,\ \bar{z} \models \bar{x} \vee \bar{y}.$

Заняття 5. Булеві функції. Нормальні форми.

Вона завжди давала собі хороші поради, хоч слідувала їм нечасто.

Льюїс Керролл «Аліса в країні див»

***Мета заняття*:** засвоїти поняття булевих функцій, навчитись приводити формулу до кон'юнктивної нормальної форми та диз'юнктивної нормальної форми. Навчитись будувати формулу алгебри висловлень за таблицею істинності.

Необхідні теоретичні матеріали:

Булевою називається ***функція***, значення якої, як і значення всіх її аргументів, належать заданій двохелементній множині $\{0,1\}$. Булева функція від n -аргументів є відображенням $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Булеву n -місну функцію можна задати як:

а) безпосередньо таблицею істинності;

б) формулою;

в) словесно: наприклад

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 1 \text{ на натуральних } (1,\ 1,\ 1) \\ 0 \text{ на всіх інших} \end{cases}.$$

Число всіх наборів значень $(x_1, \dots, x_n)$ дорівнює 2^n. Число всіх n-місних булевих функцій 2^{2^n}

n =1. Число всіх одномісних булевих функцій $2^{2^1} = 4$.

x_1	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

f_1, f_4 - константи

$f_2(x_1) = x_1$

$f_3(x_1) = \overline{x}_1$

n =2. Число всіх двомісних булевих функцій $2^{2^2} = 16$.

x₁	**x₂**	**f₁**	**f₂**	**f₃**	**f₄**	**f₅**	**f₆**	**f₇**	**f₈**	**f₉**	**f₁₀**	**f₁₁**	**f₁₂**	**f₁₃**	**f₁₄**	**f₁₅**	**f₁₆**
0	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	**1**	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	**0**	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	**1**	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

f_1, f_{16} – константи;

$f_2=x_1x_2$; $f_8=x_1 \vee x_2$; $f_{12}=x_2 \to x_1$; $f_{14}=x_1 \to x_2$; $f_{10}=x_1 \leftrightarrow x_2$;

$f_4=x_1$; $f_6=x_2$; $f_{11}=\bar{x}_2$; $f_{13}=\bar{x}_1$;

$f_3=\overline{x_1 \to x_2}$; $f_5=\overline{x_2 \to x_1}$;

$f_7=x_1 \oplus x_2$ – антиеквіваленція;

$f_9=\overline{x_1 \vee x_2}$ - стрілка Пірса;

$f_{15}=\overline{x_1 \wedge x_2}$ - штрих Шеффера.

Елементарною кон’юнкцією (диз’юнкцією) називається кон’юнкція (диз’юнкція) пропозиційних букв та їх заперечень (при цьому допускається повторення букв). Число пропозиційних букв в елементарній кон’юнкції (диз’юнкції) називається її ***рангом***.

Диз’юнкція (кон’юнкція) n елементарних кон’юнкцій (диз’юнкцій) $(n = 1,2,3,\ldots)$ називається ***n-членною диз’юнктивною (кон’юнктивною) нормальною формою***.

ДНФ $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ називається ***мінімальною***, якщо вона містить найменше число входжень пропозиційних змінних $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ порівняно з усіма іншими ДНФ.

Задача мінімізації полягає у відшуканні мінімальної нормальної форми для заданої формули алгебри висловлень. Число різних ДНФ, складених з пропозиційних змінних $(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, дорівнює 2^{3^m}.

Теорема 1. Формула $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ алгебри висловлень є тавтологією тоді і тільки тоді, коли кожний кон'юнктивний член КНФ A, тобто кожна елементарна диз'юнкція, що входить до КНФ A, містить хоч одну пропозиційну букву p_i $(i = 1,2, \dots, n)$ разом з її запереченням.

Теорема 2. Формула $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ алгебри висловлень є суперечністю тоді і тільки тоді, коли кожний диз'юнктивний член ДНФ A, тобто кожна елементарна кон'юнкція, що входить до ДНФ A, містить хоч одну пропозиційну букву p_i $(i = 1,2, \dots, n)$ разом з її запереченням.

Теорема 3. Кожна булева функція зображується формулою алгебри висловлень, яка містить символи не більш ніж трьох логічних операцій – $\wedge, \vee, \bar{\ }$.

Під ***проблемою вирішення*** для тавтології розумітимемо питання: чи існує алгоритм, який дає змогу для будь-якої формули A алгебри висловлень визначити за скінченне число кроків, є *A* тавтологією чи ні?

Приклад. $p \to pq$ – «ні» $(p \to q) \vee (\bar{p} \to q)$ – «так»

Всі правильно побудовані формули діляться на:

1) тавтології – абсолютно істинні функції $(\equiv 1)$,
2) здійсненні $(\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \quad f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 1)$,
3) протиріччя – абсолютно хибні функції $(\equiv 0)$.

Для алгебри висловлень проблема вирішення легко розв'язується. Ось кілька способів її розв'язання:

1. Скласти таблицю істинності для заданої формули A і перевірити, чи складається стовпчик значень A лише з одних одиниць.

2. Звести задану формулу A до КНФ і перевірити, чи містить кожний кон'юнктивний член КНФ A хоч одну пропозиційну букву разом з її запереченням.

Алгоритм побудови ДНФ для заданої таблично булевої функції f, відмінної від нуля:

Виділимо з таблиці істинності набори на яких функція набуває значення 1, і утворимо для кожного набору відповідну елементарну кон'юнкцію. Наприклад, набору (1,0,1) відповідає елементарна кон'юнкція $x \wedge \bar{y} \wedge z$.

Кожна з цих кон'юнкцій набуває значення «1» тільки на одному, відповідному їй наборі, на всіх інших наборах вона дорівнює «0».

Алгоритм побудови КНФ для заданої таблично булевої функції f, відмінної від одиниці:

Виділимо з таблиці істинності набори на яких функція набуває значення 0, і утворимо для кожного набору відповідну елементарну диз'юнкцію. Наприклад, набору (0,0,1) відповідає елементарна диз'юнкція $x \vee y \vee \bar{z}$.

Кожна з цих диз'юнкцій набуває значення «0» тільки на одному, відповідному їй наборі, на всіх інших наборах вона дорівнює «1».

Булева функція, відмінна від тотожного нуля і одиниці, допускає зображення і через ДНФ, і через КНФ. Очевидно, для булевої функції яка набуває значення 1 (0) менш ніж на половині всіх наборів, простішим є зображення у вигляді ДНФ (КНФ).

Аудиторна робота

Вправа 5.1. Для кожної із запропонованих формул алгебри висловлень зазначити: є вона елементарною кон'юнкцією, елементарною диз'юнкцією чи ні тією, ні другою:

а) $A \vee \bar{C} \vee B$;

б) $AB \vee C$;

в) $\bar{A} \vee B \vee \bar{D}$;

г) $A\bar{B}C$;

д) $\bar{A}$;

е) $(A \vee C)B$;

ж) B.

Вправа 5.2. Визначити, які з формул є КНФ, ДНФ чи зовсім не є нормальними формами:

а) $B\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}B \vee A\bar{C} \vee D$;

б) $AB \vee C(\bar{D} \vee E)$;

в) $A \to B \vee C$;

г) A;

д) $\bar{B}$;

е) $(A \vee \bar{B})\bar{A}\bar{B}C$.

Приклад 5.3. Представити формулою алгебри висловлень функцію від трьох змінних $F(x, y, z)$, якщо відомо, що $F(1,1,1) = F(1,0,1) = F(0,1,0) = 1$, а всі інші значення функції рівні 0.

Розв'язок. Представимо функцію у вигляді ДНФ:

$$F(x,y,z) \equiv (F(1,1,1) \wedge x \wedge y \wedge z) \vee (F(1,1,0) \wedge x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee$$
$$\vee (F(1,0,1) \wedge x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (F(0,1,1) \wedge \bar{x} \wedge y \wedge z) \vee$$
$$\vee (F(1,0,0) \wedge x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (F(0,1,0) \wedge \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee$$
$$\vee (F(0,0,1) \wedge \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (F(0,0,0) \wedge \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \equiv$$
$$\equiv (1 \wedge x \wedge y \wedge z) \vee (0 \wedge x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (1 \wedge x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (0 \wedge \bar{x} \wedge y \wedge z) \vee$$
$$\vee (0 \wedge x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (1 \wedge \bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (0 \wedge \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (0 \wedge \bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \equiv$$
$$\equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z})$$

Отже, $F(x,y,z) \equiv (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z})$

Δ

Приклад 5.4. Зведенням до КНФ (ДНФ) встановити тип формули (тавтологія, суперечність, виконувана):

$((\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee C) \to (A \to (B \wedge \bar{C}))$.

Розв'язок. Виконаємо над даною формулою рівносильні перетворення, користуючись основними рівносильностями:

$$\big((\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee C\big) \to \big(A \to (B \wedge \bar{C})\big) \equiv \overline{\big((\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee C\big)} \vee \bar{A} \vee (B \wedge \bar{C}) \equiv$$
$$\equiv \Big(\overline{\bar{A} \wedge \bar{B}} \wedge \bar{C}\Big) \vee \bar{A} \vee (B \wedge \bar{C}) \equiv \big((A \vee B) \wedge \bar{C}\big) \vee \bar{A} \vee (B \wedge \bar{C}) \equiv$$
$$\equiv (A \wedge \bar{C}) \vee (B \wedge \bar{C}) \vee \bar{A} \vee (B \wedge \bar{C}) \equiv (A \wedge \bar{C}) \vee (B \wedge \bar{C}) \vee \bar{A}.$$

Отримали ДНФ. Так як в жодну елементарну кон'юнкцію не входить висловлення разом із своїм запереченням, то дана формула не є суперечністю. Отже, дана формула є виконуваною.

Тепер зведемо нашу формулу до КНФ:

$$\big((\bar{A} \vee \bar{B}) \wedge C\big) \to \big(A \to (B \wedge \bar{C})\big) \equiv (A \wedge \bar{C}) \vee (B \wedge \bar{C}) \vee \bar{A} \equiv$$
$$\equiv \big((A \vee B) \wedge \bar{C}\big) \vee \bar{A} \equiv (A \vee B \vee \bar{A}) \wedge (\bar{C} \vee A).$$

Отримали КНФ. В першу елементарну диз'юнкцію входить висловлення A разом із своїм запереченням, а в другу елементарну диз'юнкцію не входить жодне висловлення із своїм запереченням. Це означає, що формула не є тавтологією.

Δ

Вправа 5.5. Звівши формулу до КНФ, з'ясувати, чи є вона логічно істинною (тавтологією):

а) $\overline{X \vee Z} \wedge (X \to Y)$;

б) $\overline{A \vee B} \to AC \leftrightarrow A$;

в) $(B \to C) \to \big((A \to C) \to (A \vee B \to C)\big)$.

Вправа 5.6. Звівши формулу до ДНФ, з'ясувати, чи є вона логічно хибною (суперечністю):

а) $\overline{A \vee B} \to AC \leftrightarrow A$;

б) $\big(X \vee (Y \wedge \bar{Z})\big) \wedge (X \vee Z)$;

в) $\big(X \to (Y \to Z)\big) \to \big((X \to \bar{Z}) \to (X \to \bar{Y})\big)$.

Вправа 5.7. Звести формулу алгебри висловлень до ДНФ та КНФ, та побудувати мінімальну ДНФ:

а) $(A \vee B \to C) \to (A \to C)$;

б) $(A \to B) \leftrightarrow (A \to \bar{C})$.

Приклад 5.8. Побудувати по булевій функції $f(a,b,c)$ КНФ та ДНФ формули, таблиця істинності якої дорівнює $f(a,b,c)$.

a	b	c	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Розв'язок.

ДНФ $f = (\bar{x}\bar{y}\bar{z}) \vee (\bar{x}yz) \vee (x\bar{y}\bar{z}) \vee (x\bar{y}z)$;

КНФ $f = (x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.

Δ

Вправа 5.9. Зобразити у вигляді ДНФ та КНФ булеві функції, задані таблицями істинності:

A	B	C	$f_1(A,B,C)$	$f_2(A,B,C)$
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0

Самостійна робота

Задача 5.1. Звівши формулу до КНФ, з'ясувати, чи є вона логічно істинною (тавтологією):

а) $\bar{A}B \leftrightarrow A \vee (C \to B)$;

б) $(A \to B)(A \to \bar{B}) \to \bar{A}$.

Задача 5.2. Звівши формулу до ДНФ, з'ясувати, чи є вона логічно хибною (суперечністю):

а) $(A \to BC) \to A \vee C$;

б) $(A \to B \vee C)(A \to (\overline{B \vee C})$.

Задача 5.3. Звести формулу алгебри висловлень до ДНФ та КНФ, та побудувати мінімальну ДНФ

а) $\big((A \to B)C\big) \vee (\bar{A}B)$.

Задача 5.4. Зобразити у вигляді ДНФ та КНФ булеві функції, задані таблицями істинності:

A	B	C	$f_3(A,B,$	$f_4(A,B,($	$f_5(A,B,($
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1

Заняття 6. Досконалі нормальні форми. Питання функціональної повноти.

– А де я можу знайти кого-небудь нормального?
– Ніде, – відповів Кіт, – нормальних не буває. Адже всі такі різні і несхожі. І це, по-моєму, нормально.

Льюїс Керролл «Аліса в країні див»

***Мета заняття*:** навчитися робити рівносильні перетворення формул для приведення ДДНФ та ДКНФ, досліджувати тавтології та суперечності за допомогою досконалих нормальних форм.

Необхідні теоретичні матеріали:

Елементарна кон'юнкція (диз'юнкція) називається ***правильною***, якщо кожна пропозиційна змінна входить до неї не більше ніж один раз, включаючи також входження змінної під знаком $\overline{\ }$: $p_1 \wedge p_2 \wedge \bar{p}_n$ - правильна, $p_2 \vee p_3 \vee \bar{p}_2 \vee p_1$ - не правильна.

Елементарна кон'юнкція (диз'юнкція) називається ***повною*** щодо пропозиційних змінних $p_1, p_2, \ldots, p_n$, якщо кожна з цих змінних входить до неї або із знаком заперечення або без нього.

Досконалою диз'юнктивною (кон'юнктивою) нормальною формою щодо пропозиційних змінних $p_1, p_2, \ldots, p_n$ називається ДНФ (КНФ), в якій всі елементарні кон'юнкції (диз'юнкції) правильні і повні щодо даного набору пропозиційних змінних.

Метод переходу від будь-якої формули до ДДНФ (ДКНФ).

1. Виразити формулу через $\vee$, $\wedge$, $\overline{\ }$.

2. Використовуючи закони де Моргана, зробити так, щоб заперечення було б тільки над однією літерою.

3. Дистрибутивно розкрити дужки.

4. Привести подібні за допомогою ідемпотентності до ***ДДНФ*** чи ***ДКНФ***.

Теорема 1. Для кожної булевої функції, відмінної від тотожного нуля, існує її зображення у вигляді ДДНФ.

Теорема 2. Зображення булевої функції ДДНФ є єдиним (з тотожністю до порядку членів)

Теорема 3. Кожна булева функція, відмінна від тотожної одиниці, зображається через ДКНФ, яка є єдиною.

Булева функція, яка набуває значення 1(0), менш ніж на половині всіх наборів, простішим є зображення у вигляді ДДНФ (ДКНФ).

Теорема 4. (критерій тавтології) Для того, щоб формула $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ логіки висловлень була тавтологією, необхідно і достатньо, щоб ДДНФ А містила 2^n елементарних кон'юнкцій (тобто всі можливі елементарні кон'юнкції, що містять змінні $(p_1, p_2, \dots, p_m)$).

Теорема 5. (критерій суперечності) Для того, щоб формула $A(p_1, p_2, \dots, p_n)$ логіки висловлень була суперечністю, необхідно і достатньо, щоб ДКНФ А містила 2^n елементарних диз'юнкцій, тобто всі можливі елементарні диз'юнкції, що містять змінні $(p_1, p_2, \dots, p_m)$.

Для алгебри висловлень проблема вирішення легко розв'язується також за допомогою наведених критеріїв тавтології та суперечності. Для цього задану формулу α необхідно привести до ДДНФ (ДКНФ) і перевірити, чи містить ДДНФ (ДКНФ) α рівно 2^n диз'юнктивних (кон'юнктивних) члена.

Крім цих алгоритмів на практиці часто застосовується спосіб відшукання контрприкладу.

Система операцій алгебри висловлень називається ***функціонально повною***, якщо кожну булеву функцію можна зобразити формулою, яка не містить жодних символів логічних операцій, крім тих, що входять у дану систему.

Теорема 6. $\{\wedge, \vee, \overline{\ \ }\}$ – функціонально повна.

Теорема 7. Наступні системи операцій є функціонально повними:

$\{\overline{\ \ }, \vee\}$, $\{\overline{\ \ }, \wedge\}$, $\{\overline{\ \ }, \Rightarrow\}$, $\{\wedge, \oplus, 1\}$, $\{\Rightarrow, 0\}$, $\{\mid\}$ або $\{(\overline{\wedge})\}$, $\{\uparrow\}$ або $\{(\overline{\vee})\}$.

Аудиторна робота

Вправа 6.1. За допомогою рівносильних перетворень звести до ДДНФ наступні формули:

а) $f(A,B,C,D) = A\bar{B} \vee AD \vee BC\bar{D}$;

б) $f(A,B,C,D) = B\bar{C}D \vee A\bar{C}\bar{D} \vee \bar{B}\bar{D}$;

Вправа 6.2. За допомогою рівносильних перетворень звести до ДКНФ наступні формули:

а) $f(A,B,C,D) = (B \vee \bar{C} \vee \bar{D})(A \vee D)(A \vee \bar{B})$;

б) $f(A,B,C,D) = (A \vee \bar{B} \vee \bar{D})(\bar{C} \vee D)(B \vee C)$.

Приклад 6.3. Побудувати ДДНФ, що рівносильна формулі алгебри логіки $F = (x_1 \leftrightarrow x_2) \leftrightarrow x_3$

Розв'язок. Знаходимо область істинності формули F:

$$I(F) = \{\ (0,0,1),\ (1,1,1),\ (0,1,0),\ (0,0,0)\ \}$$

Будуємо відповідні елементарні кон'юнкції:

$$\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3, \quad x_1 \wedge x_2 \wedge x_3, \quad \bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3, \quad \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3$$

Сполучаємо їх знаком$\vee$:

$$(\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3)$$

Отримана формула і є потрібною ДДНФ.

Δ

Вправа 6.4. Зобразити у вигляді ДКНФ та ДДНФ функції алгебри логіки, задані таблицями істинності:

A	B	C	$f_6(A,B,C)$	$f_7(A,B,C)$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

Вправа 6.5. Побудувати ДДНФ і ДКНФ наступних формул:

а) $(A \to B) \leftrightarrow (A \to \bar{C})$

б) $(AB \to C) \to (\bar{B} \to C)$

Вправа 6.6. Не будуючи таблиці істинності, трьома різними способами показати, що формула алгебри висловлень є логічно істиною:

$$\big(A \to (B \to C)\big) \to \Big((\overline{B \to C}) \to (A \to \bar{A})\Big).$$

Самостійна робота

Задача 6.1. Звести до ДДНФ наступні формули:

$f(A,B,C,D) = AC\overline{D} \vee BC \vee \bar{A}B.$

Задача 6.2. Звести до ДКНФ наступні формули:

$f(A,B,C,D) = (A \vee \bar{B})(\bar{A} \vee \bar{C})(B \vee D).$

Задача 6.3. Зобразити у вигляді ДКНФ та ДДНФ функції алгебри логіки, задані таблицями істинності:

A	B	C	$f_8(A,B,C)$	$f_9(A,B,C)$	$f_{10}(A,B,C)$
0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Задача 6.4. Побудувати ДДНФ і ДКНФ наступної формули:

$(\bar{A} \to B)C \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$.

Задача 6.5. Не будуючи таблиці істинності, трьома різними способами показати, що формула алгебри висловлень є суперечністю:

$$\big(A \to (B \to C)\big) \wedge (A \to B)A\bar{C}.$$

Задача 6.6. Не будуючи таблиці істинності, трьома різними способами показати, що формула алгебри висловлень є виконуваною:

$$(AC \to \bar{B}) \vee (AC \to B) \to (\bar{A}\bar{C} \to A\bar{B}CD).$$

Розділ 2. Числення висловлень

Заняття 7. Алгебра висловлень, як модель числення висловлень.

– А що це за звуки, он там? – Запитала Аліса, кивнувши на досить затишні зарості якоїсь симпатичної рослинності на краю саду.
– А це чудеса, – байдуже пояснив Чеширський Кіт.
– І .. І що ж вони там роблять? – Поцікавилася дівчинка, неминуче червоніючи.
– Як і належить, – Кіт позіхнув. – Трапляються ...
Льюїс Керролл «Аліса в країні див»

Мета заняття: розглянути будову теорії числення висловлень та алгебри висловлень як її моделі: алфавіт числення висловлень, основні означення, аксіоми числення висловлень та правила виведення; навчитись використовувати правила виводу та правила побудови числення висловлень.

Необхідні теоретичні матеріали:

Числення висловлень - формальна аксіоматична теорія, однією з моделей якої є алгебра висловлень. Формальна теорія будується так:

1) Задається список вихідних символів (алфавіт);
2) Визначається поняття формули (слова в даному алфавіті);
3) Певні формули виписуються як аксіоми (чи схеми аксіом);
4) Формулюються правила виведення

Якщо розглядати алгебру висловлень як теорію числення висловлень, то її будова наповнюється, наприклад, наступним змістом:

1) Вихідні символи:

а) великі латинські букви $A, B, C, \ldots, A_1, A_2, \ldots$ що називаються елементарними висловленнями (пропозиційні букви).

б) символи логічних операцій $\overline{}$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ (оператори);

в) пара символів (,) (дужки).

2) Поняття формули визначається індуктивно, а саме:

а) $A, B, C, \ldots, A_1, A_2, \ldots, A_n$ – формули;

б) Якщо α – формула, то $\bar{\alpha}$ – формула, якщо α і β – формули, то $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ – формули;

в) Інших формул, крім визначених в (а) і (б), немає.

Для скорочення числа дужок вводимо умови: опускати всі зовнішні дужки і додержувати умов скорочення числа дужок, сформульованих в алгебрі висловлень.

3) Серед всіх формул виділяється сукупність формул, які називаються аксіомами.

1.1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$;

1.2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$;

2.1. $A \wedge B \rightarrow A$;

2.2. $A \wedge B \rightarrow B$;

2.3. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$;

3.1. $A \rightarrow A \vee B$;

3.2. $B \rightarrow A \vee B$;

3.3. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$;

4.1. $(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$;

4.2. $A \to \bar{\bar{A}}$;

4.3. $\bar{\bar{A}} \to A$.

4) Далі виділяється клас формул, які називаються вивідними в численні висловлень.

Формула α називається ***вивідною в численні висловлень***, якщо вона є або аксіомою, або отримується з аксіом за допомогою застосування скінченого числа разів правил підстановки і висновку.

а) Правило висновку (або **modus ponens**, скорочено **МР**). Якщо α і $\alpha \to \beta$ - вивідні формули, то формула β також вивідна. Символічно це правило записується у вигляді $\frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}$.

б) Правило підстановки Нехай α – деяка формула, яка містить елементарне висловлення A. Формула, яка отримується з α, якщо в ній скрізь замінити елементарне висловлення А деякою формулою β, буде позначатися $S_A^{\beta}(\alpha)$. Правило підстановки формулюється наступним чином: якщо α – вивідна формула, то $S_A^{\beta}(\alpha)$ також вивідна формула для будь-якої формули β. Символічно це правило записують у вигляді $\frac{\alpha}{S_A^{\beta}(\alpha)}$

Формальним доведенням формули β називається така скінченна послідовність формул $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, що останній член цієї послідовності співпадає з формулою β, а кожний інший член цієї послідовності є або аксіомою, або отримується з попередніх членів за допомогою безпосереднього застосування одного з двох основних правил виведення.

Формула α, для якої існує формальне доведення, називається **теоремою**, що позначається $\vdash \alpha$.

Аудиторна робота

Приклад 7.1. Вказати підстановки, за допомогою яких з формули $A \to B$ отримується формула $B \to A$.

Розв'язок. Якщо ми одразу замінимо Ана В то отримуємо формулу $B \to B$, і всі інші підстановки будуть давати формули виду $\Lambda \to \Lambda$, тобто таким чином формулу $B \to A$ ми не отримуємо. Аналогічний результат дає заміна у вихідній формулі В на A. До бажаного результату приводить послідовне виконання наступних підстановок:

1) $A \to B$ – припущення;
2) $C \to B$ $\quad S_A^C(1)$;
3) $C \to A$ $\quad S_B^A(2)$;
4) $B \to A$ $\quad S_C^B(3)$.

Δ

Приклад 7.2. Довести формально теорему:
$\vdash (A \to B) \to (A \to (A \wedge B))$

Розв'язок. Можна побудувати дедуктивний ланцюжок доведення:

1) $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$ (аксіома 2.3.);
2) $(A \to A) \to ((A \to C) \to (A \to (A \wedge C)))$ $(S_B^A(1))$;
3) $(A \to A) \to ((A \to B) \to (A \to (A \wedge B)))$ $(S_C^B(2))$;

4) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (аксіома 1.2.);

5) $(A \to (B \to A)) \to ((A \to B) \to (A \to A))$ ($S_C^A(4)$);

6) $A \to (B \to A) \equiv \Lambda$ (аксіома 1.1.);

7) $(A \to B) \to (A \to \Lambda)$ (**MP**(6,5));

8) $\Lambda \to (B \to \Lambda)$ ($S_A^\Lambda(6)$);

9) $B \to \Lambda$ (**MP**(6,8));

10) $A \to \Lambda$ ($S_B^A(9)$);

11) $(A \to \Lambda) \to (A \to A)$ ($S_B^A(7)$);

12) $A \to A$ (**MP**(10,11));

13) $(A \to B) \to (A \to (A \wedge B)$ (**MP**(3,12)).

Послідовність формул 1-13 є формальним доведенням формули $(A \to B) \to (A \to (A \wedge B))$. Сукупність позначень в дужках справа від формули дає обґрунтування доведення. Так ((2)-3) означає, що формула 1 є 3-я аксіома 2-ї групи; $S_B^A(1)$ означає, що формула 2 отримується з формули 1 в результаті вказаної підстановки; **MP**(5,6) означає, що формула 7 отримується з формул 5 і 6 за допомогою правила modus ponens. Неважко переконатися, що послідовність формул 4-12 є доведенням формальної теореми $\vdash A \to A$.

Δ

Приклад 7.3. Чи є формальним доведенням формули

$((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \to C$ така послідовність формул:

1) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)$;

2) $((A \wedge C) \to C) \to (((B \wedge C) \to C)(((A \wedge C) \vee (B \wedge C) \to C))$;

3) $(A \wedge B) \to B$;

4) $(A \wedge C) \to C$;

5) $((B \wedge C) \to C) \to (((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \to C)$;

6) $(B \wedge C) \to C$;

7) $((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \to C$?

Розв'язок. Формула (1) є аксіомою 3.3. Формула (2) отримується з формули (1) в результаті послідовного виконання двох підстановок $S_A^{A \wedge C}$ і $S_B^{B \wedge C}$. Формула (3) є аксіомою 2.2. Формула (4) отримується з формули (3) в результаті підстановки S_B^C. Формула (5) отримується з формул (2) і (4) за допомогою правила **MP**. Формула (6) отримується з формули (4) в результаті підстановки S_A^B. Нарешті, формула (7) отримується з формул (5) і (6) за допомогою правила **MP**. Отже, послідовність формул (1-7) є формальним доведенням формули (7).

Δ

Вправа 7.4. Довести формально теореми:

а) $A \wedge \mathrm{A} \to A$;

б) $B \to ((C \to D) \to (\overline{D} \to \bar{C})$.

Вправа 7.5. Довести теорему числення висловлень:

$(A \wedge B \to C) \to (A \wedge B \to B \wedge C)$.

Вправа 7.6. Провести формальне доведення теореми:

$A \vee C \to \big((A \vee B \to C) \to (\bar{C} \to \overline{A \vee B})\big)$.

Самостійна робота

Задача 7.1. Довести формально теореми:

а) $A \to A \wedge A$;

б) $(B \to A \vee \mathrm{C}) \to (A \vee \mathrm{B} \to \mathrm{A} \vee \mathrm{C})$.

Задача 7.2. Довести теорему числення висловлень:

$(B \to C) \to \big(B \to (A \to C)\big).$

Задача 7.3. Провести формальне доведення теореми:

$AC \to A \vee C.$

Заняття 8. Вивідність формул числення висловлень.

План, що й казати, був чудовий: простий і ясний, краще не придумати. Недолік у нього був тільки один: було зовсім невідомо, як привести його у виконання.

Льюїс Керролл «Аліса в країні див»

Мета заняття: засвоїти поняття вивідності формул, розглянути метатеорему дедукції та її наслідок; навчитись використовувати правила силогізму та перестановки посилок при доведенні виведності.

Необхідні теоретичні матеріали:

Формула числення висловлень β називається ***вивідною*** з припущень (посилки) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ тоді і лише тоді , коли існує скінченна послідовність формул $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$, така, що β_m збігається з β і кожний член якої є або аксіомою, або одним з припущень, або теоремою числення висловлень, або випливає з попередніх членів послідовності $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ за допомогою безпосереднього застосування одного з правил виводу.

Те, що β вивідна з посилок $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ позначається: $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$.

Дуже важлива роль у побудові числення висловлень належить метатеоремі дедукції, яка пов'язує формальне доведення і вивідність із припущень.

Метатеорема дедукції (МТД). Якщо $\boldsymbol{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n \vdash \beta}$, то $\boldsymbol{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \vdash \alpha_n \to \beta}$.

Зокрема, при $\boldsymbol{n = 1}$ теорема має вид: якщо $\boldsymbol{\alpha \vdash \beta}$, то $\boldsymbol{\vdash \alpha \to \beta}$.

Наслідок. Якщо $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$, то

$$\vdash \alpha_1 \to \Big(\alpha_2 \to \Big(\dots \to \big(\alpha_{n-1} \to (\alpha_n \to \beta)\big)\Big)\dots\Big)$$

Теорема (обернена до МТД). Якщо $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, то $\Gamma, \alpha \vdash \beta$.

Метатеорема дедукції дає можливість переходити від вивідності з припущень до теореми, яка вже вільна від них. Формально справа полягає в тому, що знак вивідності „$\vdash$”, який належить метамові, замінюється знаком імплікації, приналежним предметній мові, і пересувається ліворуч.

Із застосуванням теореми дедукції ми зустрічаємось при доведенні математичних теорем, зокрема при доведенні від супротивного.

Правило силогізму(ПС). $\alpha_1 \to \alpha_2,\ \alpha_2 \to \alpha_3 \vdash \alpha_1 \to \alpha_3$;

Правило перестановки посилок (ППП). $\alpha_1 \to (\alpha_2 \to \alpha_3) \vdash \alpha_2 \to (\alpha_1 \to \alpha_3)$.

Теорема 1. $\alpha \to \alpha$.

Теорема 2. $\bar{\bar{\alpha}} \to \alpha$.

Теорема 3. $\alpha \to \bar{\bar{\alpha}}$.

Теорема 4. $\big(\bar{\alpha} \to \bar{\beta}\big) \to (\beta \to \alpha)$ (другий закон контрапозиції).

Теорема 5. $(\alpha \to \beta) \to \big(\bar{\beta} \to \bar{\alpha}\big)$ (перший закон контрапозиції).

Теорема 6. $\overline{\alpha} \to (\alpha \to \beta)$ (закон заперечення антецедента).

Теорема 6’. $\alpha \to (\overline{\alpha} \to \beta)$.

Теорема 7. $\alpha \to \Big(\overline{\beta} \to \overline{(\alpha \to \beta)}\Big)$.

Теорема 8. $(\alpha \to \beta) \to \big((\bar{\alpha} \to \beta) \to \beta\big)$.

Аудиторна робота

Приклад 8.1. Вивести формально C із припущень:

$\mathrm{A} \to \mathrm{C},\ \mathrm{B} \to \mathrm{C},\ \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$, тобто обґрунтувати вивідність

$\mathrm{A} \to \mathrm{C},\ \mathrm{B} \to \mathrm{C},\ \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vdash C$.

Доведення.

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & A \to C \\ 2) & B \to C \\ 3) & A \vee \mathrm{B} \end{array}\right\} \text{ припущення;}$$

4) $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$ (аксіома 3.3.);

5) $(B \to C) \to (A \vee B \to C)$ (**MP**(1,4));

6) $A \vee B \to C$ (**MP**(2,5));

7) C (**MP**(3,6)).

Побудована послідовність (1–7) і є шуканим виведенням C. Справді, останній член послідовності збігається з C, а кожний член послідовності є або припущенням (1, 2, 3), або аксіомою (4), або випливає з попередніх членів за правилом MP (5, 6, 7).

Δ

Вправа 8.2. Вивести формулу $\alpha \vee \beta$ з припущення α (β) (правило введення диз'юнкції).

Вправа 8.3. Вивести формулу $\alpha \wedge \beta$ з припущення α і β (правило введення кон'юнкції).

Вправа 8.4. Обґрунтувати вивідність $\alpha \to \gamma,\quad \beta \to \gamma\ \vdash \alpha \vee \beta \to \gamma$ (правило вилучення диз'юнкції).

Вправа 8.5. З припущення $(\mathrm{B} \to \mathrm{C}) \to \big((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to (\mathrm{A} \to \mathrm{C})\big)$ вивести формулу:

$$\Big(B \to \big(A \to (B \to C)\big)\Big) \to \Big(\big(B \to (A \to B)\big) \to \big(B \to (A \to C)\big)\Big).$$

Приклад 8.6. Довести $\vdash \mathrm{A} \to ((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to \mathrm{B})$ застосовуючи метатеорему дедукції, якщо відомо $\mathrm{A}, \mathrm{A} \to \mathrm{B} \vdash B$.

Доведення. Застосовуючи МТД до $\mathrm{A}, \mathrm{A} \to \mathrm{B} \vdash \mathrm{B}$, дістанемо: $\mathrm{A} \vdash (\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to \mathrm{B}$. Застосовуючи знов МТД до $\mathrm{A} \vdash (\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \to \mathrm{B}$, матимемо теорему $\vdash A \to ((A \to B) \to B)$.

Δ

Вправа 8.7. Застосовуючи метатеорему дедукції, довести:

$$\vdash ((A \to B) \to A) \to ((A \to B) \to B).$$

Приклад 8.8. Якщо добуток двох цілих чисел $m,\ n$ є числом непарним (A), то m і n – числа непарні (B). Символічно: $A \to B$.

Доведення. Припустимо супротивне, тобто що хоч одне з чисел $m,\ n$ – нехай це буде m – є парним $(\bar{B})$. Тоді $m = 2k$, де k – ціле число, і $mn = 2kn$, тобто mn не є непарним числом $(\bar{A})$. З припущення $\bar{B}$ ми вивели $\bar{A}$: $\bar{B} \vdash \bar{A}$. Звідси, за теоремою дедукції, маємо: $\vdash \bar{B} \to \bar{A}$, що рівносильне $\vdash A \to B$. Теорему доведено.

Δ

Самостійна робота

Задача 8.1. Вивести формулу α (β) з припущення $\alpha \wedge \beta$ (правило вилучення кон'юнкції).

Задача 8.2. З припущення $\alpha \to \beta$ вивести формулу $\bar{\beta} \to \bar{\alpha}$ (правило контрапозиції).

Задача 8.3. Обґрунтувати вивідність $\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C}), \mathrm{B}, \mathrm{A} \vdash D \to C$.

Задача 8.4. З припущення

$\left(\mathrm{B} \to \left(\mathrm{A} \to (\mathrm{B} \to \mathrm{C})\right)\right) \to \left(\mathrm{B} \to (\mathrm{A} \to \mathrm{B})\right) \to \left(\mathrm{B} \to (\mathrm{A} \to \mathrm{C})\right)$ вивести формулу: $\left(A \to (B \to C)\right) \to \left(B \to (A \to C)\right)$.

Задача 8.5. За допомогою метатеореми дедукції довести:

$$\vdash (A \to C) \to \left(A \to (B \vee \mathrm{C})\right).$$

Задача 8.6. За допомогою метатеореми дедукції довести:

$$\vdash (\bar{A} \to B) \to (\bar{B} \to A).$$

Розділ 3. Логіка предикатів

Заняття 9. Предикати. Логічні операції над предикатами.

Якби це було так, це б ще нічого. Якби, звичайно, воно так і було. Але так як це не так, так воно і не так. Така логіка речей.

Льюїс Керролл «Аліса в країні див»

***Мета заняття*:** розглянути основні поняття логіки предикатів та навчитись виконувати логічні операції над предикатами.

Необхідні теоретичні матеріали:

Позначаючи атомарні висловлення пропозиційними буквами, ми розглядаємо ці висловлення як неподільні цілі, абстрагуючись від їхньої внутрішньої структури, тоді як саме вона є суттєвою.

Таким чином, навіть для проведення найпростіших міркувань стає необхідним аналіз внутрішньої структури висловлень.

Проте такий аналіз неможливий на базі алгебри числення висловленнь, оскільки в цих теоріях просте висловлення виступає як вихідний пункт дослідження, як об’єкт, позбавлений частин, позбавлений внутрішньої структури. Тому стає необхідним вихід за межі логіки висловлень, він здійснюється в логіці предикатів.

Користуючись граматичними термінами, внутрішню структуру висловлення називають суб’єктно-предикатною. Суб’єкт – назва предмету, предикат – назва властивості предмету, чи відношення між предметами, про які йдеться у висловленні. (у граматиці це підмет та присудок).

Приклад. «11 - просте число» можна записати як $A(11)$, «Андрій старше від Бориса» запишемо як $C(a,b)$

Коли для предикатів не має загальновживаних символічних позначень, вводимо для них позначення відповідними буквами. Так запис $A(x)$ означає «x - просте число», а $\mathrm{C}(x,y)$ означає «x старше y».

У розглянутому прикладі «11», «a», «b» – ***предметні константи***, тобто назви або імена певних предметів, а «x», «y» – ***предметні змінні***, замість яких можна підставляти назви предметів, із певної множини, на якій визначено даний предикат.

Універсальна множина (універсум) – це така множина, для якої всі інші множини які розглядуються в цій галузі є підмножинами.

У планіметрії – множина точок площини. Для наведеного вище прикладу – множина натуральних чисел.

Предметні константи і змінні називаються ***термами***.

Приклад. 11, a, b, x, y – терми.

По аналогії з функціями, терми є аргументами предикатів, а значення предикатів є висловлення.

Предикат, означений на множині М – функція, аргументи якої пробігають цю множину і значення якої є висловлення. Вираз, яким записується предикат, це висловлювальна форма.

Предикат-функція, визначена на універсальній множині. За числом аргументів предикати є одномісними і n -місними (висловлю вальна форма). Одномісні предикати виражають властивості елемента; n-місні виражають відношення між елементами; 0-місний предикат – просто висловлення.

У випадку скінченої універсальної множини логічну функцію, яка визначається предикатом, можна задати таблицею.

Для n -місного предиката на множині m маємо m^n елементів таблиці. Число різних n -місних логічних функцій становить 2^{m^n}.

Так, число різних двомісних логічних функцій, визначених на множині з трьох елементів, є $2^{3^2} = 2^9 = 512$, а для тримісних логічних функцій на тій самій множині це число дорівнює $2^{3^3} = 2^{27} = (2^{10})^2 \cdot 2^7$.

Для вивчення предикатів математичними методами треба ввести змінні для предикатів, тобто символи, замість яких можна підставляти предикати (і тільки предикати).

Такими змінними у нас є букви P, Q, R (можливо з індексами), їх називають предикатними змінними, або змінними предикатами.

Оскільки значеннями предикатів є висловлення, то над предикатами можна виконувати такі логічні операції алгебри висловлень: $\overline{\ }$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Предикат – це певна підмножина універсальної множини U, а саме, та підмножина U, на якій істинне значення предиката тотожньо дорівнює 1 (так звана множина істинності предикатів).

Кон'юнкції предикатів $P \wedge Q$ відповідає ***перетин*** тих підмножин U, які відповідають предикатам P і Q окремо.

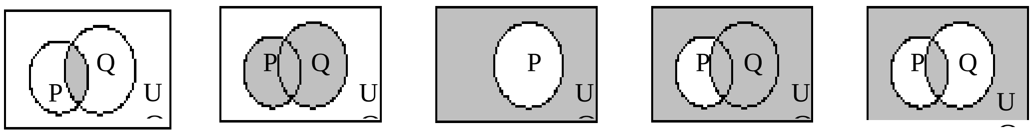
Диз'юнкції предикатів $P \vee Q$ відповідає ***об'єднання*** тих множин U, які відповідають предикатам P і Q окремо.

Запереченню предиката P, тобто $\bar{P}$, відповідає ***доповнення*** тієї підмножини U, яка відповідає предикату P.

Теоретико-множинний зміст імплікації $P \to Q$ і еквівалентів $P \leftrightarrow Q$ випливає з того, що $P \to Q$ можна зобразити як $\bar{P} \vee Q$, а

$P \leftrightarrow Q$ – як $(\bar{P} \vee Q) \wedge (P \vee \bar{Q})$.

Це можна зобразити наочно на кругах Ейлера:



$P \wedge Q$ $\quad$ $P \vee Q$ $\quad$ $\neg P$ $\quad$ $P \to Q$ $\quad$ $P \leftrightarrow Q$

Аудиторна робота

Приклад 9.1. Одномісний предикат «x - просте число» можна на множині натуральних чисел, менших ніж 15, задати таблицею з одним входом.

Розв'язок.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$A(x)$	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0

Δ

Приклад 9.2. Нехай A, C – одномісні, B – двомісний предикат, a, b, c – елементи універсальної множини U. Дано:
$|A(a)| = |A(b)| = 1$, $|A(c)| = 0$, $|C(a)| = 1$, $|C(b)| = |C(c)| = 0$, $|B(a,b)| = |B(b,c)| = |B(a,c)| = 1$, $|B(a,a)| = |B(b,b)| = |B(c,c)| = 0$.

Визначити істинісне значення виразу:

$$\big(B(a,a) \leftrightarrow A(b)\big) \vee \big(B(b,b) \to A(c)\big) \vee B(b,c) \wedge B(c,c) \vee \Big(C(a) \leftrightarrow \big(A(a) \to C(b)\big)\Big).$$

Розв'язок. Підставляючи задані значення істинності предикатів, маємо

$$(0 \leftrightarrow 1) \vee (0 \rightarrow 0) \vee (1 \wedge 0) \vee \big(1 \leftrightarrow (1 \rightarrow 0)\big) = 0 \vee 1 \vee 0 \vee (1 \leftrightarrow 0)$$
$$= 0 \vee 1 \vee 0 \vee 0 = 1$$

Δ

Вправа 9.3. Зобразити таблицями одномісні предикати: «кратне 2 і кратне 3» та «кратне 2 або кратне 3» на множині натуральних чисел $\{1,2,3,\ldots,20\}$.

Вправа 9.4. Зобразити таблицею з двома входами предикат, заданий рівнянням $2x + 3y = 17$, де x і y належать множині $M = \{1,2,\ldots,7,8\}$.

Вправа 9.5. Позначивши множину істинності предиката P через E_P, предиката Q через E_Q, виразити через E_P і E_Q множини істинності предикатів:

$$P \rightarrow Q, \quad P \leftrightarrow Q, \quad P \oplus Q$$

Вправа 9.6. Виразити множину істинності кожного з предикатів: $P(x) \rightarrow \big(Q(x) \rightarrow R(x)\big)$ і $\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big) \rightarrow R(x)$ через E_P, E_Q, E_R.

Приклад 9.7. Нехай на універсальній множині людей Б(q, Z) означає: «q – батько Z», $M(p, Z)$ означає: «p – мати Z», Ч(Z) означає: «Z – чоловік». Записати через предикати Б, М, Ч, що: с – брат d.

Розв'язок.

$$Ч(c) \wedge Б(q, c) \wedge Б(q, d) \wedge M(p, c) \wedge M(p, d)$$

Δ

Самостійна робота

Задача 9.1. Зобразити таблицею з двома входами предикат, заданий нерівністю $|x+y| \leq 2$, де x і y належать множині $M = \{-2,-1,0,1,2\}$.

Задача 9.2. Виразити множину істинності предиката через множини істинності відповідних елементарних предикатів:

а) $\left(P(x) \vee \bar{Q}(x)\right)R(x) \vee \bar{R}(x)\bar{P}(x)$;

б) $\left(P(x) \rightarrow R(x)\right) \wedge \left(Q(x) \rightarrow \bar{R}(x)\right) \wedge \left(P(x) \rightarrow \bar{R}(x)\right)$.

Задача 9.3. Нехай на універсальній множині людей Б(q, Z) означає: «q – батько Z», $M(p, Z)$ означає: «p – мати Z», Ч(Z) означає: «Z – чоловік». Записати через предикати Б, М, Ч, що: c і d – брати.

Задача 9.4. Нехай на універсальній множині людей Б(q, Z) означає: «q – батько Z», $M(p, Z)$ означає: «p –мати Z», С(a, x) означає: «a – сестра x». Записати через предикати Б, М, C, що: a – тітка x (охоплюючи всі можливі випадки).

Заняття 10. Квантори. Застосування кванторів до двовимірних предикатів.

Все, що сказано три рази, стає істиною.
Льюїс Керролл «Аліса в країні див»

***Мета заняття*:** навчитись застосовувати квантори до двовимірних предикатів.

Необхідні теоретичні матеріали:

Крім операцій алгебри висловлень, над предикатами виконуються ще дві логічні операції, які називаються кванторами.

Приклад. Розглянемо два математичних твердження:
«Для кожного дійсного числа $x^2 - x + 1 > 0$»
«Існує таке дійсне число x, що $2x = x$»

Логічна структура цих тверджень визначається виразами «для кожного» та «існує». Уточненнями цих виразів є квантори.

$\forall x$ – для кожного x (квантор загальності – універсальний «alle» (всі)).

$\exists x$ – існує x, таке що (квантор існування – екзістенціальний «existentia» (існування)).

Предметна змінна x під знаком квантора пробігає універсальну множину.

У загальному випадку на універсумі U символічний запис $\forall x\ A(x)$ розуміємо так: для кожного $a \in U$ має місце висловлення $A(a)$, а запис $\exists x\ A(x)$ – існує хоча б одне $a \in U$ таке, що має місце $A(a)$.

Важливу роль у логіці предикатів відіграє поняття області дії квантора. Під останньою розуміють той вираз, до якого відноситься даний квантор. Область дії квантора обмежують дужками. Початок області дії позначається лівою дужкою, яка ставиться безпосередньо після кванторної змінної даного квантора, а відповідна їй права дужка означає закінчення області дії цього квантора.

Приклад. (область дії квантора підкреслено)

$\exists x\ \underline{\big((x \vdots 3) \to (x \vdots 9)\big)}$; $\exists x\ \underline{(x \vdots 3)} \to (x \vdots 9)$

$\forall x\ \underline{(x^2 - 5x + 6 = 0)} \to (x = 1)$;

$\forall x\ \big(\underline{x^2 - 5x + 6 = 0 \to x = 1}\big)$.

Входження предметної змінної x у вираз називається ***зв'язаним*** даним квантором $\forall$ чи $\exists$ по змінній x, якщо x знаходиться в області дії цього квантора або безпосередньо слідує за квантором.

Входження предметної змінної x у вираз W називається ***зв'язаним***, якщо воно зв'язане хоча б одним квантором W. У протилежному випадку входження x у вираз W називається ***вільним***.

Предметна змінна x називається ***зв'язаною*** (***вільною***) в W, якщо існує зв'язне (вільне) входження в W.

Приклад.

1) $\exists x\ (x > 1)$ обидва входження x у вираз зв'язані і змінна x тут зв'язана;

2) $\exists x\ (x \vdots 3) \to (x \vdots 9)$ перше і друге входження x – зв'язані, а трете – вільне; змінна x, за означенням є і вільною і зв'язаною.

Аудиторна робота

Приклад 10.1. Записати символікою логіки предикатів твердження: «Всі цілі числа – раціональні, проте деякі раціональні числа є цілими».

Розв'язок. Тут маємо два індивідуальних предикати: «є ціле число» і «є раціональне число», для яких немає загальновживаних позначень. Введемо для них символічні позначення – C і R відповідно. Тоді задане твердження запишеться символічною мовою логіки предикатів у такому вигляді:

$$\forall x\big(C(x) \to R(x)\big) \land \exists x\big(R(x) \land C(x)\big).$$

Δ

Вправа 10.2. Записати символікою логіки предикатів твердження (якщо для певного індивідуального предиката немає загальновживаного позначення, то позначити його відповідною предикатною буквою):

а) Кожне число, кратне 10, кратне 5 і кратне 2.

б) Кожна диференційована в точці x_0 функція f є неперервною в x_0.

в) Діагоналі будь-якого прямокутника рівні між собою.

г) Всі трансцендентні числа – ірраціональні, але не всі ірраціональні числа – трансцендентні.

Вправа 10.5. Задані індивідуальні предикати: $M(x, y)$ – «x – мати y», Б(x, y) – «x –батько y», Бр(x, y) – «x –брат y» на множині людей. Виразити через ці предикати і квантори твердження:

а) Існує така людина, що має рідного дядька.

Вправа 10.6. Вказати вільні і зв'язані входження змінних в запропонованих виразах. Для кожного зв'язаного входження змінної зазначити, яким саме квантором вона зв'язана:

а) $P(x) \to \forall y\big(Q(y) \vee \exists z P(z) \leftrightarrow \bar{P}(y)\big)$;

б) $\forall x(x^2 y > 0 \to y > 0)$;

Вправа 10.7. Вказати вільні і зв'язані математичними операторами входження змінних у формулах:

а) $\sum_{k=1}^{n} a_k = S$;

Самостійна робота

Задача 10.1. Використовуючи символіку логіки предикатів, записати математичні твердження:

а) В множині всіх натуральних чисел існує найменше число.

б) В множині всіх натуральних чисел не існує найбільшого числа.

Задача 10.2. Запровадивши позначення для відповідних індивідуальних предикатів, записати символікою логіки предикатів речення:

а) Друг мого друга – мій друг.

б) Деякі студенти під час лекції – неуважні.

в) Кожний, хто любить математику, любить мислити, а всі ті, що не люблять математики, люблять не всі чудові речі.

г) Або кожний любить декого і ніхто не любить всіх, або хтось любить всіх і є такі, що не люблять нікого.

Задача 10.3 Задані індивідуальні предикати: $M(x, y)$ – «x – мати y», Б(x, y) – «x – батько y», Бр(x, y) – «x –брат y» на множині людей. Виразити через ці предикати і квантори твердження:

а) У Петра є рідний дядько.

б) Іван – дядько Петра.

Задача 10.4. Вказати вільні і зв'язані входження змінних в запропонованих виразах. Для кожного зв'язаного входження змінної зазначити, яким саме квантором вона зв'язана:

а) $x > 3 \wedge \forall x \forall y (xy^2 \geq 0)$;

б) $\forall x \forall y \big(x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y)\big)$.

Задача 10.5. Вказати вільні і зв'язані математичними операторами входження змінних у формулах:

а) $\lim\limits_{x \to a} x^3 y = a^3 y$;

б) $\int_a^b \sqrt{1 + x^3 t}\, dx$.

Заняття 11. Поняття формули логіки предикатів. Логічно загальнозначущі формули логіки предикатів.

– Не можна повірити в неможливе!
– Просто у тебе мало досвіду, – зауважила Королева. – У твоєму віці я приділяла цьому півгодини щодня! В інші дні я встигала повірити в десяток неможливостей до сніданку!
Льюїс Керролл «Аліса в країні див»

***Мета заняття*:** розглянути поняття формули логіки предикатів та логічно загальнозначущі формули логіки предикатів.

Необхідні теоретичні матеріали:

Означення формули логіки предикатів дамо індуктивно

1) $P_k^{(n)}(x_1,\dots,x_n)$ $(k = 1,2,\dots,n = 0,1,2,\dots)$ – формула логіки предикатів. Цю формулу називають атомарною або елементарною.

2) якщо α_1 і α_2 – формули логіки предикатів, то $(\bar{\alpha}_1)$, $(\bar{\alpha}_2)$, $(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$, $(\alpha_1 \vee \alpha_2)$, $(\alpha_1 \to \alpha_2)$, $(\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2)$ теж є формулами.

3) якщо α – формула логіки предикатів, а x – вільна змінна в α, то $\big(\forall x\ (\alpha)\big)$ і $\big(\exists x\ (\alpha)\big)$ теж формули.

4) ніяких інших формул логіки предикатів, крім утворених (1)-(3) немає.

Операція квантифікації зменшує в формулі число вільних змінних за п. (3) означення.

Усі формули алгебри висловлень є формулами логіки предикатів (висловлення – це нуль-місні предикати).

Предметні змінні і взагалі терми не є формулами.

Формула логіки предикатів, яка не містить жодної вільної предметної змінної називається ***замкненою*** (тобто не залежить від змінної).

У формулах логіки предикатів містяться предикатні змінні, значеннями яких є конкретні предикати, визначені на універсальній множині. Щоб використати вже розроблений апарат логіки висловлень в логіці предикатів, треба надати предикатним змінним певної інтерпретації.

Інтерпретацією формули $\alpha(P_1, \dots, P_m)$ в D називають заміщення кожної n -місної предикатної змінної в α $(n = 1,2,3, \dots)$ відповідним n -місним відношенням в M та кожної предметної сталої – деяким елементом M. При цьому вважають, що вільні предметні змінні в α пробігають M – множину інтерпретації, а символам логічних операцій алгебри висловлень і кванторам в α надається їх звичайний смисл.

З метою кращого з'ясування процесу оцінки формули логіки предикатів розглянемо докладно випадок, коли множина інтерпретації M містить два елементи, а предикати, що входять у дану формулу, не більш ніж двомісні.

На двоелементній множині $\{a, b\}$ кількість різних одномісних логічних функцій (предикатів) дорівнює 4. Випишемо їх у таку таблицю:

x	L_1	L_2	L_3	L_4
a	0	0	1	1
b	0	1	0	1

На тій самій множині кількість різних двомісних логічних функцій становить 16, а саме:

	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}	L_{12}	L_{13}	L_{14}	L_{15}	L_{16}
(a,a)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
(a,b)	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
(b,a)	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
(b,b)	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Формула α логіки предикатів, яка при всіх інтерпретаціях на множині М і всіх заміщеннях предметних змінних назвами елементів множини М є істинною, називається ***тотожно істинною*** або ***логічно загальнозначущою на множині*** $\boldsymbol{M}$.

Формула α логіки предикатів, яка є істинною (загальнозначущою) на кожній множині, називається ***тотожно істинною*** або ***логічно загальнозначущою***.

Формула α логіки предикатів називається ***виконуваною*** на множині M, якщо існує хоча б одна інтерпретація α на M і хоча б одне заміщення вільних предметних змінних в α назвами елементів M, при яких $|\alpha| = 1$.

Формула α називається виконуваною, якщо існує така множина, на якій α – виконувана.

Для доведення виконуваності формули α на кожній непорожній множині досить довести, що формула α виконувана на одноелементній множині.

Аудиторна робота

Приклад 11.1. Довести, що вираз

$\left(\forall x_1\left(P_1^{(1)}(x_2)\to\left(\exists x_1\left(P_2^{(1)}(x_1)\right)\right)\right)\right)$ (*) не є формулою.

Розв'язок. Справді, $P_1^{(1)}(x_2)$, $P_2^{(1)}(x_1)$ – формули за п. (1) означення; $\left(\exists x_1\left(P_2^{(1)}(x_1)\right)\right)$ – формула за п. (3) означення; $\left(P_1^{(1)}(x_2)\to\left(\exists x_1\left(P_2^{(1)}(x_1)\right)\right)\right)$ формули за п. (2) означення, але у цьому виразі x_1 не є вільною змінною, і п. (3) означення до цієї формули застосувати не можна. Отже, за п. (4) означення формула (*) не є формулою логіки предикатів.

Δ

Приклад 11.2. Оцінити формулу логіки предикатів $\alpha = \forall x\ \left(P(x)\to P(y)\right)\vee\bar{P}(y)$ на двоелементній множині $\{a,b\}$.

Складемо таблицю:

№	P	y	$\forall x\ \left(P(x)\to P(y)\right)$	$\bar{P}(y)$	α
1	L_1	a	1	1	1
2	L_1	b	1	1	1
3	L_2	a	0	1	1
4	L_2	b	1	0	1
5	L_3	a	1	0	1
6	L_3	b	0	1	1
7	L_4	a	1	0	1
8	L_4	b	1	0	1

На входах таблиці записані предикатні змінні та вільні предметні змінні формули. Предикатна змінна P у формулі пробігає множину одномісних логічних функцій $L_1 - L_4$ на $\{a, b\}$, вільна предметна змінна y пробігає множину $\{a, b\}$. Далі застосовуємо правило оцінки для операцій алгебри висловлень, причому враховуємо, що на $\{a, b\}$ квантор загальності перетворюється в кон'юнкцію, а квантор існування – в диз'юнкцію.

Розглянемо детально обчислення значення формули в третьому стовпчику таблиці (при цьому користуватимемося даними про значення логічних функцій $L_1 - L_4$).

Рядок 1:

$$\forall x\ \big(L_1(x) \to L_1(a)\big) = \big(L_1(a) \to L_1(a)\big) \wedge \big(L_1(b) \to L_1(a)\big)$$
$$= (0 \to 0) \wedge (0 \to 0) = 1 \wedge 1 = 1$$

Рядок 2:

$$\forall x\ \big(L_1(x) \to L_1(b)\big) = \big(L_1(a) \to L_1(b)\big) \wedge \big(L_1(b) \to L_1(b)\big)$$
$$= (0 \to 0) \wedge (0 \to 0) = 1 \wedge 1 = 1$$

Рядок 3:

$$\forall x\ \big(L_2(x) \to L_2(a)\big) = \big(L_2(a) \to L_2(a)\big) \wedge \big(L_2(b) \to L_2(a)\big)$$
$$= (0 \to 0) \wedge (1 \to 0) = 1 \wedge 0 = 0$$

Рядок 4:

$$\forall x\ \big(L_2(x) \to L_2(b)\big) = \big(L_2(a) \to L_2(b)\big) \wedge \big(L_2(b) \to L_2(b)\big)$$
$$= (0 \to 1) \wedge (1 \to 1) = 1 \wedge 1 = 1$$

і так далі. Такий процес оцінки формули логіки предикатів виявляється дуже громіздким навіть для випадку двоелементної універсальної множини, проте він дає змогу зрозуміти саму суть механізму оцінки формул логіки предикатів.

Δ

Приклад 11.3. Довести, що формула $\forall x \ (P(x) \to P(y))$ виконувана на кожній непорожній множині.

Доведення. Досить показати, що дана формула виконувана на одноелементній множині $\{a\}$. Проте на цій множині дана формула перетворюється у $P(a) \to P(a)$, тобто у формулі алгебри висловлень $p \to p$, яка є тавтологією.

Δ

Вправа 11.4. Показати, що одна з формул є логічно загальнозначущою (тотожно істинною), а друга – ні:

$$a) \quad \exists x(P(x) \to P(y)), \qquad б) \quad \exists x(P(x)) \to P(y).$$

Вправа 11.5. Чи є тотожно істинною формула логіки предикатів

$$\forall x(P(x) \leftrightarrow Q(x)) \leftrightarrow (\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x))?$$

Чи є хоч одна з цих формул логічно загальнозначущою?

Вправа 11.6. Довести чи спростувати твердження про те, що запропоновані формули є тотожно істинними:

а) $\exists x P(x) \land \exists x(P(x) \to Q(x)) \to \exists x Q(x)$;

б) $\exists x P(x) \land \forall x(P(x) \to Q(x)) \to \exists x Q(x)$;

Самостійна робота

Задача 11.1. Показати, що одна з формул логіки предикатів є тотожно істинною, а друга – ні:

$$a) \quad \forall x(P(x) \to P(y)), \qquad б) \quad \forall x(P(x)) \to P(y).$$

Задача 11.2. Чи є тотожно істинною формула логіки предикатів

$$\forall x(P(x) \to Q(x)) \land \forall x(P(x) \to R(x)) \to \exists x(Q(x) \to R(x))?$$

Задача 11.3. Довести, що формула логіки предикатів є логічно загальнозначуща (лзз) $\forall x\big(P(x) \to Q(x)\big) \to \big(\exists x P(x) \to \exists x Q(x)\big)$. Чи буде такою обернена імплікація?

Задача 11.4. Довести чи спростувати твердження про те, що запропоновані формули є тотожно істинними:

а) $\forall x P(x) \wedge \exists x\big(P(x) \to Q(x)\big) \to \exists x Q(x)$;

б) $\forall x\Big(P(x) \to \big(Q(x) \to R(x)\big)\Big) \to \forall x\big(P(x) \vee Q(x) \to R(x)\big)$.

Заняття 12. Рівносильність формул логіки предикатів. Логічне слідування.

У всьому є своя мораль, потрібно тільки вміти її знайти.

Льюїс Керролл «Аліса в країні див»

***Мета заняття*:** розглянути рівносильність формул логіки предикатів таосновні поняття логічного слідування.

Необхідні теоретичні матеріали:

Формули α і β логіки предикатів називаються ***еквівалентними* на множині** M, якщо при всіх інтерпретаціях на M, і при всіх заміщеннях вільних предметних змінних назвами елементів M формули α і β набувають ті самі значення істинності.

Формули α і β, еквівалентні на кожній множині, називаються ***логічно еквівалентними*** або ***рівносильними*** ($\alpha \equiv \beta$).

Відношення рівносильності формул, очевидно, має властивості рефлективності, симетричності і транзитивності.

Наведемо ряд таких найчастіше вживаних рівносильностей логіки предикатів:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \bar{P}(x) \\ 2) & \overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \bar{P}(x) \end{array}\right\} \text{ закони де Моргана для кванторів;}$$

3) $\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ дистрибутивний закон $\forall$ відносно $\wedge$;

4) $\exists x\big(P(x) \vee Q(x)\big) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ дистрибутивний закон $\exists$ відносно $\vee$;

5) $\forall x(\alpha(x) \wedge \beta) \equiv \forall x\alpha(x) \wedge \beta$
6) $\forall x(\alpha(x) \vee \beta) \equiv \forall x\, \alpha(x) \vee \beta$
7) $\exists x(\alpha(x) \wedge \beta) \equiv \exists x\, \alpha(x) \wedge \beta$
8) $\exists x(\alpha(x) \vee \beta) \equiv \exists x\, \alpha(x) \vee \beta$

закони пронесення кванторів при тій умові, що формула β не містить вільних входжень x;

9) $\forall x(\alpha(x) \to \beta) \equiv \exists x\alpha(x) \to \beta$;
10) $\exists x(\alpha(x) \to \beta) \equiv \forall x\alpha(x) \to \beta$;
11) $\forall x\forall y\, \alpha_1(x,y) \equiv \forall y\forall x\, \alpha_1(x,y)$
12) $\exists x\exists y\, \alpha_1(x,y) \equiv \exists y\exists x\, \alpha_1(x,y)$

закони перестановки однойменних кванторів;

13) $Qx\alpha(x) \equiv Qu\alpha(u)$ перейменування зв'язаної змінної.

Кажуть, що формула β ***логічно слідує*** з формули α в логіці предикатів, якщо на кожній множині M при будь-якій інтерпретації формула β набуває значення 1 при кожному заміщенні вільних предметних змінних назвами елементів M, при якому формула α набуває значення 1. Символічно це записується як і в алгебрі висловлень, $\alpha \models \beta$. α називають ***посилкою***, β – ***висновком***.

Означення логічного слідування, як і в алгебрі висловлень, узагальнюється на випадок, коли є не одна посилка, а множина посилок Г. Тоді попереднє означення повторюється але вираз «формула β набуває значення 1» замінюється виразом «кожна формула з множини посилок Г набуває значення 1».

Твердження. Логічне слідування $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$ має місце тоді і тільки тоді, коли тотожно істинною є формула

$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \to \beta$ (*)

У логіку предикатів переносяться з алгебри висловлень правила виводу ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – назви довільних формул логіки предикатів), зокрема,

Правило МР – $\alpha_1 \to \alpha_2,\ \alpha_1 \models \alpha_2$;

Правило МТ – $\alpha_1 \to \alpha_2,\ \bar{\alpha}_2 \models \bar{\alpha}_1$

Правило силогізму – $\alpha_1 \to \alpha_2,\ \alpha_2 \to \alpha_3 \models \alpha_1 \to \alpha_3$

Правила введення та вилучення кон'юнкції і диз'юнкцію тощо.

Розглянемо кілька правил виводу, властивих тільки логіці предикатів ($\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ – назви довільних формул логіки предикатів):

1. $\forall x\alpha(x) \models \alpha(y)$, якщо змінна y вільна для x в $\alpha(x)$ (О∀);
2. $\alpha(y) \models \exists x\alpha(x)$, якщо змінна y вільна для x в $\alpha(x)$ (В∃);
3. Якщо $\Gamma \models \alpha(x)$ і x не має вільних входжень в жодну з формул множини Γ, то $\Gamma \models \forall x\alpha(x)$;

3'. Якщо $\models \alpha(x)$, то $\models \forall x\alpha(x)$ (правило узагальнення);

4. $\alpha_1 \to \alpha_2(x) \models \alpha_1 \to \forall x\alpha_2(x)$
5. $\alpha_2(x) \to \alpha_1 \models \exists x\alpha_2(x) \to \alpha_1$

$\left.\begin{array}{l} \text{(4)} \\ \text{(5)} \end{array}\right\}$ якщо змінна x не входить вільно в α_1;

6. $\exists x\alpha(x) \models \alpha(c)$ (правило вилучення квантора існування О∃), де c – певний вибраний елемент універсальної множини U.

До правила 6 є такі застереження:

Якщо формулу β було виведено з посилок, і при цьому застосовувалося правило 6, то формула β не повинна містить с, тобто назви вибраного елемента U.

Правило узагальнення (введення квантора загальності) не можна вживати по змінній, вільній в формулі $\exists x\alpha(x)$, до якої було застосоване правило 6.

Розглянемо міркування, виражені в природній мові, суть яких полягає у встановленні певного логічного слідування.

Проте спочатку зробимо зауваження щодо запису в символічній мові логіки предикатів деяких типів тверджень природної мови.

В традиційній логіці розрізняли такі чотири типи тверджень:

а) загальностверднi – «Всі P є Q»;

б) загальнозаперечні – «Жодне P не є Q»;

в) частковостверднi – «Деякі P є Q»;

г) частковозаперечні – «Деякі P не є Q».

Запишемо їх на символічній мові логіки предикатів:

а) $\forall x \ \big(P(x) \to Q(x)\big)$;

б) $\forall x \ \big(P(x) \to \bar{Q}(x)\big)$;

в) $\exists x \ \big(P(x) \wedge Q(x)\big)$;

г) $\exists x \ \big(P(x) \wedge \bar{Q}(x)\big)$.

Зазначимо, що в загальних твердженнях поряд з квантором загальності з'являється операція імплікації, а в часткових твердженнях поряд з квантором існування – операція кон'юнкції, що точно відповідає змісту тверджень природної мови.

Аудиторна робота

Приклад 12.1. Перевірити, чи справджується слідування:

$$\exists x \ \big(P(x) \wedge Q(x)\big), \quad \forall x \ \big(Q(x) \to R(x)\big) \models \exists x \ \big(P(x) \wedge R(x)\big).$$

Розв'язок.

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \exists x \ \big(P(x) \wedge Q(x)\big) \\ 2) & \forall x \ \big(Q(x) \to R(x)\big) \end{array}\right\} \text{ посилки;}$$

3) $P(\text{c}) \wedge Q(c)$ (1,O∃);

4) $P(\text{c})$ (3, O∧);

5) $Q(c)$ (3, О∧);

6) $Q(\text{c}) \to R(\text{c})$ (2, О∀);

7) $R(c)$ (5, 6,MP);

8) $P(\text{c}) \wedge R(c)$ (4,7,В∧);

9) $\exists x\ \big(P(x) \wedge R(x)\big)$ (8, В∃).

Отже, $\exists x\ \big(P(x) \wedge Q(x)\big),\ \forall x\ \big(Q(x) \to R(x)\big) \models \forall x\ \Big(D(x) \to$

$\forall y\ \big(B(y) \to \overline{M}(x,y)\big)\Big)$.

Δ

Приклад 12.2. Перевірити, чи правильне наступне міркування: «Деякі додатні числа менше всіх коренів даного рівняння $f(x) = 0$. Жодне додатне число не менше від жодного від'ємного. Отже, жодний корінь рівняння $f(x) = 0$ не є від'ємним.»

Розв'язок. Щоб перевірити, чи коректне дане міркування, запишемо їх у символічній мові логіки предикатів, вводячи відповідні предикатні символи:

$D(x)$ замість «x – додатне число»;

$K(x)$ замість «x – корінь рівняння $f(x) = 0$»;

$M(x, y)$ замість «x менше y»;

$B(x)$ замість «$D(c) \wedge \forall y\ \big(K(y) \to M(c,y)\big)$ –від'ємне число».

Тоді посилки мають вигляд:

$$\exists x \Big(D(x) \wedge \forall y\ \big(K(y) \to M(x,y)\big)\Big), \forall x \Big(D(x) \to \forall y \Big(B(y) \to \overline{M(x,y)}\Big)\Big),$$

а очікуваний висновок – $\forall x\ \big(K(x) \to \overline{B}(x)\big)$.

Тепер задача зводиться до того, чи виконується слідування:

$\exists x\ \Big(D(x) \wedge \forall y\ \big(K(y) \to M(x,y)\big)\Big)$,

$\forall x\ \left(D(x) \to \forall y\ \left(B(y) \to \bar{M}(x,y)\right)\right) \models \forall x\ \left(K(x) \to \bar{B}(x)\right).$

Доведемо:

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & \exists x\ \left(D(x) \wedge \forall y\ \left(K(y) \to M(x,y)\right)\right) \\ 2) & \forall x\ \left(D(x) \to \forall y\ \left(B(y) \to \bar{M}(x,y)\right)\right) \end{array}\right\} \text{ посилки;}$$

3) $D(\text{c}) \wedge \forall y\ \left(K(y) \to M(\text{c},y)\right)$ (1, О∃);

$$\left.\begin{array}{ll} 4) & D(\text{c}) \\ 5) & \forall y\ \left(K(y) \to M(\text{c},y)\right) \end{array}\right\} \text{ (3, О}\wedge\text{);}$$

6) $D(\text{c}) \to \forall y\ \left(B(y) \to \bar{M}(\text{c},y)\right)$ (2, О∀);

7) $\forall y\ \left(B(y) \to \bar{M}(c,y)\right)$ (4,6, МР);

8) $B(y) \to \bar{M}(\text{c},y)$ (7, О∀);

9) $M(c,y) \to \bar{B}(y)$ (правило контрапозиції та подвійного заперечення);

10) $K(y) \to M(\text{c},y)$ (5, О∀);

11) $K(y) \to \bar{B}(y)$ (10, 9, правило силогізму);

12) $\forall y\ \left(K(y) \to \bar{B}(y)\right)$ (11, В∀);

13) $\forall x\ \left(K(x) \to \bar{B}(x)\right)$ (12, перейменування зв'язаної змінної).

Отже, дане міркування коректне, очікуваний висновок логічно слідує з прийнятих посилок.

Δ

Вправа 12.3. Довести, що формули логіки предикатів рівносильні:

$$\exists x\left(P(x) \vee Q(x)\right) \text{ і } \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

Вправа 12.4. Побудувавши відповідну інтерпретацію (контрприклад), довести, що формули логіки предикатів не є рівносильними: $\exists x\left(P(x) \wedge Q(x)\right)$ і $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

Вправа 12.5. Довести чи спростувати твердження про рівносильність таких пар формул логіки предикатів:

а) $\forall x\big(P(x) \leftrightarrow Q(x)\big)$ і $\forall x\big(P(x)\big) \leftrightarrow \forall x\big(Q(x)\big)$;

б) $\exists x\big(P(x) \leftrightarrow Q(x)\big)$ і $\exists x P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x)$.

Вправа 12. 6. Визначити, які з тверджень логічно еквівалентні:

а) Неправильно, що всі числа, кратні 4, є точними квадратами.

б) Всі числа, кратні 4, не є точними квадратами.

в) Не всі числа, кратні 4, є точними квадратами.

г) Існує число, кратне 4, яке не є точними квадратом.

Вправа 12.7. Перевірити, чи є правильними проведені міркування. Якщо міркування правильне, то побудувати відповідний дедуктивний ланцюжок (від припущень до висновку), якщо ж проведене міркування – не коректне, то побудувати відповідний контрприклад:

а) Деякі неперервні на $[a, b]$ функції – диференційовані на $[a, b]$. Всі диференційовані на $[a, b]$ функції – інтегровані на $[a, b]$. Отже, всі неперервні на $[a, b]$ функції є інтегрованими на $[a, b]$?

б) Деякі вписані в коло чотирикутники є прямокутниками. Кожний прямокутник є паралелограмом. Отже, деякі вписані в коло чотирикутники є паралелограмами?

Самостійна робота

Задача 12.1. Побудувавши відповідну інтерпретацію (контрприклад), довести, що формули логіки предикатів не є рівносильними: $\forall x\big(P(x) \vee Q(x)\big)$ і $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

Задача 12.2. Довести чи спростувати твердження про рівносильність таких пар формул логіки предикатів:

а) $\forall x \left(P(x) \to \left(Q(x) \to R(x)\right)\right)$ і $\forall x \left(Q(x) \to \left(P(x) \to R(x)\right)\right)$;

б) $\forall x \left(P(x) \to \left(Q(x) \to R(x)\right)\right)$ і $\forall x \left(P(x) \to \left(R(x) \to Q(x)\right)\right)$.

Задача 12.3. Перевірити, чи є правильними проведені міркування. Якщо міркування правильне, то побудувати відповідний дедуктивний ланцюжок (від припущень до висновку), якщо ж проведене міркування – не коректне, то побудувати відповідний контрприклад:

а) Кожний дріб є виразом. Всяке дробове число є числом. Жодне число не є виразом. Отже, жодне дробове число не є дробом?

б) Деякі рівнобедрені трикутники – прямокутні. Жодний прямокутний трикутник не є правильним. Отже, деякі рівнобедрені трикутники не є правильними?

в) Всі квадрати – ромби. Всі квадрати – прямокутники. Отже, деякі прямокутники є ромбами?

г) Деякі парні функції – трансцендентні. Не всі трансцендентні функції – елементарні. Отже, деякі парні функції не є елементарними?

Питання до екзамену:

1. Предмет математичної логіки. Історія розвитку логіки. Сучасна логіка та інші науки.

2. Правильне міркування. Логічні парадокси.

3. Висловлення. Операції над висловленнями. Пропозиційні форми. Функції істинності.

4. Рівносильність формул алгебри висловлень.

5. Таблиці істинності. Тавтології та протиріччя.

6. Властивості логічних операцій.

7. Нормальні форми. ДНФ, КНФ, ДДНФ, ДКНФ.

8. Проблема вирішення в алгебрі висловлень. Значення тотожно істинних формул для алгебрі висловлень.

9. Булеві функції. Питання функціональної повноти.

10. Логічне слідування на базі алгебри висловлень.

11. Алфавіт числення висловлень. Означення формули. Правила виводу.

12. Аксіоми числення висловлень. Правила побудови числення висловлень.

13. Вивідність формул числення висловлень.

14. Метатеорема дедукції (числення висловлень) та її наслідок.

15. Правила силогізму та перестановки посилок.

16. Несуперечність системи аксіом числення висловлень.

17. Незалежність системи аксіом числення висловлень.

18. Повнота системи аксіом числення висловлень.

19. Предикати. Предикати-властивості, предикати-відношення. Логічні операції над предикатами.

20. Квантори. Застосування кванторів до двовимірних предикатів. Поняття формули логіки предикатів.

21. Поняття машини Тьюрінга.

22. Нормальні алгоритми Маркова

Література

Основна

1. Гаврилків В.М. Формальні чови та алгоритмічні моделі: навчальний посібник / В.М. Гаврилків. – Івано-Франківськ: «Сімик», 2012. – 172 с.

2. Гасяк О.С. Формальна логіка. Розв'язкові процедури, алгоритми, словник базових термінів і понять: навч. посібник / О.С.Гасяк. – Вид. 2-ге, переробл. та доповн. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2014. – 544 с.

3. Дрозд-Корольова О.Ю. Задачі з математичної логіки : навчальний посібник / О.Ю. Дрозд-Корольова. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет». 2010. – 96 с.

4. Жук П.Ф. Математична логіка та теорія алгоритмів : практикум / уклад.: П.Ф. Жук – К. : НАУ, 2014. – 21 с.

5. Кайдан Н.В. Завдання до практичних занять з курсу «Математична логіка та теорія алгоритмів» (Розділ: «Математична логіка») : Практикум для студентів фізико-математичного факультету / Н. В. Кайдан, Т. В. Турка. — Слов'янськ : Вид Б. І. Маторіна, 2015. – 77 с.

6. Кублій Л. І. Вибрані розділи дискретної математики. Алгебричні структури. Алгебра логіки. Математична логіка [Текст] : навчальний посібник / Л. І. Кублій, М. В. Ногін ; М-во освіти і науки, молоді та спорту України, Нац. техн. ун-т України "Київськ. політехніч. ін-т". - Київ : НТУУ "КПІ", 2012. – 170с.

7. Матвієнко М.П. Математична логіка та теорія алгоритмів : навч. посіб. студ. для вищих навч. закладів / М.П. Матвієнко, С.П. Шаповалов ; М-во освіти і науки України, Сумський держ. ун-т. – Київ : Ліра-К, 2015. – 211 с.

8. Стусь О.В.Математична логіка та теорія алгоритмів: Лекції [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 124 «Системний аналіз» / О. В. Стусь ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. – 150 с.

9. Шкільняк С.С. Теорія алгоритмів. Приклади й задачі. / С.С. Шкільняк – К., 2012.

10. Шкільняк С.С. Математична логіка. Електронний навчальний посібник / С.С. Шкільняк // Репозитарій електронних ресурсів КНУ. – 2012. – http://195.68.210.50/moodle.

Додаткова література

11. Гиндикин С.Г. Алгебра логики в задачах / С.Г. Гиндикин. – М.: Наука, 1972. – 282с.

12. Конфорович А.Г. Математичні софізми і парадокси / А.Г. Конфорович. К.: Рад. школа, 1983. – 148с.

13. Мендельсон З. Введение в математическую логику / З. Мендельсон. – М.: Наука, 1976. – 320с.

14. Новиков П.С. Элементы математической логики / П.С. Новиков. – М.: Наука, 1973. – 399с.

15. Сущанський В.І. Булеві алгебри / Ю.М. Рижов, В.І. Сущанський. – К: Вища школа, 1982. – 314с.

16. Хромой Я.В. Збірник вправ і задач з математичної логіки / Я.В. Хромой. – К: Вища школа, 1978. – 160с.

17. Хромой Я.В. Математична логіка / Я.В. Хромой. – Київ: Вища школа, 1983. – 208с.

Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. Лекції з математичної логіки та теорії алгоритмів (Інформатика) Сінько Ю.І. http://dls.ksu.kherson.ua/dls/Library/LibdocView.aspx?id=612fd82a-c912-4c4a-a039-43651f0454e3
2. Основи математичної логіки Дрозд Ю.А. http://www.imath.kiev.ua/~drozd/Logic.pdf
3. Комп'ютерний практикум з математичної логіки Кондратенко Н.Р. http://posibnyky.vntu.edu.ua/pdf/000713.pdf
4. Теория алгоритмов и математическая логика: https://elearning.sumdu.edu.ua/free_content/lectured:5de5178bb62ca7a97fe35cba8b92d1b337ee8101/latest/index.html

Глосарій

Алфавіт – сукупність знакових засобів, які використовуються у даній логічній теорії.

Аргумент – істинне висловлювання (судження), яке використовується для доведення тези.

Визначення – логічна операція, завдяки якій виразам надається строго фіксований смисл.

Виконувана формула – формула, яка може набувати різних логічних значень у залежності від логічних значень її складових.

Вирішена теорія – логічна теорія, де існує ефективна процедура (алгоритм), яка дозволяє за скінченну кількість кроків визначити статус формули цієї теорії.

Висловлювання (судження) – форма мислення, у якій щось стверджується або заперечується про предмет думки.

Відношення логічного слідування – відношення, яке існує між засновками та висновком міркування.

Відношення логічної рівносильності – висловлювання рівносильні тільки у тому випадку, коли при однакових наборах логічних значень пропозиційних змінних, що входять до їх складу, вони набувають однакових логічних значень.

Відношення суперечливості – відношення, яке існує між поняттями, обсяги яких не співпадають, але повністю вичерпують обсяг родового поняття.

Дедуктивні міркування – міркування, у яких між засновками та висновками існує відношення логічного слідування.

Диз'юнкція (сувора) – логічний сполучник (константа), що об’єднує висловлювання. Диз’юнкція, як складне висловлювання, істинна тоді і тільки тоді, коли логічні значення її складових не співпадають.

Диз’юнкція (несувора, слабка) – логічний сполучник (константа), що об’єднує висловлювання. Диз’юнкція, як складне висловлювання, істинна вже і тоді, коли істинним є хоча б один з її членів, та хибна тоді. Коли всі члени хибні.

Доведення – сукупність логічних прийомів, спрямованих на обґрунтування істинності деякого висловлювання.

Достатня умова – умова, що вважається достатньою для настання події (ситуації, дії тощо), яка може відбутись.

Еквівалентність – властивість відношення, якщо воно є рефлексивним, симетричним і транзитивним.

Еквіваленція – логічний сполучник, а також складне висловлювання, яке істинне тоді і тільки тоді, коли логічні значення її складових співпадають.

Елементарна (атомарна) формула – формула, яка виражає просте висловлювання природної мови.

Заперечення – логічний оператор, який заперечує логічне значення висловлювання.

Імплакація – логічний сполучник, а також складне висловлювання, яке визначається як хибне тоді і тільки тоді, коли перше висловлювання (антецедент) – істинне, а друге (консеквент) – хибне.

Кон'юнкція – логічний сполучник, а також складне висловлювання, яке є істинним тоді і тільки тоді, коли всі складові є істинними.

Логіка висловлювань – розділ логіки, який вивчає логічну форму складних висловлювань, абстрагуючись від смислового значення внутрішньої структури простих висловлювань.

Логіка предикатів – розділ сучасної логіки, який враховує внутрішню структуру простих висловлювань.

Логічна форма міркування – спосіб зв'язку висловлювань, які входять до його складу.

Логічна суперечливість – формула, яка є хибною у будь-якій предметній області.

Логічний закон – формула, яка є істинною у будь-якій предметній області.

Логічний синтаксис – розділ логічної семіотики, що вивчає відношення між знаками в структурі мови логіки.

Логічний сполучник – логічний термін, функція якого полягає в утворенні складних висловлювань.

Менший термін – термін, який виступає суб'єктом висновку у простому категоричному силогізмі.

Метамова – мова, засобами якої досліджується властивості об'єктної мови.

Міркування (умовивід, силогізм) – форма мислення як послідовність висловлювань, де за допомогою відомих висловлювань на основі певних логічних правил отримують нове висловлювання.

Мова логіки – штучна мова, яка призначена для аналізу логічної структури висловлювань.

Необхідна умова – вид умови, необхідної для настання даної події (ситуації, дії), якщо за її відсутності ця подія не відбувається.

Об'єктна мова – мова, засобами якої описують певну предметну (позамовну) дійсність.

Полісилогізм – міркування, яке складається з декількох простих, поєднаних між собою таким чином, що висновок попереднього простого міркування, стає одним з засновків наступного міркування.

Поняття – форма мислення (думка), яка шляхом вказівки на певну ознаку, виділяє з універсаму та узагальнює в клас предмети (предмети думки), яким притаманна ця ознака.

Просте висловлювання – висловлювання, що не включає в себе інші висловлювання.

Простий категоричиний силогізм – дедуктивне міркування (силогізм, умовивід), засновками і висновками якого є прості категоричні висловлювання (судження).

Середній термін – термін простого категоричного силогізму, який міститься у обох засновках, але не входить до висновку.

Складне висловлювання – висловлювання, яке включає в себе як самостійні частини інші висловлювання..

Спростування – встановлення хибності положення з використанням логічних засобів та положень, істинність яких доведена.

Темпоральні висловлювання – висловлювання, в яких використовуються часові характеристики.

Темпоральні модальності – модальності, які характеризують часові залежності: “було”, “буде”, “раніш” тощо.

Теоретичне міркування – міркування, яке ставить за мету обґрунтувати знання.

Формалізація – побудова моделі, у якій змістовим міркуванням відповідають їх формальні аналоги.

Формула – правильно побудований вираз мови логіки.

Нотатки