ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»

В.О. Назаренко, Г.В. Бруй

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ДЛЯ АНАЛІЗУ ТОЧНОСТІ МАРКШЕЙДЕРСЬКИХ ВИМІРЮВАНЬ

Навчальний посібник

metinvest
polytechnic

В. О. Назаренко, Г. В. Бруй

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ДЛЯ АНАЛІЗУ ТОЧНОСТІ МАРКШЕЙДЕРСЬКИХ ВИМІРЮВАНЬ

Навчальний посібник

Одеса • 2024 • Олді+

УДК 53.088:53.089.5:622.1(075.8)
Е50

Автори:

В. О. Назаренко – доктор технічних наук, професор;
Г. В. Бруй – кандидат технічних наук, доцент

Рецензенти:

О. С. Кучин – доктор технічних наук, професор кафедри геодезії НТУ «Дніпровська політехніка»;
І. Г. Сахно – доктор технічних наук, професор, професор кафедри гірничої справи ТОВ «ТУ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»

Рекомендовано до видання Вченою радою
ТОВ «ТУ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»
(протокол № 3 від 21 листопада 2024 року)

Е50 **Елементи** теорії похибок для аналізу точності маркшейдерських вимірювань : навчальний посібник / В. О. Назаренко, Г. В. Бруй. – Одеса : Олді+, 2024. – 74 с.

ISBN 978-966-289-938-2

У навчальному посібнику розглянуті загальні уявлення про вимірювання і їх точність, види вимірювань і їх похибки, а також структурна схема похибок. Детально висвітлені рівноточні вимірювання, властивості випадкових похибок, принцип арифметичної середини. Дана оцінка точності рівноточних вимірювань, охарактеризовані середньоквадратичні похибки функцій виміряних величин. Оцінена сумісна дія декількох незалежних джерел похибок.

Охарактеризовані відносні похибки та похибки округлення. Розглянуті нерівноточні вимірювання і їх точність, загальна арифметична середина і вага нерівноточних вимірювань. Виконаний аналіз точності маркшейдерських кутових і лінійних вимірів.

Для студентів за напрямом підготовки 184 «Гірництво».

УДК 53.088:53.089.5:622.1(075.8)

ISBN 978-966-289-938-2

ЗМІСТ

ВСТУП

На маркшейдерську службу сучасних гірничих підприємств покладається вирішення багатьох відповідальних і різноманітних задач. Перелік і зміст цих задач залежить від способу розробки родовищ (підземний, відкритий, гідромеханізований, підводний тощо), виробничої потужності підприємства, умов залягання розроблюваного родовища, виду корисної копалини, а також від стадії виробничої діяльності підприємства – підготовки, будівництва, експлуатації, ліквідації.

Всі види маркшейдерських робіт пов’язані з вимірюваннями та обчисленнями, а відповідно супроводжуються похибками. Точність вимірювань залежить від умов вимірювань, які охоплюють наступні елементи: інструменти, при допомозі яких виконують вимірювання; зовнішнє середовище, в якому виконується вимірювання; об’єкт вимірювання; спостерігач вимірювань.

Необхідно пам’ятати, що збільшення точності вимірювань пов’язано з більшою витратою праці і з використанням більш точних та вартісних приладів.

Недостатня точність призводить на виробництві до великих матеріальних збитків. В підсумку можна відмітити, що точність вимірювань в практиці маркшейдерської справи в кінцевому рахунку повинна визначатися тією точністю, яка необхідна для вирішення практичних питань гірничої справи. Результати любих вимірювань не дають істинного значення вимірюваної величини і супроводжуються похибками, які потрібно вивчати і обмежувати їх вплив.

Вимірювання поділяються на рівноточні і нерівноточні, за їх результатами маркшейдер повинен уміти визначати найбільш надійне значення виміряної величини та забезпечити оцінку його точності. Крім того, маркшейдеру приходиться часто обчислювати відносні та ймовірні похибки, похибки округлення.

Навчальний посібник супроводжується рядом завдань та прикладами їх рішення. З метою кращого засвоєння студентом матеріалу після кожного розділу приводяться контрольні запитання.

Навчальний посібник буде корисним студентам, що навчаються за освітніми програмами «Маркшейдерський супровід розробки родовищ корисних копалин» та «Сучасні методи маркшейдерського забезпечення процесів видобування корисних копалин» під час оволодіння освітніми компонентами: Геодезія; Маркшейдерські роботи при розробці вугільних родовищ; Маркшейдерські роботи при відкритій розробці родовищ; Маркшейдерські роботи при будівництві шахт і підземних споруд; Проєктування та дослідження точності підземних маркшейдерських мереж; Новітні маркшейдерсько-геодезичні технології та прилади.

РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ВИМІРЮВАННЯ ТА ЇХ ПОХИБКИ

1.1. Загальні уявлення про вимірювання

Всі маркшейдерські вимірювання супроводжуються похибками, а тому маркшейдер повинен уміти не тільки виконувати зйомки а й здійснювати оцінку точності виконаних ним вимірів, а також по заданій точності кінцевого результату зйомки обґрунтовано вибирати інструменти та способи виконання зйомки.

Похибки вимірів елементів підземної зйомки завжди приводять до нев'язок, тобто розходжень результатів вимірів з відомими геометричними умовами. А тому в практичній роботі маркшейдера виникає задача усунення нев'язок, що мають місце, тобто виконувати урівнювання результатів вимірів, якщо нев'язки (похибки) не перевищують допустимих величин, установлених технічною інструкцією.

Вимірювальні дії в практиці маркшейдера дають можливість вивчати кількісну сторону гірничих явищ і процесів. Вивчаючи кількісну сторону явища або процесу, здійснюють вимірювання і рахування. Рахування є складовою частиною вимірювального процесу і виконується тоді, коли величина вимірюваного об'єкту більша прийнятої одиниці виміру.

Під вимірюванням якої-небудь величини розуміють процес порівняння її з другою однорідною з нею величиною, яка прийнята за одиницю виміру. Внаслідок вимірювання отримуємо відносне число, яке показує, в скільки разів вимірювана величина більша або менша одиниці виміру.

Вимірювальний процес може бути виражений математично у вигляді рівності:

$$l = MN, \tag{1.1}$$

де l – вимірювана величина;

M – одиниця виміру;

N – число, отримане в результаті виміру.

Прикладом може слугувати вимірювання довжини сторони підземного теодолітного ходу стальною рулеткою. В зв'язку з тим, що вимірювана величина і одиниця виміру майже завжди є величинами, що не співставляються, це призводить до необхідності визначати деякі долі одиниці виміру, що при самому ретельному виконанні і при самих досконалих інструментах спонтанно супроводжуються помилками.

Будь-які вимірювання виконуються при наявності і взаємодії наступних елементів, які приймають участь в процесі вимірювань:

1) об'єкт вимірювання;
2) спостерігач, який виконує вимірювання;
3) інструменти, при допомозі яких виконуються вимірювання;
4) зовнішнє середовище, в якому здійснюється вимірювання.

Сукупність усіх перерахованих факторів в їх конкретному змісті при виконанні вимірювань називається умовами вимірювань.

При виконанні вимірювань повинні задовольнятися наступні вимоги:

1. Величина одиниці вимірювання повинна бути відома з достатнім ступенем точності і в процесі вимірювань повинна залишатися незмінною. Це здійснюється шляхом порівняння одиниць виміру з нормальним мірилом до і після вимірювання.

2. Величина об'єкту під час вимірювання повинна бути практично незмінною.

Умови вимірювань є джерелом появи похибок. Тільки ретельне вивчення умов вимірювань може дати достатньо повну якісну характеристику результатів вимірювань.

Головним чином похибки вимірювань походять від недосконалості органів відчуття спостерігача, від недоліків вимірювальних приладів і під впливом зовнішнього середовища.

Результати вимірювань, які є в наявності у великої кількості в різних областях науки і техніки, свідчать про те, що ніколи не можливо отримати істинне значення вимірюваної величини.

Дослідження результатів безпосередніх вимірів свідчать, що вони тотожними між собою не бувають, а відрізняються один від одного. Це свідчить про те, що результати вимірювань відрізняються від істинного значення вимірюваної величини і містять похибки. Тотожність двох результатів вимірів однієї і тієї ж величини говорить або про просту випадковість, або вказує на те, що одиниці, в яких виражені результати вимірювань, перебільшують своєю величиною похибку вимірювань.

Кажучи про точне або істинне значення вимірюємого об'єкту, передбачають, що хоч абсолютно незмінних об'єктів вимірювання в природі не існує, завжди можна знайти такий проміжок часу, на протязі якого розміри вимірюваного об'єкту практично можна рахувати незмінними на протязі всього процесу вимірювання. Такий практично незмінний на протязі певного проміжку часу розмір вимірюваного об'єкту називають точним або істинним значенням цього об'єкту.

Для одних об'єктів проміжок часу їх незмінності дуже довгий, для інших короткий. Так, наприклад, можна рахувати практично незмінною відстань між добре закріпленими на земній поверхні пунктами, різницю відміток таких пунктів, кут між закріпленими на поверхні землі напрямками і т. д. Разом з тим в практиці маркшейдерської справи і геодезії зустрічаються випадки, коли приходиться вимірювати об'єкт, який швидко змінюється в часі, наприклад магнітний азимут при виконанні магнітного орієнтування, зенітна відстань або азимут зірки та інші.

Позначивши істинне значення якої-небудь вимірюваної величини через L, а виміряне значення цієї величини через l, їх різниця називається істинною похибкою вимірювання:

$$l - L = \Delta. \qquad (1.2)$$

Внаслідок накопичення незапобіжних похибок вимірювань отримують неузгодженість практичних даних з дійсними. Ці неузгодження називаються нев'язками. Чим більш досконалі прилади застосовуються при вимірюваннях, досвідчений спостерігач, ретельніше виконуються самі виміри і більш сприятливі зовнішні умови, тим менші похибки будуть містити результати вимірів.

Перед інженером-маркшейдером постає питання: з якою ж точністю потрібно вимірювати ту чи іншу величину? Очевидно, що збільшення точності вимірювань зв'язано з більшою витратою праці і використанням більш точних і вартісних приладів. Недостатня точність вимірювань може призвести до великих матеріальних збитків і навіть до порушення технологічного процесу гірничого підприємства.

Таким чином, точність вимірювань в практиці маркшейдерської справи в кінцевому рахунку повинна визначатися тією точністю, яка потрібна для вирішення практичних питань гірничої справи.

Необхідна точність вимірювань визначає характер необхідних інструментів і методику вимірювання ними.

1.2. Види вимірювань

В практиці маркшейдерської справи всі вимірювання в залежності від способу отримання значень вимірюваних величин і від наявності співвідношень між їх істинними значеннями можна розділити на наступні види: прямі або безпосередні; опосередковані; зв'язані умовами і не зв'язані умовами.

В залежності від виникнення похибок вимірювання можна розділити на незалежні і залежні, рівноточні і нерівноточні.

Прямими (безпосередніми) вимірюваннями називаються такі, при яких шуканий результат отримується з безпосереднього порівняння вимірюваної величини з одиницею виміру. Прикладами таких вимірів є: визначення напрямку по лімбу теодоліта, вимірювання температури повітря термометром, визначення відстані від пікету до візирної осі нівеліра і т. д.

Опосередкованими вимірюваннями називаються такі, при яких безпосередньому вимірюванню підлягають не ті величини, які відшуковуються, а деякі інші, які пов'язані з відшуковуваними певною функціональністю, залежністю. Прикладом таких вимірювань може служити визначення перевищення між двома реперами в похилій виробці тригонометричним шляхом, при якому безпосередньо вимірюється похила довжина l, кут її нахилу δ, висота інструменту i, висота сигналу υ, а саме перевищення вираховується по відомій формулі:

$$h = l\,\mathrm{Sin}\,\delta + i - \upsilon\,. \qquad (1.3)$$

Зв'язані умовами – це вимірювання, для яких наперед відомо, що їх істинне значення повинно задовольняти певним теоретичним умовам. Так, наприклад, сума кутів в плоскому трикутнику повинна дорівнювати 180°, сума перевищень замкненого нівелірного хода повинна дорівнювати нулю і т. д.

Не зв'язані умовами – це вимірювання, для яких немає наперед відомих теоретичних умов.

Незалежними вимірюваннями називаються такі, у яких похибки одного вимірювання не впливають на похибки другого вимірювання. Наприклад, при вимірюванні напрямків на станції похибки одного напрямку не впливають на похибки другого напрямку.

Залежними вимірюваннями називаються такі, при яких похибки одного вимірювання пов'язані з похибками іншого вимірювання. Суміжні кути, які отримані як різниця напрямків, мають зв'язані похибки, так як в похибку одного і другого кута входить одна і та ж похибка загальною для них напрямку.

Рівноточними вимірюваннями називаються такі, при виконанні яких сукупність умов, які приводять до тих або інших похибок, під час спостережень не змінюється, тобто вимірювання проводяться в умовах, які дозволяють рахувати всі результати однаково надійними. Ця умова зазвичай виконується, коли вимірювання здійснюються одними і тими ж інструментами, спостерігачами однакової кваліфікації і при однакових зовнішніх умовах. Прикладом може слугувати вимірювання горизонтальних кутів теодолітом в прямолінійній гірничій виробці з рівними сторонами ходу.

Нерівноточними вимірюваннями називають окремі вимірювання або результати ряду окремих вимірювань (розглянуті як одне ціле), які піддані різним похибкам в зв'язку із зміною умов спостережень. Так, наприклад, результати вимірів довжин сторін в підземних теодолітних ходах стальною рулеткою і вимірювання довжин ліній в ходах на поверхні інварними проволками являються нерівноточними.

Всі перераховані види вимірювань можуть складатися з необхідних і надлишкових (додаткових).

Необхідними вимірюваннями називаються такі, які дають можливість отримати тільки одне єдине значення кожної з шуканих величин.

Надлишковими (додатковими) вимірюваннями називаються такі, які виконані ще крім необхідних. Так, при вимірюванні довжини лінії в шахті здійснюють трьохкратне зміщення рулетки по відношенню до висків; внаслідок отримують три значення шуканої довжини, перше з яких буде необхідним, а решта додатковими (надлишковими).

Для визначення значення кутів в трикутнику необхідними будуть вимірювання двох любих кутів, вимірювання третього кута буде надлишковим.

Надлишкові вимірювання дають можливість здійснювати контроль вимірів і виявляти в них грубі похибки, встановлювати найбільш надійні значення вимірюваної величини і судити про вплив незапобіжних похибок вимірювань на отримані результати.

1.3. Похибки вимірювань і їх класифікації

Як відмічалось нами раніше, результати безпосередніх вимірювань не бувають між собою тотожними. Це свідчить про те, що результати вимірювань не дають істинного значення вимірюваної величини і супроводжуються похибками. В зв'язку з цим необхідно вивчити причини виникнення похибок вимірювань і обмежувати їх вплив. Основними джерелами похибок вимірювань слугують: об'єкт вимірювання, спостерігач, інструменти і зовнішнє середовище.

Похибки із-за зміни величини або положення об'єкта в процесі вимірювання. В маркшейдерсько-геодезичній практиці приходиться вимірювати об'єкти, які в процесі вимірювання змінюють свою величину або положення. При обробці результати вимірювань приходиться приводити до певного моменту часу, в наслідок чого з'являються похибки. Наприклад, при виконанні магнітного орієнтування необхідно враховувати зміну магнітного схилення, при барометричному нівелюванні враховується зміна атмосферного тиску і т. д.

Особисті похибки обумовлюються недосконалістю органів відчуття, недостатньою кваліфікацією, психофізіологічними особливостями виконавця вимірювань. Як правило, спостерігачу невідомі ні величини, ні знаки цих похибок, так як вони носять в основному випадковий характер.

Інструментальні похибки вимірювань є наслідком невідповідності інструментів тим ідеальним геометричним умовам, яким вони повинні задовільняти, а так же внаслідок неточної установки інструмента в робоче положення. Ці похибки можуть досягти значних величин і різко спотворювати результати вимірювань, а тому вони повинні бути ретельно вивчені і по можливості виключені.

Інструментальні похибки обумовлені, в основному, двома причинами:

а) недостатньо точним виготовленням окремих деталей інструментів (похибки поділу лімба, похибки нанесення штрихів на рулетку, похибки ходу мікрометренних гвинтів і т. д.);

б) недостатньо ретельною вивіркою і юстировкою інструментів (колімаційна похибка теодоліта; похибка «місця нуля» вертикального круга; похибки непаралельності осі рівня і візирної осі нівеліра; похибка компарування рулетки і т. д.).

Похибки, обумовлені впливом зовнішнього середовища, з’являються від несприятливого впливу зовнішнього середовища на результати вимірювань. Факторами які обумовлюють такі похибки, слугують: температура, атмосферний тиск, вологість повітря і його запиленість у гірничих виробках, вентиляція і т. д. Деякі з похибок можуть бути частково виключені шляхом введення у виміряні величини відповідних поправок. Але в результатах вимірювань залишається частина невиключених похибок, обумовлених впливом зовнішнього середовища із-за неповного обліку впливу цих факторів.

Всі перераховані вище джерела похибок на результати вимірів незалежно один від одного і призводять до елементарних похибок. Таким чином, похибки, що супроводжують вимірювання, є сумою елементарних похибок, які виникають від різних джерел їх появи, що мали місце в процесі вимірювань.

Серед різного роду похибок, з якими приходиться зустрічатися в практиці маркшейдерських вимірювань, за характером дії і властивостями розрізняють похибки **грубі** і **неминучі**.

Грубими називаються похибки, які виходять за межі точності, характерної даним умовам вимірювань. Вони з’являються внаслідок промаху (прорахунку) виконавця або різкої зміни зовнішніх умов.

Промах – прорахунок, який спотворює результат виміру або спостереження, і порушує схему запланованого експерименту. Причинами, які породжують промахи, слугують: неправильні дії виконавця вимірів, його низький досвід, неуважність, пере втомленість, халатність, невміле поводження з приладами та інструментами. Промахи часто виникають у виконавців-початківців, але можуть виникнути і у досвідчених фахівців. Різновиди промахів – неправильний відлік по шкалі приладу; невірний відлік, записаний з несправного приладу; помилковий запис результату виміру (описка); пропуск в спостереженнях тощо.

Усунення промахів забезпечується контрольними вимірюваннями і спостереженнями прямо або опосередковано, приблизно або точно, діючою або іншою апаратурою.

Грубий результат – аномальне числове значення об’єкта, яке не відповідає умовам вимірювання і спостережень. Зовнішньою ознакою такого результату є його різка відміна за величиною від інших результатів. Грубі похибки спотворюють отриманий результат (наприклад, прорахунок на дециметр при вимірюванні довжин стальною рулеткою; прорахунок на сантиметр при взятті відліку по нівелірній рейці і т. д.).

Результати вимірювань, які вміщують грубі похибки, повинні бути виключені з рядів вимірювань і подальшій обробці не підлягати. Але при масових вимірюваннях маркшейдер не гарантований від можливості допустити грубу похибку. А тому для виявлення грубих похибок та їх виключення з рядів вимірів повинні бути виконанні надлишкові виміри. Методика виконання маркшейдерських робіт повинна бути розроблена таким чином, щоб вона давала контроль, який би гарантував своєчасне виявлення грубих похибок.

У подальшому будемо вважати, що результати вимірювань вільні від грубих похибок. Після виключення результатів вимірювань, які містять грубі похибки, залишаються вимірювання, результати яких не тотожні між собою, що свідчить про наявність в них так званих неминучих похибок. Не дивлячись на багатогранність властивостей і впливів на результати вимірювань, неминучі похибки можуть бути розділені на дві великі групи.

Перша група похибок. Якщо середнє значення з похибок рівноточних вимірювань однієї і тієї ж величини прагне до деякої межі, що відрізняється від нуля, при збільшені числа вимірювань до безкінечності, то такі похибки належать до першої групи і називаються систематичними. Поява цих похибок обумовлена впливом факторів, що діють односторонньо і які систематично спотворюють результати вимірювань.

Систематичні похибки виникають від певних джерел і мають закономірний характер. В залежності від умов вимірювань вони можуть залишатися постійними як за знаком, так і за величиною або змінюватися за певними законами.

Джерелами систематичних похибок слугують умови вимірювань: об’єкт, спостерігач (виконавець), інструмент і середовище.

Більшість систематичних похибок виникає або із-за недоліків конструкції інструментів, або від недосконалості їх вивірки, або від зміни зовнішнього середовища.

Систематичні похибки за своєю абсолютною величиною, як правило, не великі, але нехтувати ними не можна. Характерною властивістю систематичних похибок є постійність знаку, внаслідок чого відбувається їх додавання, яке може призвести до значного спотворення кінцевого результату.

Існують також систематичні похибки, які змінюють як знак, так і величину. Наприклад, похибка в перевищенні при геометричному нівелюванні від неточної установки рейки у вертикальне положення.

Необхідно відмітити, що часто буває важко виявити джерела систематичних похибок, прослідкувати і встановити закономірність їх впливу на результати вимірювань та виключити їх. У всіх випадках вимірювань маркшейдер повинен прагнути по можливості максимально виключити вплив систематичних похибок на результати вимірювань шляхом введення відповідних поправок в результати вимірювань, якщо відомий закон впливу систематичних похибок або застосуванням спеціальної методики вимірювань, в процесі яких систематичні похибки будуть виключені. Такі похибки називаються виключними систематичними похибками.

Наприклад: похибка у виміряній довжині із-за невідповідності вимірювального приладу еталону виключається введенням поправки за компарування; вплив колімаційної похибки на результат вимірювання горизонтального кута виключається шляхом визначення середнього значення виміряного кута з «круга право» і «круга ліво». Але необхідно пам’ятати, що поправки, призначені для виключення систематичних похибок, і методики вимірювань, спрямовані на їх виключення, не дають можливості повністю виключити систематичні похибки із результатів вимірювань, так як вимірювання містять залишкові систематичні похибки.

Методи виключення систематичних похибок розроблюються в геодезії, маркшейдерській справі, інструментоведенні та інших спеціальних науках, пов’язаних з вимірюваннями. Але, на жаль, не можливо дати загальні рекомендації по обробці вимірів, що містять систематичні похибки.

За характером прояву систематичні похибки поділяються на наступні різновиди:

– постійні, які зберігають незмінними свій знак і величину;

– прогресивні, які зростають або спадають в процесі вимірювання;

– періодичні, які закономірно змінюються за величиною і знаком;

– складні, які породжуються структурою теоретичних і емпіричних формул.

Друга група похибок. Після виключення із рядів вимірів похибок грубих і систематичних залишаються похибки, яких уникнути неможливо. Ці похибки різні за величиною і за знаком. За попередніми похибками такого ряду неможливо встановити, який же саме буде наступний за ним результат виміру цього ряду за величиною і знаком. Якщо середнє значення з похибок рівноточних вимірювань однієї і тієї ж величини прагне до нуля при збільшенні числа вимірів до безкінечності, то такі похибки належать до другої групи і називаються випадковими. Досвід засвідчує, що похибки другої групи можна розглядати як випадкові математичні величини, що вивчаються в теорії ймовірності і статистиці, тому вони і отримали назву випадкових похибок. На рис. 1.1 приведена структурна класифікаційна схема похибок вимірювань.

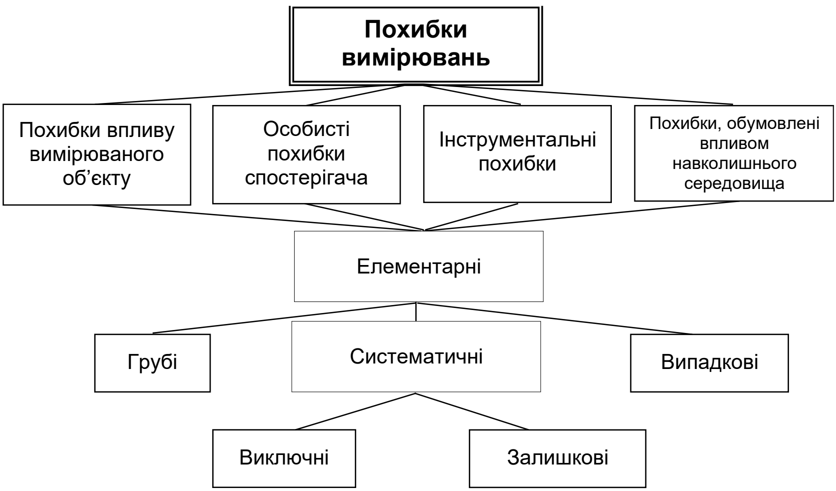

Рис. 1.1. Структурна класифікаційна схема похибок вимірювань

Статистичні властивості випадкових похибок чітко проявляються при великому числі вимірів. Випадкові похибки характеризуються наступними головними властивостями: розподіл випадкових похибок підпорядковується нормальному закону.

1.4. Предмет теорії похибок і способу найменших квадратів

Як вже відмічалось, практика маркшейдерської справи постійно зв'язана з різними вимірюваннями, які дозволяють на планах графічно відображати гірничі виробки, форму залягання корисної копалини і геометрію розподілу її властивостей, вирішувати різні гірничо-геометричні задачі і т. д.

Щоб задати напрямок гірничим виробкам необхідно наперед визначити необхідну точність виконання тих чи інших вимірювальних дій. Але, як відомо, всякі вимірювання супроводжуються неуникними похибками, а тому маркшейдер повинен розробити таку методику виконання робіт, при якій похибки не перевищували б допусків, регламентованих технологічними процесами гірничої справи.

Щоб зменшити вплив неминучих похибок, постійно удосконалюють інструменти і методики вимірювань. Разом з тим на кожному етапі розвитку науки і техніки похибки вимірювань можуть бути зменшені тільки до певної межі. А тому повинна бути вибрана така методика робіт, при якій похибки не перевищували б допустимих значень. Для виконання вказаних вимог необхідно вирішувати наступні питання:

1. Як організувати вимірювання, щоб їх результати містили похибки, що не перевищують допустимих?
2. Як оцінити точність отриманнях результатів вимірювань, тобто виконати оцінку умов вимірювань?
3. Як з результатів вимірювань відшукати найбільш надійне значення?
4. Як оцінити точність отриманого найбільш надійного значення?

Для того щоб вирішити поставлені питання, необхідно знати властивості випадкових похибок, встановити закономірності виникнення і накопичення похибок, вміти виконувати оцінку точності. Рішенням усіх цих питань займається наукова дисципліна «Теорія похибок та спосіб найменших квадратів».

Вивчення цього курсу потребує знайомства з диференціальними та інтегральними обчисленнями, основами лінійної алгебри і теорії ймовірності, загальними курсами геодезії і маркшейдерії. В зв'язку з тим, що теорія похибок і спосіб найменших квадратів дають можливість визначати найбільш надійні значення відшуковуваної величини з результатів безпосередніх вимірювань і здійснювати оцінку точності, вони мають широке застосування в багатьох областях науки і техніки, де приходиться мати справу з вимірюваннями і їх обробкою.

Контрольні запитання

1. Що розуміють під вимірюванням якої-небудь величини?
2. Які елементи приймають участь в процесі вимірювань?
3. Які умови повинні задовільнятись при виконанні вимірювань?
4. Які чинники обумовлюють похибки вимірювань?
5. Що розуміють під істинною похибкою?
6. Які відомі Вам види та умови вимірювань?
7. Що розуміють під рівноточними і нерівноточними вимірюваннями?
8. Що розуміють під похибками вимірювань та які джерела їх формують?
9. Що розуміють під інструментальними похибками?
10. Що розуміють під похибками, які обумовлені впливом зовнішнього середовища?
11. Що розуміють під промахами та грубими похибками?
12. Що розуміють під систематичними і випадковими похибками?
13. Як можна класифікувати похибки вимірювань?
14. Якими властивостями характеризуються випадкові похибки?
15. Які задачі вирішує «Теорія похибок та спосіб найменших квадратів»?

РОЗДІЛ 2. РІВНОТОЧНІ ВИМІРЮВАННЯ

2.1. Властивості випадкових похибок вимірювань

Випадкові похибки, які появляються в процесі вимірювання, змінюють свою величину і знак від виміру до виміру без якої-небудь закономірності. Вивчення розподілу випадкових похибок у великих рядах рівноточних вимірювань одних і тих же величин показує, що хоч чітко визначені закономірності їх розподілу відсутні, але в рядах проявляється так звана статистична закономірність, яка відома під назвою властивостей випадкових похибок вимірювань.

Ряди випадкових похибок характеризуються наступними властивостями:

1. При даних умовах вимірювання випадкові похибки не можуть перевищувати за абсолютним значенням величини певної межі. Якщо позначити вказану межу $\Delta_{гр}$ і назвати цю величину граничною похибкою, то дана властивість виразиться наступною нерівністю:

$$\left|\Delta\right| \leq \Delta_{гр} . \qquad (2.1)$$

Ця властивість характеризує умови вимірювань, на її основі встановлюються межі допустимих похибок.

2. Малі за абсолютною величиною похибки зустрічаються частіше ніж великі. Ця властивість характеризує ретельність вимірювань, які проводяться в даних умовах, а відповідно, і самі умови вимірювань, через те що більшість випадкових похибок даного ряду вимірювань буде за своєю абсолютною величиною близькою до граничної похибки, а це означає що всі можливості використані для підвищення якості вимірювань.

3. Позитивні похибки появляються та к же часто, як і рівні їм за абсолютною величиною від'ємні похибки.

4. Середні арифметичні з випадкових похибок рівноточних вимірювань однієї і тієї ж величини безмежно прагнуть до нуля при безмежному зростанні числа вимірів.

Третя і четверта властивості випливають із самої природи випадкових похибок: так як прийняті заходи до усунення грубих і систематичних похибок не дають підстави рахувати, що при вимірюванні результат, який більший істинного, буде отримуватися частіше, ніж менший.

Внаслідок цього при достатньо великому числі вимірювань в ряді випадкових похибок можна очікувати рівноймовірну появу похибок, рівних за абсолютною величиною і різних за знаком. Додавши всі похибки даного ряду, правомірно очікувати, що позитивні і від'ємні похибки будуть компенсуватися. Тоді при $n \to \infty$ четверту властивість можна записати:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + ... + \Delta_n}{n} = 0, \qquad (2.2)$$

або прийнявши позначення суми за Гаусом у вигляді квадратних дужок можна записати:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0. \qquad (2.3)$$

Необхідно врахувати, що при збільшенні числа вимірювань $\frac{[\Delta]}{n}$ може то збільшуватися, то зменшуватися, зберігаючи загалом тенденцію наближатися до нуля при безмежному зростанні числа спостережень n.

Серед перерахованих властивостей випадкових похибок визначальними для похибок вимірювань є третя і четверта властивості, які проявляються тим виразніше, чим більше число вимірювань в даному ряді. Але не всім випадковим похибкам характерними є перераховані властивості, про що буде вказано пізніше.

Якщо середнє арифметичне з суми випадкових похибок даного ряду не прагне до нуля і є значним за своєю величиною, тобто

$$\frac{[\Delta]}{n} = A \neq 0, \qquad (2.4)$$

то це свідчить про те, що вплив систематичних похибок на результати вимірів повністю не включено. Величина систематичної похибки може бути наближено визначена за формулою (2.4) і виключена з рядів вимірювань. Маркшейдер повинен виявити джерело появи систематичних похибок і усунути його.

2.2. Принцип арифметичної середини

Нехай дано результати рівноточних вимірювань деякої величини l_1, l_2, $l_3 \ldots l_n$, істинне значення якої L. Різниця між виміряним і істинним значенням дає нам істинну випадкову похибку:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= l_1 - L \\ \Delta_2 &= l_2 - L \\ \Delta_3 &= l_3 - L \\ \Delta_n &= l_n - L \end{aligned}\right\}. \tag{2.5}$$

Склавши ліві і праві частини рівностей (2.5):

$$[\Delta] = [l] - Ln \tag{2.6}$$

і поділивши на n, отримаємо:

$$\frac{[\Delta]}{n} = \frac{[l]}{n} - L. \tag{2.7}$$

Позначимо

$$\frac{[l]}{n} = X, \tag{2.8}$$

$$\frac{[\Delta]}{n} = W, \tag{2.9}$$

де X – середнє арифметичне з даного ряду рівноточних вимірювань або арифметична середина;

W – середнє арифметичне з істинних випадкових похибок результатів даного ряду вимірювань або істинна випадкова похибка арифметичної середини.

Згідно прийнятим позначенням формула (2.7) прийме вигляд:

$$W = X - L. \tag{2.10}$$

На основі четвертої властивості випадкових похибок можна:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[\Delta]}{n} = \lim_{n\to\infty} W = 0. \tag{2.11}$$

Тоді при $n \to \infty$ $X \to L$ тобто **середнє арифметичне із результатів рівноточних вимірювань однієї і тієї ж величини прагне**

до істинного значення цієї величини при безмежному збільшені числа вимірів. Це положення і відображує принцип арифметичної середини.

Середнє арифметичне з даного ряду рівноточних вимірювань приймається за найбільш надійне значення при кінцевому числі вимірів, так як у цьому випадку відбувається компенсація випадкових похибок і отриманий результат кращий, вірніший і надійніше характеризує дійсні розміри виміряного об'єкту.

Безпосереднє застосування формули (2.8) для визначення середнього арифметичного приводить до громіздких вирахувань, які можна спростити наступним чином. Візьмемо деяке наближене значення l_0. яке близьке до виміряних величин від наближеного:

$$\left.\begin{array}{l} l_1 - l_o = l'_1 \\ l_2 - l_o = l'_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ l_n - l_o = l'_n \end{array}\right\}. \qquad (2.12)$$

Склавши ліві і праві частини рівнянь (2.12) отримаємо:

$$[l] - l_o n = [l']. \qquad (2.13)$$

Розділивши всі члени рівняння (2.13) на n, отримаємо:

$$X = l_o + \frac{[l']}{n}. \qquad (2.14)$$

Формула (2.14) є робочою для обчислення середнього арифметичного.

Приклад. Знайти середнє арифметичне значення результатів вимірювань довжини лінії, приведених в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

№ з/п	l, м	l', мм	№ з/п	l, м	l', мм
1	27,483	+3	4	27,484	+4
2	27,485	+5	5	27,481	+1
3	27,482	+2	6	27,483	+3
l_o	27,480				$[l'] = 18$

Прийнявши за наближене значення $l_o = 27{,}480$ м за обчисленими відхиленнями l', визначаємо середнє значення:

$$\frac{[l']}{n} = \frac{18}{6} = +3 \text{ мм},$$

тоді

$$X = l_o + \frac{[l']}{n} = 27{,}480 + 0{,}003 = 27{,}483 \text{ м}.$$

2.3. Оцінка точності результатів вимірювань. Середня квадратична похибка

Однією з основних задач теорії похибок та способу найменших квадратів є оцінка впливу неуникних похибок вимірювань на отримані результати, тобто оцінка точності результатів безпосередніх вимірювань і результатів їх обробки. Для виконання оцінки точності, тобто для характеристики впливу умов вимірювань на отримані результати, необхідно мати істинні похибки вимірювань.

Кожна з істинних випадкових похибок, характеризуючи точність відповідного вимірювання, не може характеризувати всієї різноманітності похибок, можливих при даних умовах вимірювань. А тому при оцінці точності вимірювань повинні бути враховані всі похибки даного ряду.

Висновок про точність виконаних вимірювань можна отримати за ступенем різниці результатів вимірювань: чим більше розкидані результати вимірювань в ряді, тим сильніше вони відрізняються один від одного, тим сильніша дисперсія (розсіювання) ряду, тим менш точні вимірювання. Щоб робити висновки про вплив неуникних похибок вимірювань на отриманий результат, необхідно виконувати оцінку результату числовим виразом. Для цієї мети можна скористатися середнім арифметичним із абсолютних значень похибок даних рядів, тобто середньою похибкою:

$$\Theta = \frac{[|\Delta|]}{n}. \tag{2.15}$$

Але середнє арифметичне із абсолютних значень істинних похибок є недостатньо чутливим до наявності крупних похибок.

Якщо взяти дві групи вимірювань, виконаних в тотожних умовах, які відрізняються лише числом вимірювань, то величини, які характеризують точність цих вимірювань, повинні бути однаковими, незалежно від числа спостережень в групах. Ймовірно, що зі зміною умов спостережень в одній з груп величини, що характеризують точність вимірювань, повинні бути різними навіть при однаковому числі спостережень у групах.

А тому доцільно для оцінки точності спостережень застосувати такий критерій, який би більш відчутно реагував на порівняно крупні похибки. Цій вимозі відповідає **середня квадратична похибка**, яка обчислюється за формулою:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}, \tag{2.16}$$

тобто **середня квадратична похибка ряду рівноточних вимірювань дорівнює кореню квадратному із суми квадратів істинних похибок цього ряду, поділеної на число всіх вимірювань**.

Середня квадратична похибка характеризується тим, що при додаванні квадратів істинних похибок $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2$ не приходиться враховувати їх знаку; більші за абсолютною величиною похибки надають при піднесенні в квадрат і більший вплив, а знак середньої квадратичної похибки ± відповідає природі випадкових похибок.

При $n \to \infty$ величина m буде прагнути до деякої межі, обумовленої умовами вимірювань,

$$\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} = m_o, \tag{2.17}$$

і буде постійною для цих умов.

Аналогічно тому, як середнє арифметичне X при кінцевому числі спостережень не дорівнює істинному значенню вимірюваної величини L, так і обчислена середня квадратична похибка m за істинними похибками Δ кінцевого ряду спостережень не буде дорівнювати значенню m_o, яке називається стандартом.

Так як ніколи не буває безкінечного ряду спостережень, стандарт m_o залишається невідомим і приходиться користуватися його приблизним значенням m, яке визначається з похибкою m_m, що обчислюється за приблизною формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2n}}, \qquad (2.18)$$

або у відносному виразі:

$$\frac{m_m}{m} = \frac{1}{\sqrt{2n}}. \qquad (2.19)$$

Якщо цю залежність виразити графічно, то з збільшенням n крива наближується до вісі абсцис, причому це наближення відбувається досить швидко на певному інтервалі (приблизно до n = 10), як це показано на рис. 2.1.

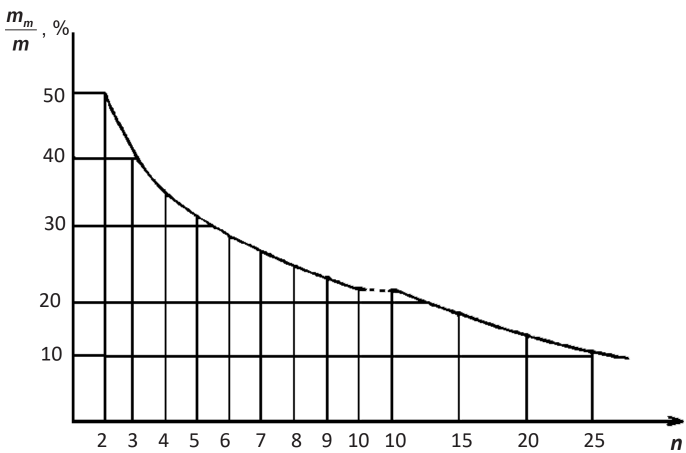

Рис. 2.1. Графік зміни відносної похибки числа вимірів

Подальше збільшення числа спостережень уточнює значення середньої квадратичної похибки в незначній мірі. Таким чином, середня квадратична похибка при деякому n набуває стійкого значення.

За величиною стандарта m_o, що визначає умови вимірювань, можна знайти граничну похибку $\Delta_{гр}$, яка також залежить від умов вимірювань. Ця залежність може бути виражена рівнянням:

$$\Delta_{гр} = K \cdot m_o, \qquad (2.20)$$

в якій K – деяка постійна.

Гранична похибка – це таке абсолютне значення випадкової похибки, якого не може перевищити ні одна з істинних похибок даного ряду. Похибки, більші граничної, потрібно рахувати грубими.

Теорією ймовірності доказано, що поява в однократному вимірюванні випадкової похибки, більшої за абсолютною величиною утроєної середньої квадратичної похибки мало ймовірно, а тому в практиці маркшейдерської справи і геодезичних робіт величина *К* приймається 3.

Тоді гранична похибка буде дорівнювати:

$$\Delta_{\text{гр}} = 3m_o. \tag{2.21}$$

Але так як величина стандарту m_o невідома, гранична похибка може бути обчислена за середньою квадратичною похибкою m, знайденої із достатньо великого числа n похибок:

$$\Delta_{\text{гр}} = 3m. \tag{2.22}$$

При вирахуванні допустимих нев’язок в маркшейдерських зйомках користуються в якості нев’язки її подвоєним середнім квадратичним значенням:

$$\Delta_{\text{гр}} = 2m. \tag{2.23}$$

2.4. Середня і ймовірна похибки

Для оцінки точності виконаних вимірювань інколи застосовується середня Θ і так звана ймовірна похибка r.

Середня похибка визначається за формулою (2.15).

В теорії ймовірності доведено співвідношення між середньою похибкою і стандартом при $n \to \infty$:

$$\Theta = m_o\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}7979m_o \approx \frac{4}{5}m_o. \tag{2.24}$$

Ймовірною похибкою називається таке значення випадкової похибки при даних умовах рівноточних вимірювань, по відношенню до якого число похибок, більших її за абсолютною величиною, рівне числу похибок менших. Якщо розмістити випадкові похибки даного ряду вимірювань у зростаючому порядку за їх абсолютними величинами, то ймовірна похибка при непарному числі похибок буде в середині цього ряду.

Якщо ж число похибок даного ряду парне, то ймовірну похибку можна обчислити як середнє арифметичне зі двох суміжних похибок, які стоять в середині. Значення ймовірної похибки може бути визначено за формулою, яка відображає залежність між нею і стандартом, при $n \to \infty$:

$$r = 0{,}6745 m_o \approx \frac{2}{3} m_o. \qquad (2.25)$$

Для ілюстрації зв'язку між середньою ймовірною похибкою і середньою квадратичною похибками розглянемо числовий приклад.

Приклад. В таблиці 2.2 приведені нев'язки *W* в сумі кутів 60 трикутників тріангуляції I класу. Прослідкуємо на цих даних прояв властивостей випадкових похибок і виконаємо оцінку точності.

Таблиця 2.2

Нев'язки *W* в трикутниках тріангуляції

№ з/п	W	W^2	№ з/п	W	W^2	№ з/п	W	W^2
1	–1″38	1,904	21	+0″,38	0,144	41	–0″,41	0,168
2	+0,82	0,672	22	+0,87	0,757	42	+0,98	0,960
3	–1,00	1,000	23	–1,20	1,440	43	–0,54	0,292
4	+0,45	0,202	24	+0,76	0,578	44	+0,55	0,302
5	–1,95	3,802	25	+0,73	0,533	45	+0,34	0,116
6	–0,79	0,624	26	–0,79	0,624	46	–0,05	0,002
7	–0,28	0,078	27	–0,33	0,109	47	+0,48	0,230
8	+0,51	0,260	28	–0,26	0,068	48	–0,14	0,020
9	–0,22	0,048	29	+0,97	0,941	49	–1,06	1,124
10	+1,04	1,082	30	+0,25	0,062	50	–1,04	1,082
11	–0,41	0,168	31	–0,51	0,518	51	–0,63	0,397
12	–0,73	0,533	32	–0,21	0,044	52	+0,75	0,562
13	–1,55	2,402	33	–0,72	0,260	53	+1,99	3,960
14	+2,03	4,121	34	+0,46	0,212	54	–1,36	1,850
15	+0,56	0,314	35	+0,35	0,122	55	–0,97	0,941
16	–1,57	2,465	36	–0,45	0,202	56	+0,88	0,774
17	+1,31	1,716	37	–0,14	0,020	57	+1,13	1,277
18	+0,09	0,008	38	+0,03	0,001	58	+0,74	0,548
19	–0,73	0,533	39	+0,08	0,006	59	–0,26	0,068
20	+0,76	0,578	40	–0,41	0,168	60	+0,61	0,372

$$\left[\left|W\right|\right] = 42''99, \qquad \left[\left|W^2\right|\right] = 44{,}360$$

Аналіз даних таблиці 2.2 дозволяє зробити наступні висновки:

1. У даному ряді похибок немає ніякої помітної закономірності розподілу їх ні за величиною ні за знаком.

2. Розподіл числа похибок за їх абсолютними величинами відповідає другій властивості, що підтверджується наступними даними:

від 0 до 0″,5	від 0,5 до 1″	від 1 до 1″,5	від 1,5 до 2″	від 2″ і більше
23	24	8	4	1

3. Число позитивних похибок 29, їх сума дорівнює +20″,90, число від'ємних похибок 31, їх сума дорівнює −22″,09, що відповідає третій властивості випадкових похибок.

4. Середнє арифметичне із суми випадкових похибок приведеного ряду дорівнює:

$$\frac{[W]}{n} = \frac{-1{,}19}{60} = -0''02.$$

Отримана величина мала, що підтверджує четверту властивість випадкових похибок.

Середня квадратична похибка m суми кутів в одному трикутнику може бути обчислена за нев'язками W, при підстановці у формулу (2.16), так як нев'язки є істинними похибками:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[WW]}{n}} = \pm\sqrt{\frac{44.360}{60}} = \pm 0'',86.$$

Похибка m_m отриманої середня квадратичної похибки m буде дорівнювати:

$$m = \frac{m}{\sqrt{2n}} = \pm\frac{0.86}{10.95} = \pm 0'',078.$$

Середня похибка за абсолютним значенням нев'язки за формулою (2.15) дорівнює:

$$\Theta = \frac{[|W|]}{n} = \frac{42''99}{60} = \pm 0'',72.$$

Якщо записати нев'язки W, приведені в таблиці 2.2, у зростаючому порядку за їх абсолютними значеннями, то на середині ряду буде знаходитися ймовірна похибка r.

У нашому прикладі 30-а похибка дорівнює 0,63, 31-а –0,72, тоді:

$$r = \frac{0,63 + 0,72}{2} = \pm 0'',68.$$

Гранична похибка $\Delta_{гр} = 3m = \pm 2,58$.

Співставляючи її з істинними випадковими похибками даного ряду бачимо, що ні одна з них не перевищує за абсолютною величиною граничну похибку.

Дальше визначаємо значення середньої Θ і ймовірної r похибок за формулами зв'язку їх з стандартом, використовуючи для цього значення середньої квадратичної похибки.

За формулою (2.24):

$$\Theta \approx= \frac{4}{5} m = \pm 0'',69.$$

За формулою (2.25):

$$r \approx= \frac{2}{3} m = \pm 0'',57.$$

Співставляючи отримані значення Θ і r з раніше обчисленими, переконуємося в їх достатній збіжності.

2.5. Середні квадратичні похибки функцій виміряних величин

У практиці маркшейдерської справи і геодезії приходиться зустрічатися з випадками, коли відшукувана величина не може бути виміряна безпосередньо. Так, наприклад, довжина лінії підземного теодолітного ходу, яка перевищує довжину вимірювального приладу, може бути визначена тільки як сума безпосередньо виміряних окремих інтервалів. Об'єм вугілля у відвалі на складі, форма якого близька до конічної може бути визначений як добуток квадрата радіуса основи на одну третину висоти і на π = 3,14.

В цих випадках відшукувані величини визначаються шляхом обчислення їх через безпосередньо виміряні незалежні величини. Так як безпосередні вимірювання супроводжуються неминучими похибками, то і значення обчисленої функції буде знайдено з деякою похибкою.

Допустимо, що над декількома незалежними величинами $l_1, l_2, l_3 \ldots l_n$ виконується ряд дій, вказаних видом деякої функції *F*:

$$У = F\left(L_1, L_2, \ldots L_n\right). \qquad (2.26)$$

Знаючи $m_1, m_2, \ldots m_n$ – середні квадратичні похибки виміряних аргументів $l_1, l_2, l_3 \ldots l_n$ визначити m_y – середню квадратичну похибку функції У.

Розглянемо цю задачу для декількох найпростіших функцій.

I. Функція добутку безпосередньо виміряного аргумента на постійній коефіцієнт:

$$У = aL. \qquad (2.27)$$

Прикладом може слугувати довжина кола *C* = π*D.*

Дослідженнями встановлено, що **середня квадратична похибка добутку постійної величини на безпосередньо виміряний аргумент дорівнює добутку цієї постійної на середню квадратичну похибку виміряного аргумента.**

$$m_y = am. \qquad (2.28)$$

Приклад. Для визначення довжини кола *C* виміряно його діаметр з середньою квадратичною похибкою m_D = ±6 мм. Потрібно визначити середню квадратичну похибку m_C обчисленої довжини кола.

Довжина кола обчислюється за формулою *C* = π*D.*

Згідно вищевикладеним визначенням $m_C = \pi\, m_D$, таким чином

$$m_C = \pm 3{,}14 \cdot 6 = \pm 18{,}8 \text{ мм}.$$

II. Функція суми (або різниці) двох безпосередньо виміряних величин:

$$У = L_1 \pm L_2. \qquad (2.29)$$

Дослідженнями встановлено, що квадрат середньої квадратичної похибки алгебраїчної суми, двох незалежних аргументів дорівнює сумі квадратів середніх квадратичних похибок цих доданків:

$$m_y^2 = m_1^2 + m_2^2. \qquad (2.30)$$

Наприклад, виміряні дві довжини l_1 = 20,575 м з m_1 = ±0,005 м і l_2 = 20,830 м з m_2 = ±0,006 м.

Сума цих двох ліній S = $l_1 + l_2$ = 46,405 м має середню квадратичну похибку $m_s^2 = m_1^2 + m_2^2 = 0{,}005^2 + 0{,}006^2$, звідкіля m_s = ±0,008 м.

Різниця цих двох ліній $d = l_1 - l_2$ = 5,255 м, її середня квадратична похибка $m_d^2 = m_1^2 + m_2^2$, звідкіля m_d = ±0,008 м.

Якщо $m_1 = m_2 = m$, то

$$m_y = m\sqrt{2}, \tag{2.31}$$

тобто **середня квадратична похибка алгебраїчної суми двох незалежних виміряних с однаковою точністю величин в $\sqrt{2}$ раз більше середньої квадратичної похибки одного доданка**.

ІІІ. Функція алгебраїчної суми декількох доданків:

$$Y = L_1 \pm L_2 \pm \ldots \pm L_n, \tag{2.32}$$

Для будь-якого числа членів функції (2.32) правомірним є висновок, що квадрат середньої квадратичної похибки алгебраїчної суми декількох додатків дорівнює сумі квадратів середніх квадратичних похибок доданків, тобто:

$$m_y^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + \ldots + m_n^2. \tag{2.33}$$

Якщо при цьому середні квадратичні похибки аргументів будуть рівні між собою $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = m$, то

$$m_y = m\sqrt{n}, \tag{2.34}$$

тобто **середня квадратична похибка алгебраїчної суми n рівноточно виміряних величин в $\sqrt{n}$ раз більше похибки одного доданка.**

Приклад 1. В нівелірному ході отримані перевищення між чотирьма суміжними реперами з відповідними середніми квадратичними похибками:

h_1 = +1,347 м, m_{h1} = ±3,6 мм

h_2 = +0,863 м, m_{h2} = ±4,3 мм

h_3 = −3,275 м, m_{h3} = ±5,7 мм

Потрібно визначити загальне перевищення між крайніми реперами і його середню квадратичну похибку.

Загальне перевищення обчислюється як сума перевищень між суміжними реперами за формулою:

$$h = h_1 + h_2 + h_3 = +1{,}347 + 0{,}863 - 3{,}275 = -1{,}065 \text{ м.}$$

Середня квадратична похибка цієї функції визначається за формулою (2.32):

$$m_h^2 = m_{h_1}^2 + m_{h_2}^2 + m_{h_3}^2.$$

Звідкіля

$$m_h = \pm\sqrt{(3{,}6)^2 + (4{,}3)^2 + (5{,}7)^2} \pm \sqrt{63{,}74};$$

$$m_h = \pm 8 \text{ мм.}$$

Приклад 2. У витягнутому підземному теодолітному ході з приблизно рівними сторонами виміряні кути з середньою квадратичною похибкою $m_\beta = \pm 20''$. Визначити середню квадратичну похибку обчисленого дирекційного кута дев'ятої сторони ходу $m_{\alpha 9}$, рахуючи при цьому, що дирекційний кут вихідної сторони був безпомилковим.

Дирекційний кут дев'ятої сторони:

$$\alpha_9 = \alpha_o + \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_9 \pm 180^\circ \cdot 9.$$

Середня квадратична похибка цієї функції буде дорівнювати:

$$m_{\alpha 9}^2 = m_{\alpha o}^2 + m_{\beta 1}^2 + m_{\beta 2}^2 + ... + m_{\beta 9}^2,$$

але $m_{\alpha o} = 0$, а $m_{\beta 1} = m_{\beta 2} = ... = m_{\beta 9} = m_\beta$.

Тоді $m_{\alpha 9} = m_\beta \sqrt{9} = 3 m_\beta$.

Звідки $m_{\alpha 9} = \pm 3 \cdot 20'' = \pm 60''$.

IV. Функції лінійного виду:

$$y = a_1 L_1 \pm a_2 L_2 \pm .... \pm a_n L_h, \qquad (2.35)$$

в якій a_1, $a_2, \ldots . a_n$ – деякі постійні позитивні коефіцієнти.

Середні квадратичні похибки незалежних аргументів відповідно m_1, $m_2, \ldots m_n$.

У цьому випадку середня квадратична похибка функції лінійного виду обчислюється за формулою:

$$m_y^2 = a_1^2 \cdot m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + ... + a_n^2 m_h^2 \,, \qquad (2.36)$$

тобто **квадрат середньої квадратичної похибки функції лінійного виду дорівнює сумі добутків квадратів коефіцієнтів на квадрати середніх квадратичних похибок відповідних аргументів.**

У випадку рівноточного вимірювання аргументів, коли $m_1 = m_2 = \ldots m_n = m$, середня квадратична похибка її буде дорівнювати:

$$m_y = m\sqrt{[aa]}. \qquad (2.37)$$

Приклад. Визначити середню квадратичну похибку перевищення, найденого геометричним нівелюванням при двох горизонтах інструмента, якщо середня квадратична похибка відліку по рейці m.

Середнє перевищення з двох горизонтів інструменту визначається за формулою:

$$h = \frac{(l_1 - l_2) + (l_1' - l_2')}{2}, \qquad (2.38)$$

в якій l_1 і l_2 – відліки по рейкам при першому горизонті;

l_1' і l_2' – відліки по рейкам при другому горизонті.

Отриману формулу можна записати в наступному вигляді:

$$h = \frac{1}{2} l_1 - \frac{1}{2} l_2 + \frac{1}{2} l_1' - \frac{1}{2} l_2' \,,$$

тобто будемо мати лінійну функцію, середня квадратична похибка якої згідно (2.36) дорівнює.

$$m_h^2 = \frac{1}{4} \cdot m^2 + \frac{1}{4} m^2 + \frac{1}{4} m^2 + \frac{1}{4} m^2$$

або

$$m_h = m\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \,.$$

Звідкіля $m_h = m$.

V. Функція загального виду:

$$Y = F\ (L_1,\ L_2,\ \dots\ L_3). \qquad (2.39)$$

Теоретичними дослідженнями з використанням способу найменших квадратів встановлено, що для функції загального виду середню квадратичну похибку можна обчислити користуючись формулою:

$$m_y^2 = \left(\frac{dF}{dL_1}\right)^2 m_1^2 + \left(\frac{dF}{dL_2}\right)^2 m_2^2 + \dots + \left(\frac{dF}{dL_n}\right)^2 m_n^2, \qquad (2.40)$$

тобто **квадрат середньої квадратичної похибки функції загального виду незалежних величин дорівнює сумі добутків квадратів приватних похідних функції по кожному аргументу на квадрати середніх квадратичних похибок відповідних аргументів**.

Приклад. Знайти середні квадратичні похибки прирощень координат ΔX і ΔY, якщо відомі середні квадратичні похибки m_l і m_α, довжини лінії l і дирекційного кута α:

$$l \pm m_l = 100{,}00 \pm 0{,}02 \text{ м},$$

$$\alpha \pm m_\alpha = 30°00' \pm 1'.$$

Напишемо функції:

$$\Delta X = l\cos a;\ \ \Delta У = l\sin a.$$

За формулою (2.40) знайдемо:

$$\text{а)}\ \ m_{\Delta x}^2 = \left(\frac{d\Delta x}{dl}\right)^2 \cdot m_l^2 + \left(\frac{d\Delta x}{d\alpha}\right)^2 \frac{m_\alpha^2}{\rho^2};$$

$$\text{б)}\ \ m_{\Delta y}^2 = \left(\frac{d\Delta y}{dl}\right)^2 m_l^2 + \left(\frac{d\Delta y}{d\alpha}\right)^2 \frac{m_\alpha^2}{\rho^2}.$$

Знайдемо похідні:

$$\frac{d\Delta x}{dl} = \cos\alpha;\ \frac{d\Delta x}{\alpha} = -l\sin\alpha;\ \frac{d\Delta y}{dl} = \sin\alpha;\ \frac{d\Delta y}{d\alpha} = l\cdot\cos\alpha.$$

Підставивши похідні у рівняння (а) і (б) отримаємо:

$$m_{\Delta x}^2 = \cos^2\alpha \cdot m_l^2 + l^2 \cdot \sin^2\alpha \frac{m_\alpha^2}{\rho^2},$$

$$m^2_{\Delta y} = \sin^2\alpha \cdot m^2_l + l^2 \cdot \cos^2\alpha \frac{m^2_\alpha}{\rho^2},$$

або в числових значеннях:

$$m_{\Delta x} = \pm\sqrt{\left(0{,}87 \cdot 0{,}020\right)^2 + \left(\frac{100 \cdot 0{,}5 \cdot 1}{3438}\right)^2} = \pm 0{,}023 \text{ м},$$

$$m_{\Delta y} = \pm\sqrt{\left(0{,}5 \cdot 0{,}020\right)^2 + \left(\frac{100 \cdot 0{,}87 \cdot 1}{3438}\right)^2} = \pm 0{,}027 \text{ м}.$$

2.6. Сумісна дія декількох незалежних джерел похибок

Результати вимірів супроводжуються випадковими похибками, які залежать від цілого ряду факторів і походять від різних незалежних джерел. У цьому випадку істинні похибки вимірювань будуть являти собою алгебраїчні суми незалежних елементарних істинних похибок, тобто:

$$\Delta^{(i)} = \Delta_1^{(i)} + \Delta_2^{(i)} + \ldots + \Delta_к^{(i)}, \ \left(i = 1{,}2, \ \ldots \ к\right). \qquad (2.41)$$

Аналогічні співвідношення між істинними похибками були отримані при розгляді функцій алгебраїчної суми двох аргументів. А тому середня квадратична похибка із-за сумісної дії декількох незалежних джерел похибок визначаються за формулою:

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_к^2, \qquad (2.42)$$

в якій m_1, m_2 … $m_к$ – середні квадратичні похибки, обумовлені незалежними джерелами.

Таким чином, якщо для якої-небудь величини відомі середні квадратичні похибки m_1, m_2 … $m_к$, які походять від різних незалежних джерел, то квадрат середньої квадратичної похибки m, яка походить від сукупного впливу всіх джерел, дорівнює сумі квадратів середніх квадратичних похибок окремих джерел.

Так, при вимірюванні напрямку теодолітом на його точність будуть впливати: похибка відліку з середнім квадратичним значенням $m_в$, похибка візирування $m_{віз}$ і похибка центрування

$m_ц$. Тоді середня квадратична похибка із-за сукупного впливу цих похибок у відповідності з формулою (2.42) визначається за формулою:

$$m_\beta = \sqrt{m_в^2 + m_{віз}^2 + m_ц^2}\,, \qquad (2.43)$$

Всі викладені формули похибок можуть бути застосовані тільки до функцій, аргументами яких є незалежні змінні.

2.7. Відносні похибки

Середня квадратична похибка m і гранична похибка $\Delta_{гр}$, які називаються абсолютними, часто не дають повної характеристики виконаних вимірювань. Так, наприклад, якщо говорити що довжина деякої лінії виміряна з середньою квадратичною похибкою ±5 мм, то цього ще недостатньо, щоб судити про те, яка точність вимірювання.

Для цього потрібно знати також значення виміряної лінії.

Якщо, наприклад, з вказаною вище похибкою виміряна лінія в 50 м, то якість вимірювань можна характеризувати відношенням похибки m до довжини вимірюваної величини l:

$$\frac{m}{l} = \frac{1}{\frac{l}{m}}\,, \qquad (2.44)$$

або, позначивши $\frac{l}{m}$ через N, отримаємо:

$$\frac{m}{l} = \frac{1}{N}\,. \qquad (2.45)$$

Для вказаного прикладу будемо мати:

$$\frac{1}{N} = \frac{5}{50000} = \frac{1}{10000}\,.$$

Цей дріб називається відносною похибкою. Він завжди виражається абстрактним числом, що являє собою простий дріб, чисельник якого дорівнює одиниці, а знаменник виражає відношення значення виміряної величини до значення похибки.

У відносній формі можна виразити не тільки похибки лінійні, а й кутові (в радіанах). Це дозволяє співставляти точності кутових і лінійних вимірювань.

Нехай довжина l деякої лінії AB, що дорівнює 40 м, виміряна з середньою квадратичною похибкою m = ±8 мм, напрямок цієї лінії визначений з похибкою $m_\alpha = \pm 0',5$.

Визначаємо точність положення точки B (віддаленої точки). Під впливом похибки у вимірюванні відстані AB точка B отримає поздовжнє зміщення, яке дорівнює ±8 мм, що у відносному значенні складає:

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{5000}.$$

Під впливом похибки напрямку Δ_α точка B отримає поперечне зміщення:

$$q = \frac{\Delta_\alpha}{\rho} \cdot l, \tag{2.46}$$

або у відносній мірі:

$$\frac{m_q}{l} = \frac{1}{\frac{\rho'}{m_\alpha}} = \frac{1}{\frac{3438}{0',5}} = \frac{1}{6876},$$

де $\rho' = 3438$.

Співставляючи відносні похибки, бачимо, що напрямок лінії AB виміряно точніше, ніж її довжина.

2.8. Середня квадратична похибка арифметичної середини

За найбільш надійне значення із ряду рівноточних вимірювань приймається середнє арифметичне значення:

$$X = \frac{[l]}{n}. \tag{2.47}$$

В розгорнутому вигляді воно може бути записано наступним чином:

$$X = \frac{1}{n}l_1 + \frac{1}{n}l_2 + \ldots + \frac{1}{n}l_n. \tag{2.48}$$

Цей вираз являє собою лінійну функцію, у якої $\frac{1}{n}$ є коефіцієнтом, який дорівнює умові:

$$\left[\frac{1}{n}\right] - 1 = 0.$$

Якщо середня квадратична похибка одного вимірювання m, а середня квадратична похибка арифметичної середини M, то у відповідності з формулою (2.34) отримаємо:

$$M^2 = \frac{1}{n^2}m^2 + \frac{1}{n^2}m^2 + \ldots + \frac{1}{n^2}m^2 = \frac{n}{n^2}m^2 = \frac{m^2}{n}.$$

Звідки

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{2.49}$$

Тобто середня квадратична похибка арифметичної середини з результатів незалежних рівноточних вимірювань в $\sqrt{n}$ разів менша середньої квадратичної похибки одного вимірювання.

З формули (2.49) видно, що з збільшенням числа вимірювань n зменшується вплив випадкових похибок на кінцевий результат, за який ми приймаємо середнє арифметичне.

Але зменшення впливу випадкових похибок на середнє арифметичне (тобто зменшення середньої квадратичної похибки *M)* відбувається не прямолінійно. Характер залежності між n і M можна встановити, якщо прийняти $m = 1$ і придавати в формулі (2.49) n різні значення (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	50	100
M	1,0	0,71	0,58	0,50	0,45	0,41	0,38	0,35	0,32	0,22	0,14	0,10

З даних таблиці 2.3 видно, що збільшення числа спостережень n доцільним є тільки до певної межі (10–20). Подальше збільшення числа спостережень буде в незначній мірі підвищувати точність середнього арифметичного X.

В зв'язку з цим для підвищення точності результату вимірювань не завжди потрібно іти по шляху збільшення їх числа. У разі випадків доцільніше покращувати умови вимірювань, наприклад: застосувати більш точні прилади, виконувати вимірювання в більш сприятливих зовнішніх умовах і т. д.

2.9. Відхилення вимірів від арифметичної середини, їх властивості та визначення за ними середньої квадратичної похибки

Всі розглянуті раніше формули оцінки точності виконаних рівноточних вимірювань передбачають відомими істині похибки Δ. Але у більшості випадків істинні значення виміряних величин L, а відповідно, і істинні випадкові похибки вимірювань Δ залишаються невідомими.

А тому на основі принципу арифметичної середини за найбільш надійне значення ми приймаємо середнє арифметичне з результатів рівноточних вимірювань X. Результати багатократних вимірювань $l_1, l_2, \ldots, l_n$, однієї і тієї ж величини будуть відрізнятися від їх середнього арифметичного на різниці:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 = l_1 - X \\ \delta_2 = l_2 - X \\ ------ \\ \delta_n = l_n - X \end{array}\right\}, \tag{2.50}$$

які називаються **ухиленнями від середнього арифметичного**.

Задача полягає в тому, щоб виконати оцінку точності рівноточних безпосередніх вимірювань однієї і тієї ж величини за ухиленнями від середнього арифметичного, які ми завжди маємо при наявності ряду вимірювань. Ймовірно, для даного ряду вимірювань ухилення від арифметичної середини будуть тим більш близькі до істинних похибок, чим ближча арифметична середина до істинного значення вимірюваної величини.

Якщо взяти різниці між середнім арифметичним X і виміряними l значеннями, то отримаємо поправки ε:

$$\left.\begin{array}{l} X - l_1 = \varepsilon_1 \\ X - l_2 = \varepsilon_2 \\ ------ \\ X - l_n = \varepsilon_n \end{array}\right\}, \tag{2.51}$$

або

$$\varepsilon_i = -(l_i - X),(i = 1, 2, \ldots n). \tag{2.52}$$

Підставивши замість виразу в скобках в (2.52) значення δ з виразу (2.50) отримаємо:

$$\varepsilon_i = -\delta_i \ (i = 1.2\ldots n), \tag{2.53}$$

Відповідно, поправка ε дорівнює за абсолютною величиною ухиленню δ, але з протилежним йому знаком.

Охарактеризуємо основні властивості ухилень від арифметичної середини.

Властивість перша. Алгебраїчна сума ухилень від середнього арифметичного для даного ряду рівноточних вимірів дорівнює нулю при будь-якому числі *n*.

Властивість друга. Сума квадратів |δδ| ухилень даного ряду виміряних величин від їх середнього арифметичного *X* завжди буде меншою від суми квадратів ухилень виміряних величин даного ряду [υυ] від будь-якого числа X^1, що не дорівнює середньому арифметичному.

Властивість третя. Сума квадратів ухилень завжди менша суми квадратів істинних похибок, тобто:

$$[\Delta\Delta] > [\delta\delta]. \tag{2.54}$$

На основі першої властивості ухилень від середнього арифметичного можна записати:

$$[\Delta\Delta] - n(X - L)^2 = [\delta\delta], \tag{2.55}$$

або
$$\left(X \mathrm{P} L\right) = \frac{[\Delta\Delta]}{n} - \frac{[\delta\delta]}{n}. \tag{2.56}$$

Після ряду перетворень отримаємо:

$$\omega^2 = m^2 - \frac{[\delta\delta]}{n}, \tag{2.57}$$

тобто, квадрат істинної похибки середнього арифметичного менший квадрата середньої квадратичної похибки окремого виміру даного ряду, що підтверджує правильність вибору арифметичної середини як найбільш надійного значення.

Теоретичними дослідженнями доведено, що:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-1}}, \tag{2.58}$$

тобто середня квадратична похибка даного ряду рівноточних вимірів дорівнює кореню квадратному із суми квадратів ухилень від арифметичної середини поділеної на число надлишкових вимірів.

Так як переважно справу маємо з обмеженим числом спостережень, то звичайно обчислені значення середньої квадратичної похибки m за обмеженим рядом ухилень не буде дорівнювати стандарту m_0 і визначається середньою квадратичною похибкою m_m, яка може бути обчислена за формулою:

$$m_m = \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}. \tag{2.59}$$

А середня квадратична похибка арифметичної середини за ухиленнями від неї визначається за формулою:

$$M = \pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n\cdot(n-1)}}\ . \tag{2.60}$$

Приклад. Для дослідження точності виміру горизонтальних кутів тридцяти секундним теодолітом кут в підземній виробці був виміряний 13 р азів, без зміни центрування теодоліта і сигналів. Результати вимірювання наведені в таблиці 2.4. Обчислити найбільш надійне значення виміряного кута, середню квадратичну похибку окремого виміру і середню квадратичну похибку середнього значення.

Таблиця 2.4

<table>
<tr><th>№ з/п</th><th>Результати вимірювань кутів</th><th>l', сек</th><th>δ, сек</th><th>$\delta\delta$</th><th>Формули та обчислення</th></tr>
<tr><td>1</td><td>177°44′23″</td><td>15</td><td>+7</td><td>49</td><td rowspan="16">$$\frac{[l']}{n}=\frac{103}{13}=8''$$ $$m=\pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n-1}}=$$ $$=\pm\sqrt{\frac{505}{12}}=\pm6''$$ $$m_m=\frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}=$$ $$=\frac{6}{\sqrt{2(13-1)}}=\pm1{,}2$$ $$M=\pm\sqrt{\frac{[\delta\delta]}{n\cdot(n-1)}}=$$ $$=\pm\sqrt{\frac{505}{13\cdot12}}=\pm1'',8$$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>23″</td><td>15</td><td>+7</td><td>49</td></tr>
<tr><td>3</td><td>23″</td><td>15</td><td>+7</td><td>49</td></tr>
<tr><td>4</td><td>15″</td><td>7</td><td>–1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>08″</td><td>0</td><td>–8</td><td>64</td></tr>
<tr><td>6</td><td>15″</td><td>7</td><td>–1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7</td><td>08″</td><td>0</td><td>–8</td><td>64</td></tr>
<tr><td>8</td><td>08″</td><td>0</td><td>–8</td><td>64</td></tr>
<tr><td>9</td><td>23″</td><td>15</td><td>+7</td><td>49</td></tr>
<tr><td>10</td><td>08″</td><td>0</td><td>–8</td><td>64</td></tr>
<tr><td>11</td><td>15″</td><td>7</td><td>–1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>12</td><td>23″</td><td>15</td><td>+7</td><td>49</td></tr>
<tr><td>13</td><td>15″</td><td>7</td><td>–1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>l_0</td><td>177°44′08″</td><td rowspan="2">103</td><td>+35</td><td rowspan="2">505</td></tr>
<tr><td>$\frac{[l']}{n}$</td><td>8″</td><td>–36</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td colspan="2">$[\delta]=+1$</td></tr>
<tr><td>X</td><td colspan="2">177°44′16″</td><td colspan="2">$[|\delta|]=71$</td><td></td></tr>
</table>

2.10. Визначення середньої квадратичної похибки за результатами однорідних двойних вимірів

У маркшейдерській практиці часто зустрічаються випадки, коли одна і таж величина виміряна незалежно два рази, тобто маємо двойні виміри однорідних величин. Наприклад, вимірювання кутів і довжин в підземних теодолітних ходах, визначення перевищень між маркшейдерськими точками тощо. Такі дані на кожній шахті мають місце у великих кількостях.

Виникає задача про використання їх для оцінки точності виконаних вимірів.

Нехай маємо результати рівноточних подвійних незалежних вимірів однорідних величин:

$$\left.\begin{array}{l} l_1', l_2' \dots l_n'; \\ l_1'', l_2'' \dots l_n''; \end{array}\right\}. \tag{2.61}$$

Складемо їх різниці:

$$\left.\begin{array}{l} l_1' - l_1'' = d_1; \\ l_2' - l_2'' = d_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ l_n' - l_n'' = d_n; \end{array}\right\}, \tag{2.62}$$

де d_1, $d_2 \dots d_n$ є істинними похибками різниць.

Наявність систематичних похибок в різницях двойних вимірів d можна виявити по переваганню в них одного знаку і по нерівності нулю величини $\frac{|d|}{n}$ при значному числі n.

Щоб робити висновок про вплив тільки випадкових похибок на результати вимірювань потрібно виключити з різниць систематичні похибки. Для цього визначимо величину систематичної похибки, яка приходиться на одну різницю:

$$\frac{[d]}{n} = d_0. \tag{2.63}$$

Виправляючи на неї всі різниці, отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} d_1 - d_0 &= d_1' \\ d_2 - d_0 &= d_2' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_n - d_0 &= d_n' \end{aligned}\right\}. \qquad (2.64)$$

Дослідженнями встановлено, що середня квадратична похибка за результатами однорідних подвійних вимірів може бути обчислена за формулою:

$$m_m = \pm\sqrt{\frac{[d'd']}{2(n-1)}}. \qquad (2.65)$$

Необхідно відмітити, що при наявності однорідних подвійних рівноточних вимірів, на їх різниці деякі джерела похибок взагалі не будуть впливати із-зі їх компенсації. В різницях будуть виключені односторонньо діючі систематичні похибки. А тому різниця *d* не виявляє повністю впливу всіх джерел похибок кожного окремого вимірювання, внаслідок цього значення середньої квадратичної похибки одного виміру, обчислене за формулою (2.65), як правило, є зменшеним.

Приклад. Визначити середню квадратичну похибку вимірювання довжини ліній за різницями подвійних вимірювань (*l' і l''*), наведених в таблиці 2.5.

Таблиця 2.5

<table>
<tr><th rowspan="2">№ ліній</th><th colspan="2">Довжина ліній</th><th rowspan="2">d, мм</th><th rowspan="2">d', мм</th><th rowspan="2">d'd'</th><th rowspan="2">Формули та обчислення</th></tr>
<tr><th>l'</th><th>l''</th></tr>
<tr><td>1</td><td>27,463</td><td>27,465</td><td>–2</td><td>–2,5</td><td>6,25</td><td rowspan="12">$d_0 = \frac{[d]}{n} = \frac{5}{10} \pm 0.5$ мм

$m = \pm\sqrt{\frac{[d'd']}{2(n-1)}}$

$m = \pm\sqrt{\frac{74.5}{18}} = 2{,}1$ мм</td></tr>
<tr><td>2</td><td>27,187</td><td>27,184</td><td>+3</td><td>+2,5</td><td>6,25</td></tr>
<tr><td>3</td><td>27,921</td><td>27,917</td><td>+4</td><td>+3,5</td><td>12,25</td></tr>
<tr><td>4</td><td>27,358</td><td>27,355</td><td>+3</td><td>+2,5</td><td>6,25</td></tr>
<tr><td>5</td><td>27, 638</td><td>27, 640</td><td>–2</td><td>–2,5</td><td>6,25</td></tr>
<tr><td>6</td><td>27,746</td><td>27,743</td><td>+3</td><td>+2,5</td><td>6,25</td></tr>
<tr><td>7</td><td>27,139</td><td>27,142</td><td>–3</td><td>–3,5</td><td>12,25</td></tr>
<tr><td>8</td><td>27,381</td><td>27,383</td><td>–2</td><td>–2,5</td><td>6,25</td></tr>
<tr><td>9</td><td>27,247</td><td>27,244</td><td>+3</td><td>+2,5</td><td>6,25</td></tr>
<tr><td>10</td><td>27,833</td><td>27,835</td><td>–2</td><td>–2,5</td><td>6,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>+16
–11</td><td>+13,5
–13,5</td><td rowspan="2">74,50</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td><td>$[d] = +5$</td><td>00</td></tr>
</table>

2.11. Середня квадратична похибка округлення

Визначення середніх значень із результатів вимірів супроводжуються похибками округлення. Таким чином, кінцевий результат обчислень крім похибок вимірювань містить ще і похибки округлень.

Різниця між істинною величиною і її округленим значенням називається істинною похибкою округлення *l*.

В більшості випадків істинні похибки округлення як за величиною, так і за знаком залишаються невідомими. Разом з тим по округленому числу можна легко встановити його граничну похибку округлення α.

У відповідності з загально визначеними правилами округлення абсолютна величина цієї похибки дорівнює половині одиниці останнього десятичного знаку округленого числа.

Наприклад, взявши з таблиці число 0,75396, легко встановити, що його гранична похибка округлення $\alpha = \pm 0{,}000005 = \pm 0{,}5 \cdot 10^{-5}$, або узагальнюючи, можна встанови, що якщо в округленому числі *n* десяткових знаків, то гранична похибка округлення буде дорівнювати:

$$\alpha = \pm 0{,}5 \cdot 10^{-n}. \tag{2.66}$$

Похибки округлення, як і похибки вимірювання, є похибками випадковими. Але вони не підпорядковуються другій властивості випадкових похибок вимірювань, так як похибки округлення, за абсолютною величиною менші граничної і однаково можливі.

Область можливих похибок округлення в межах від −α до +α є неперервною.

Середня квадратична похибка округлення обчислюється за формулою:

$$m_{ок} = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{3}}, \tag{2.67}$$

таким чином, середня квадратична похибка округлення $m_{ок}$ в $\sqrt{3}$ разів менша граничної похибки округлення α.

Гранична похибка округлення суми доданків α_s дорівнює граничній похибці округлення одного доданка помноженій на корінь квадратний з числа доданків *n*:

$$\alpha_s = \alpha\sqrt{n}. \tag{2.68}$$

Контрольні запитання

1. Які існують властивості випадкових похибок вимірювань?
2. В чому полягає принцип арифметичної середини?
3. Що Ви розумієте під оцінкою точності результатів вимірювань?
4. Що Ви розумієте під середньою квадратичною похибкою?
5. Що являє собою гранична похибка?
6. Що являє собою середня похибка?
7. Що називається ймовірною похибкою?
8. Як визначається середня квадратична похибка функції добутку безпосередньо виміряного аргумента на постійний коефіцієнт?
9. Як визначається середня квадратична похибка функції суми (або різниці) двох безпосередньо виміряних величин?
10. Як визначається середня квадратична похибка функції лінійного виду?
11. Як визначається середня квадратична похибка функції загального виду?
12. Як оцінюється сумісна дія декількох незалежних джерел похибок?
13. Що являють собою відносні похибки та як вони оцінюються?
14. Як оцінюється середня квадратична похибка арифметичної середини?
15. В чому полягає сутність властивостей відхилень вимірів від арифметичної середини?
16. Як визначається середня квадратична похибка вимірювань за значеннями відхилень вимірів від арифметичної середини?
17. Як обчислюється середня квадратична похибка за результатами однорідних двійних вимірів?
18. Що являє собою середня квадратична похибка округлення та як вона визначається?

РОЗДІЛ 3. НЕРІВНОТОЧНІ ВИМІРЮВАННЯ

3.1. Нерівноточні вимірювання і їх вага

В практиці маркшейдерії і геодезії часто зустрічаються нерівноточні вимірювання, результати яких мають різну ступінь надійності в зв’язку зі зміною умов спостережень. Очевидно, що при визначенні найбільш надійного значення з ряду таких нерівноточних вимірювань вже не можна буде скористатися простою арифметичною серединою, тому що на кінцевий результат більш точні вимірювання повинні надавати і більший вплив, тобто при визначенні кінцевого значення ми повинні врахувати переваги кожного виміру. Перевагу результату вимірювання, міру його надійності позначають числом, яке називається вагою цього виміру, тобто **вагою називають ступінь довіри до результату вимірювання, виражену числом.**

Чим кращі умови вимірювання, тим надійніший результат, тим більша його вага, тобто тим більша наша довіра до нього. Таким чином, вага характеризує умови вимірювання. З другої сторони, певним умовам вимірювань відповідає певна середня квадратична похибка. Звідси випливає взаємозв’язок між вагою і середньою квадратичною похибкою: чим менша середня квадратична похибка якого-небудь виміру, тим надійніші результати, а відповідно, тим більша його вага. Виходячи з сказаного **за ваги результатів вимірювань приймають величини, зворотно пропорційні квадратам відповідних їм середніх квадратичних похибок.**

Нехай деяка величина вимірювалась нерівноточно n разів: $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Середні квадратичні похибки вимірювань відповідно дорівнюють: $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Ваги цих вимірів можуть бути виражені наступним чином:

$$p_1 = \frac{1}{m_1^2};\ p_2 = \frac{1}{m_2^2};\ \ldots;\ p_n = \frac{1}{m_n^2}, \qquad (3.1)$$

Але в силу того, що вага є величинами відносними, які призвані характеризувати ступінь надійності одних результатів в порівнянні з іншими, для нас мають значення не абсолютні їх величини, а лише їх відношення.

А тому вираження ваги формулою (3.1) можна записати наступним чином:

$$p_1 = \frac{c^2}{m_1^2};\ p_2 = \frac{c^2}{m_2^2};\ \ldots;\ p_n = \frac{c^2}{m_n^2}, \qquad (3.2)$$

де c^2 – коефіцієнт пропорційності, який може бути вибраний любим, але обов'язково однаковим для вираження всіх ваг даного ряду вимірів.

Якщо при вимірюванні деякої величини були отримані результати з середніми квадратичними похибками $m_1 = \pm 0{,}3$ і $m_2 = \pm 0{,}5$, то ваги цих вимірів згідно формули (3.1) будуть дорівнювати:

$$p_1 = \frac{1}{0{,}09},\ p_2 = \frac{1}{0{,}25}.$$

Очевидно, що подальше використання таких ваг буде трудомістким.

Прийнявши $c^2 = 0{,}09 \cdot 0{,}25 \cdot 100$ отримаємо:

$$p_1 = \frac{0{,}09 \cdot 0{,}25 \cdot 100}{0{,}09} = 25,$$

$$p_2 = \frac{0{,}09 \cdot 0{,}25 \cdot 100}{0{,}25} = 9.$$

Подальше використання цих ваг, виражених цілими числами, значно зручніше. Підбираючи відповідним чином коефіцієнт пропорційності c^2, можна завжди придати вагам найбільш зручні для обчислень числові значення.

При визначенні ваг мають бути виконаними дві умови:

1) середні квадратичні похибки m, за якими обчислюються ваги p, повинні бути визначені з достатньо великого числа спостережень;

2) з вимірів, за якими обчислюються середні квадратичні похибки, а потім ваги, повинні бути виключені систематичні похибки.

Визначаємо співвідношення ваг:

$$p_1 : p_2 = \frac{c^2}{m_1^2} : \frac{c^2}{m_2^2}, \qquad (3.3)$$

Таким чином, при різних значеннях коефіцієнта пропорційності отримуємо і різні значення ваг, але співвідношення між ними залишається незмінним. Звідси можна стверджувати, **що ваги даного ряду вимірів є величинами відносними і їх можна одночасно збільшувати або зменшувати в однакове число разів.**

В зв'язку з тим, що ваги є величинами відносними, самі по собі вони ще ні про що не говорять. Вони мають значення тільки при співставленні між собою, забезпечуючи можливість судити, в скільки разів одна величина надійніша другої.

Якщо будемо мати ряд рівноточних вимірів деякої величини $l_1, l_2, \ldots, l_n$, умови яких визначаються середньою квадратичною похибкою m, то приймаючи за коефіцієнт пропорційності c^2 квадрат середньої квадратичної похибки m^2,отримаємо ваги цих вимірів, що дорівнюють одиницям, тобто:

$$p_1 = \frac{m^2}{m^2} = 1;\ p_2 = \frac{m^2}{m^2} = 1; \ldots ; p_n = \frac{m^2}{m^2} = 1. \tag{3.4}$$

Позначимо вагу простої арифметичної середини з даного ряду рівноточних вимірів через P, середня квадратична похибка якої:

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{3.5}$$

Тоді вага середньої арифметичної буде дорівнювати:

$$P = \frac{c^2}{m^2} = \frac{m^2}{\frac{m^2}{n}}, \tag{3.6}$$

або

$$P = n. \tag{3.7}$$

Тобто **вага арифметичної середини дорівнює числу *n*, яке показує з кількох рівноточних вимірів з вагами, які дорівнюють одиниці, отримана одна арифметична середина.**

Виходячи з цього визначення вагу окремого виміру даного ряду можна розглядати як число, яке показує, скільки рівноточних вимірів з вагою, що дорівнює одиниці, потрібно зробити для того, щоб середнє арифметичне з них мало б таку ж вагу, як і дійсно отриманий результат вимірів.

3.2. Загальна арифметична середина і її вага

Нехай дано ряд результатів нерівноточних вимірів деякої величини $l_1, l_2, \ldots, l_n$ з їх середніми квадратичними похибками $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Для цього ряду вимірювань напишемо лінійну функцію, яка визначає найбільш надійне значення шуканої величини l. Це значення може бути визначено з формули:

$$X = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \ldots + \frac{1}{n} l_n. \tag{3.8}$$

Цей вираз являє собою лінійну функцію, в якій $\frac{1}{n}$ є коефіцієнтом, що задовольняє умові:

$$\left[\frac{1}{n}\right] - 1 = 0. \tag{3.9}$$

Функцію (3.9) можна записати наступним чином:

$$X = a_1 l_1 + a_2 l_2 + \ldots + a_n l_n. \tag{3.10}$$

Коефіцієнти $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цієї функції повинні задовільняти умову:

$$[a] - 1 = 0. \tag{3.11}$$

Так як при збільшенні виміряних значень l на одну і ту ж величину τ значення X_0 повинно збільшитись на цю ж величину. Щоб визначити найбільш надійне значення X_0 потрібно знати коефіцієнт a.

Середня квадратична похибка лінійної функції (3.10) буде дорівнювати:

$$m_{X_0}^2 = a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + \ldots + a_n^2 m_n^2. \tag{3.12}$$

Ймовірно, що функція (3.10) забезпечить нам найбільш надійне значення в тому випадку, якщо її середня квадратична похибка буде найменшою, тобто:

$$m_{X_0}^2 = \min, \tag{3.13}$$

при дотриманні умови (3.11).

Умова мінімуму (3.13) визначається точкою екстремуму функції наступного виду:

$$U = \left[a^2 m^2\right] - 2\lambda\left(\left[a\right] - 1\right) = \min. \tag{3.14}$$

Мінімум функції (3.14) визначається значеннями коефіцієнтів *a*, при яких перші приватні похідні функції *U* будуть дорівнювати нулю:

$$\frac{\partial U}{\partial a_1} = 2a_1 m_1^2 - 2\lambda = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial a_2} = 2a_2 m_2^2 - 2\lambda = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial U}{\partial a_n} = 2a_n m_n^2 - 2\lambda = 0.$$

Звідки

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{\lambda}{m_1^2} \\ a_2 &= \frac{\lambda}{m_2^2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= \frac{\lambda}{m_n^2} \end{aligned}\right\}. \qquad (3.15)$$

Підставивши ці значення в формулу (3.10) знайдемо:

$$X_0 = \lambda\left(\frac{1}{m_1^2}\cdot l_1 + \frac{1}{m_2^2}\cdot l_2 + \ldots + \frac{1}{m_n^2}\cdot l_n\right). \qquad (3.16)$$

Для визначення λ використаємо умову (3.11). Склавши суму коефіцієнтів (3.15) отримаємо:

$$[a] = \lambda\left[\frac{1}{m^2}\right]. \qquad (3.17)$$

Звідки:

$$\lambda = \frac{1}{\left[\frac{1}{m^2}\right]}. \qquad (3.18)$$

Підставивши значення λ з рівняння (3.18) в рівняння (3.16) будемо мати:

$$X_0 = \frac{\frac{1}{m_1^2} \cdot l_1 + \frac{1}{m_2^2} \cdot l_2 + \ldots + \frac{1}{m_n^2} \cdot l_n}{\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} + \ldots + \frac{1}{m_n^2}}. \quad (3.19)$$

На основі формули (3.1) коефіцієнти отриманого рівняння (3.19) є не що інше, як ваги відповідних нерівноточних вимірів, внаслідок чого формула може бути записана у вигляді:

$$X_0 = \frac{p_1 l_1 + p_2 \cdot l_2 + \ldots + p_n \cdot l_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{[pl]}{[p]}. \quad (3.20)$$

Це і є формула **вагової, або загальної, арифметичної середини, яка дорівнює сумі добутків кожного нерівноточного виміру на його вагу, поділеній на суму ваг всіх вимірів**.

З формули (3.20) видно, що збільшення ваги всіх вимірів в декілька разів не змінює значення загальної (вагової) арифметичної середини. Для практичного використання застосовують робочу формулу, що ґрунтується на наближених значеннях l_o з виміряних величин l.

$$X_0 = l_0 + \frac{p_1 l_1' + p_2 l_2' + \ldots + p_n l_n'}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{[pl']}{[p]}. \quad (3.21)$$

На основі поняття про ваги вага загальної арифметичної середини P_0 буде зворотно пропорційна квадрату її середньої квадратичної похибки m_{X_0}:

$$P_0 = \frac{1}{m_{X_0}^2}. \quad (3.22)$$

Підставимо в рівняння (3.12) замість коефіцієнта a_i їх значення з рівнянь (3.15).

$$m_{X_0}^2 = \frac{\lambda^2}{m_1^2} + \frac{\lambda^2}{m_2^2} + \ldots \frac{\lambda^2}{m_n^2}, \quad (3.23)$$

або

$$m_{X_0}^2 = \lambda^2 \left[\frac{1}{m^2} \right]. \quad (3.24)$$

Звідки, враховуючи (3.18), отримаємо:

$$m_{X_0}^2 = \frac{1}{\left[\dfrac{1}{m^2}\right]}. \tag{3.25}$$

На основі поняття про ваги:

$$\left[\frac{1}{m^2}\right] = [p]. \tag{3.26}$$

Тоді:

$$m_{X_0}^2 = \frac{1}{[p]}. \tag{3.27}$$

Підставивши значення (3.27) в (3.22), отримаємо:

$$P_0 = [P]. \tag{3.28}$$

Таким чином, **вага загальної арифметичної середини результатів нерівноточних вимірів однієї і тієї ж величини дорівнює сумі ваг цих вимірів.**

3.3. Оцінка точності при нерівноточних вимірюваннях, похибка одиниці ваги

Нехай відомі результати нерівноточних вимірів якої-небудь величини $l_1, l_2, \ldots, l_i, \ldots, l_n$; їх середні квадратичні похибки $m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots, m_n$; їх ваги $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots,$ p$_n$.

У відповідності з (3.2) ваги вказаних вимірів дорівнюють:

$$p_1 = \frac{c^2}{m_1^2};\; p_2 = \frac{c^2}{m_2^2};\ldots;\; p_i = \frac{c^2}{m_i^2};\ldots;\; p_n = \frac{c^2}{m_n^2}. \tag{3.29}$$

Нехай з даного середнього ряду вимірів є деякий i-й вимір, вага якого $p_i = 1$. Тоді підставивши в (3.29) значення p_i, отримаємо:

$$1 = \frac{c^2}{m_i^2}. \tag{3.30}$$

Звідки

$$c = m_i^2, \tag{3.31}$$

тобто коефіцієнт c є ніщо інше, як середня квадратична похибка виміру, вага якого дорівнює одиниці. На відміну від середніх квадратичних похибок остальних вимірів, ваги яких не дорівнюють одиниці, ця середня квадратична похибка позначається через μ і для короткості називається **похибкою одиниці ваги**. Тоді:

$$c^2 = m_i^2 = \mu^2. \tag{3.32}$$

Підставивши у вираз (3.29) замість c^2 значення похибки одиниці ваги, отримаємо:

$$p_1 = \frac{\mu^2}{m_1^2};\ p_2 = \frac{\mu^2}{m_2^2};\ldots;\ p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2};\ldots;\ p_n = \frac{\mu^2}{m_n^2}. \tag{3.33}$$

Звідкіля

$$\mu = m_1\sqrt{p_1} = m_2\sqrt{p_2} = \ldots = m_i\sqrt{p_i} = \ldots m_n\sqrt{p_n}, \tag{3.34}$$

тобто похибка одиниці ваги μ в $\sqrt{p}$ разів більша середньої квадратичної похибки спостереження, вага якого дорівнює p.

З виразу (3.33):

$$m_1 = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}};\ m_2 = \frac{\mu}{\sqrt{p_2}};\ldots;\ m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}\ldots;\ m_n = \frac{\mu}{\sqrt{p_n}}, \tag{3.35}$$

тобто середня квадратична похибка будь-якого виміру в $\sqrt{p}$ разів менша одиниці ваги μ. Необхідно враховувати, що в даному ряді нерівноточних вимірювань може не бути фактичного виміру, вага якого буде дорівнювати одиниці. Але ми можемо умовно прийняти деякий фіктивний вимір з вагою, що дорівнює одиниці, і з ним порівнювати надійність результатів всіх остальних дійсних вимірів.

Виведемо формулу для визначення похибки одиниці ваги μ за істинними випадковими похибками Δ і вагою p результатів нерівноточних вимірів.

Нехай дано ряд нерівноточних вимірів:

$$l_1, l_2, \ldots, l_n, \tag{3.36}$$

їх істинні похибки, ваги і середні квадратичні похибки відповідно дорівнюють:

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n, \tag{3.37}$$

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \tag{3.38}$$

$$m_1, m_2, \ldots, m_n. \tag{3.39}$$

Помноживши кожний результат безпосереднього виміру (3.36) на корінь з його ваги, отримаємо новий ряд:

$$l_1\sqrt{p_1}, l_2\sqrt{p_2},....,l_n\sqrt{p_n}. \tag{3.40}$$

Очевидно, що при збільшенні або зменшенні виміряного значення l на довільне число разів (в корінь з p) в стільки ж разів збільшиться або зменшиться також істинна похибка Δ виміру.

Відповідно, істинні похибки ряду (3.40) будуть дорівнювати:

$$\Delta_1\sqrt{p_1},\ \Delta_2\sqrt{p_2},....,\Delta_n\sqrt{p_n}. \tag{3.41}$$

Розглядаючи величини ряду (3.40), як деякі функції виду $y = al$, на основі висновку, що середня квадратична похибка добутку постійної величини на безпосередньо виміряний аргумент дорівнює добутку цієї постійної на середню квадратичну похибку виміряного аргументу $\left(m_y = am\right)$, можна записати їх середні квадратичні похибки:

$$m_1\sqrt{p_1},\ m_2\sqrt{p_2},....,m_n\sqrt{p_n}. \tag{3.42}$$

Але згідно (3.25) ці вирази є не що інше, як похибки одиниці ваги μ, відповідно:

$$m_1\sqrt{p_1} = m_2\sqrt{p_2} = ... = m_n\sqrt{p_n} = \mu. \tag{3.43}$$

Звідсіля можна зробити висновок, що величини ряду (3.40) є рівноточними з середньою квадратичною похибкою μ та істинними похибками ряду (3.41). Тоді використавши тезис, що середня квадратична похибка рівноточних незалежних вимірів дорівнює кореню квадратному з суми квадратів істинних похибок цього ряду, поділеної на число всіх вимірів $m = \pm\frac{\sqrt{[\Delta\Delta]}}{n}$, отримаємо:

$$\mu = \pm\frac{\sqrt{[p\Delta\Delta]}}{n}. \tag{3.44}$$

Ця формула виражає похибку одиниці ваги μ через істинні випадкові похибки нерівноточних вимірів Δ і їх ваги. Надійність визначення μ за формулою (3.44) може бути оцінена наступним чином:

$$m_{\mu} = \pm\frac{\mu}{\sqrt{2n}}. \tag{3.45}$$

3.4. Середня квадратична похибка загальної арифметичної середини

Для визначення середньої квадратичної похибки загальної арифметичної середини скористуємося формулою (3.25). Помноживши чисельник і знаменник правої частини цієї рівності на квадрат похибки одиниці ваги μ, отримаємо:

$$m_{X_0}^2 = \frac{\mu^2}{\left[\frac{1}{m^2}\right]\mu^2}. \tag{3.46}$$

Вираз в знаменнику (3.46) на основі (3.33) можна представити наступним чином:

$$\frac{\mu^2}{m_1^2} + \frac{\mu^2}{m_2^2} + \ldots + \frac{\mu^2}{m_n^2} = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = [p]. \tag{3.47}$$

Тоді формула (3.46) прийме вигляд:

$$m_{X_0}^2 = \frac{\mu}{[p]}. \tag{3.48}$$

Позначивши середню квадратичну похибку загальної арифметичної середини через M_0 і враховуючи (3.28) в кінцевому варіанті будемо мати:

$$M_0 = \frac{\mu}{\sqrt{P_0}}. \tag{3.49}$$

Підставивши в (3.49) значенням μ, яке виражене через істині випадкові похибки (3.44), отримаємо:

$$M_0 = \pm\sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{nP_0}}. \tag{3.50}$$

З цієї формули видно, що **зі зміною ваг окремих вимірів в одне і те ж число разів вага загальної арифметичної середини зміниться в стільки ж разів, але її середня квадратична похибка при цьому залишається незмінною.**

3.5. Ухилення від загальної арифметичної середини і їх властивості. Вираження по ним похибки одиниці ваги

Приведена раніше формула (3.44) для ряду нерівноточних вимірів виражає похибку одиниці ваги через істинні випадкові похибки Δ. Як відмічалось раніше істинні похибки часто залишаються невідомими. В наслідок цього скористуємося для визначення похибки одиниці ваги μ ухиленнями від загальної арифметичної середини δ.

Розглянемо властивості ухилень δ при нерівноточних вимірюваннях.

Нехай l_1, l_2, …, l_n – результати нерівноточних вимірювань якоїнебудь величини; p_1, p_2, …, p_n – їх ваги, L – істинне значення виміряної величини, X_0 – середнє з результатів вимірів.

Візьмемо ухилення виміряних величин від середнього арифметичного X_0:

$$\left.\begin{aligned} l_1 - X_0 &= \delta_1; \\ l_2 - X_0 &= \delta_2; \\ &\ldots\ldots\ldots \\ l_n - X_0 &= \delta_n; \end{aligned}\right\}. \tag{3.51}$$

Обидві частини рівностей (3.51) помножимо відповідно на ваги p_1, p_2, …, p_n:

$$\left.\begin{aligned} p_1 l_1 - p_1 X_0 &= p_1\delta_1; \\ p_2 l_2 - p_2 X_0 &= p_2\delta_2; \\ &\ldots\ldots\ldots \\ p_n l_n - p_n X_0 &= p_n\delta_n; \end{aligned}\right\}. \tag{3.52}$$

Склавши почлено ці рівності отримаємо:

$$\left[pl\right]+\left[p\right]X_0=\left[p\delta\right]. \qquad (3.53)$$

Підставивши замість X_0 його значення з (3.20), будемо мати:

$$\left[pl\right]-\left[p\right]\frac{\left[pl\right]}{\left[p\right]}=\left[p\delta\right].$$

Звідки:

$$\left[p\delta\right]=0. \qquad (3.54)$$

Тобто **сума добутків відповідних ваг на ухилення від арифметичної середини дорівнює нулю при будь-якому числі вимірів.**

Цією властивістю володіють тільки ухилення від загальної арифметичної середини. Дійсно, давайте візьмемо деяке значення $X_0^{/}$, яке не дорівнює X_0. Тоді

$$\left.\begin{aligned} &l_1-X_0^{/}=\upsilon_1;\\ &l_2-X_0^{/}=\upsilon_2;\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &l_n-X_0^{/}=\upsilon_n;\end{aligned}\right\}. \qquad (3.55)$$

Віднімемо від кожної рівності системи (3.51) відповідні рівності системи (3.55):

$$\left.\begin{aligned} &X_0^{/}-X_0=\delta_1-\upsilon_1;\\ &X_0^{/}-X_0=\delta_2-\upsilon_2;\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &X_0^{/}-X_0=\delta_n-\upsilon_n;\end{aligned}\right\}. \qquad (3.56)$$

Помноживши рівність (3.56) відповідно на p_1, p_2, …, p_n і склавши їх, отримаємо:

$$(X_0^{/}-X_0)\left[p\right]=\left[p\delta\right]-\left[p\upsilon\right]. \qquad (3.57)$$

На основі (3.54) вираз (3.57) отримає вигляд:

$$\left[p\upsilon\right]=\left[p\right](X_0^{/}-X_0). \qquad (3.58)$$

Звідси можна зробить висновок, що $\left[p\upsilon\right]$ **буде дорівнювати нулю тільки в тому випадку, коли $X_0^{/}$ перетвориться**

в X_0**, тобто стане загальною арифметичною серединою, а** υ **– ухиленнями від її** δ**.**

Рівність (3.56) перепишемо в наступному вигляді:

$$\left.\begin{array}{l} \upsilon_1 = \delta_1 - (X_0^{/} - X_0); \\ \upsilon_2 = \delta_2 - (X_0^{/} - X_0); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \upsilon_n = \delta_n - (X_0^{/} - X_0); \end{array}\right\} . \qquad (3.59)$$

Ліві і праві частини рівностей піднесемо в квадрат, помножимо відповідно на ваги p_1, p_2, …, p_n і складемо:

$$\left[p\upsilon^2\right] = \left[p\delta^2\right] + [p] \cdot (X_0^{/} - X_0)^2 - 2[p\delta](X_0^{/} - X_0) . \qquad (3.60)$$

На основі (3.54) рівність (3.60) отримає вигляд:

$$\left[p\delta^2\right] = \left[p\upsilon^2\right] - [p](X_0^{/} - X_0)^2 . \qquad (3.61)$$

Звідси

$$\left[p\delta^2\right] < \left[p\upsilon^2\right] . \qquad (3.62)$$

Тобто **сума добутків відповідних ваг на квадрати ухилень від загальної арифметичної середини завжди менша суми добутків ваг на квадрати ухилень від будь-якого числа, яке не дорівнює загальній арифметичній середині.**

Для виведення формули похибки одиниці ваги μ запишемо вираження істинних похибок нерівноточних вимірів:

$$\left.\begin{array}{l} l_1 - L = \Delta_1; \\ l_2 - L = \Delta_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_n - L = \Delta_n; \end{array}\right\} . \qquad (3.63)$$

Віднявши від рівності (3.63) рівність (3.51) будемо мати:

$$\left.\begin{array}{l} X_0 - L = \Delta_1 - \delta_1; \\ X_0 - L = \Delta_2 - \delta_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_0 - L = \Delta_n - \delta_n; \end{array}\right\} . \qquad (3.64)$$

Рівність (3.64) перепишемо в наступному вигляді:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_1 = \delta_1 + \left(X_0 - L\right) \\ \Delta_2 = \delta_2 + (X_0 - L) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta_n = \delta_n + (X_0 - L)\end{array}\right\} . \qquad (3.65)$$

Піднесемо їх у квадрат, помножимо на відповідні ваги і складемо:

$$\left[p\Delta\Delta\right] = \left[p\delta\delta\right] + \left[p\right](X_0 - L)^2 + 2\left[p\delta\right](X_0 - L) . \qquad (3.66)$$

На основі (3.54) отриману рівність можна записати наступним чином:

$$\left[p\Delta\Delta\right] = \left[p\delta\delta\right] + \left[p\right] \cdot (X_0 - L)^2 . \qquad (3.67)$$

Аналізуючи цю рівність приходимо до висновку, що:

$$\left[p\Delta\Delta\right] > \left[p\delta\delta\right] . \qquad (3.68)$$

З формули (3.44) можна записати:

$$\left[p\Delta\Delta\right] = n\mu^2 \ , \qquad (3.69)$$

а квадрат істинної похибки загальної арифметичної середини можна представити його середнім значенням:

$$\frac{\left[\omega \cdot \omega\right]}{N} = M_0{}^2 = \frac{\mu^2}{\left[p\right]} . \qquad (3.70)$$

Підставивши ці значення у формулу (3.67) отримаємо:

$$n\mu^2 - \left[p\right]\frac{\mu^2}{\left[p\right]} = \left[p\delta\delta\right] \qquad (3.71)$$

або

$$\mu^2 (n - 1) = \left[p\delta\delta\right] . \qquad (3.72)$$

Звідси:

$$\mu^2 = \frac{\left[p\delta\delta\right]}{n - 1} , \qquad (3.73)$$

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{n - 1}} . \qquad (3.74)$$

Ця формула дає можливість визначити похибку одиниці ваги за ухиленнями від загальної арифметичної середини.

Точність визначення похибки одиниці ваги може бути обчислена за формулою:

$$m_\mu = \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} . \qquad (3.75)$$

Середня квадратична похибка загальної арифметичної середини, виражена через ухилення від її результатів вимірів, може бути визначена, якщо у формулу (3.49) підставити (3.74):

$$M_0 = \pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{[p](n-1)}} . \qquad (3.76)$$

Для оцінки надійності обчислення середньої квадратичної похибки загальної арифметичної середини можна скористатися формулою:

$$m_{M_0} = \frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} . \qquad (3.77)$$

Приклад 1. Одним і тим же теодолітом кут вимірювався шість разів різним числом прийомів. За результатами вимірювань, що наведені в табл. 3.1, визначити найбільш надійне значення кута, похибку одиниці ваги, середню квадратичну похибку найбільш надійного значення і середні квадратичні похибки кожного результату.

Обчислення прикладу 1 наведені в таблиці 3.1.

Приклад 2. Довжина сторони підземного теодолітного ходу виміряна різними виімрювальними приладами. Середнє значення з виконаних вимірювань X, число вимірювань n і середні квадратичні похибки m окремих вимірів приведені в таблиці 3.2.

Визначити найбільш надійне значення довжини виміряної лінії X_0, її середню квадратичну похибку M_0 і похибку одиниці ваги μ.

Обчислення прикладу 2 наведені в таблиці 3.2.

Приклад 3. Позначка репера R визначена з чотирьох нівелірних ходів. Значення отриманих позначок і число станцій приведені в таблиці 3.3. Визначити найбільш надійне значення позначки репера R, похибку одиниці ваги, середню квадратичну похибку найбільш надійного значення, і середні квадратичні похибки позначок (відміток), отриманих з відповідних ходів.

Таблиця 3.1

№ виміру	Значення кутів	Число прийомів, *K*	$p=\frac{K}{3}$	*l′*, сек.	*pl′*	δ, сек.	*p*δ	*p*δδ	$M=\frac{\mu}{\sqrt{p}}$, сек.	Формули і обчислення
1	83°27′16″	6	2	+10	+20	+6	+12	72	4	$\frac{[pl']}{[p]}=\frac{+80}{20}=+4''$
2	83°27′09″	18	6	+3	+18	–1	–6	6	±2	
3	83°27′00″	3	1	0	0	–4	–4	16	±5	
4	83°27′10″	15	5	+4	+20	0	0	0	2	$\mu=\pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{128}{5}}=\pm5''$
5	83°27′13″	6	2	+7	+14	+3	+6	18	4	
6	83°27′08″	12	4	+2	+8	–2	–8	16	±2	$m_{\mu}=\pm\frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}=\pm\frac{5}{\sqrt{10}}=\pm1'',6$
l_0	83°27′06″		20		+80		+18 –18	128		$M_0=\pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{[p](n-1)}}=\pm\frac{5}{\sqrt{20}}=\pm1''$
$\frac{[pl']}{[p]}$	+4″									
X_0	83°27′10″									$m_{M_0}=\pm\frac{m_{\mu}}{\sqrt{[p]}}=\pm\frac{1'',6}{\sqrt{20}}=\pm0'',4$

Таблиця 3.2

№ з/п	Значення довжини *X*, м	Число вимірів, *n*	Середня квадратична похибка, *m*, мм	$M = \frac{\mu}{\sqrt{n}}$, мм	$P = \frac{1}{м^2}$	*l′*, мм	*pl′*	δ	$p\delta$	$p\delta\delta$	Формули і обчислення
1	43,607	7	±4	1,5	0,44	0	0	–2,6	–1,14	3,0	$\frac{[pl']}{[p]} = \frac{+4,48}{1,69} = +2,6$ мм
2	43,612	11	±6	1,8	0,31	+5	1,55	+2,4	+0,74	1,8	$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{n-1}} =$
3	43,608	6	5	2,0	0,25	+1	0,25	–1,6	–0,40	0,6	$= \pm\sqrt{\frac{9,2}{5}} = \pm 1,4$ мм
4	43,614	9	±7	2,3	0,19	+7	1,33	+4,4	+0,84	3,7	$m_\mu = \pm\frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} =$
5	43,610	3	3	1,7	0,35	+3	1,05	+0,4	+0,14	0,1	$= \frac{1,4}{\sqrt{10}} = \pm 0,4$ мм
6	43,609	12	±9	2,6	0,15	+2	0,30	–0,6	–0,09	0,0	$M_0 = \pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{[p](n-1)}} =$
l_0 $\frac{[pl']}{[p]}$	43,607 +2,6								+1,63 –1,72		$= \pm\frac{1,4}{\sqrt{1,96}} = \pm 1,0$ мм
X_0	43,6096								–0,09	9,2	$m_{M_0} = \pm\frac{m_\mu}{\sqrt{[p]}} = \pm\frac{0,4}{\sqrt{1,96}} = \pm 0,3$ мм

Для вирішення поставленого прикладу 3 необхідно визначити ваги позначок, отриманих з чотирьох ходів, середні квадратичні похибки позначок (відміток), отриманих з відповідних ходів.

$$m_{H_i} = m_h \sqrt{n_i} \ ,$$

де m_h – середня квадратична похибка визначення перевищення на одній станції;

n_i – число станцій в нівелірному ході, з якого отримана позначка H_i.

Вага позначки репера з нівелірного ходу обчислюється за формулою:

$$P_{H_i} = \frac{1}{(m_h \sqrt{n_i})^2} \ .$$

Якщо вагу перевищення, визначеного на одній станції прийняти рівною одиниці, то із співвідношення ваг випливає:

$$\frac{P_{H_i}}{P} = \frac{m_h{}^2}{(m_h \sqrt{n_i})^2} \ .$$

Звідси

$$P_{H\,i} = \frac{1}{n_i} \ .$$

Таким чином, вага позначки репера зворотно пропорційна числу станцій нівелірного ходу. Тоді ваги позначок репера R будуть дорівнювати:

$$P_{H_1} = \frac{1}{20} = 0{,}05; \ P_{H_2} = \frac{1}{10} = 0{,}1; \ P_{H_3} = \frac{1}{50} = 0{,}02; \ P_{H_4} = \frac{1}{25} = 0{,}04.$$

Збільшивши всі ваги в 100 р азів, отримаємо їх значення, які приведені в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3

№ виміру	Позначка H, м	Число станцій	$p = \frac{100}{n}$	l', мм	pl'	δ, мм	$p\delta$	$p\delta\delta$	$M = \frac{m}{\sqrt{n}}$, мм	Формули і обчислення
1	216,814	20	5	+12	60	+5	+25	+125	±4,4	$\frac{[pl']}{[p]} = +\frac{146}{21} = 7$ мм
2	216,807	10	10	+5	50	–2	–20	+40	±3,0	
3	216,802	50	2	0	0	–7	–14	+98	±6,9	
4	216,811	25	4	+9	36	+2	+8	+16	±4,8	$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{279}{3}} = \pm 10$ мм
l_0 $\frac{[pl']}{[p]}$	216,802 +7		21		146		+33 –34	279		$m_\mu = \pm\frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \frac{10}{\sqrt{6}} = \pm 4$ мм
X_0	216,809						–1			$M_0 = \pm\sqrt{\frac{[p\delta\delta]}{[p](n-1)}} \pm \frac{\mu}{\sqrt{100}} =$ $= \pm 1$ мм $m_{M_0} = \pm\frac{m_\mu}{\left[\sqrt{p}\right]} = \frac{\pm 4}{\sqrt{21}} = \pm 0{,}9$ мм

3.6. Ваги функцій виміряних величин

Як відмічалось раніше, в практиці маркшейдерії і геодезії часто приходиться мати справу з опосередкованими вимірами, тобто обчислювати відшуковувані величини за результатами безпосередніх вимірювань.

У підрозділі 2.5 р озділу 2 (Рівноточні вимірювання) були розглянуті способи визначення середніх квадратичних похибок різних функцій виміряних величин. Щоб визначити вагу функції, необхідно скористатися виведеними формулами середніх квадратичних похибок і поняттям ваги.

І. Дано функцію:

$$y = aL. \tag{3.78}$$

За формулою (2.28) відомо, що

$$m_y = am.$$

Нехай вага P_y – вага функції, p – вага аргумента, тоді на основі поняття про ваги можна записати:

$$m_y = \frac{\mu}{\sqrt{P_y}}; \; m = \frac{\mu}{\sqrt{p}}. \tag{3.79}$$

Підставивши отримані вирази середніх квадратичних похибок з (3.79) у формулу (2.28) отримаємо:

$$\frac{\mu}{\sqrt{P_y}} = \frac{\mu}{\sqrt{p}} \cdot a, \tag{3.80}$$

звідки

$$\frac{1}{P_y} = a^2 \cdot \frac{1}{p}, \tag{3.81}$$

тобто **величина, зворотня вазі функції добутку коефіцієнта на аргумент, дорівнює добутку квадрата коефіцієнта на величину, зворотню вазі аргумента.**

Окремий випадок. Візьмемо функцію виду:

$$y = l\sqrt{p_l},$$

де l – безпосередній вимір;

p – його вага;

m_l – середня квадратична похибка виміру.

У цьому випадку будемо мати:

$$m_y = \frac{\mu}{\sqrt{p_y}}, \; m_l = \frac{\mu}{\sqrt{p_l}}.$$

Тоді на основі (2.28) отримаємо:

$$\frac{\mu}{\sqrt{p_y}} = \sqrt{p_l} \cdot \frac{\mu}{\sqrt{p_l}} \; .$$

Звідки $p_y = 1$.

Відповідно, всякий результат виміру, помножений на корінь з своєї ваги, приводить до значення, вага якого дорівнює одиниці.

II. Дано функцію:

$$Y = L_1 + L_2. \tag{3.82}$$

Згідно формули (2.28) маємо:

$$m_y^2 = m_1^2 + m_2^2.$$

Якщо P_y, P_1, і P_2, відповідно ваги функції і аргументів, то

$$m_y^2 = \frac{\mu^2}{p_y}; \; m_1^2 = \frac{\mu^2}{p_1}; \; p_2 = \frac{\mu^2}{p_2}. \tag{3.83}$$

Підставивши отримані вирази (3.83) у формулу (2.28) і скоротивши на μ^2, отримаємо:

$$\frac{1}{p_y} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \tag{3.84}$$

тобто, **величина, зворотня вазі функції суми або різниці двох доданків (складових), дорівнює сумі величин, зворотніх вагам аргументів.**

Якщо, $p_1 = p_2 = p$, то

$$p_y = \frac{1}{p_2} p, \tag{3.85}$$

тобто вага суми або різниці двох рівноточних величин в два рази менша ваги однієї з цих величин.

III. Дано функцію:

$$У = L_1 \pm L_2 \pm .... \pm L_n. \tag{3.86}$$

Нехай $p_y, p_1, p_2, \dots, p_n$ відповідно ваги функції і аргументів на основі попередніх тверджень можна записати, що

$$\frac{1}{p_y} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_n}. \quad (3.87)$$

Величина зворотна вазі функції алгебраїчної суми аргументів, дорівнює сумі величин, зворотніх вагам аргументів.

Якщо аргументи даної функції величини рівноточні, то

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p.$$

Тоді

$$p_y = \frac{p}{n}, \quad (3.88)$$

тобто **вага алгебраїчної суми *n* рівноточних величин в *n* разів менша ваги однієї складової**.

IV. Дано функцію:

$$y = a_1L_1 + a_2L_2 + ... + a_nL_n. \quad (3.89)$$

Згідно формули (2.35) маємо:

$$m_y^2 = a_1^2m_1^2 + a_2^2m_2^2 + ... + a_n^2m_n^2.$$

Підставивши в неї значення середніх квадратичних похибок функції і аргументів виражені через ваги і похибку одиниці ваги отримаємо:

$$\frac{1}{p_y} = a_1^2\frac{1}{p_1} + a_2^2\frac{1}{p_2} + ... + a_n^2\frac{1}{p_n}, \quad (3.90)$$

тобто **величина, зворотня вазі лінійної функції, дорівнює сумі квадратів постійних коефіцієнтів на величини, зворотні вагам аргументів.**

Очевидно, при рівних вагах аргументів $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$ будемо мати:

$$\frac{1}{p_y} = \frac{\left[a^2\right]}{p} \text{ або } p_y = \frac{p}{[a^2]}. \quad (3.91)$$

V. Дана функція загального виду:

$$У = F\left(L_1, L_2 ... L_n\right). \quad (3.92)$$

На основі (2.93) маємо:

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial L_1}\right)^2 \cdot m_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial L_2}\right)^2 m_2^2 + ... + \left(\frac{\partial F}{\partial L_n}\right)^2 m_n^2.$$

Замінивши в цій формулі квадрати середніх квадратичних похибок їх виразами через похибки одиниці ваги μ і ваги *p* отримаємо:

$$\frac{1}{p_y} = \left(\frac{\partial F}{\partial L_1}\right)^2 \cdot \frac{1}{p_1} + \left(\frac{\partial F}{\partial L_2}\right)^2 \frac{1}{p^2} + \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial L_n}\right)^2 \frac{1}{p_n}, \tag{3.93}$$

тобто величина, зворотня вазі функції загального виду, дорівнює сумі добутків квадратів окремих (приватних) похідних по кожному аргументу на величини, які зворотні вагам відповідних аргументів.

На основі формул (2.39) і (3.93) можна записати, що:

$$m_y^2 = \mu^2 \left[\left(\frac{dF}{dL}\right)^2 \frac{1}{P} \right], \tag{3.94}$$

або

$$m_y = \mu \sqrt{\frac{1}{p_y}}. \tag{3.95}$$

Приклад 1. Визначити вагу довжини кола С, якщо вага виміряного діаметра $P_Д = 4$. Довжина кола обчислюється за формулою:

$$C = \pi Д.$$

Величина, зворотня вазі цієї функції буде дорівнювати:

$$\frac{1}{P_C} = \pi^2 \frac{1}{P_Д}.$$

Звідкіля

$$\frac{1}{P_C} = (3{,}14)^2 \cdot \frac{1}{4}; \quad P_C = 0{,}4.$$

Приклад 2. Виміряні три кути з вагами $P_1 = 2$, $P_2 = 3$, $P_3 = 6$. Визначити вагу суми кутів.

Складаємо функцію:

$$s = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3.$$

Згідно формули (3.87) маємо:

$$\frac{1}{P_s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1; \quad P_s = 1.$$

Приклад 3. Обчислити вагу кута $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, якщо ваги кутів відповідно дорівнюють $P_\alpha = 3$ і $P_\beta = 5$.

Згідно формули (3.91) маємо:

$$\frac{1}{p_\gamma} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{60}; \quad p_\gamma = 7{,}5.$$

Приклад 4. Найти вагу функції $y = x_1 \cdot x_2$.

Якщо ваги аргументів відповідно рівні $p_1 = p_2$, то згідно формули (3.93) маємо:

$$\frac{1}{p_y} = \left(\frac{dy}{dx_1}\right)^2 \frac{1}{p_1} + \left(\frac{dy}{dx_2}\right)^2 \frac{1}{p_2}, \text{ то } \frac{dy}{dx_1} = x_2; \quad \frac{dy}{dx_2} = x_1.$$

тоді

$$\frac{1}{p_y} = x_2^2 \cdot \frac{1}{p_1} + x_1^2 \cdot \frac{1}{p_2}, \text{ то } p_1 = p_2 = p,$$

$$\frac{1}{p_y} = \frac{1}{p}(x_1^2 + x_2^2); \quad p_y = \frac{p}{x_1^2 + x_2^2}.$$

3.7. Оцінка точності за результатами однорідних двойних нерівноточних вимірів

В маркшейдерській практиці часто застосовуються однорідні подвійні нерівноточні вимірювання. Розглянемо питання оцінки їх точності.

Нехай дано результати двойних однородних нерівноточних вимірювань:

$$l_1' \ i \ l_1''; l_2' \ i \ l_2''; \ldots; l_n' \ i \ l_n''.$$

Їх ваги

$$p_1', p_1''; \ p_2', p_2'', \ldots; p_n', p_n''.$$

Визначимо різниці:

$$\left.\begin{array}{l} l_1' - l'' = d_1 \\ l_2' - l_2'' = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_n' - l_n'' = d_n \end{array}\right\}. \tag{3.96}$$

У відповідності з формулою (3.84) ваги цих різниць можуть бути записані:

$$Pd_1 = \frac{p_1' + p_1''}{p_1' p_1''}, Pd_2 = \frac{p_2' + p_2''}{p_2' p_2''}, \ldots, P_{dn} = \frac{p_n' + p_n''}{p_n' p_n''}. \qquad (3.97)$$

Якщо різниці $d_1, d_{2,} \ldots, d_n$ розглядати як істинні похибки з вагами (3.97), похибку одиниці ваги можна виразити на основі формули (3.44):

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{P_{d_1} \cdot d_1^2 + P_{d_2} \cdot d_2^2 + \ldots + P_{dn} \cdot d_n^2}{n}} \qquad (3.98)$$

або

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p_d dd]}{n}}. \qquad (3.99)$$

Якщо двойні виміри будуть рівноточними, тобто:

$$p_1' = p_1'' = p_1; \quad p_2' = p_2'' = p_2; \ldots p_n' = p_n'' = p_n,$$

$$\text{то} \quad Pd_1 = \frac{p_1}{2}; \quad Pd_2 = \frac{p_2}{2}; \ \ldots, P_{d_n} = \frac{p_n}{2}, \qquad (3.100)$$

тоді формула (3.99) набуде вигляду:

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pdd]}{2n}}. \qquad (3.101)$$

Виведені вище формули похибки одиниці ваги справедливі при відсутності в різницях d систематичних похибок.

На наявність систематичних похибок в різницях двойних вимірів буде вказувати перевагання одного знака в різницях і нерівність нулю величини $\frac{[pd]}{[p]}$.

Контрольні запитання

1. *Що необхідно розуміти під нерівноточними вимірюваннями?*
2. *Які умови повинні забезпечуватись при визначенні ваг нерівноточних вимірювань?*
3. *Що являє собою загальна арифметична середина і її вага?*
4. *Що являє собою похибка одиниці ваги?*
5. *За якою формулою визначається похибка одиниці ваги через істинні випадкові похибки нерівноточних вимірів* Δ *і їх ваги?*

6. *Як оцінюється надійність визначення одиниці ваги?*
7. *Як визначається середня квадратична похибка загальної арифметичної середини через похибку одиниці ваги і через істинні випадкові похибки?*
8. *Які властивості мають ухилення від загальної арифметичної середини?*
9. *Якою формулою можна скористатися для оцінки надійності обчислення середньої квадратичної похибки загальної арифметичної середини?*
10. *Як визначається вага функції виду* $y = aL$ *для нерівноточних вимірювань?*
11. *Як визначається вага функції виду* $Y = L_1 + L_2$ *для нерівноточних вимірювань?*
12. *Як визначається вага функції виду* $Y = L_1 \pm L_2 \pm \ldots \pm L_n$ *для нерівноточних вимірювань?*
13. *Як визначається вага функції виду* $Y = a_1L_1 \pm a_2L_2 \pm \ldots \pm a_nL_n$ *для нерівноточних вимірювань?*
14. *Як визначається вага функції загального виду* $Y = F(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ *для нерівноточних вимірювань?*
15. *Як здійснюється оцінка точності за результатами однорідних подвійних нерівноточних вимірів?*

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бакка М. Т., Назаренко В. О. Аналіз точності маркшейдерських мереж : навчальний посібник. Житомир : ЖДТУ, 2007. 147 с.

2. Войтенко С. П. Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів : навчальний посібник. Київ : КНУБА, 2003. 216 с.

3. Зазуляк П. М., Гавриш В. І., Євсєєва Е. М., Йосипчук М. Д. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірів : підручник. Львів : Растр7, 2007. 408 с.

4. Цегелик Г. Г. Чисельні методи : підручник. Львів : Львівський нац. ун-т ім. І. Франка, 2004. 408 с.

5. Чисельні методи в комп'ютерних науках : навч. посіб. / В. А. Андруник та ін. ; за ред. В. В. Пасічника. Львів : Новий світ – 2000, 2018. Т. 2. 536 с.

6. Зражевський Г. М. Чисельні методи в задачах механіки. Ч. І. Теоретична та прикладна механіка : навч. метод. посіб. Київ : Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка, 2015. 99 с.

7. Чисельні методи в прикладній фізиці : навч. посіб. / В. О. Катрич та ін. Харків : Харківський нац. ун-т ім. В. Н. Каразіна, 2011. 172 с.

Наукове видання

НАЗАРЕНКО Валентин Олексійович
БРУЙ Ганна Валеріївна

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ДЛЯ АНАЛІЗУ ТОЧНОСТІ МАРКШЕЙДЕРСЬКИХ ВИМІРЮВАНЬ

Навчальний посібник

Технічний редактор *О. Гринюк*
Дизайн обкладинки *В. Савельєва*
Верстка *Ю. Семенченко*

Підписано до друку 12.12.2024 р.
Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Цифровий друк. Гарнітура Arimo.
Ум. друк. арк. 4,30. Наклад 300.
Замовлення № 1224-118.

Видавництво та друк: Олді+
65101, м. Одеса, вул. Інглезі, 6/1
тел.: +38 (095) 559-45-45, e-mail: office@oldiplus.ua
Свідоцтво ДК № 7642 від 29.07.2022 р.

Замовлення книг:
тел.: +38 (050) 915-34-54, +38 (068) 517-50-33
e-mail: book@oldiplus.ua