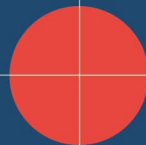


Ю.С. Холодняк, О.А. Костіков  
П.І. Сагайда, О.С. Касьянюк

# АВТОМАТИЗАЦІЯ РОЗРАХУНКІВ В ІНЖЕНЕРНІЙ ПРАКТИЦІ

Навчальний посібник

ОЛДІ  
ПЛЮС



ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»

# **АВТОМАТИЗАЦІЯ РОЗРАХУНКІВ В ІНЖЕНЕРНІЙ ПРАКТИЦІ**

**Навчальний посібник**

Одеса • 2025 • Олді+

УДК 624.042:004.42(075.8)

A22

**Автори:**

Ю. С. Холодняк, О. А. Костіков, П. І. Сагайда, О. С. Касьянюк

**Рецензенти:**

**І. І. Скрипник** – академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, директор ІПММ НАН України;

**Д. А. Зайцев** – доктор технічних наук, професор, XIDIAN University, Xi'an, China;

**Н. С. Грудкіна** – доктор технічних наук, завідувач кафедри ПНЗІД ТОВ «Технічний університет «Метінвест Політехніка»

*Робота друкується за рішенням Вченої ради  
ТОВ «Технічний університет «Метінвест Політехніка»  
(протокол № 5 від 30.01.2025 р.)*

**Автоматизація** розрахунків в інженерній практиці : навчальний посібник / Ю. С. Холодняк, О. А. Костіков, П. І. Сагайда, О. С. Касьянюк ; ТОВ «Технічний університет «Метінвест Політехніка». – Одеса : Олді+, 2025. – 160 с.

ISBN 978-966-289-977-1

Навчальний посібник містить теоретичні основи, алгоритми і наскрізні комп'ютерні програми розрахунків на міцність і жорсткість статично визначуваних і статично невизначуваних балок із фасонних профілів прокату, також приклади застосування цих програм.

Для студентів гірничих, механічних і комп'ютерних спеціальностей.

**УДК 624.042:004.42(075.8)**

ISBN 978-966-289-977-1

© Ю. С. Холодняк, О. А. Костіков, П. І. Сагайда, О. С. Касьянюк, 2025  
© ТОВ «Технічний університет «Метінвест Політехніка», 2025

# ЗМІСТ

---

<b>АНОТАЦІЯ</b> .....	5
<b>1 ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РОЗРАХУНКІВ БАЛОК НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ</b> .....	7
1.1 Напруження в балках при плоскому згинанні .....	7
1.2 Спрощена методика розрахунків на міцність двотаврових балок .....	18
1.3 Побудова епюр внутрішніх зусиль балок .....	22
1.4 Переміщення в балках .....	29
1.5 Розрахунки статично невизначуваних балок. Метод сил .....	31
<b>2 АЛГОРИТМИ І КОМП'ЮТЕРНІ ПРОГРАМИ РОЗРАХУНКІВ СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ БАЛОК</b> .....	43
2.1 Етапи розрахунків і вихідні дані .....	43
2.2 Визначення опорних реакцій .....	46
2.3 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів .....	47
2.4 Розрахунок балок на міцність .....	49
2.5 Визначення переміщень у балках .....	53
2.6 Розрахункові блоки й інтегровані програми .....	59
<b>3 АЛГОРИТМИ І КОМП'ЮТЕРНІ ПРОГРАМИ РОЗРАХУНКІВ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ БАЛОК</b> .....	73
3.1 Типи статично невизначуваних балок, їх уніфіковані схеми і етапи розрахунків. Вихідні дані .....	73
3.2 Розкриття статичної невизначуваності .....	78
3.3 Визначення основних опорних реакцій .....	82
3.4 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів .....	85
3.5 Особливості розрахунків на міцність і жорсткість статично невизначуваних балок .....	89

3.6 Розрахункові блоки й інтегровані програми . . . . .	89
3.6.1 Головне вікно програми . . . . .	90
3.6.2 Пункт меню Початкові дані . . . . .	91
3.6.3 Виконання розрахунків . . . . .	93
<b>4 АПРОБАЦІЯ СТВОРЕНИХ ПРОГРАМ . . . . .</b>	<b>100</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ . . . . .</b>	<b>104</b>
<b>ДОДАТКИ . . . . .</b>	<b>106</b>
Додаток А. Основні параметри балочних профілів . . . . .	106
Додаток Б. Формула крайніх ординат і особливості її застосування . . . . .	112
Додаток В. Комп'ютерне розв'язання прикладів . . . . .	114
Додаток Г. Аналітичне розв'язання прикладів . . . . .	141

## АНОТАЦІЯ

---

В умовах бурхливого технічного прогресу особливого значення набуває підготовка закладами вищої освіти (ЗВО) високоосвічених фахівців, що володіють комплексом теоретичних знань і практичних навичок, які дозволяють створювати різноманітні зразки нової техніки. Важливу роль в цьому відіграє вдосконалення методик викладання базових дисциплін інженерної підготовки, наповнення їх новими знаннями, поглиблюючими існуючі теоретичні уявлення.

Одними з основних в курсі опору матеріалів, який закладає фундамент інженерних розрахунків, є питання міцності й жорсткості стрижневих конструкцій, насамперед балок, тобто закріплених стрижнів прямолінійної форми, які працюють на згинання в межах пружної деформації [1–3 та ін.].

Розрахунки балок на міцність і жорсткість включають ряд послідовних дій, виконання яких «вручну» потребує відповідної кваліфікації виконавців і чималих витрат часу, особливо в тих випадках, коли розрахунки виконують люди, які не є професіоналами в цій сфері. Існуючі ж комп'ютерні програми, які придатні до виконання зазначених розрахунків, спрямовані, як правило, на розв'язання складних технічних задач і для студентського середовища, як і широкого загалу інженерів-практиків, не доступні з причини їх великої вартості. Тому будь-який прогрес у даному напрямку є завжди бажаним як в теоретичному плані, так і в плані їх практичної реалізації.

Метою даного видання є розробка і впровадження в навчальний процес з залученням інформаційних технологій спрощених методик інженерних розрахунків на міцність і жорсткість балок із найбільш поширених профілів прокату.

Видання базується на теоретичних уявленнях, які містяться у підручниках з опору матеріалів [1–3 та ін.], також на результатах наукових досліджень, проведених викладачами в означеному напрямку [4–7]. Воно створює цілісне джерело науково-технічної

інформації, потрібної студентам для оволодіння зазначеними методиками. Дане видання призначене головним чином для студентів гірничих, механічних та комп'ютерних спеціальностей ТОВ «ТУ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА». Його можна рекомендувати також студентам інших закладів вищої освіти технічного та комп'ютерного профілю та інженерам виробничої сфери.

---

# ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РОЗРАХУНКІВ БАЛОК НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ

---

## 1.1 Напруження в балках при плоскому згинанні

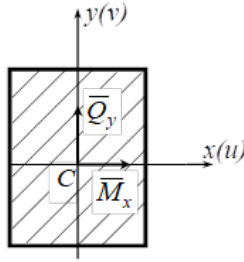
Під згинанням (або згином) розуміють такий вид навантаження стрижня, при якому в його поперечних перерізах виникають згинальні моменти.

Згинання буває плоским і просторовим (або складним).

При плоскому згинанні всі сили, що діють на стрижень, лежать в одній площині, яка проходить через його подовжню ось  $z$  і одну з головних центральних осей перерізу –  $u$  або  $v$ . У випадку, коли переріз має осі симетрії, саме вони і є головними центральними осями.

На відміну від плоского, при просторовому згинанні зовнішні навантаження лежать у різних площинах, що проходять через подовжню вісь стрижня. До просторового відносять також так зване косо згинання, при якому всі зовнішні навантаження діють у одній площині, котра проходить через вісь  $z$ , але не співпадає ні з однією з головних центральних осей перерізу. Просторові згинання зазвичай розглядають як комбінацію двох плоских згинань у площинах  $uz$  і  $vz$ .

Надалі у даному посібнику буде розглядатись лише плоске згинання, а саме такий його варіант, при якому площина дії всіх зовнішніх сил, прикладених до балки (так звана силова площина), позначатиметься  $uz$  і вважатиметься вертикальною. У цьому разі в поперечних перерізах балки діятимуть згинальні моменти  $M_x$ , а разом з ними (що не є обов'язковим) і поперечні сили  $Q_y$  (рис. 1.1), які для спрощення будуть позначатись просто  $M$  і  $Q$ .



**Рисунок 1.1** – Вектори згинальних моментів та поперечних сил

Згинальні моменти в перерізах балки визивають появу в їх точках нормальних напружень  $\sigma$ , паралельних до осі  $z$ , а поперечні сили – дотичних напружень  $\tau$  відповідних напрямків.

Сумісна дія цих напружень оцінюється так званими еквівалентними напруженнями  $\sigma_{\text{екв.}}$ , величини яких залежать від прийнятої теорії міцності й розраховуються за формулою 1.1.

$$\sigma_{(\text{екв.})} = \sqrt{\sigma^2 + \alpha \cdot \tau^2}, \quad (1.1)$$

де  $\alpha = 4$  – за третьою теорією міцності;

$\alpha = 3$  – за четвертою теорією міцності.

Величини (модулі) нормальних напружень в перерізах балок змінюються за лінійним законом (формула 1.2).

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{J_x}, \quad (1.2)$$

де  $M$  – модуль згинального моменту, що діє в перерізі;

$y$  – відстань від центру ваги перерізу (точки  $C$ ) до шару волокон, у якому визначається нормальне напруження;

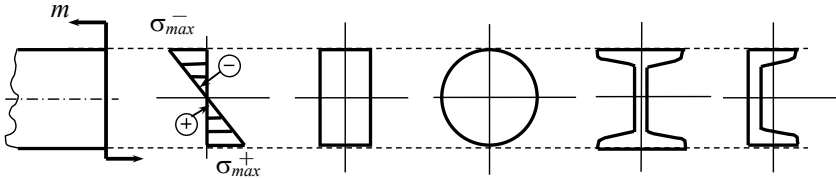
$J_x$  – момент інерції перерізу відносно осі  $x$  (рис. 1.1).

Максимальні за модулем нормальні напруження в перерізах балок, які мають горизонтальну вісь симетрії, діють у крайніх верхніх і крайніх нижніх шарах волокон (рис. 1.2) і визначаються за формулою 1.3.

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{J_x} \cdot y_{\max} = \frac{M}{W_x}, \quad (1.3)$$

де  $W_x$  – осьовий момент опору перерізу стрижня (формула 1.4).

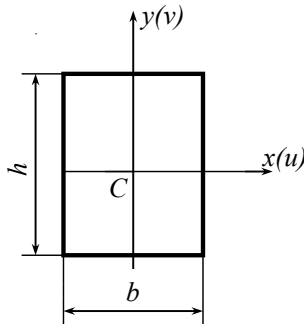
$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}. \quad (1.4)$$



**Рисунок 1.2** – Максимальні за модулем нормальні напруження в перерізах балок

Величини  $W_x$  для прямокутних перерізів (рис. 1.3) визначаються за формулою 1.5.

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{b \cdot h^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{1}{6} b \cdot h^2. \quad (1.5)$$



**Рисунок 1.3** – Прямокутний переріз

Для круглих перерізів (рис. 1.4) визначаються за формулою 1.6.

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi \cdot d^3}{32}. \quad (1.6)$$

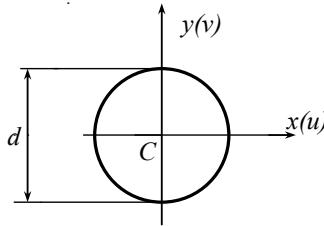


Рисунок 1.4 – Круглий переріз

Величини  $W_x$  для двотаврів і швелерів наведені у відповідних таблицях сортаменту (додаток А, табл. А.2 та А.3).

Порівняльний аналіз показує, що при однаковій площі перерізу величини  $W_x$  у двотаврів і швелерів в рази більші, ніж у круга і прямокутників з різними співвідношеннями сторін. Як наслідок, – значні переваги двотаврів і швелерів у несучій спроможності й економічності.

Балки зазвичай виготовляють із вуглецевих сталей звичайної якості за ГОСТ 535-2005, які відносяться до пластичних матеріалів. Умова міцності для них за нормальними напруженнями продемонстрована формулою 1.7.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (1.7)$$

де  $\sigma_{\max}$  – максимальне за модулем нормальне напруження в усій балці;

$M_{\max}$  – максимальний за модулем згинальний момент у перерізах балки;

$[\sigma]$  – допустиме напруження для матеріалу балки на розтягання і стискання (формула 1.8).

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}, \quad (1.8)$$

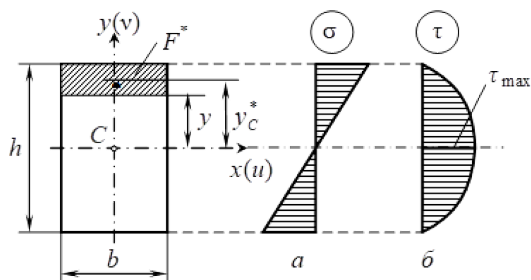
де  $\sigma_T$  – межа міцності матеріалу балки;  
 $n_T = 1,4 \dots 1,6$  – коефіцієнт запасу міцності.

Дотичні напруження в перерізах балок визначаються за формулою Д. І. Журавського (формула 1.9).

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^*}{b \cdot J_x}, \quad (1.9)$$

де  $S_x^*$  – статичний момент відносно осі  $x$  так званої відсіченої частини перерізу, тобто тієї, що лежить вище рівня  $y$ , в якому визначається величина  $\tau$  (рис. 1.5);

$b$  – ширина перерізу на цьому рівні.



**Рисунок 1.5** – Епюри для перерізу форми прямокутника

У прямокутного перерізу (рис. 1.5) формули 1.10 та 1.11.

$$S_x^* = F^* \cdot y_c^* = b \cdot \left( \frac{h}{2} - y \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \cdot \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad (1.10)$$

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12}, \quad (1.11)$$

де  $y_c^*$  – координата центру ваги відсіченої частини перерізу.

Підстановка виразів з формул 1.10 і 1.11 у формулу 1.9 після перетворень дає закон зміни дотичних напружень за висотою прямокутного перерізу (формула 1.12).

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^*}{b \cdot J_x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} \cdot \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right). \quad (1.12)$$

Поклавши в формулу 1.12  $y=0$  та  $y = \pm \frac{h}{2}$ , отримаємо формули 1.13 та 1.14.

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{F}, \quad (1.13)$$

$$\tau = \tau_{\min} = 0, \quad (1.14)$$

де  $F$  – площа всього прямокутника.

Для круглого перерізу (рис. 1.6) ці формули для  $\tau$ ,  $\tau_{\max}$  та  $\tau_{\min}$ , які одержані подібним чином, представлені формулами 1.15–1.17.

$$\tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot R^2} \cdot \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right), \quad (1.15)$$

при  $y=0$ :

$$\tau = \tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{\pi \cdot R^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{F}, \quad (1.16)$$

при  $y = \pm R$ :

$$\tau = \tau_{\min} = 0. \quad (1.17)$$

Тут  $\pi \cdot R^2 = F$  – площа всього круга.

Двогаври мають вертикальну стінку і дві горизонтальні полки, які умовно можна вважати прямокутними (рис. 1.7). При такому спрощенні закони зміни дотичних напружень за висотою як полок, так і стінки будуть параболічними, зі «стрибками» в місцях переходу від полок до стінки (рівні точок  $K$ ) у зв'язку з різким зменшенням ширини перерізу.

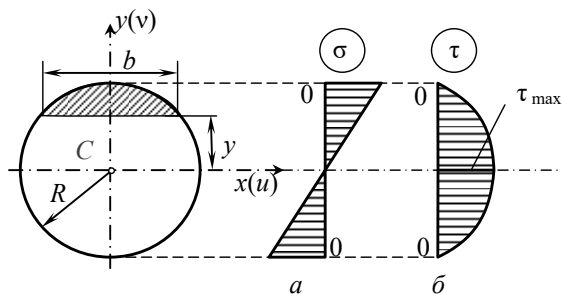


Рисунок 1.6 – Епюри для перерізу форми кола

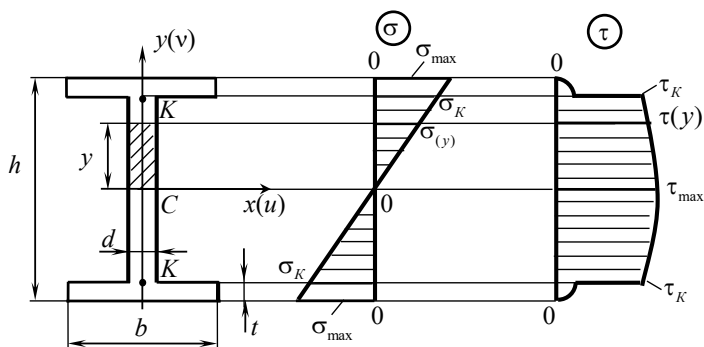


Рисунок 1.7 – Епюри для перерізу форми двутавру

Слід зауважити, що в полках двутавра разом з дотичними напруженнями вертикального спрямування –  $\tau$ , що визначаються формулою Журавського (1.9), діють також дотичні напруження горизонтального спрямування –  $\tau_n$ .

Аналіз показує, що сукупна руйнівна дія обох зазначених дотичних напружень у полицях двутавра в цілому значно менша, ніж дія  $\tau$  на всіх рівнях його стінки. Остання ж сягає свого максимуму, як і у випадку прямокутного перерізу, на нульовому рівні ( $y=0$ ). Тому величину  $\tau_{\max}$  цього разу розраховують за формулою Журавського, замінивши в якій величини  $b$  і  $S_x^*$  відповідно на  $d$  (рис. 1.7) і  $S_x$  (табл. А.2), яка являє собою статичний момент половини перерізу двутавра відносно осі  $x$  (формула 1.18).

$$\tau_{\max} = \frac{Q \cdot S_x}{d \cdot J_x}. \quad (1.18)$$

Як і у випадку прямокутного перерізу, у двотавра значення  $\tau_{\min} = 0$  відповідає рівню  $y = \pm \frac{h}{2}$ .

**Слід особливо відмітити, що все зазначене для двотаврів повною мірою справедливе і для швелерів**, які мають принципово схожу форму (наявність стінки та двох полиць) і такі ж позначення геометричних параметрів, що і двотаври (табл. А.3).

Умова міцності балок за дотичними напруженнями в загальному випадку має вигляд формули 1.19.

$$\tau_{\max} \leq [\tau], \quad (1.19)$$

де  $\tau_{\max}$  – найбільше значення максимальних дотичних напружень у перерізах балки;

$[\tau]$  – допустиме дотичне напруження, яке визначається в долях від допустимого нормального напруження –  $[\sigma]$  за третьою (формула 1.20) або четвертою теоріями міцності (формула 1.21).

$$[\tau]_{III} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot [\sigma] = \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot [\sigma] = 0,5 \cdot [\sigma], \quad (1.20)$$

$$[\tau]_{IV} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot [\sigma] = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot [\sigma] \approx 0,6 \cdot [\sigma]. \quad (1.21)$$

Із формули 1.9 слідує, що величини  $\tau_{\max}$  у перерізах балки пропорційні величинам  $Q$ , що діють у цих перерізах. Зрозуміло, що вони є найбільшими в перерізі, де  $Q = Q_{\max}$ .

Врахуємо це при конкретизації умови з формули 1.19, замінюючи у виразах для  $\tau_{\max}$  (формули 1.13, 1.16 і 1.18) величину  $Q$  на  $Q_{\max}$ . У підсумку маємо:

1) для прямокутника формулу 1.22:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{\max}}{F} \leq [\tau], \quad (1.22)$$

2) для кола формулу 1.23:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q_{\max}}{F} \leq [\tau], \quad (1.23)$$

3) для двотавра і швелера формулу 1.24.

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{d \cdot J_x} \leq [\tau]. \quad (1.24)$$

Умова міцності за еквівалентними напруженнями представлена формулою 1.25:

$$\sigma_{екв}^{\max} \leq [\sigma], \quad (1.25)$$

де  $\sigma_{екв}^{\max}$  – найбільше у всій балці еквівалентне напруження, визначене за допомогою формули 1.1.

Для визначення величин  $\sigma_{екв}^{\max}$  треба володіти систематизованою інформацією щодо характеру зміни еквівалентних напружень за висотою перерізів всіх розглянутих різновидів балок.

Така інформація була отримана в ході досліджень [8–11]. Їх підсумки наводяться далі.

Зазначені дослідження показали, що в **прямокутному і круглому перерізах** балок максимальні еквівалентні напруження можуть діяти в нейтральному шарі ( $y=0$ ), в крайніх за висотою шарах волокон ( $y = \pm \frac{h}{2}$  або  $y = \pm R$ ), також в обох названих місцях одночасно.

У першому випадку (коли  $\tau = \tau_{\max}$ ,  $\sigma = 0$ ) вони згідно з формулою (1.1) розраховуються за формулою 1.26.

$$\sigma_{екв}^{\max} = \tau_{\max} \cdot \sqrt{\alpha}. \quad (1.26)$$

У другому (коли  $\sigma = \sigma_{\max}$ ,  $\tau = 0$ ) за формулою 1.27.

$$\sigma_{екв}^{\max} = \sigma_{\max}. \quad (1.27)$$

А у третьому (коли  $\sigma_{\max} = \tau_{\max} \cdot \sqrt{\alpha}$ ) за формулою 1.28.

$$\sigma_{екв}^{\max} = \sigma_{\max} = \tau_{\max} \cdot \sqrt{\alpha}. \quad (1.28)$$

У проміжних же шарах волокон еквівалентні напруження ніколи не перевищують їх максимальних значень, вказаних у формулах 1.26–1.28.

Якщо підставити формулу 1.26 в умову міцності (формула 1.25), не важко побачити, що вона перетворюється в умову міцності за дотичними напруженнями (формула 1.29):

$$\tau_{\max} \cdot \sqrt{\alpha} \leq [\sigma], \text{ або: } \tau_{\max} \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot [\sigma], \quad (1.29)$$

або, згідно з формулами 1.21 і 1.22 отримаємо формулу 1.30:

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (1.30)$$

Підстановка формул 1.27 або 1.28 в умову міцності (формула 1.25) вочевидь перетворює їх в умову міцності за нормальними напруженнями (формула 1.31):

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (1.31)$$

Таким чином, *при виконанні умов міцності за нормальними і дотичними напруженнями у балок з прямокутним або круглим перерізами автоматично виконується і умова міцності за еквівалентними напруженнями, тому перевірка цієї умови в даному випадку є зайвою.*

Подібні дослідження, проведені відносно **двотаврових балок**, підтвердили існуючу точку зору, згідно з якою небезпечними місцями цього профілю з точки зору еквівалентних напружень є місця стику полиць і стінки двотавра (рівні точок  $K$  на рис. 1.7), в яких величини  $\sigma$  і  $\tau$  хоча і не максимальні в межах перерізу, але достатньо великі одночасно. Разом з цим така точка зору в ході досліджень була суттєво доповнена.

Дослідження базувались на залежності  $\sigma_{\text{екв}}$  у межах стінки двотавра від координати  $y$  (рис. 1.7). Ця залежність на підставі формул 1.1, 1.2, 1.9 і сортаменту двотаврів (додаток А) має вигляд формули 1.32.

$$\sigma_{екв} = \sqrt{\left(\frac{M}{J_x} \cdot y\right)^2 + \alpha \cdot \left[\frac{Q}{d \cdot J_x} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y^2\right)\right]^2}, \quad (1.32)$$

де  $M$  і  $Q$  – відповідно згинальний момент і поперечна сила, що діють в перерізі;

$J_x$  – момент інерції перерізу відносно осі  $x$ ;

$S_x$  – статичний момент половини перерізу відносно осі  $x$ ;

$\frac{1}{2} \cdot d \cdot y^2 = d \cdot y \cdot \frac{1}{2} \cdot y$  – статичний момент відносно осі  $x$  заштрихованої частини стінки (формула 1.10);

$d$  – товщина стінки двотавра.

Дослідження залежності на формулі 1.32 на екстремум і низка подальших перетворень дозволили визначити так зване граничне відношення величин  $M$  і  $Q$ , при якому небезпечними за еквівалентними напруженнями є одночасно шари волокон двотавра на рівнях  $y=0$  та  $y=y_K$  (рис. 1.7) представлене формулою 1.33.

$$\left(\frac{M}{Q}\right)_{ГР} = \frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot y_K} \cdot \sqrt{S_x^2 - \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2\right)^2}, \quad (1.33)$$

де

$$y_K = \frac{h}{2} - t. \quad (1.34)$$

При  $\frac{M}{Q} < \left(\frac{M}{Q}\right)_{ГР}$  небезпечні з точки зору  $\sigma_{екв}$  є нульовий рівень ( $y=0$ ). У цьому разі при виконанні в перерізі умови міцності за дотичними напруженнями умова міцності за еквівалентними напруженнями виконується автоматично (як і в прямокутному або круглому перерізах).

При  $\frac{M}{Q} > \left(\frac{M}{Q}\right)_{ГР}$  небезпечним з точки зору  $\sigma_{екв}$  стає рівень точки  $K$  ( $y=y_K$ ), при якому формула 1.32 перетворюється на формулу 1.35.

$$\sigma_{екв}^K = \sqrt{\left(\frac{M \cdot y_K}{J_x}\right)^2 + \alpha \cdot \left[\frac{Q}{d \cdot J_x} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2\right)\right]^2}. \quad (1.35)$$

Умова міцності за еквівалентними напруженнями в цьому разі представлено формулою 1.36.

$$\sigma_{екв}^{max} = \max(\sigma_{екв}^K) \leq [\sigma]. \quad (1.36)$$

У формулі 1.36  $\sigma_{екв}^{max}$  є найбільшим із значень еквівалентних напружень у точках  $K$  (рис. 1.7) усіх перерізів балки. Якщо в якомусь перерізі величини  $Q$  і  $M$  одночасно максимальні, то саме цей переріз і буде небезпечним з точки зору еквівалентних напружень. В інших, неочевидних випадках слід взяти до уваги перерізи, у яких:  $M=M_{max}$  і  $Q \neq Q_{max}$ ;  $Q=Q_{max}$  і  $M \neq M_{max}$ ;  $M$  і  $Q$  хоча і не максимальні, але одночасно достатньо великі.

## 1.2 Спрощена методика розрахунків на міцність двотаврових балок

Результати дослідження щодо еквівалентних напружень у двотаврових балках (пункт 1.1) дозволили створити спрощену (графо-аналітичну) методику розрахунку на міцність цих балок. Розглянемо її суть.

Основу цієї методики складають формули 1.35 і 1.36 з попереднього пункту.

Якщо підставити в умову міцності (формула 1.36) вираз для  $\sigma_{екв}^K$  (формула 1.35), то, дещо перетворивши цей вираз, можна знайти границю виконання в точці  $K$  умови міцності за еквівалентними напруженнями (формула 1.37).

$$[\sigma] \cdot \sqrt{M^2 \cdot \left(\frac{y_K}{J_x \cdot [\sigma]}\right)^2 + Q^2 \cdot \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot J_x \cdot [\sigma]} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2\right)\right]^2} = [\sigma],$$

або

$$\sqrt{M^2 \cdot \left(\frac{y_K}{J_x \cdot [\sigma]}\right)^2 + Q^2 \cdot \left[\frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot J_x \cdot [\sigma]} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2\right)\right]^2} = 1. \quad (1.37)$$

Рівність одиниці радикала у формулі 1.34 тягне за собою рівність одиниці його підкореневого виразу (формула 1.38).

$$M^2 \cdot \left( \frac{y_K}{J_x \cdot [\sigma]} \right)^2 + Q^2 \cdot \left[ \frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot J_x \cdot [\sigma]} \cdot \left( S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2 \right) \right]^2 = 1. \quad (1.38)$$

Не важко побачити, що рівняння за формулою 1.38 є рівнянням еліпса з півосями  $\beta$  і  $\gamma$  (формула 1.39).

$$\frac{M^2}{\beta^2} + \frac{Q^2}{\gamma^2} = 1, \quad (1.39)$$

де

$$\beta = \frac{J_x \cdot [\sigma]}{y_K}, \quad (1.40)$$

$$\gamma = \frac{d \cdot J_x \cdot [\sigma]}{\sqrt{\alpha} \cdot \left( S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_K^2 \right)}. \quad (1.41)$$

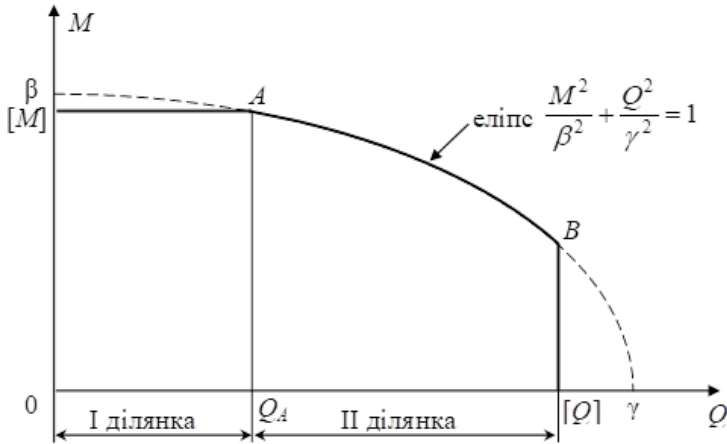
Таким чином, виконання умови міцності (1.36) обмежене дугою зазначеного еліпса, побудованого в координатах  $M-Q$  (рис. 1.8).

Частина координатної площини, яка обмежена осями координат і дугою еліпса (рис. 1.8), є геометричним місцем точок, в яких виконується умова міцності за еквівалентними напруженнями. Тут координатами кожної точки є величини (модулі) згинального моменту  $M$  і поперечної сили  $Q$  в тому чи іншому перерізі балки.

Щоб зробити зазначену область універсальною, тобто такою, де виконуються також умови міцності за нормальними і дотичними напруженнями, в неї внесені обмеження щодо величин згинальних моментів і поперечних сил. На рисунку 1.8 вони представлені у вигляді відрізків прямих  $M = [M]$  і  $Q = [Q]$ , де  $[M]$  і  $[Q]$  – допустимі величини  $M$  і  $Q$  у перерізах балки, які визначаються з відповідних умов міцності (формули 1.42 та 1.43).

$$[M] = W_x \cdot [\sigma], \quad (1.42)$$

$$[Q] = \frac{d \cdot J_x \cdot [\sigma]}{S_x \cdot \sqrt{\alpha}} \quad (1.43)$$



**Рисунок 1.8** – Безпечний факторний простір

Області, в яких виконуються усі умови міцності двотаврових балок (рис. 1.8), назвемо *безпечними факторними просторами двотаврів*.

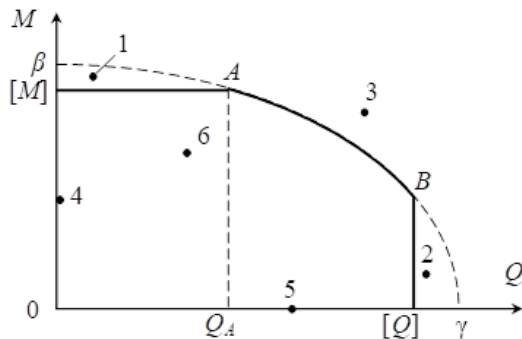
Як видно із формул 1.37–1.40, у кожного номера двотавра є свій безпечний факторний простір, параметри якого залежать від розмірів двотавра, його матеріалу (через величину  $[\sigma]$ ) і прийнятої теорії міцності (через коефіцієнт  $\alpha$ ).

Слід звернути увагу на те, що площа безпечного факторного простору за третьою теорією міцності менша, ніж за четвертою, бо величини  $\gamma$  і  $[Q]$ , як це виходить з формул 1.38 і 1.40, у своїх знаменниках мають величину  $\alpha$ , яка більша за третьою теорією (формула 1.1). Цей факт є підставою для використання саме третьої теорії, як більш надійної, при перевірці міцності двотаврів.

Щоб скористуватись безпечним факторним простором для того чи іншого номера двотавра, слід відмітити на ньому всі точки,

координатами яких є пари значень  $M$  і  $Q$  (без урахування їх знаків) в кожному з перерізів балки, що беруться з відповідних епюр згинальних моментів і поперечних сил (пункт 1.3).

Якщо всі відмічені точки не виходять за межі безпечного факторного простору, міцність балки є повністю забезпеченою. У разі ж, коли хоча б одна точка лежить поза його межами, якась умова міцності не виконується і цей номер двотавра не є прийнятним. Так, наприклад, у перерізі 1 (точка 1 на рис. 1.9) не виконується умова міцності за нормальними напруженнями, в перерізі 2 – за дотичними, в перерізі 3 – за еквівалентними. У перерізах 4, 5 і 6 виконуються всі умови міцності.



**Рисунок 1.9** – Безпечний факторний простір з координатами ( $Q$ ,  $M$ ) по довжині балки

При негативному результаті перевірки треба взяти наступний у розмірному ряду номер двотавра (табл. А.2), розрахувати параметри його безпечного факторного простору, побудувати відповідний простір і спробу повторити. І так, поки всі точки не опиняться в межах безпечного факторного простору. Зрозуміло, що зробити це без комп'ютера дуже важко.

### 1.3 Побудова епюр внутрішніх зусиль балок

У перерізах балок у загальному випадку виникають поперечні сили  $Q$  і згинальні моменти  $M$  (пункт 1.1), величини яких залежно від зовнішніх навантажень можуть змінюватись за довжиною балок. *Графічні зображення законів таких змін зветься епюрами зазначених силових факторів.*

Побудова епюр  $Q$  і  $M$  є важливим етапом розрахунків балок на міцність, бо ці епюри дозволяють встановити небезпечні (тобто найбільш навантажені) перерізи балок. Крім того, вони є обов'язковими і в розрахунках балок на жорсткість.

З балками студенти вже працювали в курсі теоретичної механіки при засвоєнні прийомів визначення опорних реакцій. Тож, вони мають певні уяви про балки. Додамо до них ще декілька важливих доповнень.

Статично визначувані балки (тобто такі, у яких кількість опорних реакцій не перевищує кількості рівнянь статичної рівноваги) бувають двох видів – одноопорні (рис. 1.10, *а*) і двохопорні (рис. 1.10, *б*).

*Ділянки балок, які виступають за їх опори, називають консолями, а ті, що лежать між опорами, – прогонами.*



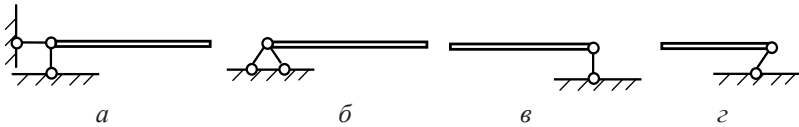
**Рисунок 1.10** – Види статично визначульних балок

Оскільки одноопорна балка вся виступає за опору (рис. 1.10, *а*), вона зветься *консольною*. Її опору називають *жорстким кріпленням, защемленням або затисненням*.

Двохопорні балки мають різні комбінації опор. Найчастіше одна з них – шарнірна нерухома (ліва опору на рис. 1.10, *б*), друга – шарнірна рухома (права опору на рис. 1.10, *б*). Така комбінація опор дозволяє зафіксувати положення балки на фундаменті і запобігти

можливого руйнуванню фундаменту і самої балки від температурних змін.

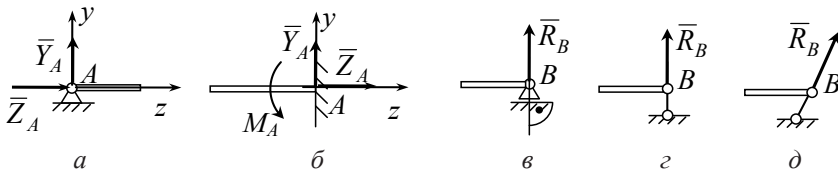
Аналогами шарнірної нерухомої опори є опори у вигляді пари двоопорних невагомих стрижнів (рис. 1.11, *а, б*), а шарнірної рухомої – у вигляді одного такого стрижня (рис. 1.11, *в, г*).



**Рисунок 1.11** – Види опор для балки

У загальному випадку на балку можуть діяти як поперечні, так і подовжні навантаження. У цьому разі реакції шарнірної нерухомої опори і її стрижневих аналогів будуть мати вертикальні й горизонтальні складові (рис. 1.12, *а*), а жорсткого защемлення – складатися із двох сил і реактивного моменту (рис. 1.12, *б*). Реакції ж шарнірної рухомої опори і її аналогів завжди складаються із однієї сили (рис. 1.12, *в, г, д*).

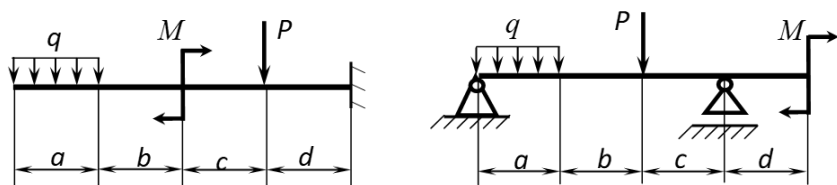
У опорі матеріалів, як правило, розглядаються балки з навантаженням у вигляді зосереджених сил  $P$ , моментів пар сил  $M$  і розподілених навантажень з постійною інтенсивністю  $q$ . Приклади таких балок зображені на рисунку 1.13.



**Рисунок 1.12** – Види реакцій опор для балок

У балках з опру матеріалів (рис. 1.13 та ін.) подовжні навантаження зазвичай відсутні. Через це горизонтальні складові реакцій шарнірних нерухомих опор (рис. 1.12, *а*), як і жорстких

кріплень (рис. 1.12, б), дорівнюють нулю. Саме такі балки будуть розглядатись надалі. У всіх із них – по невідомі реакції, для визначення яких треба скласти і розв’язати два незалежних рівняння статичної рівноваги.



**Рисунок 1.13** – Приклади балок з зосередженими силами –  $P$ , моментами пар сил –  $M$  і розподіленими навантаженнями з постійною інтенсивністю  $q$

При побудові епюр внутрішніх силових факторів (у даному випадку –  $Q$  і  $M$ ) їх значення відкладаються від бази (нульової лінії) в той чи інший бік залежно від напрямків дії цих факторів у кожному з перерізів балки. Щоб відрізнити ці напрямки, для кожного з факторів вводять відповідне правило знаків.

**Поперечні сили в перерізах балок** вважаються додатними, якщо вони намагаються обертати обидві частини розсіченої балки за ходом стрілок годинника, а від’ємними – коли вони намагаються створити такий поворот у протилежному напрямку.

**Згинальні моменти в перерізах балок** вважаються додатними, якщо вони стискають волокна у верхній (по відношенню до осі  $z$ ) половині балки, а від’ємними – при стисканні волокон у нижній.

При побудові епюр внутрішніх силових факторів балок і плоских рам широко застосовуються так звані диференціальні залежності при згинанні, які встановлюють зв’язок між інтенсивністю розподіленого навантаження  $q$  (формула 1.44), поперечною силою  $Q$  (формула 1.45) і згинальним моментом  $M$  (формула 1.46).

$$q = \frac{dQ}{dz}, \quad (1.44)$$

$$Q = \frac{dM}{dz}, \quad (1.45)$$

$$q = \frac{d^2M}{dz^2}. \quad (1.46)$$

Зазначені залежності означають наступне: *інтенсивність розподіленого навантаження  $q$  є першою похідною за довжиною балки від поперечної сили  $Q$  і другою похідною від згинального моменту  $M$ . Поперечна ж сила  $Q$  є першою похідною за довжиною балки від згинального моменту  $M$ .*

Із залежностей на формулах 1.44–1.46 можна зробити деякі загальні висновки про характер епюр  $Q$  і  $M$ .

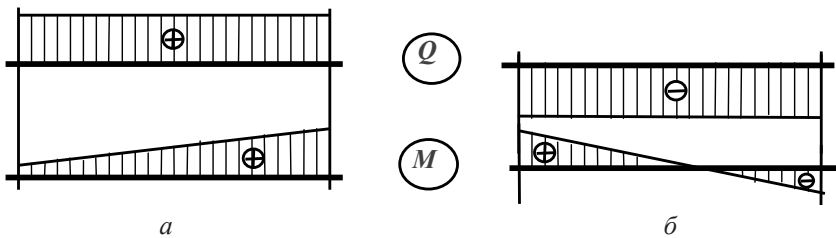
**У випадку, коли на ділянці балки розподілене навантаження відсутнє ( $q=0$ ), згідно з формулами 1.44 і 1.45 одержуємо формулу 1.47.**

$$Q = \text{const} = C_1, M = C_1 \cdot z + C_2. \quad (1.47).$$

Отже, на ділянках без розподіленого навантаження епюри  $Q$  є прямими, паралельними базовій лінії, а епюри  $M$  – прямими, тангенс кутів нахилу яких до осі  $z$  дорівнюють  $Q$  (рис. 1.14).

Якщо на ділянці  $Q > 0$  ( $\text{tg}\alpha > 0$ ), то епора  $M$  зростає при побудові її уздовж позитивного напрямку осі  $z$  (рис. 1.14, *a*). Якщо ж  $Q < 0$  ( $\text{tg}\alpha < 0$ ), то епора моментів  $M$  убиває (рис. 1.14, *б*).

**На ділянці, де діє рівномірно розподілене навантаження  $q = \text{const} = C < 0$**  (рис. 1.15, *a*), епора  $Q$  згідно з формулою 1.44 є похилою прямою з рівнянням за формулою 1.48.



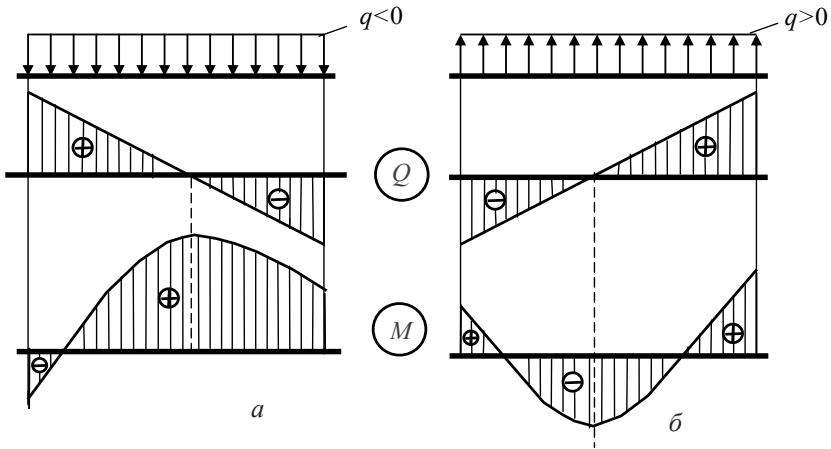
**Рисунок 1.14** – Епюри  $Q$  та  $M$  без розподіленого навантаження

$$Q = C \cdot z + C_1. \quad (1.48)$$

А епюра згинальних моментів, згідно з формулою 1.45, – квадратичною параболою (формула 1.49) опуклість якої згідно з так званим правилом «парасольки» спрямована назустріч дії розподіленого навантаження.

$$M = C \cdot \frac{z^2}{2} + C_1 \cdot z + C_2. \quad (1.49)$$

Коли ж  $q = \text{const} = C > 0$  характер обох епор змінюється на протилежний (рис. 1.15, б).



**Рисунок 1.15** – Епюри  $Q$  та  $M$  з розподіленим навантаженням

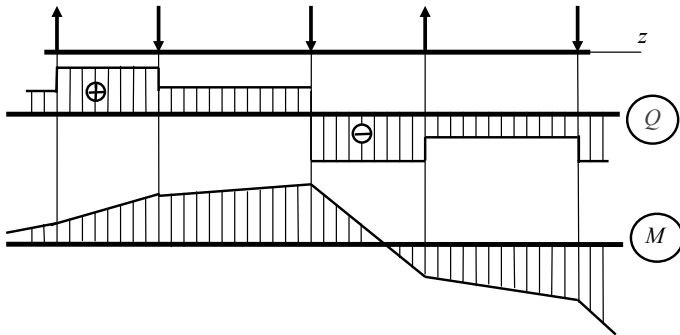
У перерізах, де епора  $Q$  перетинає базу, значення  $M$  мають екстремуми, тобто є максимальними (рис. 1.15, а), або мінімальними (рис. 1.15, б).

При побудові зазначених епор слід звернути увагу на їх особливості в місцях прикладання до балки зосереджених сил і моментів.

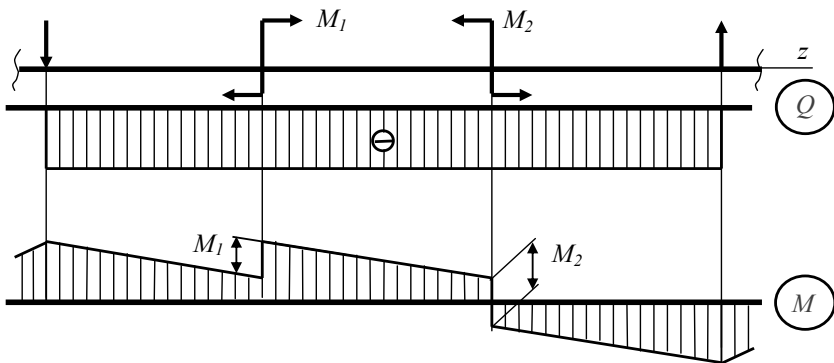
У перерізах, де до балки прикладені зосереджені сили (рис. 1.16), на епорі  $Q$  повинні бути скачки на величину цих сил, причому

в разі її побудови зліва направо напрямки стрибків повинні співпадати з напрямками зосереджених сил. На епюрі  $M$  повинні бути злами, вістря яких спрямовані проти напрямків зосереджених сил.

У перерізах, де до балки прикладені зосереджені моменти (рис. 1.17), на епюрі  $M$  повинні бути стрибки відповідних напрямків на величини цих моментів, а на епюрі  $Q$  це ніяк не повинно позначитись. У разі, коли епюра  $M$  прямолінійна, її лінії до і після стрибка повинні бути паралельними, якщо в одному перерізі з моментом не прикладена сила, котра викликає злам і порушує паралельність.



**Рисунок 1.16** – Епюри  $Q$  та  $M$  з зосередженими силами



**Рисунок 1.17** – Епюри  $Q$  та  $M$  з зосередженими моментами

У інженерній практиці епюри внутрішніх силових факторів балок будують, як правило, за так званими характерними перерізами, до яких відносять перерізи, які розташовані в безпосередній близькості до діючих на балку зосереджених сил і моментів, також перерізи на початку і в кінці ділянок з розподіленими навантаженнями.

Правила визначення  $Q$  і  $M$  у кожному із характерних перерізів балки базуються на методі перерізів [1 та ін.], який установлює зв'язок внутрішніх силових факторів з зовнішніми навантаженнями, і правилах знаків для означених факторів. Ці правила формулюються наступним чином.

**Поперечна сила** в кожному з характерних перерізів балки дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини балки, причому ті із сил, що намагаються обертати залишену частину за ходом стрілок годинника, беруться зі знаком плюс, а інші – зі знаком мінус.

**Згинальний момент** у кожному з характерних перерізів балки дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно центру ваги перерізу від дії зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини балки, причому ті із моментів, що стискають волокна у її верхній половині, беруться зі знаком плюс, а інші – зі знаком мінус.

Побудова епюр обох зазначених силових факторів складається із таких послідовних дій.

1. Позначаються на схемі балки і нумеруються всі характерні перерізи.

2. Підраховуються згідно з наведеними вище правилами значення  $Q$  і  $M$  у кожному з характерних перерізів.

3. Зображуються в проєкційному зв'язку з балкою базові (нульові) лінії кожної із епюр.

4. Відкладаються від своїх базових ліній у вигляді окремих точок і з дотриманням певних масштабів визначені значення  $Q$  і  $M$ .

5. Проводяться через відкладені точки безперервні лінії, характер яких витікає із диференціальних залежностей при згинанні.

6. Позначаються на епюрах знаками плюс та мінус області з додатними і від'ємними значеннями  $Q$  і  $M$ .

7. Робляться позначення епюр літерами  $Q$  або  $M$  у супроводі з розмірностями відповідних величин.

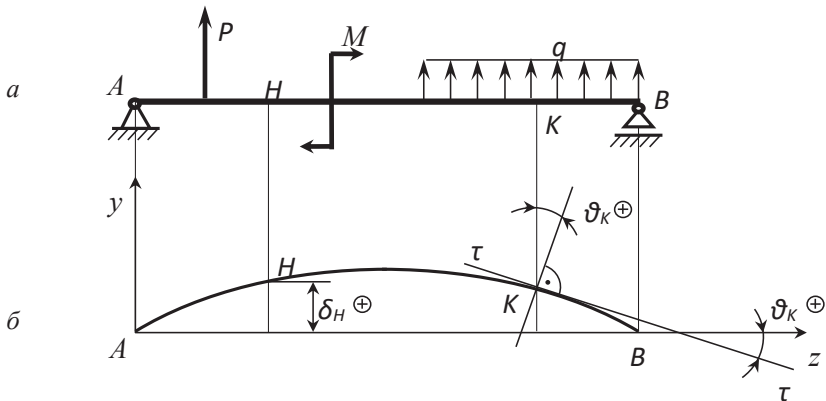
Перевірка правильності побудованих епюр зводиться в основному до повторного підрахунку значень  $Q$  і  $M$  при русі у зворотному напрямку (наприклад, справа наліво, якщо епюри будувались зліва направо).

Перевіряються також лінії на обох епюрах на їх відповідність вище означеним нормам.

Приклади побудови епюр за означеною процедурою містяться в збірнику [12], іншій навчально-методичній літературі.

## 1.4 Переміщення в балках

Під дією зовнішніх навантажень балка (рис. 1.18, *a*) втрачає свою первісно пряму форму. Подовжня вісь балки, котру називають пружною лінією, викривляється і її точки отримують вертикальні лінійні переміщення – прогини, які зазвичай позначають літерою  $\delta$ . Разом з цим поперечні перерізи балки одержують кутові переміщення, тобто кути повороту навкруги горизонтальних осей, що проходять через ту чи іншу точку пружної лінії. Кутові переміщення позначаються звичайно літерою  $\theta$ . Вказаним переміщенням надають індекси відповідних точок (рис. 1.18, *б*).



**Рисунок 1.18** – Лінійне та кутове переміщення балки під впливом зовнішніх навантажень

Переміщення в пружних конструкціях визначаються за методом О. Х. Мора. Згідно з цим методом для визначення  $\delta_H$  і  $\theta_K$  (рис. 1.18, б) треба обчислити відповідні інтеграли (формули 1.50 та 1.51).

$$\delta_H = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \int_0^L M(z) \cdot \bar{M}(z) \cdot dz, \quad (1.50)$$

$$\theta_K = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \int_0^L M(z) \cdot \bar{M}'(z) \cdot dz, \quad (1.51)$$

де  $E$  – модуль пружності першого роду для матеріалу балки;

$J_x$  – момент інерції перерізу балки відносно горизонтальної головної центральної осі (рис. 1.1);

$L$  – довжина балки;

$M(z)$  – закон зміни за довжиною балки згинального моменту від заданого навантаження;

$\bar{M}(z)$  – закон зміни за довжиною балки згинального моменту від вертикальної одиничної сили  $P=1$ , прикладеної в точці  $H$ ;

$\bar{M}'(z)$  – закон зміни за довжиною балки згинального моменту від одиничного моменту  $M=1$ , який прикладеного в перерізі, що проходить через точку  $K$  (надалі – переріз  $K$ ).

При аналітичному («ручному») розрахунку всі зазначені закони представляються у вигляді відповідних епюр, побудованих за правилами, сформульованими у пункті 1.3. В цьому випадку значення інтегралів (формули 1.50 і 1.51) обчислюються з так званою формулою крайніх ординат (додаток Б) для кожної з ділянок балки, на якій закони  $M(z)$ ,  $\bar{M}(z)$  і  $\bar{M}'(z)$  однозначні, після чого отримані результати складаються з урахуванням їх знаків. Додатні знаки визначених переміщень  $\delta_H$  і  $\theta_K$  (див. рис. 1.18) вказують на збіг їх напрямків з напрямками відповідних одиничних силових факторів – сили або моменту. В разі ж отримання від'ємних результатів напрямки визначеннях переміщень є протилежними до напрямків одиничної сили або одиничного моменту.

Приклади визначення переміщень у балках методом Мора наведені в уже згаданому збірнику [12] та в іншій навчально-методичній літературі.

## 1.5 Розрахунки статично невизначуваних балок. Метод сил

До цих пір ми розглядали розрахунки виключно статично визначуваних балок, тобто таких, у яких кількість опорних реакцій не перевищувала числа незалежних рівнянь статичної рівноваги, які можна було б скласти для визначення цих реакцій.

На практиці поряд з ними існують і статично невизначувані балки, які мають певні переваги перед статично визначуваними в міцності й жорсткості при близьких витратах матеріалу. Але ці переваги, на жаль, пов'язані з ускладненнями розрахунків статично невизначуваних балок з причини наявності у них «зайвих» опорних реакцій, для визначення яких потрібно задіяти відповідну кількість додаткових рівнянь деформаційного характеру.

Визначення «зайвих» реакцій статично невизначуваних балок зветься розкриттям їх статичної невизначуваності. У машинобудуванні це розкриття відбувається зазвичай за так званим *методом сил*, який передбачає послідовне виконання ряду наступних етапів:

1. Визначення ступеня статичної невизначуваності балки за формулою 1.52.

$$S = n_R - n_{PP}, \quad (1.52)$$

де  $n_R$  – загальна кількість опорних реакцій балки;

$n_{PP}$  – кількість рівнянь рівноваги системи сил, діючих на балку.

2. Вибір так званої *основної системи*, тобто перетворення статично невизначуваної балки в статично визначувану шляхом відкидання всіх «зайвих» реакцій.

3. Отримання *еквівалентної системи* шляхом прикладення до основної системи заданих навантажень та невідомих «зайвих» реакцій (сил або моментів пар сил) з позначенням їх як  $X_i$ . Тут  $i = 1, 2, \dots, n$  – номер «зайвої» реакції,  $n = S$  – кількість «зайвих» реакцій.

4. Складання так званих *канонічних рівнянь* кількістю  $S$ , фізична сутність яких – у нульових переміщеннях точок прикладення «зайвих» реакцій в еквівалентній системі.

5. Визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь методом Мора (пункт 1.4).

6. Розв'язання канонічних рівнянь, визначення величин і напрямків «зайвих» реакцій.

Після виконання зазначених дій еквівалентна система перетворюється в звичайну (тобто статично визначувану) балку, розрахунки якої на міцність і жорсткість ведуться із застосуванням методів, розглянутих у пунктах 1.1 та 1.4.

Розрахунок статично невизначеної балки з залученням метода сил проілюструємо наступним прикладом.

**Приклад.** Для сталеві балки (рис. 1.19) побудувати епюри внутрішніх зусиль і підібрати переріз (двотавр), якщо  $[\sigma] = 160 \text{ Мпа}$ ;  $q = 10 \text{ кН/м}$ ;  $P = 18 \text{ кН}$ ;  $M = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ;  $a = 2 \text{ м}$ ;  $b = 2 \text{ м}$ ;  $c = 2 \text{ м}$ ;  $d = 2 \text{ м}$ .

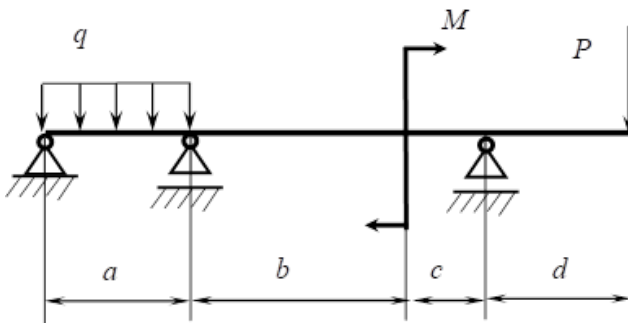
Розв'язання:

1. Визначаємо ступінь статичної невизначуваності балки (рис. 1.20, а).

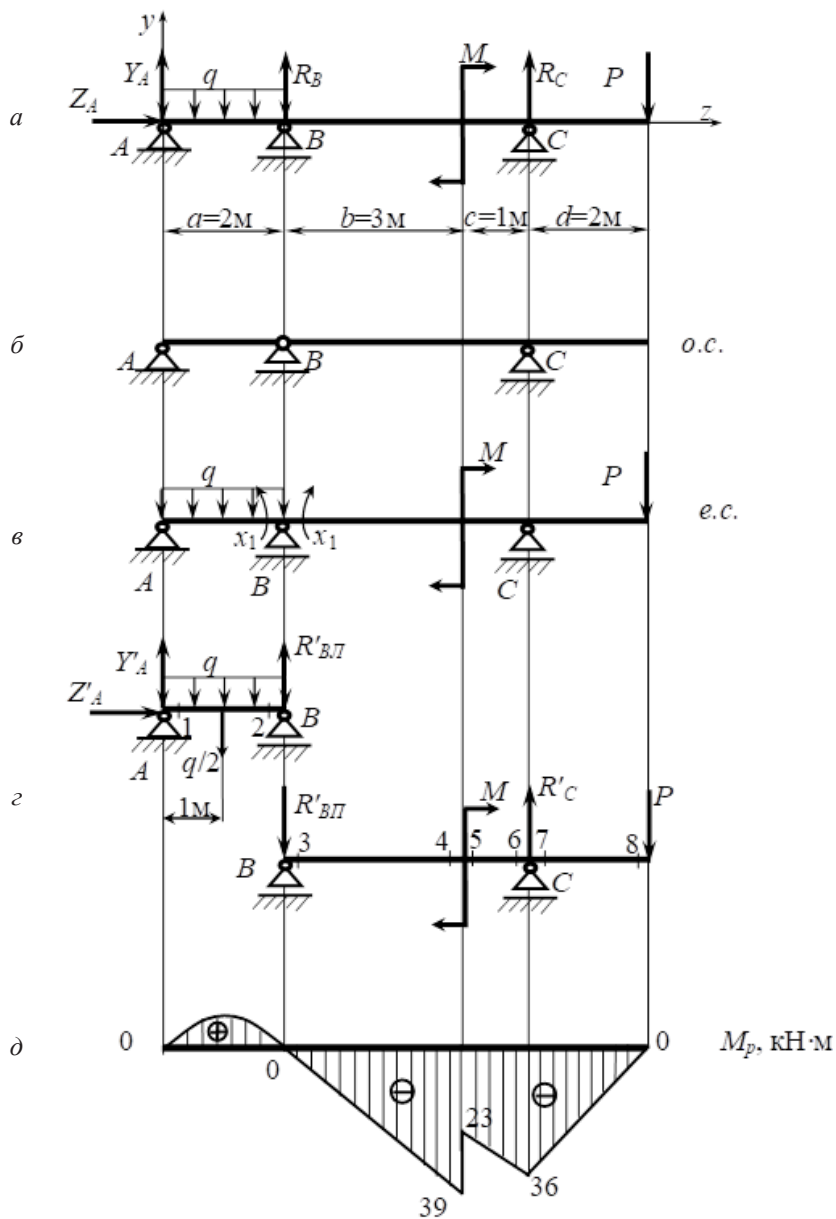
У балки 4 реакції. На неї діє плоска довільна система сил, для якої можна скласти 3 незалежних рівняння статичної рівноваги. Тож, ступінь статичної невизначуваності цієї балки згідно з формулою 1.52. дорівнює:  $S = 4 - 3 = 1$ . Тож, балка є один раз статично невизначуваною.

2. Підбираємо основну систему.

Для розкриття статичної невизначуваності даної балки можна було б відкинути одну з її рухомих опор –  $B$  або  $C$ , у яких прикладені



**Рисунок 1.19** – Схема навантажень на сталеву балку для прикладу



**Рисунок 1.20** – Епюра згинальних моментів для прикладу

по одній вертикальній реакції (рис. 1.20, а). Однак, такий підхід до так званих *багатпрогонових нерозрізних балок*, які є статично невизначуваними, зазвичай не застосовують.

Найбільш вдалою основною системою для них вважається варіант з так званими врізаними шарнірами над проміжними опорами, які розбивають суцільну балку на окремі частини, кожна з яких сприймає лише те навантаження, яке діє в її межах.

До врізання зазначених шарнірів сусідні частини балки, що розташовані між проміжними опорами, є по відношенню одна до одної жорсткими кріпленнями, які не дозволяють окремий поворот кожної з частин балки відносно спільної опори. Врізані ж шарніри такий поворот дозволяють, бо в них уже відсутній момент, який був у жорсткого кріплення.

Для компенсації цієї зміни до кожного з врізаних шарнірів прикладають по парі рівних і протилежно спрямованих моментів ( $X_i$ ), значення яких знаходять з умови відсутності відносного кута повороту перерізів розділеної балки, що примикають до врізаного шарніра (формула 1.53).

$$\theta_{\text{відн.}} = 0. \quad (1.53)$$

Щоб не відходити від зазначеної традиції, вибираємо в якості основної системи для нашого прикладу балку з врізаним шарніром над проміжною опорою  $B$  (рис. 1.20, б).

3. Прикладаємо до основної системи задане навантаження і невідомі моменти  $X_1$  врізаного шарніра  $B$ , отримуємо еквівалентну систему (рис. 1.20, в).

4. Для еквівалентної системи записуємо канонічне рівняння методу сил (у даному прикладі воно одне, формула 1.54).

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0. \quad (1.54)$$

Фізичний смисл цього рівняння – у відсутності взаємного кута повороту лівої і правої частин еквівалентної системи відносно врізаного шарніра  $B$  (рис. 1.20, в), що описує формула 1.55.

$$\theta_{\text{відн.}}^B = 0. \quad (1.55)$$

Перша складова в формулі 1.54 – це внесок у величину  $\theta_{\text{відн.}}^B$  невідомих моментів  $X_1$ , друга – внесок заданого навантаження.

Для визначення коефіцієнтів канонічного рівняння (формула 1.54) треба мати епюри згинальних моментів від дії на балку заданого навантаження і одиничних моментів  $X_1 = 1$  в шарнірі  $B$ .

5. Визначаємо опорні реакції лівої і правої частин основної системи від дії на неї заданого навантаження (рис. 1.20,  $\varepsilon$ ) і будуємо так звану *вантажну епюру* згинальних моментів –  $M_P$  (рис. 1.20,  $\delta$ ).

Ліва частина ( $AB$ ):

$$\sum m_B = -Y'_A \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0; \quad (1.56)$$

$$\sum m_A = R'_{BЛ} \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 0; \quad (1.57)$$

$$\sum P_z = Z'_A = 0. \quad (1.58)$$

Із формули 1.56:

$$Y'_A = \frac{q \cdot 2 \cdot 1}{2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 10 \text{ кН.}$$

Із формули 1.57:

$$R'_{BЛ} = \frac{q \cdot 2 \cdot 1}{2} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 10 \text{ кН.}$$

Із формули 1.58:

$$Z'_A = 0.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = Y'_A + R'_{BЛ} - q \cdot 2 = 10 + 10 - 10 \cdot 2 = 0.$$

Реакції визначені вірно.

Права частина ( $BC$ ):

$$\sum m_C = R'_{BП} \cdot 4 - M - P \cdot 2 = 0; \quad (1.59)$$

$$\sum m_B = -M + R'_C \cdot 4 - P \cdot 6 = 0. \quad (1.60)$$

Із формули 1.59:

$$R'_{BП} = \frac{1}{4} \cdot (M + P \cdot 2) = \frac{1}{4} \cdot (16 + 18 \cdot 2) = 13 \text{ кН.}$$

Із формули 1.60:

$$R'_C = \frac{1}{4} \cdot (M + P \cdot 6) = \frac{1}{4} \cdot (16 + 18 \cdot 6) = 31 \text{ кН.}$$

Перевірка:

$$\sum P_y = -R'_{BL} + R'_C - P = -13 + 31 - 18 = 0.$$

Реакції визначені вірно.

Епюра  $M_P$  (рис. 1.20, д):

$$M_1 = M_2 = M_3 = 0; \quad M_4 = -R'_{BL} \cdot 3 = -13 \cdot 3 = -39 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_4 + M = -39 + 16 = -23 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = M_7 = R'_{BL} \cdot 4 + M = -13 \cdot 4 + 16 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Слід зауважити, що при даній схемі балки визначення реакцій  $Y'_A$  та  $R'_{BL}$  при побудові епюри  $M_P$  не є обов'язковим, бо значення згинальних моментів у перерізах 1 і 2, які розташовані біля опор  $A$  і  $B$ , явно дорівнюють нулю. До того ж, екстремальне значення згинального моменту на ділянці  $AB$  епюри  $M_P$  для подальшого розрахунку не потрібне.

6. Визначаємо опорні реакції лівої і правої частин основної системи від дії одиничних моментів  $\bar{X}_1 = 1$  (рис. 1.21, а) і будуємо епюру  $\bar{M}$  (рис. 1.21, б).

Ліва частина ( $AB$ ):

$$\sum m_B = -\bar{Y}_A \cdot 2 + \bar{X}_1 = 0; \quad (1.61)$$

$$\sum m_A = -\bar{R}_{BL} \cdot 2 + \bar{X}_1 = 0; \quad (1.62)$$

$$\sum P_z = \bar{Z}_A = 0. \quad (1.63)$$

Із формули 1.61:

$$\bar{Y}_A = \frac{\bar{X}_1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ м}^{-1}.$$

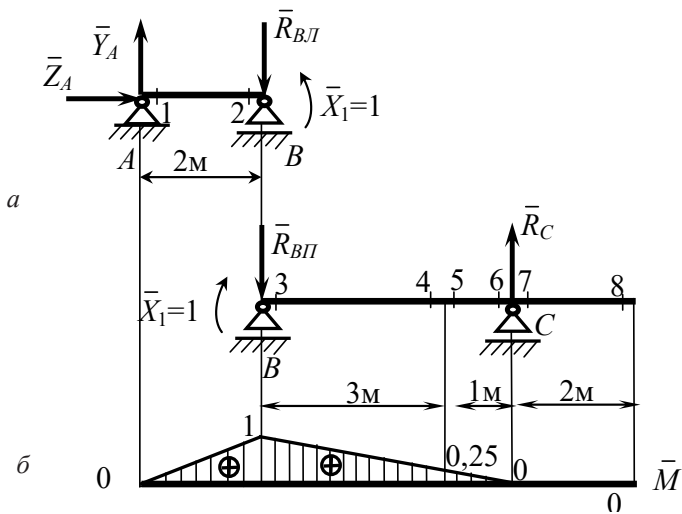


Рисунок 1.21 – Епюра  $\bar{M}$  для прикладу

Із формули 1.62:

$$\bar{R}_{БЛ} = \frac{\bar{X}_1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ м}^{-1}.$$

Із формули 1.63:

$$\bar{Z}_A = 0.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = \bar{Y}_A - \bar{R}_{БЛ} = 0,5 - 0,5 = 0.$$

Реакції визначені вірно.

Права частина (BC):

$$\sum m_C = -\bar{X}_1 + \bar{R}_{БП} \cdot 4 = 0; \quad (1.64)$$

$$\sum m_B = -\bar{X}_1 + \bar{R}_C \cdot 4 = 0. \quad (1.65)$$

Із формули 1.64:

$$\bar{R}_{BII} = \frac{\bar{X}_1}{4} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ м}^{-1}.$$

Із формули 1.65:

$$\bar{R}_C = \frac{\bar{X}_1}{4} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ м}^{-1}.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = -\bar{R}_{BII} + \bar{R}_C = -0,25 + 0,25 = 0.$$

Реакції визначені вірно.

Епюра  $\bar{M}$  (рис. 1.21, в):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = \bar{Y}_A \cdot 2 = 0,5 \cdot 2 = 1; \quad M_3 = \bar{X}_1 = 1; \\ M_4 = M_5 = \bar{X}_1 - \bar{R}_{BII} \cdot 3 = 1 - 0,25 \cdot 3 = 0,25; \quad M_6 = M_7 = M_8 = 0.$$

7. Визначасмо коефіцієнти канонічного рівняння (формула 1.54):

$$\delta_{11} = \bar{M} \times \bar{M} = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) + \\ + \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0,25 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 1) + \\ + \frac{1}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 0,25 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0,25 \cdot 0 + 0 \cdot 0,25) = \frac{12}{6E \cdot J_x}. \\ \Delta_{1P} = M_P \times \bar{M} = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) + \\ + \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-39) \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,25 + (-39) \cdot 1] + \\ + \frac{1}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-23) \cdot 0,25 + 2 \cdot (-36) \cdot 0 + (-23) \cdot 0 + (-36) \cdot 0,25] = -\frac{176}{6E \cdot J_x}.$$

8. Визначаємо значення  $X_1$ :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{176}{12} = 14,667 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

9. Визначаємо опорні реакції еквівалентної системи (рис. 1.22).  
Ліва частина (AB):

$$\sum m_B = -Y_A \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 + X_1 = 0; \quad (1.66)$$

$$\sum m_A = -q \cdot 2 \cdot 1 + R_{BЛ} \cdot 2 + X_1 = 0; \quad (1.67)$$

$$\sum P_x = Z_A = 0. \quad (1.68)$$

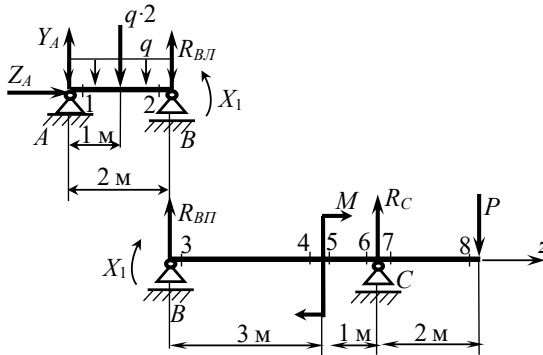


Рисунок 1.22 – Еквівалентна система для прикладу

Із формули 1.66:

$$Y_A = \frac{1}{2} \cdot (q \cdot 2 \cdot 1 + X_1) = \frac{1}{2} \cdot (10 \cdot 2 \cdot 1 + 14,667) = 17,334 \text{ кН}.$$

Із формули 1.67:

$$R_{BЛ} = \frac{1}{2} \cdot (q \cdot 2 \cdot 1 - X_1) = \frac{1}{2} \cdot (10 \cdot 2 \cdot 1 - 14,667) = 2,667 \text{ кН}.$$

Із формули 1.68:

$$Z_A = 0.$$

Перевірка:

$$\sum P_y = Y_A - q \cdot 2 \cdot 1 + R_{BII} = 17,334 - 10 \cdot 2 \cdot 1 + 2,667 \approx 0.$$

Реакції визначені вірно.

Права частина (BC):

$$\sum m_B = -X_1 - M + R_C \cdot 4 - P \cdot 6 = 0; \quad (1.69)$$

$$\sum m_C = -X_1 - M - R_{BII} \cdot 4 - P \cdot 2 = 0. \quad (1.70)$$

Із формули 1.69:

$$R_C = \frac{1}{4} \cdot (X_1 + M + P \cdot 6) = \frac{1}{4} \cdot (14,667 + 16 + 18 \cdot 6) = 34,667 \text{ кН.}$$

Із формули 1.70:

$$R_{BII} = -\frac{1}{4} \cdot (X_1 + M + P \cdot 2) = -\frac{1}{4} \cdot (14,667 + 16 + 18 \cdot 2) = -16,667 \text{ кН.}$$

Перевірка:

$$\sum P_y = R_{BII} + R_C - P = -16,667 + 34,667 - 18 = 0.$$

Реакції визначені вірно.

10. Визначаємо значення поперечних сил у характерних перерізах еквівалентної системи (рис. 1.22) і будуємо епюру  $Q$  (рис. 1.23):

$$Q_1 = y_A = 17,334 \text{ кН}; \quad Q_2 = y_A - q \cdot 2 = 17,334 - 10 \cdot 2 = -2,666 \text{ кН};$$

$$Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = R_{BII} = -16,667 \text{ кН};$$

$$Q_7 = Q_8 = Q_6 + R_C = -16,667 + 34,667 = 18 \text{ кН};$$

$$\ell_D = y_A : q = 17,334 : 10 = 1,733 \text{ м.}$$

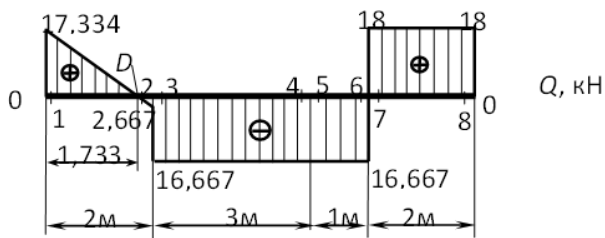


Рисунок 1.23 – Еюра  $Q$  для еквівалентної системи для прикладу

11. Визначаємо значення згинальних моментів у характерних перерізах еквівалентної системи (рис. 1.22) і будемо підсумкову епюру  $M$  (рис. 1.24):

$$M_1 = M_8 = 0; \quad M_2 = X_1 = 14,667 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = X_1 = 14,667 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_4 = X_1 + R_{\text{ВП}} \cdot 3 = \\ = 14,667 - 16,667 \cdot 3 = 14,667 - 50,001 = -35,334 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = M_4 + M = -35,334 + 16 = -19,334 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = M_7 = -P \cdot 2 = -18 \cdot 2 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D = y_A \cdot \ell_D - q \cdot \ell_D \cdot \frac{\ell_D}{2} = 17,334 \cdot 1,733 - 10 \cdot 1,733 \cdot \frac{1,733}{2} = \\ = 30,040 - 15,016 = 15,024 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

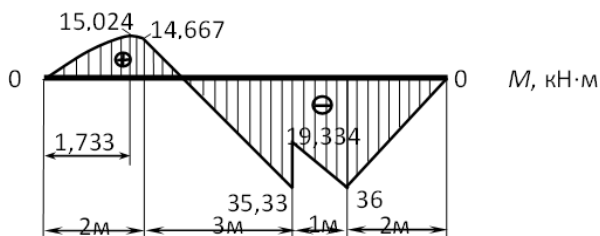


Рисунок 1.24 – Еюра  $M$  для еквівалентної системи для прикладу

12. Виконуємо деформаційну перевірку виконання умови з формули 1.55:

$$\begin{aligned}\theta_{\text{відн.}}^B &= M \times \bar{M} = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 14,667 + 0 \cdot 1 + 14,667 \cdot 0) + \frac{10 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} (0 + 1) + \\ &+ \frac{3}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot 14,667 \cdot 1 + 2 \cdot (-35,334) \cdot 0,25 + 14,667 \cdot 0,25 + (-35,334) \cdot 1] + \\ &+ \frac{1}{6E \cdot J_x} \cdot [2 \cdot (-19,334) \cdot 0,25 + 2 \cdot (-36) \cdot 0 + (-19,334) \cdot 0 + (-36) \cdot 0,25] = \\ &= \frac{58,668}{6E \cdot J_x} + \frac{80}{24E \cdot J_x} - \frac{60,001}{6E \cdot J_x} - \frac{18,667}{6E \cdot J_x} = \frac{1}{6E \cdot J_x} \cdot (78,668 - 78,668) = 0.\end{aligned}$$

Як бачимо, умова з формули 1.55, яку було покладено в основу канонічного рівняння (формула 1.55) виконується. Тож, розкриття статичної невизначуваності балки виконане правильно.

13. Визначаємо за формулою 1.7 потрібний осьовий момент опору двотавра:

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{36 \cdot 10^3}{160} = 225 \text{ см}^3.$$

Із таблиці А.2 вибираємо двотавр 22, у якого  $W_x = 232 \text{ см}^3$ .

Наведений розрахунок не є остаточним. Він може бути доповненим повною перевіркою міцності балки і (при необхідності) визначенням лінійних і кутових переміщень у ній, процедури яких містяться в пунктах 1.1 і 1.4.

Розглянутий приклад і подібні приклади інших «ручних» розрахунків [12] свідчать про значну трудомісткість процесу і вказують на необхідність його переведення на автоматичні комп'ютерні технології.

---

# АЛГОРИТМИ І КОМП'ЮТЕРНІ ПРОГРАМИ РОЗРАХУНКІВ СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ БАЛОК

---

## 2.1 Етапи розрахунків і вихідні дані

Нагадаємо (пункт 1.2), що до статично визначуваних відносяться балки, у яких кількість опорних реакцій не перевищує кількості незалежних рівнянь статичної рівноваги, яких можна скласти для визначення цих реакцій. Статично визначувані балки бувають двохопорними та консольними з опорою зліва або справа. У кожного з цих типів балок – по дві опорні реакції.

Повний комп'ютерний розрахунок балки будь-якого з означених типів передбачає послідовне виконання етапів, завданнями яких є:

1. Визначення опорних реакцій.
2. Побудова епюру поперечних сил і згинальних моментів.
3. Визначення з умов міцності балки (пункт 1.1) потрібних розмірів її перерізу.
4. Визначення лінійних та кутових переміщень у заданих місцях балки і побудова графіків зміни цих переміщень за довжиною балки.

Перелічені етапи являють собою окремі розрахункові блоки, вбудовані у загальний ланцюжок, у якому на кожному з наступних етапів використовуються результати попередніх, причому зазначена їх послідовність є незмінною. Після завершення кожного етапу (за виключенням останнього) розрахунок припиняється і програма запрошує дозвіл на виконання наступного. Це зроблено, щоб уникнути виконання етапів, не потрібних користувачеві. Так, наприклад, у студентів, які вивчають теоретичну механіку і засвоюють прийоми визначення опорних реакцій балок, може виникнути потреба тільки в першому етапі повного розрахунку, а інші етапи

їм у цей час не потрібні. Студентам же, що вивчають опір матеріалів, можуть стати корисними на різних етапах курсу другий або третій етапи розрахунку. Останній етап розрахунку скоріше буде цікавим студентам, аніж інженерам – практикам і т. д.

Для виконання перелічених етапів розрахунку балок усіх зазначених типів використовуються їх уніфіковані схеми (рис. 2.1–2.3).

На рисунках 2.1–2.3 знаки плюс у кружках означають додатні напрямки зображених навантажень і опорних реакцій.

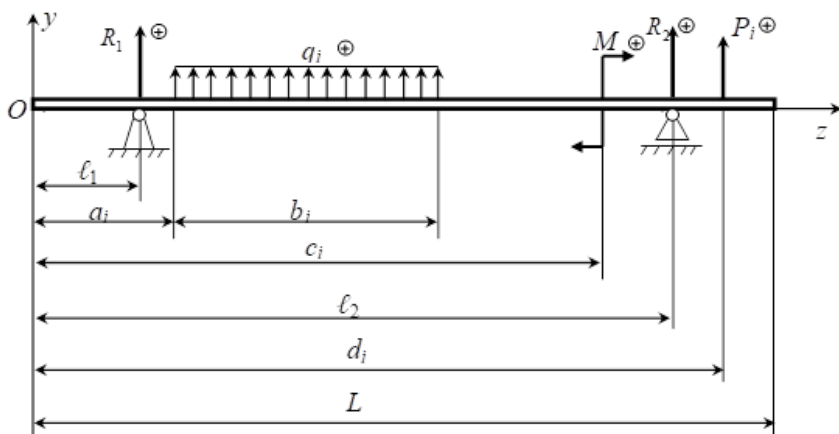


Рисунок 2.1 – Уніфікована схема 1 для розрахунку балок

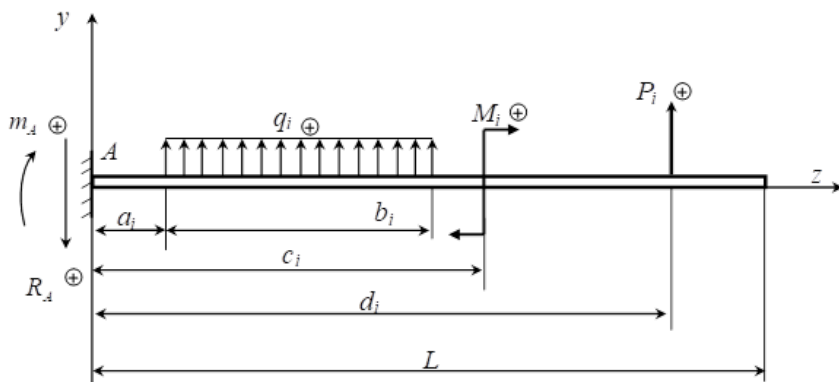
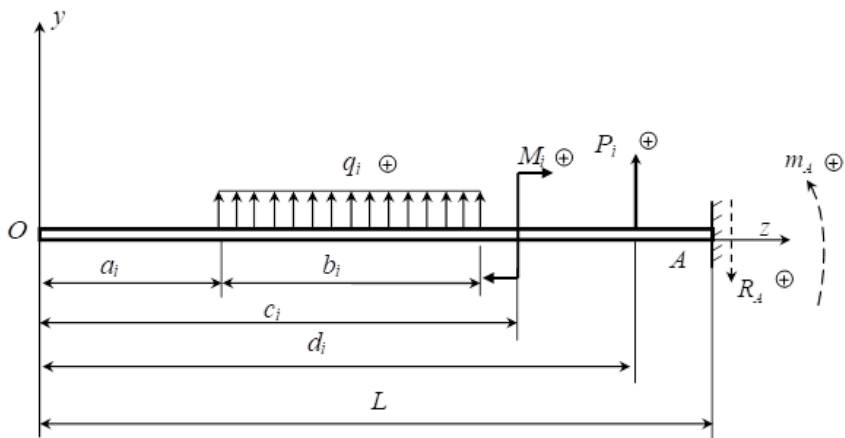


Рисунок 2.2 – Уніфікована схема 2 для розрахунку балок



**Рисунок 2.3** – Уніфікована схема 3 для розрахунку балок

Символи при навантаженнях вказують номери кожного з їх видів:  $i = 1, \dots, n$ . Принципових обмежень для числа  $n$  не існує, але, враховуючи існуючі традиції навчальних завдань, згідно з якими кожне із навантажень ( $P$ ,  $M$ ,  $q$ ) задається в одній задачі в кількості не більше двох [12], у створених програмах покладено  $n = 2$ .

На початку розрахунку в комп'ютер вводяться вихідні геометричні та силові параметри балки згідно з вибраною уніфікованою схемою (рис. 2.1–2.3).

Для контролю правильності вводу комп'ютер будує на основі введених даних «свою» версію уніфікованої схеми балки. Користувач порівнює побудовану схему з заданою і в разі їх ідентичності дає команду на запуск розрахункової програми.

Зазначених даних достатньо для двох перших етапів розрахунку, які виконуються комп'ютером у автоматичному режимі. На подальших етапах вводяться додаткові дані для конкретизації виконуваних завдань.

## 2.2 Визначення опорних реакцій

Для **двохопорних балок** (рис. 2.1) опорні реакції визначаються за формулами 2.1 та 2.2, отриманими з рівнянь статичної рівноваги (рівнянь моментів відносно опорних точок  $A$  і  $B$ ).

$$R_1 = \frac{1}{l_2 - l_1} \cdot \left[ -\sum_{i=1}^n M_i + \sum_{i=1}^n P_i \cdot (d_i - l_2) - \sum_{i=1}^n q_i \cdot b_i \cdot \left( l_2 - a_i - \frac{b_i}{2} \right) \right], \quad (2.1)$$

$$R_2 = \frac{1}{l_2 - l_1} \cdot \left[ \sum_{i=1}^n M_i - \sum_{i=1}^n P_i \cdot (d_i - l_1) - \sum_{i=1}^n q_i \cdot b_i \cdot \left( a_i + \frac{b_i}{2} - l_1 \right) \right]. \quad (2.2)$$

Для **консольних балок з опорою зліва** (рис. 2.2) значення  $R_A$  визначається з рівняння проєкцій на вісь  $y$  (формула 2.3), а значення  $m_A$  – з рівняння моментів відносно точки  $A$  (формула 2.4).

$$R_A = \sum_{i=1}^n q_i \cdot b_i + \sum_{i=1}^n P_i, \quad (2.3)$$

$$m_A = \sum_{i=1}^n q_i \cdot b_i \cdot \left( a_i + \frac{b_i}{2} \right) - \sum_{i=1}^n M_i + \sum_{i=1}^n P_i \cdot d_i, \quad (2.4)$$

Для **консольних балок з опорою справа** (рис. 2.3) рівняння проєкцій на вісь  $y$  – таке саме, як і в попередньому випадку, тому значення  $R_A$  цього разу теж визначається за формулою 2.3. Рівняння ж моментів відносно точки  $A$  цього разу – інше, тому і значення  $m_A$  визначається за іншою формулою 2.5.

$$m_A = \sum_{i=1}^n q_i \cdot b_i \cdot \left( L - a_i - \frac{b_i}{2} \right) + \sum_{i=1}^n M_i + \sum_{i=1}^n P_i \cdot (L - d_i). \quad (2.5)$$

У формулах 2.1–2.5 і надалі символ  $n$  означає прийняту кратність навантажень балки (див. вище  $n = 2$ ).

Зауважимо, що у випадку консольних балок з опорою справа опорні реакції  $R_A$  і  $M_A$  в подальших розрахунках не використовуються і мають чисто інформаційний характер. Вони, наприклад, можуть бути корисними для відповідного тренінгу студентів.

## 2.3 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів

Зазначені епюри будуються уздовж осі  $z$  з кроком  $\Delta z = 1 \dots 2$  см. При цьому поточні значення  $Q$  і  $M$  для кожного з означених типів балок визначаються за відповідними формулами, отриманими згідно з правилами побудови епюр (пункт 1.3).

Для двохопорних балок (рис. 2.1) – це  $Q(z)$  (формули 2.6–2.11) та  $M(z)$  (формули 2.12–2.17).

$$Q(z) = \sum_{i=1}^n Q(q_i) + \sum_{i=1}^n Q(P_i) + \sum_{i=1}^n Q(M_i) + Q(R_1) + Q(R_2), \quad (2.6)$$

де

$$\begin{cases} Q(q_i) = 0, & \text{в інтервалі } 0 \leq z \leq a_i; \\ Q(q_i) = q_i \cdot (z - a_i), & \text{в інтервалі } a_i \leq z \leq (a_i + b_i); \\ Q(q_i) = q_i \cdot b_i, & \text{в інтервалі } (a_i + b_i) \leq z \leq L. \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} Q(P_i) = 0, & \text{в інтервалі } 0 \leq z < d_i; \\ Q(P_i) = P_i, & \text{в інтервалі } d_i \leq z \leq L. \end{cases} \quad (2.8)$$

$$Q(M_i) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq L. \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} Q(R_1) = 0, & \text{в інтервалі } 0 \leq z < l_1; \\ Q(R_1) = R_1, & \text{в інтервалі } l_1 \leq z \leq L. \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} Q(R_2) = 0, & \text{в інтервалі } 0 \leq z < l_2; \\ Q(R_2) = R_2, & \text{в інтервалі } l_2 \leq z \leq L. \end{cases} \quad (2.11)$$

$$M(z) = \sum_{i=1}^n M(q_i) + \sum_{i=1}^n M(P_i) + \sum_{i=1}^n M(M_i) + \sum_{i=1}^n M(R_1) + \sum_{i=1}^n M(R_2), \quad (2.12)$$

де

$$\left\{ \begin{array}{l} M(q_i) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq a_i; \\ M(q_i) = q_i \cdot \frac{(z - a_i)^2}{2}, \text{ в інтервалі } a_i \leq z \leq (a_i + b_i); \\ M(q_i) = q_i \cdot b_i \cdot \left( z - a_i - \frac{b_i}{2} \right), \text{ в інтервалі } (a_i + b_i) \leq z \leq L; \end{array} \right. \quad (2.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M(P_i) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq d_i; \\ M(P_i) = P_i \cdot (z - d_i), \text{ в інтервалі } d_i \leq z \leq L; \end{array} \right. \quad (2.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M(M_i) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z < c_i; \\ M(M_i) = M_i, \text{ в інтервалі } c_i \leq z \leq L; \end{array} \right. \quad (2.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M(R_1) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq l_1; \\ M(R_1) = R_1 \cdot (z - l_1), \text{ в інтервалі } l_1 \leq z \leq L; \end{array} \right. \quad (2.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M(R_2) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq l_2; \\ M(R_2) = R_2 \cdot (z - l_2), \text{ в інтервалі } l_2 \leq z \leq L. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Значення  $R_1$  і  $R_2$  визначаються за формулами (2.1) та (2.2).

Для консольних балок з опорою зліва (рис. 2.2) залежності  $Q(z)$  (формула 2.18) та  $M(z)$  (формула 2.19).

$$Q(z) = \sum_{i=1}^n Q(q_i) + \sum_{i=1}^n Q(P_i) + \sum_{i=1}^n Q(M_i) - R_A, \quad (2.18)$$

$$M(z) = \sum_{i=1}^n M(q_i) + \sum_{i=1}^n M(P_i) + \sum_{i=1}^n M(M_i) + m_A - R_A \cdot z, \quad (2.19)$$

де складові обох виразів з символами сум визначаються за формулами 2.7–2.9 і формулами 2.13–2.15;

значення  $R_A$  і  $m_A$  визначаються за формулами 2.3 та 2.4.

Для консольних балок з опорою справа (рис. 2.3) їхні залежності  $Q(z)$  (формула 2.20) та  $M(z)$  (формула 2.21). відрізняються від залежностей з формул 2.18 і 2.19 тим, що вони не містять величин  $R_A$  і  $m_A$ .

$$Q(z) = \sum_{i=1}^n Q(q_i) + \sum_{i=1}^n Q(P_i) + \sum_{i=1}^n Q(M_i), \quad (2.20)$$

$$M(z) = \sum_{i=1}^n M(q_i) + \sum_{i=1}^n M(P_i) + \sum_{i=1}^n M(M_i). \quad (2.21)$$

## 2.4 Розрахунок балок на міцність

Основу цього розрахунку складають модулі значень  $Q$  і  $M$ , визначених на попередньому етапі.

Для реалізації даного розрахунку в комп'ютер додатково вводяться вид профілю балки і марка її матеріалу.

Як уже повідомлялось (пункт 1.1), для виготовлення балок використовують профілі фасонного прокату – двотаври і швелери, а також (хоча і значно рідше) профілі сортового прокату – прямокутники (смуги), квадрати і круги. Усіх їх виробляють зазвичай із вуглецевих марок сталі звичайної якості за ДСТУ 4484 : 2005.

Порівняльний аналіз показує, що двотаври і швелери набагато ефективніші від зазначених профілів сортового прокату. Так, при однаковій площі перерізу  $F$  двотаври перевершують за осьовим моментом опору  $W_x$  прямокутники (з відношенням висоти до ширини, рівним 2,0) у 2,3...3,7 рази, квадрати – у 3,3...4,1 рази, круги – у 3,7...4,7 рази. Швелери за цим показником перевершують прямокутники у 2,0...3,6 рази, квадрати – у 2,3...4,4 рази, круги – у 2,6...5,0 разів.

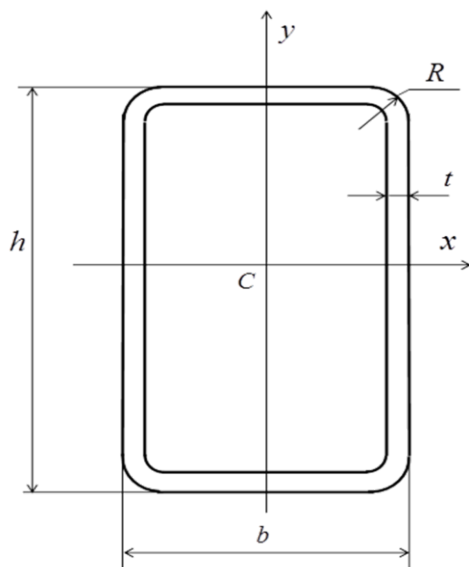
Зрозуміло, що використання зазначених профілів сортового прокату для виготовлення балок є економічно не доцільним. Тому ці профілі з подальшого розгляду знімаються.

Останнім часом промисловістю освоєне виробництво замкнутих (пустотілих) квадратних й прямокутних профілів, які виготовляють за ДСТУ Б В.2.6-8-95 із листового сталевого прокату шляхом згинання і електрозварювання. Ці профілі є достатньо економічними і служать елементами будівельних конструкцій, зокрема балками.

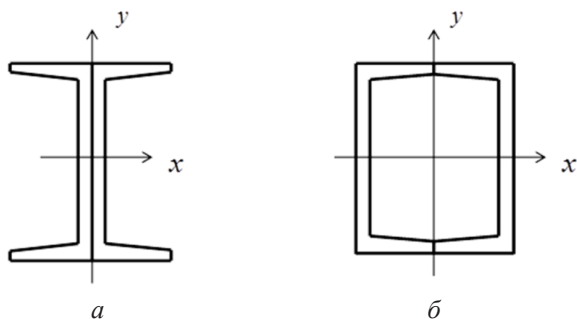
Аналіз показує, що з огляду на відношення  $W_x$  до  $F$  замкнуті прямокутні профілі ефективніші за замкнуті квадратні. На підставі цього замкнуті квадратні профілі надалі не розглядаємо.

У замкнутих прямокутних профілів (рис. 2.4) відношення  $W_x$  до  $F$ , як показник їх ефективності, зростає зі збільшенням відношення  $h : b$  і зменшенням величини  $t$ . Саме з цього і виходили при формуванні відповідного розмірного ряду зазначених профілів (табл. А.3).

Таким чином, до комп'ютерних розрахунків на міцність приймаються двотаври, швелери і прямокутні замкнуті профілі. До цього переліку додаються також поширені на практиці здвоєні варіанти швелерів – відкритий (рис. 2.5, а) і закритий (рис. 2.5, б), які з огляду на процедуру розрахунків між собою ідентичні.



**Рисунок 2.4** – Геометричні характеристики прямокутного профілю



**Рисунок 2.5** – Здвоєні варіанти швелерів

Основні характеристики зазначених профілів, включно з переліком марок сталі для них і відповідними значеннями допустимих напружень, наведені в додатку А (табл. А.1–А.4).

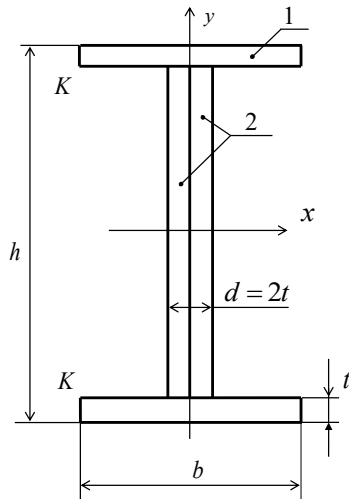
Розрахункова схема двотаврів, яка складається з трьох прямокутників – двох полок і стінки, зображена на рисунку 1.7. Ця схема цілком придатна і для швелерів, бо вони також мають дві полки та стінку і такі ж позначення параметрів, як і двотаври (табл. А.1–А.2). У випадку здвоєних швелерів розрахункова схема така ж, а параметри перерізу визначаються за формулою 2.22.

$$\begin{aligned}
 W_x &= 2 \cdot W'_x; & J_x &= 2 \cdot J'_x; & S_x &= 2 \cdot S'_x; \\
 h &= h'; & b &= 2 \cdot b'; & d &= 2 \cdot d'; & t &= t',
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

де штрихами позначені відповідні параметри кожного з швелерів, що створюють переріз (див. табл. А.2).

Розрахункову схему прямокутних замкнутих профілів також можна звести з деякими спрощеннями до двох полок 1 і стінки 2 (рис. 2.6), з тією лише різницею, що стінка в даному разі є здвоєною і її товщина  $d$  не входить до стандартних позначень цих профілів (табл. А.3), а визначається через параметр  $t$ :  $d = 2t$ .

Зазначена різниця ніяк не впливає на процедуру розрахунків. Тож, балки з усіх вище зазначених профілів розраховуються на міцність однаково, тобто за графо-аналітичною методикою, наведеною в пункті 1.2.



**Рисунок 2.6** – Спрощена схема прямокутних замкнутих профілів

Користувачеві програм пропонуються на його розсуд варіанти профілів балок (двотавр, швелер, здвоєні швелери або двотаври, прямокутний замкнутий профіль) і варіанти марок сталі для них.

Після вводу зазначених даних комп'ютер згідно з запропонованою методикою (пункт 1.2) в автоматичному режимі визначає за формулами 1.31, 1.36–1.40 параметри безпечних факторних просторів для усіх типорозмірів вибраного профілю і віртуально будує ці простори.

Далі, комп'ютер, починаючи з мінімального розміру профілю, послідовно поміщає в збудовані простори у вигляді відповідних точок пари модулів  $Q$  і  $M$  у перерізах балки, визначених на етапі побудови епюр цих величин (пункт 2.3). Ця процедура закінчується на розмірі профілю, при якому всі зазначені точки опиняються в межах його безпечного факторного простору. Цей розмір і є остаточним.

Особливого розгляду потребує ситуація, коли максимальний табличний розмір швелера або прямокутного замкнутого профілю не забезпечує міцності балки.

У цьому разі комп'ютер продовжить розрахунок, автоматично перейшовши на здвоєний варіант вибраного виду профілю, при якому всі параметри безпечного факторного простору подвоюються.

Якщо ж і цей варіант не призведе до успішного завершення розрахунку, комп'ютер автоматично перейде до двотавра, який переважає за міцністю інших означених видів профілю.

Коли ж і максимальний номер двотавра (№ 60), а потім і його здвоєний варіант, не призведуть до остаточного результату, комп'ютер припинить розрахунок і дасть пораду користувачеві переглянути конструкцію балки, зокрема перевести її до групи статично невизначуваних балок за рахунок установки додаткових опор (пункт 1.5).

## 2.5 Визначення переміщень у балках

У відповідності до пункту 2.1 на цьому етапі розрахунку визначаються прогини  $\delta_H$  і кути повороту перерізів балки  $\theta_K$  з побудовою графіків зміни цих переміщень за довжиною балки.

Для активізації даного етапу розрахунку треба ввести в комп'ютер значення відстаней від лівого краю балки до точок, у яких визначаються вказані переміщення,  $-l_H$  і  $l_K$ . У разі потреби в побудові зазначених графіків вводяться також відповідні інтервали:  $0 \leq l_H \leq L$  і  $0 \leq l_K \leq L$ .

Слід зауважити, що названі переміщення визначаються лише для того профілю балки, який був взятим для розрахунку на міцність (пункт 2.4). При цьому користувач повинен вибрати і ввести в комп'ютер варіант виконання даного етапу – для розміру профілю, прийнятого з умов міцності, або для більшого за нього.

Згідно з пунктом 1.4 зазначені переміщення визначаються шляхом обчислення інтегралів Мора (формули 1.44–1.45). При комп'ютерному варіанті обчислення цих інтегралів виконується чисельними методами.

Закони  $M(z)$  уже є визначеними на етапі побудови епюр внутрішніх зусиль балок (формули 2.12–2.17, 2.19, 2.21).

Закони  $\bar{M}(z)$ ,  $\bar{M}'(z)$  залежать від місць прикладення до балок одиничних силових факторів  $-P=1$  та  $M=1$ .

**Для двохопорних балок** (рис. 2.7,  $a=2.8, a$ ) вони наступні.

У разі прикладення **одиночної сили** на лівій консолі (рис. 2.7, б) використовуємо формулу 2.23.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M}(z) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq l_H; \\ \bar{M}(z) = 1 \cdot (z - l_H) = z - l_H, \text{ в інтервалі } l_H \leq z \leq l_1; \\ \bar{M}(z) = \bar{R}_2 \cdot (l_2 - z) = \\ = \frac{l_1 - l_H}{l_2 - l_1} \cdot (l_2 - z), \text{ в інтервалі } l_1 \leq z \leq l_2; \\ \bar{M}(z) = 0, \text{ в інтервалі } l_2 \leq z \leq L. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

У разі прикладення **одиночної сили** між опорами (рис. 2.7, в) використовуємо формулу 2.24.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M}(z) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq l_1; \\ \bar{M}(z) = -\bar{R}_1 \cdot (z - l_1) = \\ = -\frac{l_2 - l_H}{l_2 - l_1} \cdot (z - l_1), \text{ в інтервалі } l_1 \leq z \leq l_H; \\ \bar{M}(z) = -\bar{R}_2 \cdot (l_2 - z) = \\ = -\frac{l_H - l_1}{l_2 - l_1} \cdot (l_2 - z), \text{ в інтервалі } l_H \leq z \leq l_2; \\ \bar{M}(z) = 0, \text{ в інтервалі } l_2 \leq z \leq L. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

У разі прикладення **одиночної сили** на правій консолі (рис. 2.7, г) використовуємо формулу 2.25.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M}(z) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq l_1; \\ \bar{M}(z) = \bar{R}_1 \cdot (z - l_1) = \\ = \frac{l_H - l_2}{l_2 - l_1} \cdot (z - l_1), \text{ в інтервалі } l_1 \leq z \leq l_2; \\ \bar{M}(z) = 1 \cdot (l_H - z) = (l_H - z), \text{ в інтервалі } l_2 \leq z \leq l_H; \\ \bar{M}(z) = 0, \text{ в інтервалі } l_H \leq z \leq L. \end{array} \right. \quad (2.25)$$

У разі прикладення **одиночного моменту** на лівій консолі (рис. 2.8, б) використовуємо формулу 2.26.

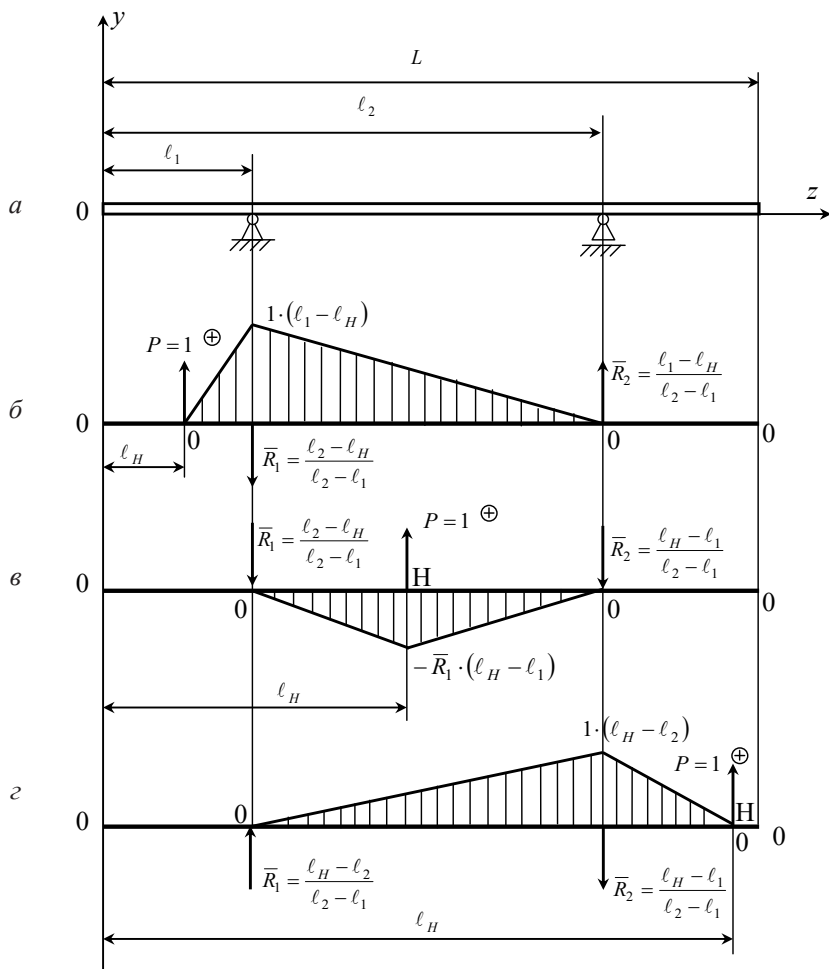
$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M}'(z) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq l_K; \\ \bar{M}'(z) = 1, \text{ в інтервалі } l_K \leq z \leq l_1; \\ \bar{M}'(z) = \bar{R}'_2 \cdot (l_2 - z) = \frac{1}{l_2 - l_1} \cdot (l_2 - z) = \\ = \frac{l_2 - z}{l_2 - l_1}, \text{ в інтервалі } l_1 \leq z \leq l_2; \\ \bar{M}'(z) = 0, \text{ в інтервалі } l_2 \leq z \leq L. \end{array} \right. \quad (2.26)$$

У разі прикладення **одиночного моменту** між опорами (рис. 2.8, в) використовуємо формулу 2.27.

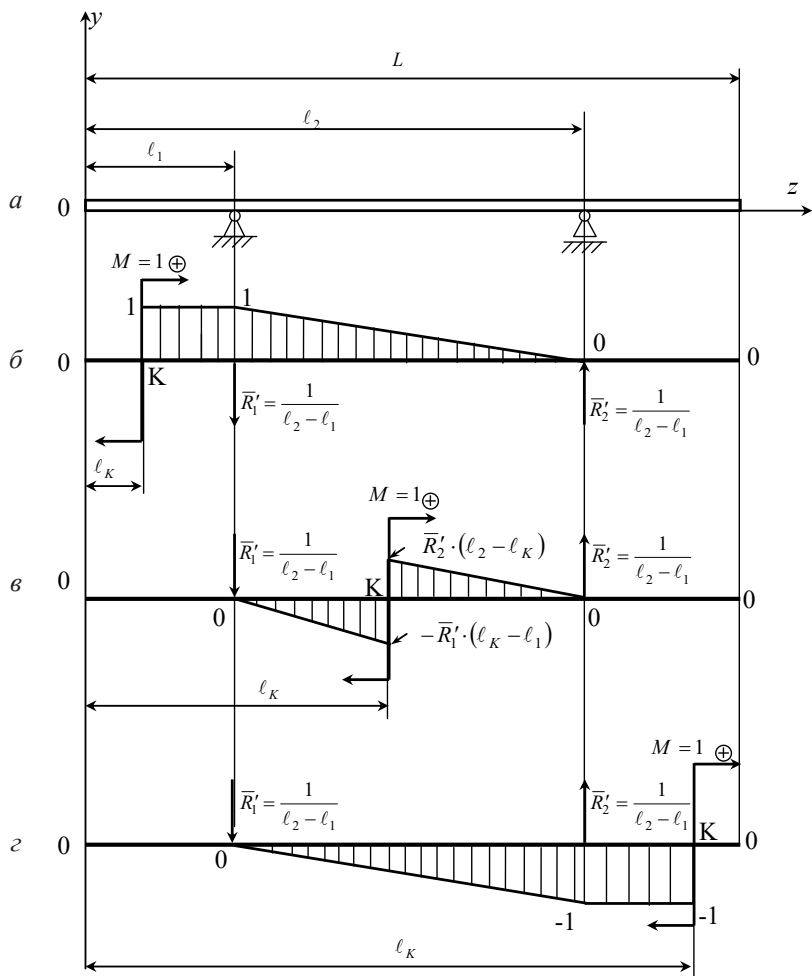
$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M}'(z) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq l_1; \\ \bar{M}'(z) = -\bar{R}'_1 \cdot (z - l_1) = -\frac{1}{l_2 - l_1} \cdot (z - l_1) = \\ = \frac{l_1 - z}{l_2 - l_1}, \text{ в інтервалі } l_1 \leq z \leq l_K; \\ \bar{M}'(z) = \bar{R}'_2 \cdot (l_2 - z) = \frac{1}{l_2 - l_1} \cdot (l_2 - z) = \\ = \frac{l_2 - z}{l_2 - l_1}, \text{ в інтервалі } l_K \leq z \leq l_2; \\ \bar{M}'(z) = 0, \text{ в інтервалі } l_2 \leq z \leq L. \end{array} \right. \quad (2.27)$$

У разі прикладення **одиночного моменту** на правій консолі (рис. 2.8, г) використовуємо формулу 2.28.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M}'(z) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq l_1; \\ \bar{M}'(z) = -\bar{R}'_1 \cdot (z - l_1) = -\frac{1}{l_2 - l_1} \cdot (z - l_1); \\ = \frac{l_1 - z}{l_2 - l_1}, \text{ в інтервалі } l_1 \leq z \leq l_2; \\ \bar{M}'(z) = -1, \text{ в інтервалі } l_2 \leq z \leq l_K; \\ \bar{M}'(z) = 0, \text{ в інтервалі } l_K \leq z \leq L. \end{array} \right. \quad (2.28)$$



**Рисунок 2.7** – Приклади прикладених одиничних сил та відповідних епюр



**Рисунок 2.8** – Приклади прикладених одиничних моментів та відповідних епюр

Для консольних балок з опорою зліва (рис. 2.9) використовуємо формулу 2.29.

$$\begin{cases} \bar{M}(z) = 1 \cdot (l_H - z) = l_H - z, & \text{в інтервалі } 0 \leq z \leq l_H; \\ \bar{M}(z) = 0, & \text{в інтервалі } l_H \leq z \leq L; \\ \bar{M}'(z) = -1, & \text{в інтервалі } 0 \leq z \leq l_K; \\ \bar{M}'(z) = 0, & \text{в інтервалі } l_K \leq z \leq L. \end{cases} \quad (2.29)$$

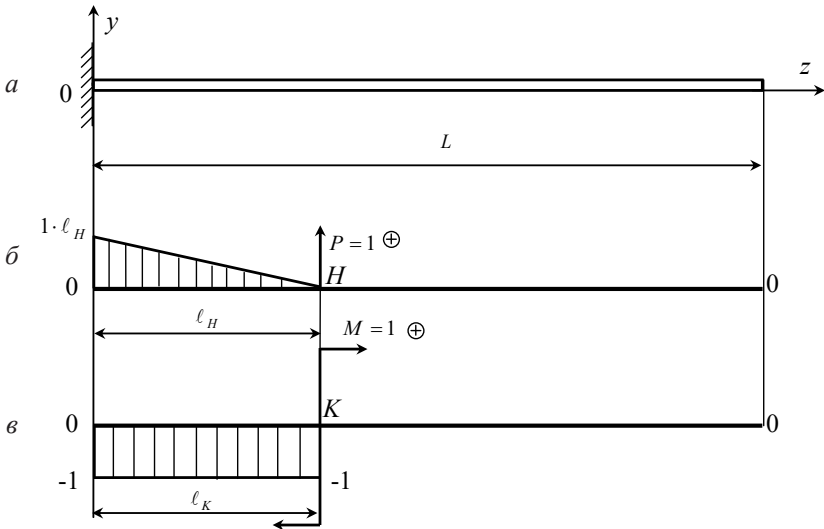


Рисунок 2.9 – Епюри  $Q$  та  $M$  для опори зліва

Для консольних балок з опорою справа (рис. 2.10) використовуємо формулу 2.30.

$$\begin{cases} \bar{M}(z) = 0, & \text{в інтервалі } 0 \leq z \leq l_H; \\ \bar{M}(z) = 1 \cdot (z - l_H) = (z - l_H), & \text{в інтервалі } l_H \leq z \leq L; \\ \bar{M}'(z) = 0, & \text{в інтервалі } 0 \leq z \leq l_K; \\ \bar{M}'(z) = 1, & \text{в інтервалі } l_K \leq z \leq L. \end{cases} \quad (2.30)$$

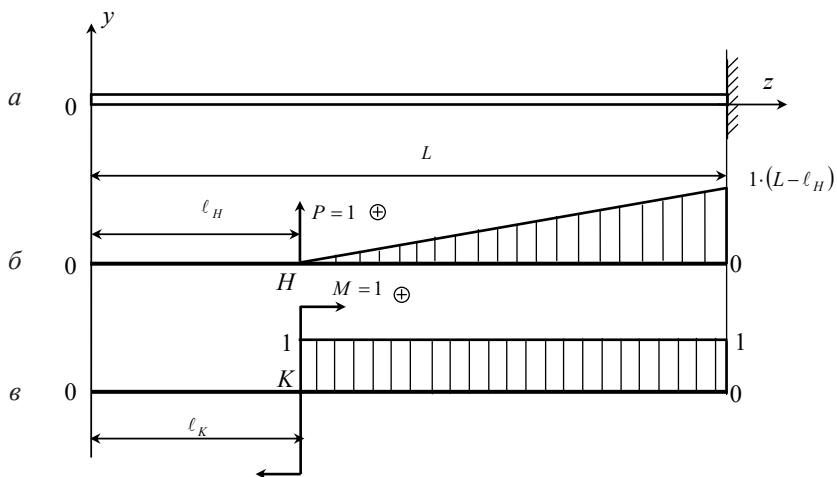


Рисунок 2.10 – Епюри  $Q$  та  $M$  для опори справа

## 2.6 Розрахункові блоки й інтегровані програми

Для автоматизації розрахунку на міцність двохопорних балок було розроблено програми в середовищі комп'ютерної математики Mathcad. Вибір системи Mathcad було зроблено завдяки її легкості і наочності програмування задачі, відображенню складних математичних виразів у зрозумілому для спеціалістів вигляді, простоті використання, можливості створення високоякісних технічних звітів з таблицями, графіками і текстом.

Розглянемо програму розрахунку на міцність двохопорних двотаврових балок. Результатом роботи цієї програми є номер двотавру який задовольняє умови міцності балки за нормальними, дотичними і еквівалентними напруженнями.

Вона володіє таким набором функцій: зображення схеми балки на основі введених даних, обчислення опорних реакцій балки, побудова епюр поперечних сил  $Q$  та згинальних моментів  $M$ , вибір на їх основі номеру двотавру, побудова безпечного факторного простору в координатах  $Q$  і  $M$ , зі значеннями  $Q$  і  $M$  вдовж довжини балки,

оцінювання міцності за нормальними, дотичними і еквівалентними напруженнями.

Для виконання розрахунків користувачу потрібно ввести вихідні дані. Вихідними даними для програми є величина та розташування зосереджених сил та моментів, величина, розташування, та протяжність розподіленого навантаження, довжина та розташування опор на балці. На рисунку 2.11 показано введення вхідних даних для розрахунку.

Введіть зосереджені сили  $P$ , їх розташування  $d$ , моменти пар сил  $M$  та їх розташування  $c$ :

$$P := \begin{pmatrix} -55 \\ 0 \end{pmatrix} \text{kN} \quad d := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \quad M := \begin{pmatrix} 45 \\ 0 \end{pmatrix} \text{kN} \cdot \text{m} \quad c := \begin{pmatrix} 2.8 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m}$$

**Рисунок 2.11** – Введення даних для розрахунку у Mathcad

Тут  $P$  – вектор зосереджених сил,  $d$  – вектор розташування зосереджених сил,  $M$  – вектор моментів пар сил,  $c$  – вектор розташування моментів пар сил. Якщо кількість зосереджених сил або моментів пар сил більше двох, то розмірність векторів можна змінити.

Також для виконання розрахунків потрібно ввести довжину балки, розташування опор на ній, розподілених навантажень, їх розташування та протяжності (рис. 2.12).

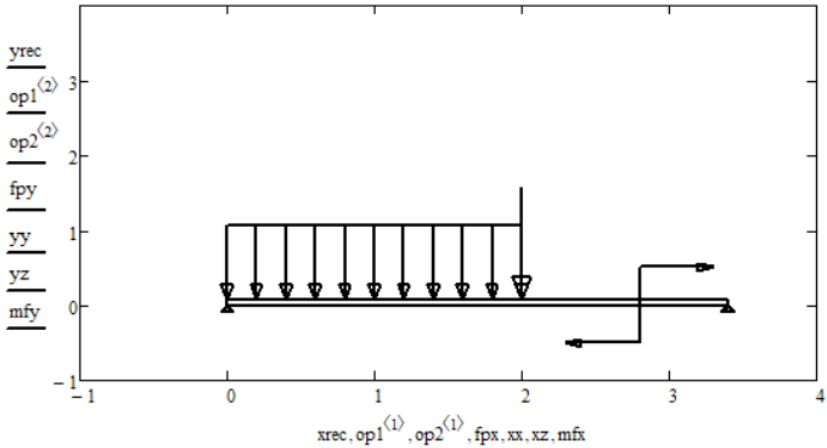
Введіть розподілені навантаження  $q$ , їх розташування  $a$ , протяжність  $b$ , довжину балки  $L$ , та розташування опор на балці  $l_1$  та  $l_2$ :

$$q := \begin{pmatrix} -50 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad a := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{m} \quad L := 3.4 \text{ m} \quad l_1 := 0 \text{ m} \quad l_2 := 3.4 \text{ m}$$

**Рисунок 2.12** – Введення даних для розрахунку у Mathcad

Тут  $q$  – вектор розподілених навантажень,  $a$  – вектор їх розташувань,  $b$  – протяжності розподілених навантажень,  $L$  – довжина балки,  $l_1$  та  $l_2$  – положення лівої та правої опори балки відповідно. Якщо кількість розподілених навантажень більше двох, то розмірність векторів  $q$ ,  $a$  та  $b$  можна змінити.

Після введення користувачем вхідних даних автоматично генерується схема балки з визначеними навантаженнями (рис. 2.13). Це дозволить користувачеві перевірити коректність введених даних і в разі потреби виправити їх.



**Рисунок 2.13** – Схема балки з визначеними навантаженнями

Далі визначаємо внесок в поперечну силу в перерізі  $x$  від зосереджених сил та розподілених навантажень згідно формул 2.7–2.8 (рис. 2.14).

Визначаємо вклад в поперечну силу в перерізі  $x$  від зосереджених сил:

$$Q_p(x) := \sum_{i=1}^{rows(P)} [P_i(x > d_i)].$$

Визначаємо вклад в поперечну силу в перерізі  $x$  від розподілених навантажень:

$$Q_p(x) := \sum_{i=1}^{rows(q)} [q_i(x - a_i)(x > a_i)] - \sum_{i=1}^{rows(q)} [q_i(x - a_i - b_i)(x > a_i + b_i)]$$

**Рисунок 2.14** – Розрахунок внеску в поперечну силу в перерізі  $x$  від зосереджених сил та розподілених навантажень

Також визначаємо внесок в поперечну силу в перерізі  $x$ , обумовлений реакціями опор  $R_1$  та  $R_2$  згідно формул 2.16–2.17 (рис. 2.15).

$$Q_{R_1}(R_1, x) := R_1(x \geq l_1);$$

$$Q_{R_2}(R_2, x) := R_2(x \geq l_2)$$

**Рисунок 2.15** – Розрахунок внеску в поперечну силу в перерізі  $x$ , обумовлений реакціями опор  $R_1$  та  $R_2$

Поперечна сила в перерізі  $x$  визначається як сума внесків від зосереджених сил, розподілених навантажень та реакцій опор (рис. 2.16).

$$Q(R_1, R_2, x) := Q_{R_1}(R_1, x) + Q_{R_2}(R_2, x) + Q_P(x) + Q_q(x)$$

**Рисунок 2.16** – Розрахунок поперечної сили в перерізі  $x$

Далі потрібно обчислити згинальний момент в перерізі  $x$ . Він складається з внесків, обумовлених моментами пар сил, зосередженими силами, розподіленими навантаженнями та реакціями опор. Ці внески визначаються формулами 2.15, 2.14, 2.13, 2.16, 2.17 (рис. 2.17).

$$M_{zm}(x) := \sum_{i=1}^{rows(M)} [M_i(x - c_i)] \quad M_{zP}(x) := \sum_{i=1}^{rows(P)} [P_i(x - d_i)(x > d_i)];$$

$$M_{zq}(x) := \sum_{i=1}^{rows(q)} \left[ q_i \frac{(x - a_i)^2}{2} (x > a_i) \right] - \sum_{i=1}^{rows(q)} \left[ q_i \frac{(x - a_i - b_i)^2}{2} (x > a_i + b_i) \right];$$

$$M_{zR_1}(R_1, x) := R_1(x - l_1)(x \geq l_1) \quad M_{zR_2}(R_2, x) := R_2(x - l_2)(x \geq l_2)$$

**Рисунок 2.17** – Розрахуємо внески до згинального моменту в перерізі  $x$

Згинальний момент в перерізі  $x$  дорівнює сумі вище визначених внесків (рис. 2.18).

$$M_z(R_1, R_2, x) := M_{zR_1}(R_1, x) + M_{zR_2}(R_2, x) + M_{zm}(x) + M_{zP}(x) + M_{zq}(x)$$

**Рисунок 2.18** – Розрахуємо згинальний момент у перерізі  $x$

При написанні формул для розподілених сил та згинальних моментів в системі Mathcad використовувались так звані булеві оператори, наприклад  $(x \geq l_1, \text{ або } x > d_i)$ . Використання булевих операторів полягає в множенні доданків заданого виразу на відповідний логічний оператор. Булеві оператори повертають значення 0 або 1. В математичному виразі множення на булевий оператор перетворює відповідний доданок у нуль або не змінює його. Це дозволяє лаконічно записувати складні математичні вирази, не використовуючи умовні оператори.

Тепер визначимо реакції від лівої та правої опори. Ці реакції визначаються формулами 2.1 та 2.2 для двохопорної балки. У системі Mathcad ці формули записуються наступним чином (рис. 2.19).

$$R_2 := \frac{1}{(l_1 - l_2)} \left[ \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} M_i - \sum_{i=1}^{\text{rows}(P)} -[P_i(d_i - l_1)] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} - \left[ q_i b_i \left( a_i + \frac{b_i}{2} - l_1 \right) \right] \right];$$

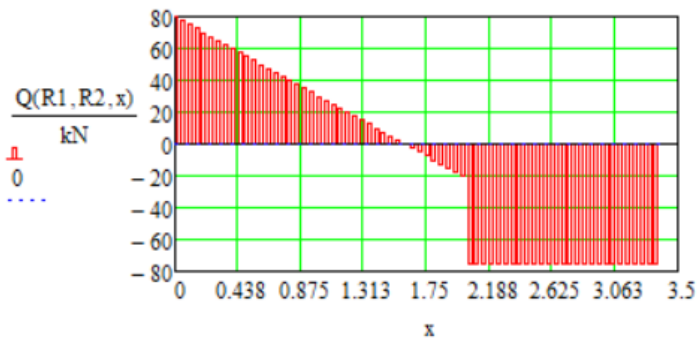
$$R_2 := 7.5 \times 10^4 \text{ N};$$

$$R_1 := \frac{1}{(l_2 - l_1)} \left[ \sum_{i=1}^{\text{rows}(M)} M_i + \sum_{i=1}^{\text{rows}(P)} -[P_i(d_i - l_2)] - \sum_{i=1}^{\text{rows}(q)} - \left[ q_i b_i \left( l_2 - a_i - \frac{b_i}{2} \right) \right] \right];$$

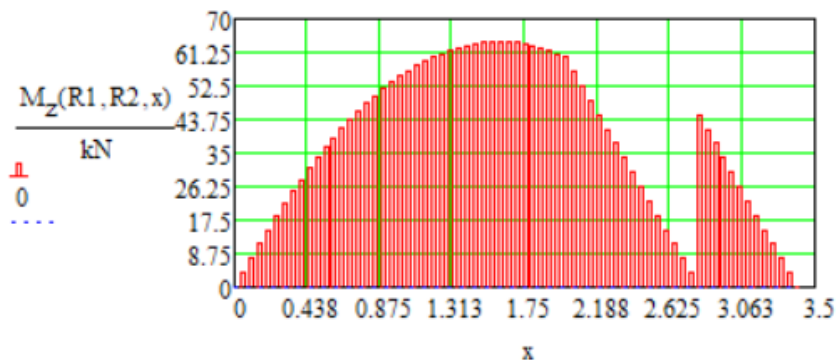
$$R_1 := 8 \times 10^4 \text{ N}$$

**Рисунок 2.19** – Визначимо реакції від лівої та правої опори

Отримавши значення опорних реакцій, будемо епюри поперечних сил (рис. 2.20) та згинальних моментів (рис. 2.21).



**Рисунок 2.20** – Будемо епюру поперечних сил



**Рисунок 2.21** – Будуємо епюру згинальних моментів

Для визначення мінімального номеру двотавра, який задовольняє умовам міцності за нормальними, дотичними та еквівалентними напруженнями, використовуємо дані Додатку А, в якому наведені основні параметри балочних профілів згідно ДСТУ 8768:2018.

Якщо нам потрібно знайти мінімальний номер двотавру, то використовуємо таблицю А1, для швеллера використовуємо таблицю А2, а для гнутих замкнених профілів таблицю А3. Використовуючи дані цих таблиць, матеріал двотавра та прийняту теорію міцності, знаходимо параметри безпечного факторного  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $[M]$ ,  $[Q]$  простору балочних профілів за формулами 1.40–1.43. Для двотаврів ми отримуємо наступні дані (табл. 2.1).

**Таблиця 2.1** – Параметри безпечних факторних просторів двотаврів (сталь Ст.3,  $[\sigma] = 160$  МПа, третя теорія міцності)

Номери двотаврів	$\beta$ , кН·м	$\gamma$ , кН	$[M]$ , кН·м	$[Q]$ , кН
1	2	3	4	5
10	7,402	37,758	6,352	30,991
12	10,626	49,714	9,344	39,881
14	14,643	60,227	13,072	47,911
16	19,346	70,878	17,440	56,051

Продовження таблиці 2.1

1	2	3	4	5
18	25,201	81,860	22,880	64,658
18a	28,005	80,166	25,440	64,971
20	32,140	93,137	29,440	73,600
20a	35,536	91,513	32,480	74,077
22	40,276	106,648	37,120	84,091
22a	44,154	104,441	40,640	84,285
24	50,100	120,338	46,240	95,097
24a	55,172	118,225	50,720	95,640
27	64,026	147,557	59,360	114,515
27a	70,513	144,836	65,110	115,284
30	81,030	180,046	75,520	137,373
30a	89,361	176,713	82,880	138,548
33	102,367	215,074	95,520	162,549
36	127,657	252,820	118,880	189,787
40	163,097	316,526	152,480	232,241
45	210,216	392,515	196,960	281,236
50	270,712	494,005	254,240	345,828
55	346,380	605,383	325,600	416,990
60	435,470	727,747	409,600	494,526

У Mathcad для зберігання цих даних використовується матриця  $DT$ . Перший стовпець цієї матриці містить номер двотавра, другий – параметр  $\beta$ , третій – параметр  $\gamma$ , четвертий і п'ятий – параметри  $[M]$  і  $[Q]$  (рис. 2.22).

Далі перевіряємо, що всі точки з координатами  $(Q, M)$  ( $Q$  – поперечна сила,  $M$  – згинальний момент) у перерізах балки, знаходяться в межах відповідного безпечного факторного простору. Перевірку починаємо з мінімального номеру двотавра. Перевірку закінчуємо, коли всі точки  $(Q, M)$  у перерізах балки будуть знаходитися у межах безпечного факторного простору знайденого двотавру. Для перевірки використовується функція Mathcad  $Prov(DT, n)$ . Ця функція містить два параметри:  $DT$  – матриця параметрів безпечного факторного простору двотаврів,  $n$  – кількість точок у перерізах балки (рис. 2.23).

	10	7.402	37.758	6.352	30.991
	12	10.626	49.714	9.344	39.881
	14	14.643	60.227	13.072	47.911
	16	19.346	70.878	17.440	56.051
	18	25.201	81.860	22.880	64.658
	"18a"	28.005	80.166	25.440	64.971
	20	32.140	93.137	29.440	73.600
	"20a"	35.536	91.513	32.480	74.077
	22	40.276	106.648	37.120	84.091
	"22a"	44.154	104.441	40.640	84.285
	24	50.100	120.338	46.240	95.097
DT :=	"24a"	55.172	118.225	50.720	95.640
	27	64.026	147.557	59.360	114.515
	"27a"	70.513	144.836	65.110	115.284
	30	81.030	180.046	75.520	137.373
	"30a"	89.361	176.713	82.880	138.548
	33	102.367	215.074	95.520	162.549
	36	127.657	252.820	118.880	189.787
	40	163.097	316.526	152.480	232.241
	45	210.216	392.515	196.960	281.236
	50	270.712	494.005	254.240	345.828
	55	346.380	605.383	325.600	416.990
	60	435.470	727.747	409.600	494.526

**Рисунок 2.22** – Параметри безпечного факторного простору двотаврів

```

Prov(DT, n) :=
  m ← rows(DT)
  for i ∈ 1..m
    kt ← 0
    for j ∈ 1..n
      kt ← 1 if  $|Mzm_j| > DT_{i,4}$ 
      kt ← 1 if  $\left[ \frac{(Mzm_j)^2}{(DT_{i,2})^2} + \frac{(qmm_j)^2}{(DT_{i,3})^2} \right] \geq 1$ 
      kt ← 1 if  $|qmm_j| > DT_{i,5}$ 
    k ← i
    break if kt = 0
  kz ← "ner" if kt = 1
  kz ←  $DT_{k,1}$  otherwise
   $\begin{pmatrix} k \\ kz \end{pmatrix}$ 

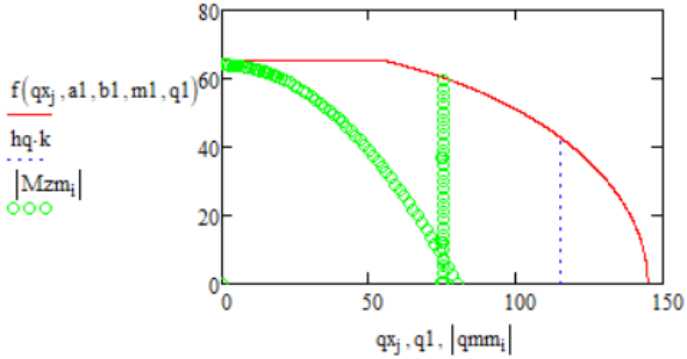
```

**Рисунок 2.23** – Функція знаходження мінімального номера двотавра

Дана функція повертає номер рядка у таблиці параметрів безпечних факторних просторів двотаврів та мінімальний номер двотавру, що задовольняє умовам міцності за нормальними, дотичними та еквівалентними напруженнями.

Для графічної інтерпретації отриманих результатів будемо область безпечного факторного простору знайденого двотавру з наведеними координатами  $(Q, M)$  у перерізах балки (рис. 2.24).

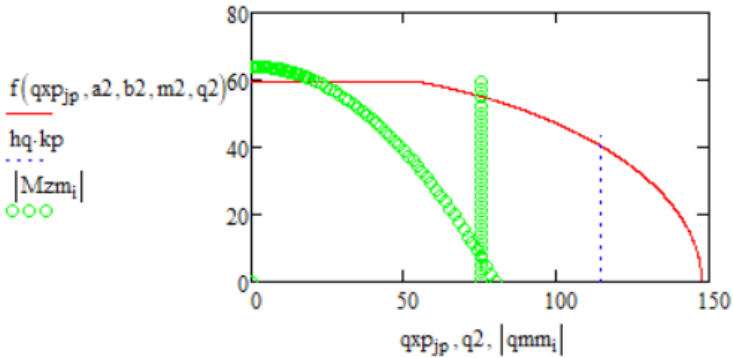
Двотавр номер **nomdv = "27a"**



**Рисунок 2.24** – Безпечний факторний простір з координатами  $(Q, M)$  у перерізах балки

Для того, щоб переконатися, що знайдений номер двотавру є мінімальним, будемо безпечний факторний простір для попереднього номера двотавру (рис. 2.25).

Двотавр номер **nomdvpr = 27**



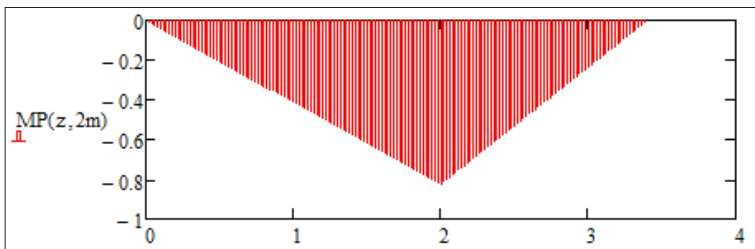
**Рисунок 2.25** – Безпечний факторний простір для попереднього номера двотавру

Для визначення прогину балки під дією навантаження в заданій точці  $H$  скористаємося формулою (1.50). В підінтегральному виразі (1.50) присутня функція  $\bar{M}(z)$  – закон зміни за довжиною балки згинального моменту від вертикальної одиничної сили  $P=1$ , прикладеної в точці  $H$ , яка визначається за формулами (2.23)–(2.26) в залежності від типу балки. На рисунку 2.25 визначена ця функція в системі Mathcad у випадку двохопорної балки (рис. 2.26).

$$\begin{aligned}
 \text{MP1}(z, l_H) &:= \begin{cases} z - l_H & \text{if } (z > l_H) \wedge (z \leq l_1) \\ (z - l_H) - \frac{(l_2 - l_H)}{(l_2 - l_1)} \cdot (z - l_1) & \text{if } (z > l_1) \wedge (z \leq l_2) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & \text{MP2}(z, l_H) &:= \begin{cases} \frac{-(l_2 - l_H)}{l_2 - l_1} \cdot (z - l_1) & \text{if } (z > l_1) \wedge (z \leq l_H) \\ \frac{-(l_2 - l_H)}{l_2 - l_1} \cdot (z - l_1) + (z - l_H) & \text{if } (z > l_H) \wedge (z \leq l_2) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \text{MP3}(z, l_H) &:= \begin{cases} \frac{(l_H - l_2)}{l_2 - l_1} \cdot (z - l_1) & \text{if } (z \geq l_1) \wedge (z \leq l_2) \\ l_H - z & \text{if } (z > l_2) \wedge (z \leq l_H) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & \text{MP}(z, l_H) &:= \begin{cases} \text{MP1}(z, l_H) & \text{if } (l_H \geq 0) \wedge (l_H \leq l_1) \\ \text{MP2}(z, l_H) & \text{if } (l_H > l_1) \wedge (l_H \leq l_2) \\ \text{MP3}(z, l_H) & \text{if } (l_H > l_2) \wedge (l_H \leq L) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Рис. 2.26** – Формула залежності згинального моменту від положення одиничної сили  $l_H$  і координати  $z$  перерізу балки

У цій формулі  $l_1$  та  $l_2$  – положення опор балки,  $l_H$  – положення одиничної сили,  $z$  – координата перерізу балки. Графік цієї епюри при  $l_H=2$  м показано на рис. 2.27.



**Рисунок 2.27** – Епюра згинальних моментів від одиничної сили

Використовуючи формулу (1.50), знаходимо прогин балки при визначеному навантаженні (рис. 2.28).

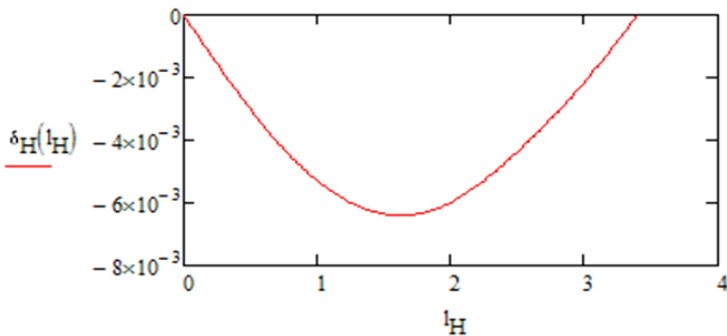
$$E := 2 \cdot 10^{11} \cdot \frac{N}{m^2} \quad J_x := 5500 \cdot 10^{-8} \cdot m^4;$$

$$\delta_H(l_H) := \frac{l}{EJ_x} \int_0^L MP(z, l_H) M_z(R_1, R_2, z) dz;$$

$$\delta_H(2m) := -5.98562037 \times 10^{-3} m$$

**Рисунок 2.28** – Знаходження прогину  $\delta_H$

Графік залежності прогину  $\delta_H$  від положення точки  $H$  наведено на рисунку 2.29.



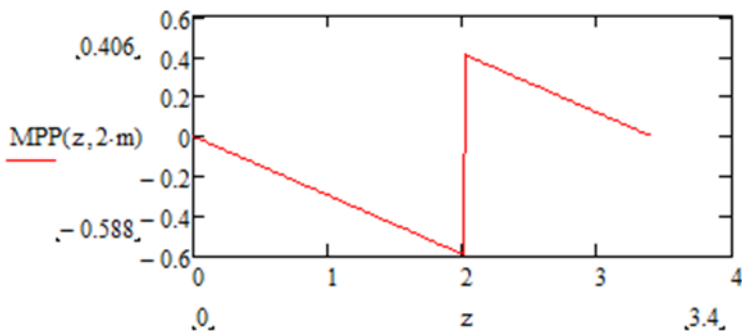
**Рисунок 2.29** – Графік залежності  $\delta_H$  по довжині балки

Для знаходження кута повороту перерізу  $\theta_k$  у заданій точці  $K$  балки скористаємося формулою (1.51). В підінтегральному виразі (1.51) присутня функція  $\bar{M}'(z)$  – закон зміни за довжиною балки згинального моменту від одиничного моменту  $M=1$ , який прикладено в перерізі, що проходить через точку  $K$ , який визначається за формулами 2.26–2.28 в залежності від типу балки. На рисунку 2.30 визначена ця функція в системі Mathcad у випадку двохопорної балки (формула 2.27).

$$\begin{aligned}
 \text{MPP1}(z, l_k) &:= \begin{cases} 1 & \text{if } (z > l_k) \wedge (z \leq l_1) \\ 1 - \frac{1}{l_2 - l_1} \cdot (z - l_1) & \text{if } (z > l_1) \wedge (z \leq l_2) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & \text{MPP2}(z, l_k) &:= \begin{cases} \frac{-1}{l_2 - l_1} \cdot (z - l_1) & \text{if } (z > l_1) \wedge (z \leq l_k) \\ \frac{-1}{l_2 - l_1} \cdot (z - l_1) + 1 & \text{if } (z > l_k) \wedge (z \leq l_2) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 \text{MPP3}(z, l_H) &:= \begin{cases} \frac{-1}{l_2 - l_1} \cdot (z - l_1) & \text{if } (z \geq l_1) \wedge (z \leq l_2) \\ -1 & \text{if } (z > l_2) \wedge (z \leq l_H) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} & \text{MPP}(z, l_H) &:= \begin{cases} \text{MPP1}(z, l_H) & \text{if } (l_H \geq 0) \wedge (l_H \leq l_1) \\ \text{MPP2}(z, l_H) & \text{if } (l_H > l_1) \wedge (l_H \leq l_2) \\ \text{MPP3}(z, l_H) & \text{if } (l_H > l_2) \wedge (l_H \leq L) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Рисунок 2.30** – Формула залежності згинального моменту від положення одиничного моменту  $l_k$  і координати  $z$  перерізу балки

Відповідна епюра згинальних моментів показана на рисунку 2.31.



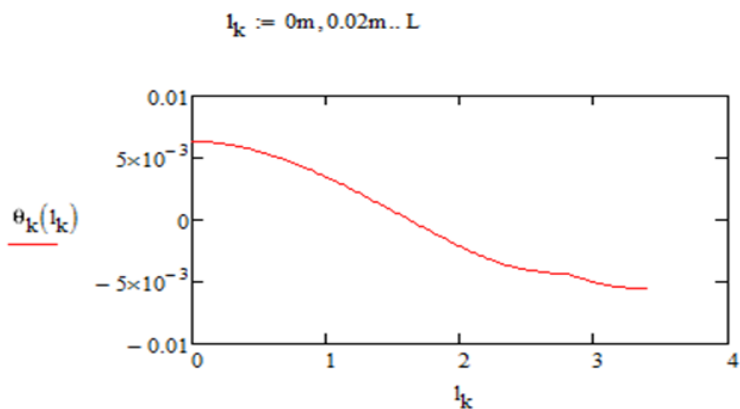
**Рисунок 2.31** – Відповідна епюра згинальних моментів при навантаженні балки одиничним моментом у точці  $K$

Кут повороту перерізу  $\theta_k$  знаходимо за формулою 1.51 (рис. 2.32).

$$\theta_k(l_k) := \frac{l}{EJ_x} \int_0^L \text{MPP}(z, l_k) M_z(R_1, R_2, z) dz \quad \theta_k(2m) = -2.154 \times 10^{-3}$$

**Рисунок 2.32** – Знаходження кута повороту перерізу  $\theta_k$  при  $l_k = 2$  м

Графік зміни величини  $\theta_K$  по довжині балки наведено на рисунку 2.33.



**Рисунок 2.33** – Графік залежності  $\theta_K$  від положення точки  $K$  по довжині балки

Вищенаведені розрахунки наведені в роботах [7–11]. Код програми викладено на Гітхаб [13].

---

## АЛГОРИТМИ І КОМП'ЮТЕРНІ ПРОГРАМИ РОЗРАХУНКІВ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ БАЛОК

---

### **3.1 Типи статично невизначуваних балок, їх уніфіковані схеми і етапи розрахунків. Вихідні дані**

Нагадаємо (пункт 1.5), що до статично невизначуваних відносяться балки, у яких кількість опорних реакцій перевищує число незалежних рівнянь статичної рівноваги, котрі можна скласти для визначення цих реакцій. Інакше кажучи, статично невизначуваними є балки з «зайвими» реакціями в порівнянні зі статично визначуваними. Зважаючи на те, що кількість опорних реакцій останніх дорівнює двом (пункт 1.3), у статично невизначуваних балок їх три і більше.

Розділимо умовно всі реакції статично невизначуваних балок на «основні» і «додаткові». До «основних» можуть бути віднесені будь-які дві із загальної кількості опорних реакцій, а до «додаткових» – усі інші, число яких дорівнюватиме ступеню статичної невизначуваності балки –  $S$ .

Щоб максимально використати в даному разі можливості комп'ютерних програм, створених для статично визначуваних балок (розділ 2), представимо статично невизначувані балки як статично визначувані (уніфіковані схеми яких зображені на рисунках 2.1–2.3) з додатково встановленими шарнірними рухомими опорами (рис. 1.10, б) або вертикальними двохшарнірними стрижнями (рис. 1.11, в). Кількість таких опор є необмеженою, але в подальшому для конкретизації зображень статично невизначуваних балок будемо орієнтуватись на балки з трьома додатковими опорами у вигляді вертикальних двохшарнірних стрижнів, ступень статичної невизначуваності яких  $S=3$ .

Уніфіковані схеми таких балок зображені на рисунках 3.1, а–3.3, а. Балки з двома «основними» опорами (рис. 3.1, а) для короткості назвемо балками **першого типу**, а балки з однією «основною» опорою у вигляді жорсткого кріплення (рис. 3.2, а–3.3, а) – відповідно балками **другого і третього типів**.

Порівнюючи уніфіковані схеми статично визначуваних і статично невизначуваних балок, бачимо, що останні відрізняються від попередніх лише наявністю «додаткових» опор у вигляді двохшарнірних стрижнів, розташування яких задане

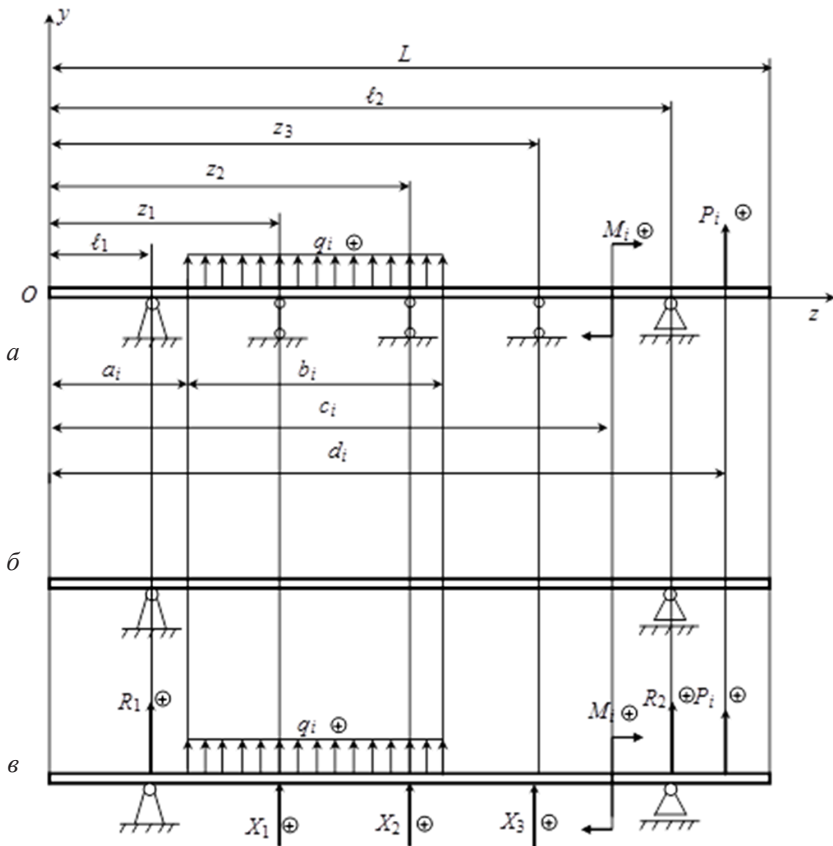


Рисунок 3.1 – Уніфікована схема для балок першого типу

координатами  $z_j$  ( $z_1, z_2, z_3$ , і т. д.), де  $j = 1 \dots m$  – номер «додаткової» опори. Звертаємо увагу на те, що  $m = S$ .

Як відзначалось у пункті 1.5, повний розрахунок статично невизначуваних балок містить додатковий етап з розкриття статичної невизначуваності, а решта інших принципово не відрізняється від етапів повного розрахунку статично визначуваних балок (пункт 2.1).

З урахуванням цього комп'ютерні програми, розроблені для кожного з означених типів статично невизначуваних балок, послідовно реалізують в автоматичному режимі такі етапи їх повного розрахунку:

1. Розкриття статичної невизначуваності балки.
2. Визначення реакцій її «основних» опор.
3. Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів.
4. Визначення з умов міцності балки потрібних розмірів її перерізу.
5. Визначення лінійних та кутових переміщень у заданих місцях балки і побудова графіків зміни цих переміщень за довжиною балки.

Перелічені етапи являють собою, як і в разі статично визначуваних балок, окремі розрахункові блоки, вбудовані у загальний ланцюжок, у якому на кожному з наступних етапів використовуються результати попередніх, причому зазначена їх послідовність є незмінною. Після завершення кожного етапу (за виключенням останнього) розрахунок призупиняється і програма запрошує дозвіл на виконання наступного. Це зроблено, щоб з уникнути виконання етапів, не потрібних користувачеві.

На уніфікованих схемах статично невизначуваних балок (рис. 3.1, а – 3.3, а) знаки плюс у кружках означають додатні напрямки зображених навантажень. Символи  $i$  при навантаженнях вказують номери кожного з їх видів ( $P, M, q$ ):  $i = 1 \dots n$ . Як і в разі статично визначуваних балок, у створених програмах покладено  $n = 2$ .

На початку розрахунку в комп'ютер вводяться число «додаткових» опор –  $m$  і геометричні та силові параметри балки згідно з вибраною уніфікованою схемою.

Слід особливо зазначити, що у зв'язку зі специфікою задачі положення «додаткових» опор задається координатами  $z_j$ , а положення їх реакцій ( $X_k$ ) – координатами  $z_k$ .

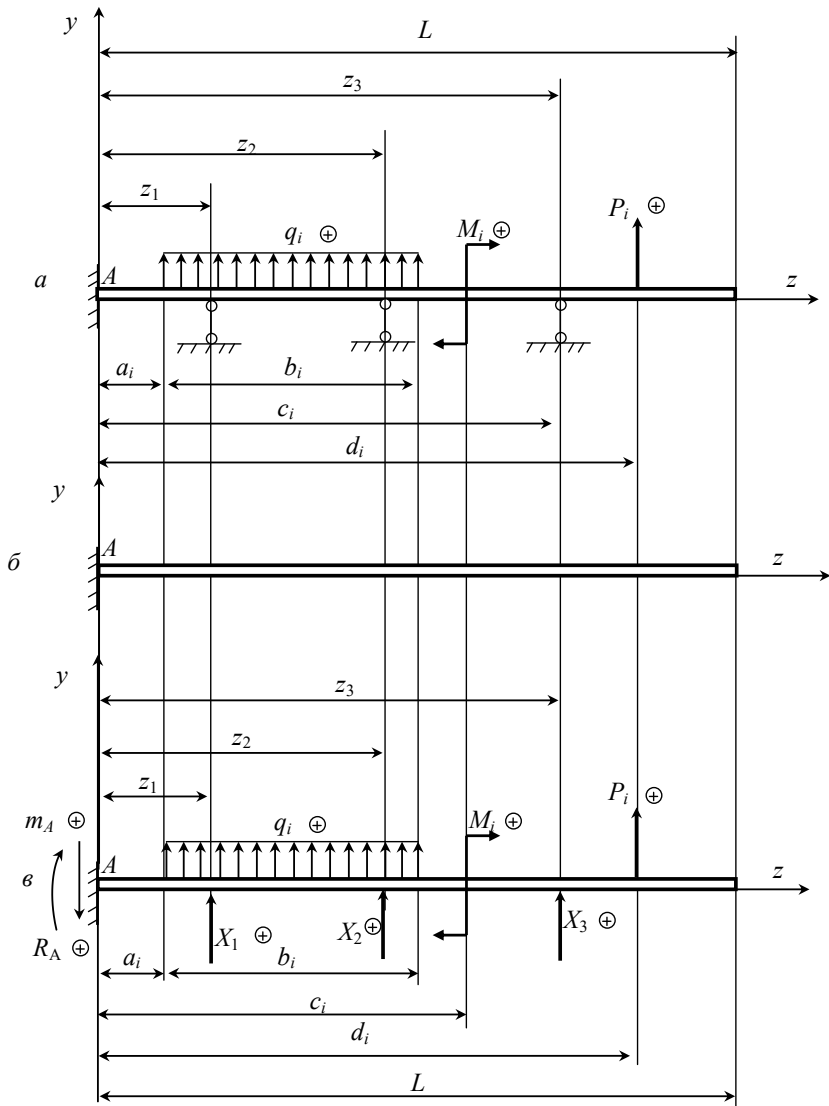


Рисунок 3.2 – Уніфікована схема для балок другого типу

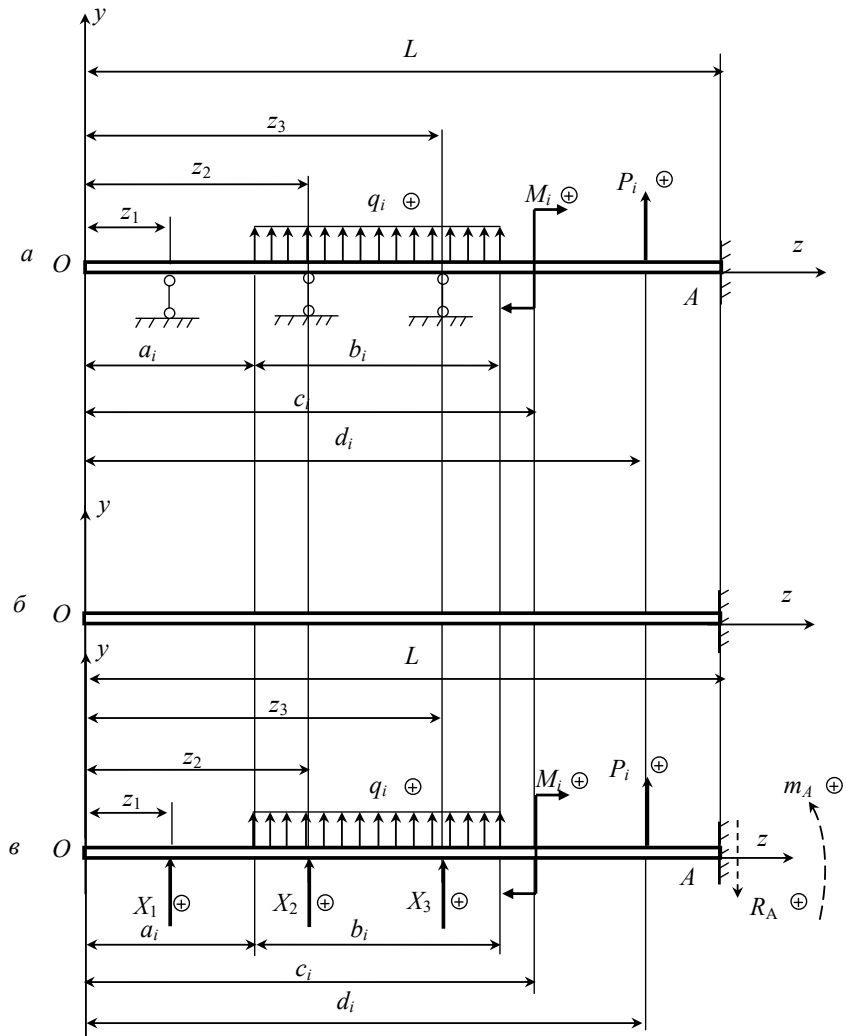


Рисунок 3.3 – Уніфікована схема для балок третього типу

Для контролю правильності вводу комп'ютер буде на основі введених даних «свою» версію уніфікованої схеми балки. Користувач порівнює побудовану схему з заданою і в разі їх ідентичності дає команду на запуск розрахункової програми.

Значених даних достатньо для трьох перших етапів розрахунку. На подальших етапах вводяться додаткові дані для конкретизації виконуваних завдань.

### 3.2 Розкриття статичної невизначуваності

Згідно з пунктом 1.5 виконання цього етапу складається з ряду послідовних дій, передбачених методом сил.

Спочатку вибирається основна система (рис. 3.1, б; 3.2, б; 3.3, б).

Далі формується еквівалентна система (рис. 3.1, в; 3.2, в; 3.3, в) шляхом прикладення до основної системи заданого навантаження і невідомих реакцій «додаткових» опор –  $X_k$  ( $X_1, X_2, X_3$  і т. д.), де  $k = 1 \dots m$  – номер невідомої реакції.

Формується система канонічних рівнянь, що складається з  $m$  рівнянь, які представлені формулою 3.1.

$$\sum_{k=1}^m \delta_{jk} \cdot X_k + \Delta_{jp} = 0, \quad (3.1)$$

де  $\delta_{jk}$  – прогин еквівалентної системи в точці приєднання до балки  $j$ -тої додаткової опори, який спричинений дією одиничної сили  $X_k = 1$ ;

$\Delta_{jp}$  – прогин еквівалентної системи у зазначеній точці, спричинений дією заданого навантаження.

Фізичний зміст кожного з канонічних рівнянь – у відсутності сукупного прогину еквівалентної системи від невідомих реакцій і заданого навантаження у точці приєднання до балки відповідної «додаткової» опори.

Коефіцієнти канонічних рівнянь (формула 3.1) визначаються за методом Мора (формули 3.2 та 3.3).

$$\delta_{jk} = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \int_0^L M_j(z) \cdot \bar{M}_k(z) \cdot dz, \quad (3.2)$$

$$\Delta_{jp} = \frac{1}{E \cdot J_x} \cdot \int_0^L M_p(z) \cdot \bar{M}_j(z) \cdot dz, \quad (3.3)$$

де  $E$  – модуль пружності першого роду для матеріалу балки;

$J_x$  – момент інерції перерізу балки відносно горизонтальної головної центральної осі (рис. 1.1);

$L$  – довжина балки;

$\bar{M}_j(z)$  – епюра згинальних моментів основної системи від дії на неї вертикальної одиничної сили, прикладеної в точці приєднання до балки  $j$ -тої «додаткової» опори;

$\bar{M}_k(z)$  – епюра згинальних моментів основної системи від дії на неї вертикальної одиничної сили, прикладеної в тій саме точці, що і сила  $X_k$ ;

$M_p(z)$  – епюра згинальних моментів основної системи від дії на неї заданого навантаження.

Закони зміни величин  $\bar{M}_j$  та  $\bar{M}_k$  в перерізах основної системи отримані з формул 2.25, 2.30 і 2.31 шляхом заміни у них  $\bar{M}(z)$  відповідно на  $\bar{M}_j(z)$  і  $\bar{M}_k(z)$ , а  $l_H$  – на  $z_j$  і  $z_k$ .

Для балок **першого типу** (у яких основна система – двохопорна) використовуємо формули 3.4–3.5.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M}_j(z) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq l_1; \\ \bar{M}_j(z) = -\frac{l_2 - z_j}{l_2 - l_1} \cdot (z - l_1), \text{ в інтервалі } l_1 \leq z \leq z_j; \\ \bar{M}_j(z) = -\frac{z_j - l_1}{l_2 - l_1} \cdot (l_2 - z), \text{ в інтервалі } z_j \leq z \leq l_2; \\ \bar{M}_j(z) = 0, \text{ в інтервалі } l_2 \leq z \leq L. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M}_k(z) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq l_1; \\ \bar{M}_k(z) = -\frac{l_2 - z_k}{l_2 - l_1} \cdot (z - l_1), \text{ в інтервалі } l_1 \leq z \leq z_k; \\ \bar{M}_k(z) = -\frac{z_k - l_1}{l_2 - l_1} \cdot (l_2 - z), \text{ в інтервалі } z_k \leq z \leq l_2; \\ \bar{M}_k(z) = 0, \text{ в інтервалі } l_2 \leq z \leq L. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Для балок **другого типу** (у яких основна система – консольна з опорою зліва) використовуємо формули 3.6–3.7.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M}_j(z) = z_j - z, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq z_j; \\ \bar{M}_j(z) = 0, \text{ в інтервалі } z_j \leq z \leq L. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M}_k(z) = z_k - z, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq z_k; \\ \bar{M}_k(z) = 0, \text{ в інтервалі } z_k \leq z \leq L. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Для балок **третього типу** (у яких основна система – консольна з опорою справа) використовуємо формули 3.8–3.9.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M}_j(z) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq z_j; \\ \bar{M}_j(z) = z - z_j, \text{ в інтервалі } z_j \leq z \leq L. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{M}_k(z) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq z_k; \\ \bar{M}_k(z) = z - z_k, \text{ в інтервалі } z_k \leq z \leq L. \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Закони зміни величини  $M_p$  у перерізах основної системи отримані з формул 2.1–2.4, 2.12–2.17, 2.19 і 2.21 шляхом заміни у них  $M$  на  $M_p$ ,  $R_1$  на  $R_1^p$ ,  $R_2$  на  $R_2^p$ ,  $R_A$  на  $R_A^p$ ,  $m_A$  на  $m_A^p$ .

Для балок **першого типу** використовуємо формули 3.10–3.17.

$$\begin{aligned}
M_p(z) = & \sum_{i=1}^n M_p(q_i) + \sum_{i=1}^n M_p(P_i) + \\
& + \sum_{i=1}^n M_p(M_i) + \sum_{i=1}^n M_p(R_1^p) + \sum_{i=1}^n M_p(R_2^p),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

де

$$\begin{cases}
M_p(q_i) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq a_i; \\
M_p(q_i) = q_i \cdot \frac{(z - a_i)^2}{2}, \text{ в інтервалі } a_i \leq z \leq (a_i + b_i); \\
M_p(q_i) = q_i \cdot b_i \cdot \left( z - a_i - \frac{b_i}{2} \right), \text{ в інтервалі } (a_i + b_i) \leq z \leq L.
\end{cases} \tag{3.11}$$

$$\begin{cases}
M_p(P_i) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq d_i; \\
M_p(P_i) = P_i \cdot (z - d_i), \text{ в інтервалі } d_i \leq z \leq L.
\end{cases} \tag{3.12}$$

$$\begin{cases}
M_p(M_i) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z < c_i; \\
M_p(M_i) = M_i, \text{ в інтервалі } c_i \leq z \leq L.
\end{cases} \tag{3.13}$$

$$\begin{cases}
M_p(R_1^p) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq l_1; \\
M_p(R_1^p) = R_1^p \cdot (z - l_1), \text{ в інтервалі } l_1 \leq z \leq L.
\end{cases} \tag{3.14}$$

$$\begin{cases}
M_p(R_2^p) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq l_2; \\
M_p(R_2^p) = R_2^p \cdot (z - l_2), \text{ в інтервалі } l_2 \leq z \leq L.
\end{cases} \tag{3.15}$$

$$R_1^p = \frac{1}{l_2 - l_1} \cdot \left[ - \sum_{i=1}^n M_i + \sum_{i=1}^n P_i \cdot (d_i - l_2) - \sum_{i=1}^n q_i \cdot b_i \cdot \left( l_2 - a_i - \frac{b_i}{2} \right) \right]; \tag{3.16}$$

$$R_2^p = \frac{1}{l_2 - l_1} \cdot \left[ \sum_{i=1}^n M_i - \sum_{i=1}^n P_i \cdot (d_i - l_1) - \sum_{i=1}^n q_i \cdot b_i \cdot \left( a_i + \frac{b_i}{2} - l_1 \right) \right]. \tag{3.17}$$

Для балок **другого типу** використовуємо формули 3.18–3.20.

$$M_p(z) = \sum_{i=1}^n M_p(q_i) + \sum_{i=1}^n M_p(P_i) + \sum_{i=1}^n M_p(M_i) + m_A^p - R_A^p \cdot z, \quad (3.18)$$

де складові з символами сум визначаються за формулами 3.11–3.13.

$$R_A^p = \sum_{i=1}^n q_i \cdot b_i + \sum_{i=1}^n P_i, \quad (3.19)$$

$$m_A^p = \sum_{i=1}^n q_i \cdot b_i \cdot \left( a_i + \frac{b_i}{2} \right) - \sum_{i=1}^n M_i + \sum_{i=1}^n P_i \cdot d_i. \quad (3.20)$$

Для балок **третього типу** використовуємо формулу 3.21.

$$M_p(z) = \sum_{i=1}^n M_p(q_i) + \sum_{i=1}^n M_p(P_i) + \sum_{i=1}^n M_p(M_i), \quad (3.21)$$

де складові у правій частині виразу визначаються за формулами 3.11–3.13.

Система канонічних рівнянь (формула 3.1) після визначення їх коефіцієнтів підлягає розв'язанню із застосуванням стандартних комп'ютерних програм. Після цього невідомі  $X_k$  стають звичайними зовнішніми силами, а еквівалентна система – звичайною (тобто статично визначуваною) балкою.

### 3.3 Визначення основних опорних реакцій

Реакції основної системи від дії на неї заданого навантаження визначені за формулами 3.16 і 3.17 – для балок **першого типу**, за формулами 3.19 і 3.20 – для балок **другого типу**. Для балок **третього типу** знайдемо їх з рівнянь 2.3 і 2.5 шляхом заміни  $R_A$  на  $R_A^p$  і  $M_A$  на  $M_A^p$ :

$$R_A^p = \sum_{i=1}^n q_i \cdot b_i + \sum_{i=1}^n P_i, \quad (3.22)$$

$$m_A^p = \sum_{i=1}^n q_i \cdot b_i \cdot \left( L - a_i - \frac{b_i}{2} \right) + \sum_{i=1}^n M_i + \sum_{i=1}^n P_i \cdot (L - d_i). \quad (3.23)$$

Повні реакції еквівалентних систем визначимо як суми їх складових від дії заданих навантажень і дії знайдених сил  $X_k$ . Перші з них визначені формулами 3.16, 3.17, 3.19, 3.20, 3.22 та 3.23, другі – визначаються з умов рівноваги основних систем, навантажених силами  $X_k$ .

Для балок **першого типу** (рис. 3.4) другі складові зазначених реакцій мають значення, які обчислюємо за формулами 3.24–3.25.

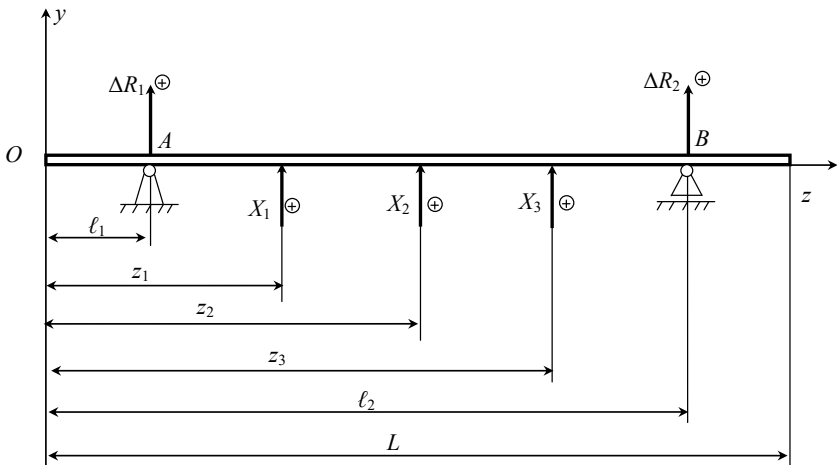
$$\Delta R_1 = -\frac{1}{l_2 - l_1} \cdot \sum_{k=1}^m X_k \cdot (l_2 - z_k), \quad (3.24)$$

$$\Delta R_2 = -\frac{1}{l_2 - l_1} \cdot \sum_{k=1}^m X_k \cdot (z_k - l_1). \quad (3.25)$$

У балок **другого типу** (рис. 3.5) другі складові зазначених реакцій обчислюємо за формулами 3.24–3.25.

$$\Delta R_A = \sum_{k=1}^m X_k, \quad (3.26)$$

$$\Delta m_A = \sum_{k=1}^m X_k \cdot z_k. \quad (3.27)$$



**Рисунок 3.4** – Схема для балок першого типу

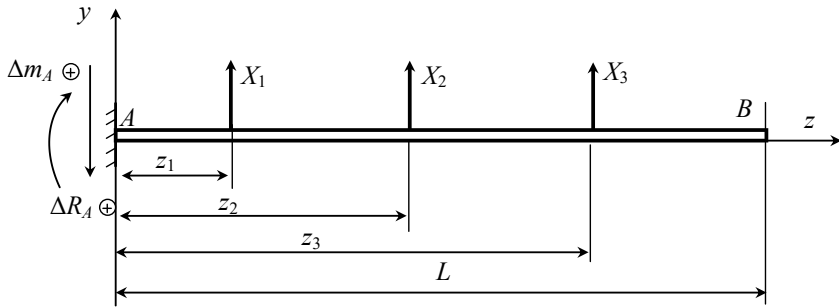


Рисунок 3.5 – Схема для балок другого типу

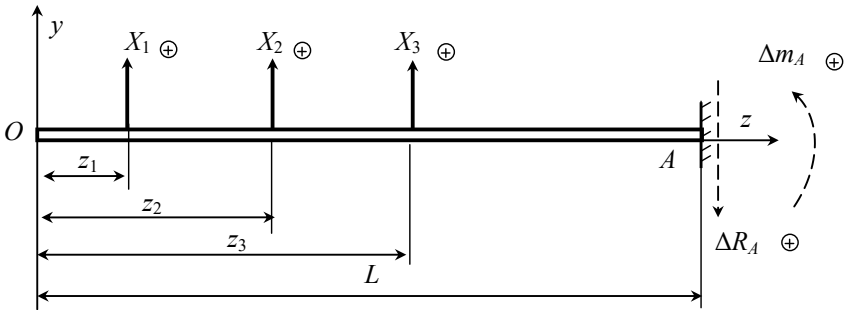


Рисунок 3.6 – Схема для балок третього типу

У балок **третього типу** (рис. 3.6) значення  $\Delta R_A$  визначається за формулою 3.26, а значення  $\Delta m_A$  цього разу обчислюємо за формулами 3.24–3.25.

$$\Delta m_A = \sum_{k=1}^m X_k \cdot (L - z_k). \quad (3.28)$$

Таким чином, з урахуванням виразів (формулами 3.16 і 3.17) у балок **першого типу** повні реакції еквівалентної системи дорівнюватимуть.

$$R_1 = R_1^p + \Delta R_1 = \frac{1}{l_2 - l_1} \cdot \left[ -\sum_{i=1}^n M_i + \sum_{i=1}^n P_i \cdot (d_i - l_2) - \sum_{i=1}^n q_i \cdot b_i \cdot \left( l_2 - a_i - \frac{b_i}{2} \right) + \sum_{k=1}^m X_k \cdot (z_k - l_2) \right], \quad (3.29)$$

$$R_2 = R_2^p + \Delta R_2 = \frac{1}{l_2 - l_1} \cdot \left[ \sum_{i=1}^n M_i - \sum_{i=1}^n P_i \cdot (d_i - l_1) - \sum_{i=1}^n q_i \cdot b_i \cdot \left( a_i + \frac{b_i}{2} - l_1 \right) + \sum_{k=1}^m X_k \cdot (l_1 - z_k) \right]. \quad (3.30)$$

У балок **другого типу** з урахуванням виразів (формули 3.19 і 3.20) повні реакції еквівалентної системи дорівнюватимуть.

$$R_A = R_A^p + \Delta R_A = \sum_{i=1}^n q_i \cdot b_i + \sum_{i=1}^n P_i + \sum_{k=1}^m X_k, \quad (3.31)$$

$$m_A = m_A^p + \Delta m_A = \sum_{i=1}^n q_i \cdot b_i \cdot \left( a_i + \frac{b_i}{2} \right) - \sum_{i=1}^n M_i + \sum_{i=1}^n P_i \cdot d_i + \sum_{k=1}^m X_k \cdot z_k. \quad (3.32)$$

У балок **третього типу** значення  $R_A$  визначається за формулою 3.31, а значення  $m_A$  цього разу за формулою 3.33.

$$m_A = m_A^p + \Delta m_A = \sum_{i=1}^n q_i \cdot b_i \cdot \left( L - a_i - \frac{b_i}{2} \right) + \sum_{i=1}^n M_i + \sum_{i=1}^n P_i \cdot (L - d_i) + \sum_{k=1}^m X_k \cdot (L - z_k). \quad (3.33)$$

### 3.4 Побудова епюр поперечних сил і згинальних моментів

Поточні значення **згинальних моментів** у перерізах еквівалентної системи знайдемо наступним чином:

$$M(z) = M_p(z) + \Delta M(z), \quad (3.34)$$

де  $M_p(z)$  – значення згинальних моментів від дії заданого навантаження;

$\Delta M_p(z)$  – значення згинальних моментів від дії  $X_k$ .

Значення  $M_p(z)$  уже визначені формулами 3.10–3.21. Значення  $\Delta M_p(z)$  визначимо за правилами, наведеними в пункті 1.3.

Для балок **першого типу** (рис. 3.4) використаємо формулу 3.35.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta M(z) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq l_1; \\ \Delta M(z) = \Delta R_1 \cdot (z - l_1), \text{ в інтервалі } l_1 \leq z \leq z_1; \\ \Delta M(z) = \Delta R_1 \cdot (z - l_1) + \sum_{k=1}^m X_k \cdot (z - z_k), \\ \text{в інтервалі } z_k \leq z \leq l_2; \\ \Delta M(z) = \Delta R_1 \cdot (z - l_1) + \sum_{k=1}^m X_k \cdot (z - z_k) + \Delta R_2 \cdot (z - l_2), \\ \text{в інтервалі } l_2 \leq z \leq L, \end{array} \right. \quad (3.35)$$

де  $z_1$  – координата точки прикладення сили  $X_1$ ;

$\Delta R_1$  і  $\Delta R_2$  – опорні реакції основної системи від сил  $X_k$  згідно з виразами (3.24) та (3.25).

У балок **другого типу** (рис. 3.5) використаємо формулу 3.36.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta M(z) = \Delta m_A - \Delta R_A \cdot z, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq z_1; \\ \Delta M(z) = \Delta m_A - \Delta R_A \cdot z + \sum_{k=1}^m X_k \cdot (z - z_k), \\ \text{в інтервалі } z_k \leq z \leq L, \end{array} \right. \quad (3.36)$$

де  $\Delta m_A$  і  $\Delta R_A$  – опорні реакції основної системи від сил  $X_k$  згідно з формулами 3.31 та 3.32.

У балок **третього типу** (див. рис. 3.6) використаємо формулу 3.37.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta M(z) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq z_1; \\ \Delta M(z) = \sum_{k=1}^m X_k \cdot (z - z_k), \text{ в інтервалі } z_k \leq z \leq L. \end{array} \right. \quad (3.37)$$

При побудові епюри **поперечних сил** для еквівалентної системи застосуємо такий саме підхід, як і в разі побудови епюри

згинальних моментів. Тоді значення поперечної сили в довільному перерізі еквівалентної системи знайдемо як суму її значень від дії заданого навантаження –  $Q_p$  і сил  $X_k - \Delta Q$  (формула 3.38).

$$Q = Q_p + \Delta Q. \quad (3.38)$$

Закони зміни величини  $Q_p$  за довжиною еквівалентної системи визначимо з формул 2.6–2.11, 2.18 і 2.20 шляхом заміни в них  $Q$  на  $Q_p$ ,  $R_1$  на  $R_1^p$ ,  $R_2$  на  $R_2^p$ .

Для балок **першого типу** (рис. 3.1) ці закони відображені формулами 3.39–3.44.

$$Q_p(z) = \sum_{i=1}^n Q_p(q_i) + \sum_{i=1}^n Q_p(P_i) + \sum_{i=1}^n Q_p(M_i) + Q_p(R_1^p) + Q_p(R_2^p), \quad (3.39)$$

де

$$\begin{cases} Q_p(q_i) = 0, & \text{в інтервалі } 0 \leq z \leq a_i; \\ Q_p(q_i) = q_i \cdot (z - a_i), & \text{в інтервалі } a_i \leq z \leq (a_i + b_i); \\ Q_p(q_i) = q_i \cdot b_i, & \text{в інтервалі } (a_i + b_i) \leq z \leq L. \end{cases} \quad (3.40)$$

$$\begin{cases} Q_p(P_i) = 0, & \text{в інтервалі } 0 \leq z < d_i; \\ Q_p(P_i) = P_i, & \text{в інтервалі } d_i \leq z \leq L. \end{cases} \quad (3.41)$$

$$Q_p(M_i) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z \leq L. \quad (3.42)$$

$$\begin{cases} Q_p(R_1^p) = 0, & \text{в інтервалі } 0 \leq z < \ell_1; \\ Q_p(R_1^p) = R_1^p, & \text{в інтервалі } \ell_1 \leq z \leq L. \end{cases} \quad (3.43)$$

$$\begin{cases} Q_p(R_2^p) = 0, & \text{в інтервалі } 0 \leq z < \ell_2; \\ Q_p(R_2^p) = R_2^p, & \text{в інтервалі } \ell_2 \leq z \leq L. \end{cases} \quad (3.44)$$

Значення  $R_1^p$  і  $R_2^p$  визначаються за формулами 3.16 та 3.17.

Для балок **другого типу** (рис. 3.2):

$$Q_p(z) = \sum_{i=1}^n Q_p(q_i) + \sum_{i=1}^n Q_p(P_i) + \sum_{i=1}^n Q_p(M_i) - R_A^p, \quad (3.45)$$

де складові виразу з символами сум визначаються за формулами 3.40–3.42;

значення  $R_A^p$  визначається за формулою (3.19).

У балок **третього типу** (рис. 3.3):

$$Q_p(z) = \sum_{i=1}^n Q_p(q_i) + \sum_{i=1}^n Q_p(P_i) + \sum_{i=1}^n Q_p(M_i), \quad (3.46)$$

де складові виразу визначаються за формулами 3.40–3.42.

Закони зміни величин  $\Delta Q$  за довжиною еквівалентної системи встановимо згідно з правилами, наведеними в пункті 1.3.

Для балок **першого типу** (рис. 3.4) використовуємо формулу 3.47.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta Q(z) = 0, \text{ в інтервалі } 0 \leq z < l_1; \\ \Delta Q(z) = \Delta R_1, \text{ в інтервалі } l_1 \leq z < z_1; \\ \Delta Q(z) = \Delta R_1 + \sum_{k=1}^m X_k, \text{ в інтервалі } z_k \leq z < l_2; \\ \Delta Q(z) = \Delta R_1 + \sum_{k=1}^m X_k + \Delta R_2, \text{ в інтервалі } l_2 \leq z \leq L, \end{array} \right. \quad (3.47)$$

де величини  $\Delta R_1$  і  $\Delta R_2$  визначаються за формулами 3.24 та 3.25.

Для балок **другого тип** (рис. 3.6) використовуємо формулу 3.48.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta Q(z) = -\Delta R_A, \text{ в інтервалі } 0 \leq z < z_1; \\ \Delta Q(z) = -\Delta R_A + \sum_{k=1}^m X_k, \text{ в інтервалі } z_k \leq z \leq L, \end{array} \right. \quad (3.48)$$

де величина  $\Delta R_A$  визначається за формулою 3.26.

У балок **третього типу** (рис. 3.3) використовуємо формулу 3.49.

$$\begin{cases} \Delta Q(z) = 0, & \text{в інтервалі } 0 \leq z < z_1; \\ \Delta Q(z) = \sum_{k=1}^m X_k, & \text{в інтервалі } z_k \leq z \leq L. \end{cases} \quad (3.49)$$

### **3.5 Особливості розрахунків на міцність і жорсткість статично невизначуваних балок**

Зазначені розрахунки в разі статично невизначуваних балок виконуються для їх еквівалентних систем за тими самими правилами, що і для відповідних статично визначуваних балок (пункти 2.4 і 2.5), але з використанням залежностей  $Q(z)$  і  $M(z)$ , визначених у пункті 3.4.

### **3.6 Розрахункові блоки й інтегровані програми**

Розроблена програма дозволяє визначити профіль, який задовольняє умови міцності балки за нормальними, дотичними і еквівалентними напруженнями. В якості профілю можна обрати двотавр, швелер, здвоєний швелер, прямокутний замкнутий профіль. Програма має наступні функції:

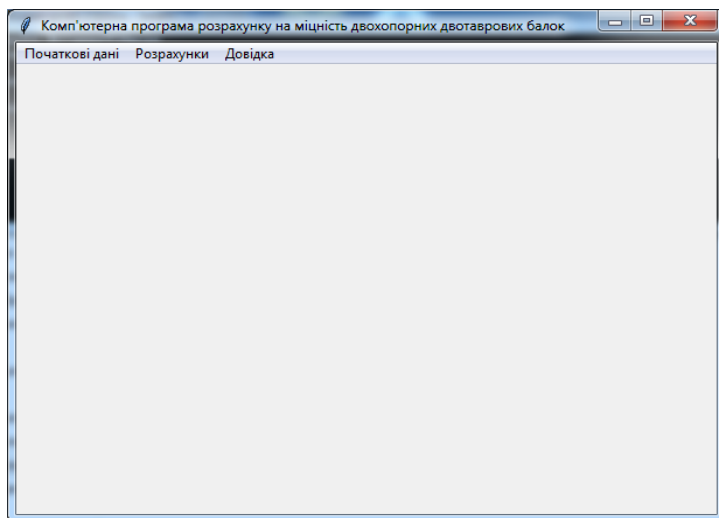
- побудова схеми балки за введеними навантаженнями;
- розрахунок опорних реакцій;
- побудова епюр поперечних сил  $Q$  та згинальних моментів  $M$ ;
- визначення номеру профіля, який задовольняє умовам міцності за нормальними, дотичними та еквівалентними напруженнями;
- побудова безпечного факторного простору для знайденого профілю;
- порівняння безпечних факторних просторів для знайденого та попереднього профілів;
- знаходження прогину балки в заданому перерізі;

- знаходження кута повороту перерізу балки в заданій точці;
- побудова графіків залежності прогину балки і кута повороту від перерізу балки.

Програма написана на мові програмування Python.

### 3.6.1 Головне вікно програми

Після запуску на екрані відобразиться головне вікно програми (рис. 3.7).



**Рисунок 3.7** – Головне вікно програми

Головне вікно програми складається з головного меню. Головне меню програми складається з трьох пунктів:

- Початкові дані.
- Розрахунки.
- Довідка.

### 3.6.2 Пункт меню Початкові дані

Пункт меню **Початкові дані** містить наступні підпункти:

- Схема балки.
- Введення даних.
- Вихід.

Коли користувач вибирає підпункт **Схема балки**, на екрані створюється вкладка з найменуванням «Схема балки», на якій відображається схема балки (рис. 3.8).

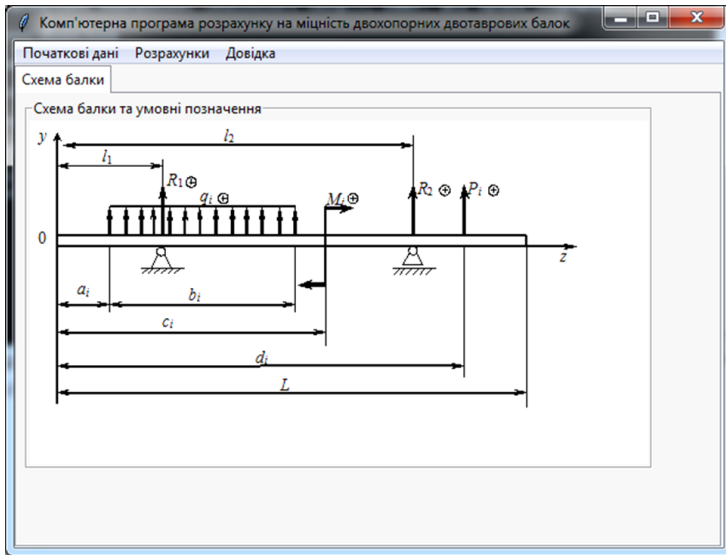
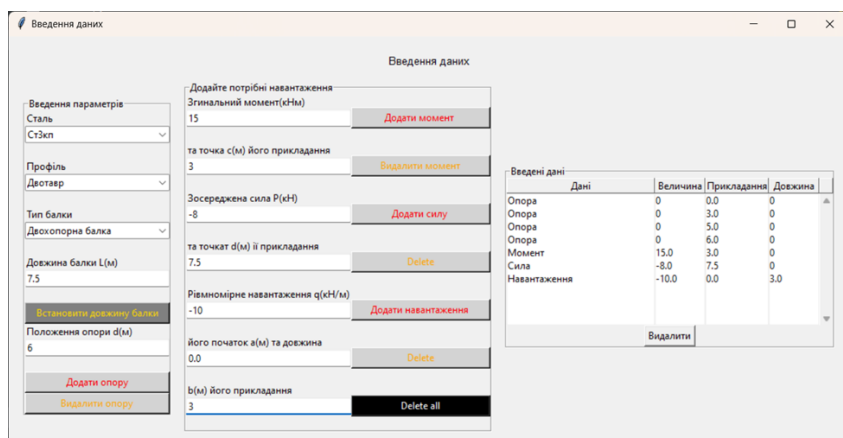


Рисунок 3.8 – Схема балки

Ця схема використовується користувачем в якості довідника для введення вихідних даних.

Підпункт **Введення даних** призначений для введення вихідних даних. Після вибору цього підпункту на екрані з'являється вікно з назвою «Введення даних», на якій розташовані поля для введення вихідних даних (рис. 3.9). Користувач вводить довжину балки, положення опор та параметри згинальних моментів, зосереджених сил

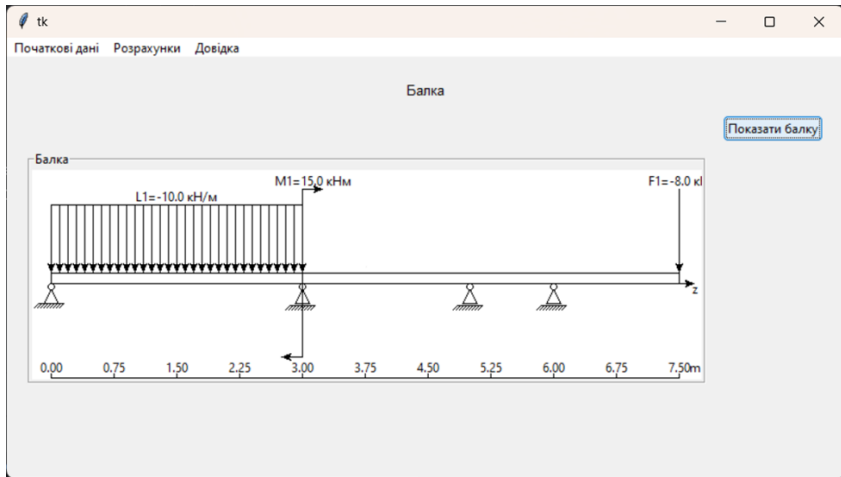
та рівномірних навантажень у відповідні поля. У якості параметрів використовуються величина та точка прикладання для згинальних моментів та зосереджених сил та величина, початок та довжина прикладання рівномірного навантаження. Всі ці параметри показані на схемі. Для додавання цих параметрів використовуються кнопки «Додати момент», «Додати силу», «Додати навантаження». Після натискання на ці кнопки на заповнюється список, який містить наступні поля: вид навантаження(згинальний момент, зосереджена сила або рівномірне навантаження), величина, прикладання, довжина (рис. 3.9).



**Рисунок 3.9** – Вкладка «Введення даних»

Після додавання навантажень у головному вікні програми можна подивитися побудовану схему балки з заданими навантаженнями. Завдяки цій функції користувач може впевнитися в правильності введених навантажень (рис. 3.10).

Можна вводити скільки завгодно опор та навантажень шляхом введення значень параметрів та натискаючи кнопки «Додати опору», «Додати момент», «Додати силу», «Додати навантаження». Всі введені навантаження відображаються в списку. Якщо потрібно видалити деяке навантаження, потрібно його виділити та натиснути кнопку «Видалити».



**Рисунок 3.10** – Введені дані разом зі схемою балки

Дані автоматично зберігаються після додавання опор та навантажень. Щоб побудувати схему даних згідно з введеними навантаженнями потрібно натиснути на кнопку «Показати схему» в головному вікні програми. Схема також будується автоматично при введенні навантажень. Кнопку «Побудувати схему» можна натиснути одразу після введення довжини балки та розташування опор, тоді при введенні навантажень вони будуть автоматично відображатися на схемі балки (рис. 3.10).

Підпункт **Вихід** призначений для завершення роботи програми.

### 3.6.3 Виконання розрахунків

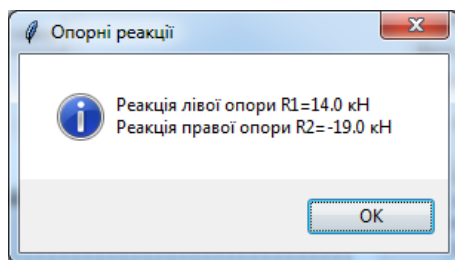
Після введення вихідних даних можна виконувати розрахунки, передбачені програмою. Для цього використовується пункт меню **Розрахунки**.

Пункт меню **Розрахунки** містить наступні підпункти:

- опорні реакції;
- епюри;
- номер профілю;

- безпечний факторний простір;
- порівняння з попереднім номером профілю;
- прогин в заданій точці;
- кут повороту в заданій точці;
- епюри одиничних сил та згинальних моментів;
- значення прогину та кута повороту в перерізах балки.

При виборі підпункту **Опорні реакції** на екрані з'являється діалогове вікно, в якому зазначені опорні реакції лівої та правої опори (рис. 3.11).



**Рисунок 3.11** – Опорні реакції

При виборі підпункту **Епюри** будуються епюри поперечних сил та згинальних моментів (рис. 3.12).

Вибираючи підпункт **Номер профілю**, отримаємо мінімальний номер профілю, що задовольняє умовам міцності за нормальними, дотичними та еквівалентними напруженнями (рис. 3.13). При розрахунках використовувались параметри безпечних факторних просторів профілів, знайдені при наступних припущеннях: матеріал профіля – обрана при введенні даних марка сталі, для якої відомо допустиме допустиме нормальне напруження, третя теорія міцності.

В якості профілю можна обрати двотавр, швелер, подвійний швелер, профілі сталеві гнуті замкнені, а також спеціальні взаємозамінні профілі (СВП), які використовуються для кріплень гірничих виробок. Схема вибору СВП, який задовольняє умови міцності за нормальними, дотичними та еквівалентними напруженнями дещо відрізняється від вищенаведеної.

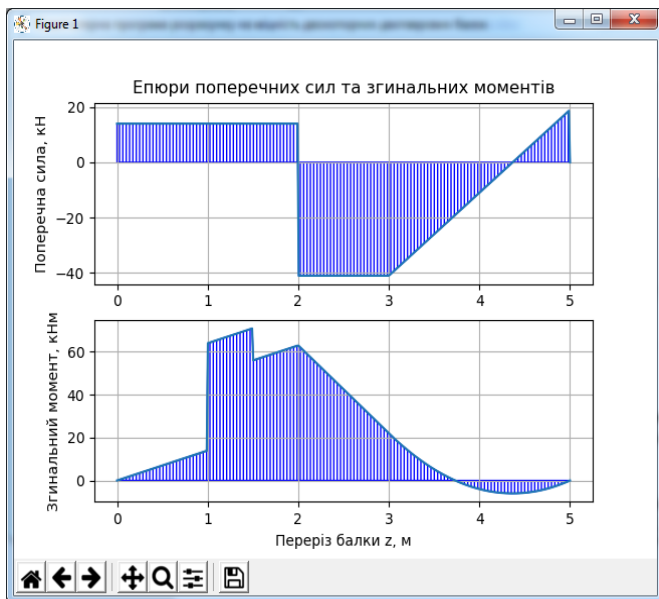


Рисунок 3.12 – Епюри поперечних сил та згинальних моментів

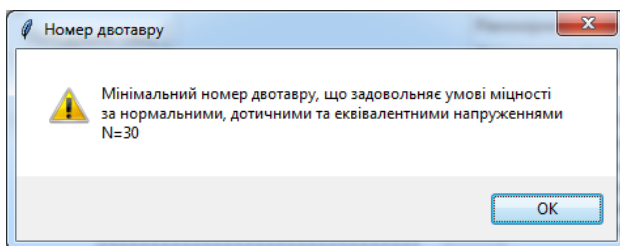


Рисунок 3.13 – Мінімальний номер профілю

Для вибору оптимального СВП використовуємо наступну схему. Відповідно до ДСТУ 8770 беремо перший профіль СВП14. Для нього виконуємо стандартний розрахунок на міцність за нормальними, дотичними та еквівалентними напруженнями. Використовуючи формулу (1.7) для нормальних напружень та формулу Журавського (1.9) для дотичних напружень, будуємо епюри

нормальних та дотичних напружень для обраного профілю. Подібні епюри для круга та двотавру наведені на рис. 1.6 та 1.7 відповідно. Знаючи нормальні та дотичні напруження в кожному перерізі профілю, за формулою (1.1) можемо знайти еквівалентні напруження в будь-якому перерізі профілю. Далі знаходимо переріз, в якому еквівалентні напруження досягають максимального значення і значення цього максимуму. Після цього перевіряємо умови (1.7), (1.9) та (1.23). Якщо хоч одна з цих умов не виконується, беремо наступний профіль із сортаменту ДСТУ 8770. Обчислення виконуємо доти, доки не будуть виконані умови (1.7), (1.9) та (1.23) за нормальними, дотичними та еквівалентними напруженнями.

При виборі підпункту **Безпечний факторний простір** буде виведено діалогове вікно з зображенням безпечного факторного простору профілю з мінімальним номером, на якому нанесені координати поперечних сил та згинальних моментів ( $Q, M$ ) вдовж довжини балки (рис. 3.14).



Рисунок 3.14 – Вигляд безпечного факторного простору профілю

Для того, щоб переконатися в тому, що знайдений номер двотавру є оптимальним, використовується пункт **Порівняння з попереднім номером профілю**. При виборі цього пункту висвітлюється вікно, в якому зображені безпечні факторні простори з нанесеними на них координатами ( $Q, M$ ) вдовж довжини балки (рис. 3.15).

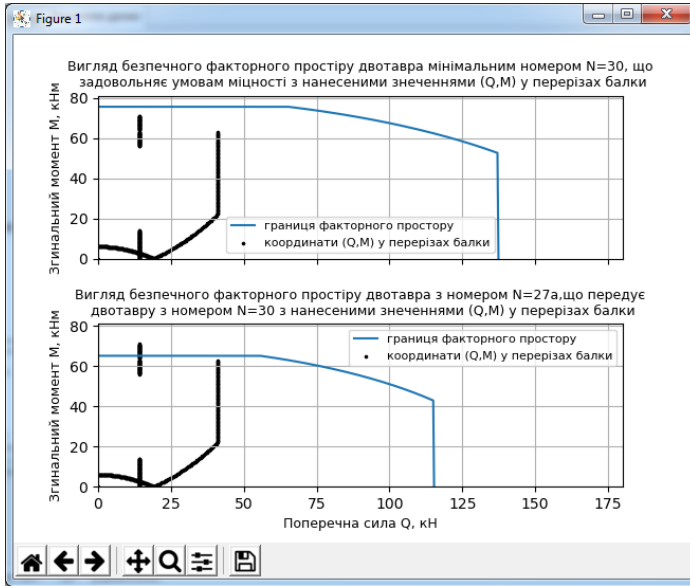


Рисунок 3.15 – Порівняння факторних просторів профілів

Із рисунку 3.15 видно, що для попереднього номеру профілю із сортамента (ДСТУ 8768:2018, ДСТУ 3436-96, ДСТУ Б В.2.6-8-95) існують точки ( $Q, M$ ), які виходять за межі його безпечного факторного простору. Це свідчить про те, що попередній номер профілю не задовольняє умовам міцності за нормальними, еквівалентними та дотичними напруженнями, звідки випливає, що знайдений номер профілю є оптимальним.

Для визначення прогину балки в заданій точці обираємо пункт меню **Прогин в заданій точці**. Після вибору з'явиться діалогове вікно, в якому потрібно вказати значення перерізу балки (рис. 3.16).

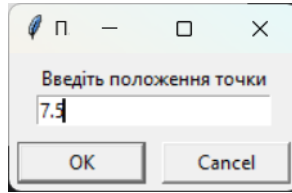


Рисунок 3.16 – Вибір положення перерізу балки

Після натискання на кнопку ОК з’явиться діалогове вікно, яке буде містити результат розрахунку прогину балки в заданому перерізі (рис. 3.17).

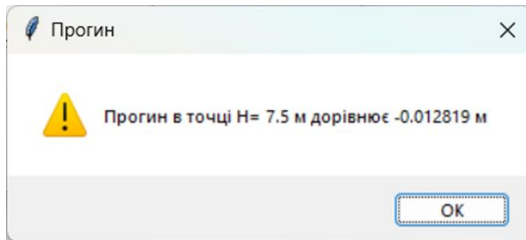


Рисунок 3.17 – Результат розрахунку прогину в заданій точці

Для визначення кута повороту перерізу балки в заданій точці обираємо пункт меню **Кут повороту в заданій точці**, після чого задаємо положення перерізу балки (рис.3.16) і отримуємо значення кута повороту в обраному перерізі балки (рис. 3.18).

Пункт меню **Епюри одиничних сил та згинальних моментів** призначений для побудови епюр від поперечних сил та згинальних моментів, які використовуються при розкритті статичної невизначеності.

Для побудови графіку залежності прогину балки і кута повороту від положення перерізу балки, обираємо пункт меню **Епюри одиничних сил та згинальних моментів**. В результаті отримуємо графік зміни прогину балки і кута повороту від по довжині балки (рис. 3.19).

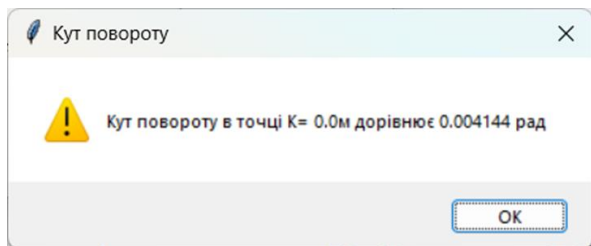


Рисунок 3.18 – Результат розрахунку кута повороту в заданій точці

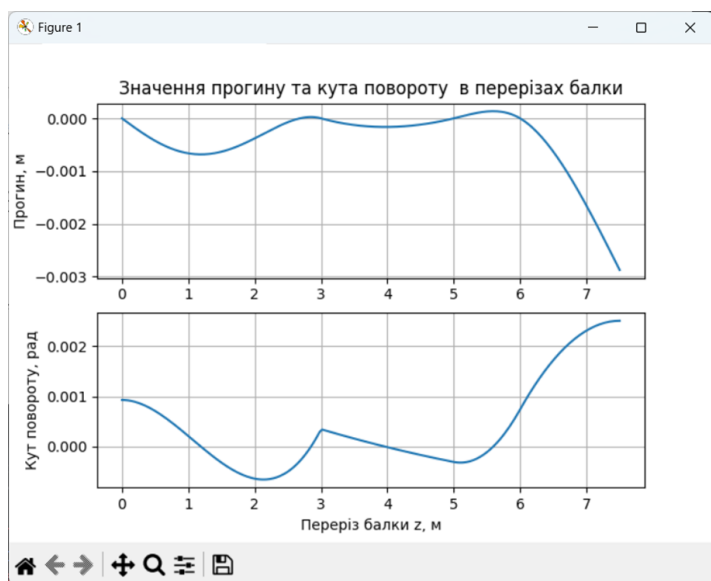


Рисунок 3.19 – Значення прогину і кута повороту в перерізах балки

Працездатність розроблених програм і точність розрахунків з їх застосуванням перевіряли на серії наступних прикладів.

**Приклад 4.1** Для двохопорної балки із сталі Ст.3кп (рис. 4.1) визначити опорні реакції, побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, визначити з умов міцності потрібний номер профілю, розрахувати для нього прогин у точці  $H$  і кут повороту перерізу  $K$ , побудувати графіки цих переміщень за довжиною балки, якщо її профіль – двотавр за ДСТУ 8768:2018.

**Приклад 4.2** Для консольної балки із сталі Ст.4пс (рис. 4.2) визначити опорні реакції, побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, визначити з умов міцності потрібний номер профілю, розрахувати для нього прогин у точці  $H$  і кут повороту перерізу  $K$ , побудувати графіки цих переміщень за довжиною балки, якщо її профіль – швелер за ДСТУ 3436-96.

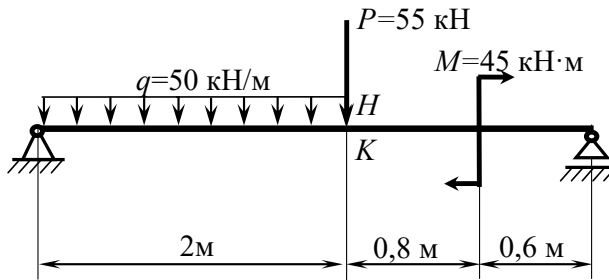
**Приклад 4.3** Для консольної балки (див. рис. 4.2) виконати всі дії, означені в прикладі 4.2, якщо профілем балки є будь-який з варіантів здвоєних швелерів за ДСТУ 3436-96 (див. рис. 2.5).

**Приклад 4.4** Для консольної балки із сталі Ст.5сп (рис. 4.3) визначити опорні реакції, побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, визначити з умов міцності потрібні розміри профілю, розрахувати для нього прогин у точці  $H$  і кут повороту перерізу  $K$ , побудувати графіки цих переміщень за довжиною балки, якщо її профіль – замкнутий прямокутний за ДСТУ Б В.2.6-8-95.

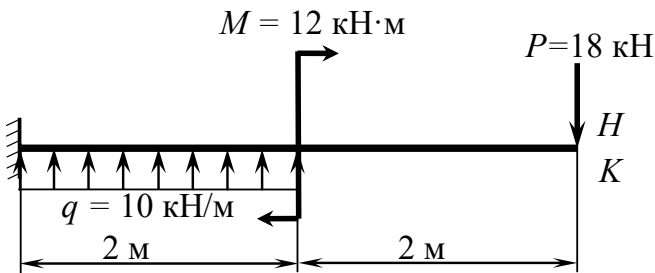
**Приклад 4.5** Для нерозрізної балки, зображеної на рисунку 4.4 [12, с. 142], розкрити статичну невизначуваність, визначити основні опорні реакції, побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, визначити з умов міцності потрібний номер профілю, розрахувати для нього прогин у точці  $H$  і кут повороту перерізу  $K$ , побудувати графіки цих переміщень за довжиною балки, якщо її профіль – двотавр за ДСТУ 8768:2018,  $[\sigma] = 160$  МПа.

**Приклад 4.6** Для нерозрізної балки, зображеної на рисунку 4.5 [14, с. 80], розкрити статичну невизначуваність, визначити основні опорні реакції, побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, визначити з умов міцності потрібний номер профілю, розрахувати для нього прогин у точці  $H$  і кут повороту перерізу  $K$ , побудувати графіки цих переміщень за довжиною балки, якщо її профіль – двотавр за ДСТУ 8768:2018,  $[\sigma] = 160$  МПа.

**Приклад 4.7** Для нерозрізної балки, зображеної на рисунку 4.6 [14, с. 88], розкрити статичну невизначуваність, визначити основні опорні реакції, побудувати епюри поперечних сил і згинальних моментів, визначити з умов міцності потрібні розміри профілю, розрахувати для нього прогин у точці  $H$  і кут повороту перерізу  $K$ , побудувати графіки цих переміщень за довжиною балки, якщо її профіль – двотавр за ДСТУ 8768:2018,  $[\sigma] = 160$  МПа.



**Рисунок 4.1** – Схема 1 навантажень та закріплення балки



**Рисунок 4.2** – Схема 2 навантажень та закріплення балки

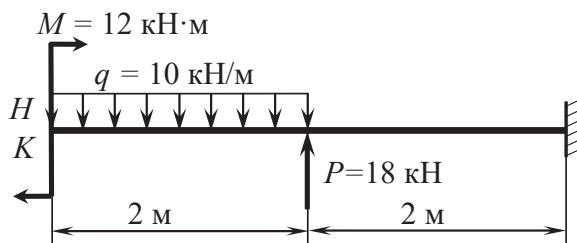


Рисунок 4.3 – Схема 3 навантажень та закріплення балки

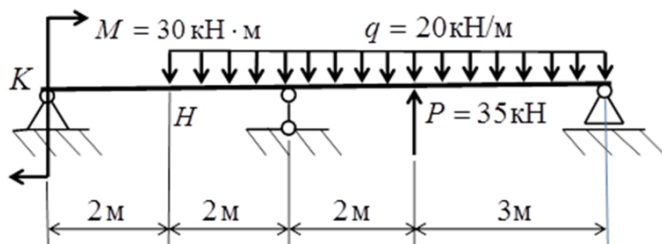


Рисунок 4.4 – Схема 4 навантажень та закріплення балки

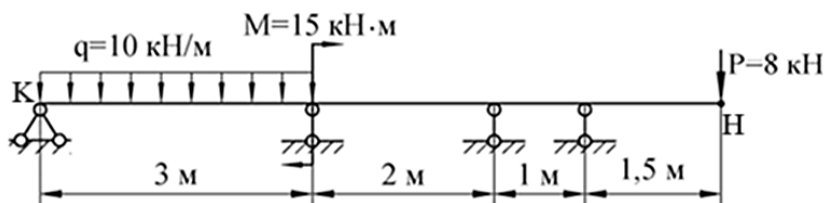


Рисунок 4.5 – Схема 5 навантажень та закріплення балки

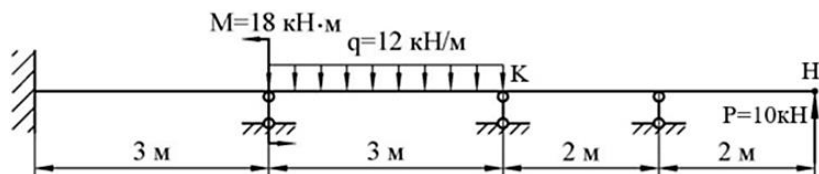


Рисунок 4.6 – Схема 6 навантажень та закріплення балки

Результати розв’язання усіх зазначених прикладів із застосуванням створених програм представленні в додатку В.

Приклади 4.1–4.4 стосуються статично визначуваних балок. Для них паралельно з комп’ютерними проводились також порівняльні аналітичні розрахунки. Їх результати наведені в додатку Г.

Результати комп’ютерного розв’язання прикладів 4.5–4.7, що відносяться до статично невизначуваних балок, порівнювались з результатами відповідних аналітичних розрахунків, опублікованих у збірниках [12; 14].

Порівняльні дані обох задіяних методів розрахунків наведені в таблицях 4.1 і 4.2.

**Таблиця 4.1** – Порівняльні результати розрахунків статично визначуваних балок

Номери прикладів	Комп’ютерні розрахунки			Аналітичні розрахунки		
	Потрібні профілі	$\delta_H$ , мм	$\theta_K$ , град	Потрібні профілі	$\delta_H$ , мм	$\theta_K$ , град
4.1	Двотавр 30	4,650	0,096	Двотавр 30	4,652	0,096
4.2	Швелер 30	35,227	0,763	Швелер 30	35,227	0,763
4.3	Здвоєні швелери 22	48,499	1,049	Здвоєні швелери 22	48,499	1,050
4.4	Замкнутий прямокутник $160 \times 80 \times 4$	47,970	0,447	Замкнутий прямокутник $160 \times 80 \times 4$	47,970	0,447

**Таблиця 4.2** – Порівняльні результати розрахунків статично невизначуваних балок

Номери прикладів	Комп’ютерні розрахунки			Аналітичні розрахунки		
	Потрібні профілі	$\delta_H$ , мм	$\theta_K$ , град	Потрібні профілі	$\delta_H$ , мм	$\theta_K$ , град
4.5	Двотавр 22	$6,0 \cdot 10^{-3}$	$8,141 \cdot 10^{-3}$	Двотавр 22	$6,0 \cdot 10^{-3}$	$8,133 \cdot 10^{-3}$
4.6	Двотавр 14	$12,8 \cdot 10^{-3}$	$4,144 \cdot 10^{-3}$	Двотавр 14	$13,0 \cdot 10^{-3}$	$4,161 \cdot 10^{-3}$
4.7	Двотавр 18	$18,6 \cdot 10^{-3}$	$4,720 \cdot 10^{-4}$	Двотавр 18	$19,0 \cdot 10^{-3}$	$5,0 \cdot 10^{-4}$

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ \_\_\_\_\_

---

1. Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Є. С. Опір матеріалів. Київ : Вища школа, 2004. 655 с.

2. Bhaskar K., Varadan T. K. Strength of Materials: A Concise Textbook. Springer Nature, 2022.

3. Khurmi R. S., Khurmi N. A textbook of Strength of Materials. S. Chand Publishing, 2019.

4. Опір матеріалів : методичні вказівки до самостійної роботи для студентів усіх механічних спеціальностей денної прискореної форми навчання / упоряд. Ю. С. Холодняк. Краматорськ : ДДМА, 2019. 72 с.

5. Холодняк Ю. С., Чоста Н. В. Опір матеріалів : розрахунково-графічні завдання до тем 6 і 7 для студентів усіх механічних спеціальностей денної прискореної форми навчання. Краматорськ : ДДМА, 2021. 62 с.

6. Холодняк Ю. С., Костіков О. А., Чоста Н. В. Опір матеріалів : курс лекцій для студентів усіх механічних спеціальностей денної і заочної прискорених форм навчання. Краматорськ : ДДМА, 2023. 259 с.

7. Холодняк Ю. С., Костіков А. А., Подлесний С. В., Капорович С. В. Про комп'ютерні програми до спрощеної методики комплексної оцінки міцності двотаврових балок. *Вісник Донбаської державної машинобудівної академії*. 2019. № 3 (47). С. 72–81.

8. Holodnyak Yu. S., Kostikov A. A., Podlesny S. V., Kaporovich S. V. About computer programs for simplified methodology of complex assessment of strength of two-beam beams. *Перспективні технології та прилади*. 2019. № 15. С. 99–108.

9. Холодняк Ю. С., Костіков А. А., Подлесний С. В., Капорович С. В. Розвиток комп'ютерних програм спрощеного розрахунку на міцність двотаврових балок. *Вісник Донбаської державної машинобудівної академії*. 2020. № 1 (48). С. 117–126.

10. Holodnyak Yu. S., Kostikov A. A., Podlesny S. V., Kaporovich S. V. The software enhancement for simplified strength computation of I-beam. *Перспективні технології та прилади*. 2020. № 17. С. 146–154.

11. Холодняк Ю. С., Костіков О. А., Капорович С. В. Про комп'ютерні програми спрощеного розрахунку двотаврових балок на міцність і жорсткість. *Сучасні інноваційні технології підготовки інженерних кадрів для гірничої промисловості та транспорту 2021* : зб. наук. праць міжнар. конф. Дніпро : ДНГУ, 2021. С. 76–86.

12. Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу «Опір матеріалів» / Л. В. Кутовий та ін. Краматорськ : ДДМА, 2007. 220 с.

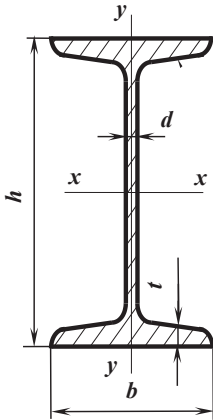
13. Код розрахунку двотаврових балок на міцність і жорсткість за допомогою MathCAD. Репозиторій на GitHub. URL: <https://github.com/Dzirit2017IT14-2/mip-automated-beam-calculations/blob/main/%D0%92eamDisplRot1.xmcd>.

14. Опір матеріалів: збірник розрахунково – графічних завдань для студентів усіх механічних спеціальностей денної форми навчання / Ю. С. Холодняк, С. В. Капорович. Краматорськ : ДДМА, 2029. 159 с.

15. Теоретична механіка. Статика і кінематика : навч. посібник / В. М. Іскрицький та ін. Краматорськ : ДДМА, 2007. 204 с.

# ДОДАТКИ

## Додаток А Основні параметри балочних профілів



### 1. Двотаври сталеві гарячекатані (за ДСТУ 8768:2018)

Позначення:

- $h$  – висота профілю
- $b$  – ширина полки
- $d$  – товщина стінки
- $t$  – середня товщина полки
- $F$  – площа перерізу
- $J$  – моменти інерції
- $W$  – моменти опору
- $i$  – радіуси інерції
- $S_x$  – статичний момент половини перерізу

Приклад позначення профілю:

**Двотавр 30 ДСТУ 8768:2018**

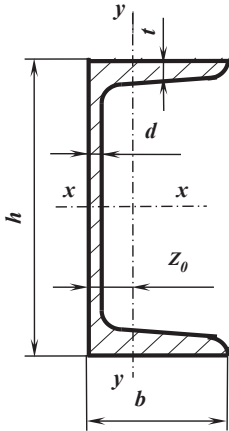
Таблиця А.1

Номер профілю	Основні розміри, мм				$F$ см <sup>2</sup>	$J_x$ см <sup>4</sup>	$W_x$ см <sup>3</sup>	$i_x$ см	$S_x$ см <sup>3</sup>	$J_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см
	$H$	$B$	$D$	$T$								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18а	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
20а	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	407	11,3	229	337	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

**2. Швелери  
сталеві гарячекатані  
(за ДСТУ 3436–96)**



Позначення:

- |                             |                                 |
|-----------------------------|---------------------------------|
| $h$ – висота профілю        | $W$ – моменти опору             |
| $b$ – ширина полки          | $i$ – радіуси інерції           |
| $d$ – товщина стінки        | $S_x$ – статичний момент        |
| $t$ – середня товщина полки | половини перерізу               |
| $F$ – площа перерізу        | $Z_0$ – відстань від осі $y$ до |
| $J$ – моменти інерції       | зовнішньої грані стінки         |

Приклад позначення профілю:

**Швелер 30 ДСТУ 3436-96**

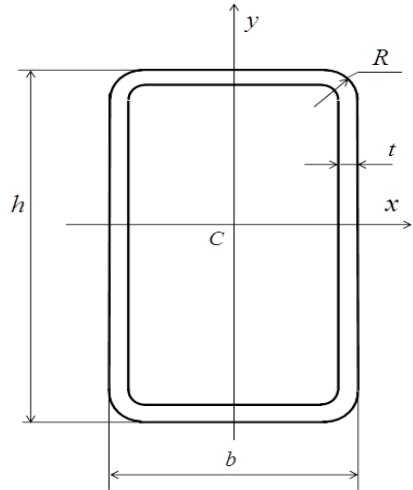
Таблиця А.2

Номер профілю	Основні розміри, мм				$F$ см <sup>2</sup>	$J_x$ см <sup>4</sup>	$W_x$ см <sup>3</sup>	$i_x$ см	$S_x$ см <sup>3</sup>	$J_y$ см <sup>4</sup>	$W_y$ см <sup>3</sup>	$i_y$ см	$Z_0$ см
	$h$	$b$	$D$	$t$									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16

## Продовження таблиці А.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

**3. Профілі сталеві гнуті  
замкнені  
(за ДСТУ Б В.2.6-8-95)**



**Таблиця А.3**

Позначення профілю	Основні характеристики							
	$h$ , мм	$b$ , мм	$t$ , мм	$R$ , мм	$F$ , см <sup>2</sup>	$J$ , см <sup>4</sup>	$W_x$ , см <sup>3</sup>	$S_x$ , см <sup>3</sup>
1	2	3	4	5	6	7	8	9
50×25×2	50	25	2	4	2,74	8,38	3,35	2,26
60×30×2	60	30	2	4	3,34	15,04	5,01	3,31
70×50×2	70	50	2	4	4,54	31,47	8,99	5,58
80×40×2	80	40	2	4	4,54	37,35	9,34	6,01
80×40×3	80	40	3	6	6,61	52,24	13,06	8,73
100×40×3	100	40	3	6	7,81	92,33	18,47	12,45
120×40×3	120	40	3	6	9,01	148,0	24,67	16,77
120×40×4	120	40	4	8	11,75	186,9	31,14	21,82
140×60×3	140	60	3	6	11,41	278,1	39,72	25,80
140×60×4	140	60	4	8	14,95	355,5	50,79	33,74
140×60×5	140	60	5	10	18,36	425,8	60,83	41,38
160×80×4	160	80	4	8	18,15	597,6	74,71	48,06
160×80×5	160	80	5	10	22,36	721,6	90,20	59,13
200×80×4	200	80	4	8	21,35	1046	104,6	68,22
200×80×5	200	80	5	10	26,36	1269	126,9	84,13
220×100×4	220	100	4	8	24,55	1519	138,1	88,14

Продовження таблиці А.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9
220×100×5	220	100	5	10	30,36	1851	168,3	108,88
240×120×5	240	120	5	10	34,36	2579	215,0	136,63
240×120×6	240	120	6	12	40,83	3026	252,1	162,22
260×130×6	260	130	6	12	44,43	3888	299,0	191,32
260×130×7	260	130	7	17,5	50,96	4369	336,1	221,02
260×130×8	260	130	8	20	57,64	4874	374,9	250,11
300×100×8	300	100	8	20	59,24	5977	398,5	278,11
300×100×9	300	100	9	22,5	65,98	6559	437,3	309,88
300×100×10	300	100	10	25	72,57	7105	473,7	341,00
320×180×6	320	180	6	12	57,63	8012	500,8	311,86
320×180×7	320	180	7	17,5	66,36	9029	568,1	361,05
320×180×8	320	180	8	20	75,24	10200	637,5	409,47
350×250×6	350	250	6	12	69,63	12456	711,8	429,37
350×250×7	350	250	7	17,5	80,36	14210	812,0	497,69
350×250×8	350	250	8	20	91,24	15999	914,3	565,11
400×200×10	400	200	10	25	112,6	23000	1150	751,00
400×200×11	400	200	11	33	122,0	24485	1224	820,83
400×200×12	400	200	12	36	132,1	26245	1312	889,73

Примітка: значення  $S_x$  розраховані за спрощеною формулою:

$$S_x = t \cdot \left[ 0,5 \cdot b \cdot (h-t) + (0,5 \cdot h - t)^2 \right] \times 10^{-3}.$$

**4. Прокат сортовий та фасонний  
із вуглецевої сталі звичайної якості  
(за ДСТУ 4484:2005)**

Таблиця А.4

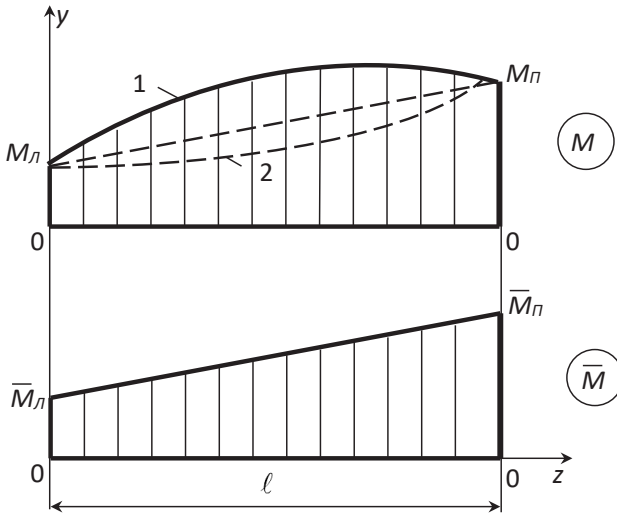
Марка сталі	Основні механічні характеристики		
	Межа текучості $\sigma_t$ , МПа	Коефіцієнт запасу міцності $n_t$	Допустиме напруження $[\sigma] = \sigma_t/n_t$ , МПа
1	2	3	4
Сталь Ст1кп	195	1,5	130
Сталь Ст1пс	205	1,5	137
Сталь Ст1сп	205	1,5	137

## Продовження таблиці А.4

1	2	3	4
Сталь Ст2кп	215	1,5	143
Сталь Ст2пс	225	1,5	150
Сталь Ст2сп	225	1,5	150
Сталь Ст3кп	235	1,5	157
Сталь Ст3пс	245	1,5	163
Сталь Ст3сп	245	1,5	163
Сталь Ст3Гпс	245	1,5	163
Сталь Ст3Гсп	245	1,5	163
Сталь Ст4кп	255	1,5	170
Сталь Ст4пс	265	1,5	177
Сталь Ст4сп	265	1,5	177
Сталь Ст5пс	285	1,5	190
Сталь Ст5сп	285	1,5	190
Сталь Ст5Гпс	285	1,5	190
Сталь Ст6пс	315	1,5	210
Сталь Ст6сп	315	1,5	210

## Додаток Б

### Формула крайніх ординат і особливості її застосування



**Рисунок Б.1** – Епюра  $M$  для формули крайніх ординат і особливості її застосування

$$\Delta = M \times \bar{M} = \frac{l}{6E \cdot J_x} (2M_L \cdot \bar{M}_L + 2M_P \cdot \bar{M}_P + M_L \cdot \bar{M}_P + M_P \cdot \bar{M}_L) \pm \frac{q \cdot l^3}{24E \cdot J_x} (\bar{M}_L + \bar{M}_P)$$

Формула призначена для визначення (по Мору) переміщень в балках при плоскому згині. В ній позначено:

$\Delta$  – переміщення (лінійне –  $\delta$ , кутове –  $\theta$ ) в заданому місці балки;

$M$  і  $\bar{M}$  – відповідно епюри згинальних моментів від заданого навантаження і одиничного силового фактору (сили або моменту);

$l$  – довжина ділянки балки (тобто відрізка, на якому кожна з обох епюр зображується єдиною лінією);

$z$  – силова площа;

$x$  і  $y$  – головні центральні осі перерізу балки (вісь  $x$  на схемі не зображена);

$J_x$  – момент інерції перерізу відносно осі  $x$ ;

$E$  – модуль пружності першого роду для матеріалу балки;

$q$  – інтенсивність розподіленого навантаження;

$M_L, M_P$  – крайні ординати епюри  $M$ ;

$\bar{M}_L, \bar{M}_P$  – крайні ординати епюри  $\bar{M}$ .

Формула застосовується для кожної ділянки балки, де обидві епюри не є нульовими, після чого знайдені для всіх ділянок величини  $\Delta$  складаються з урахуванням їхніх знаків.

Величини крайніх ординат обох епюр підставляються у формулу зі своїми знаками; на схемі вони показані як додатні.

Знак «плюс» перед поправкою на кривизну (тобто другою складовою у формулі крайніх ординат) ставиться в разі, коли епюра  $M$  є опуклою (крива 1), а «мінус» – коли вона угнута (крива 2). Коли ж ця епюра прямолінійна, поправка на кривизну дорівнює нулю.

## Додаток В

### Комп'ютерне розв'язання прикладів

#### Приклад 4.1

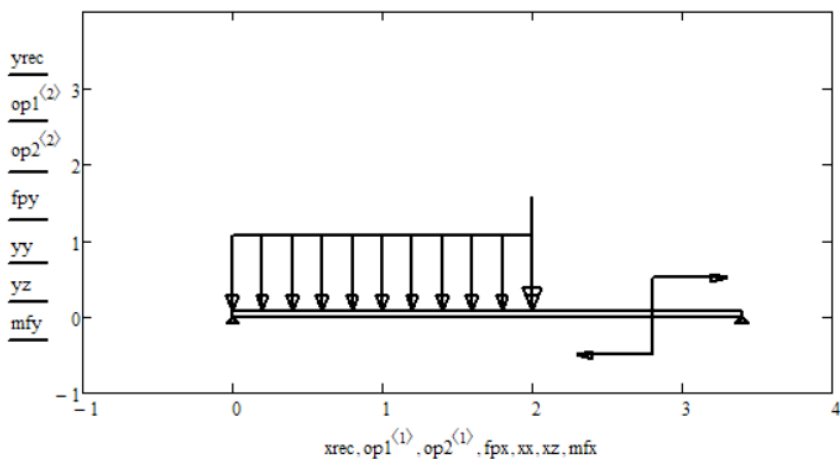
Рішення задачі наведено на рис. В1.

Введіть зосереджені сили  $P$ , їх розташування  $d$ , моменти пар сил  $M$  та їх розташування  $c$ :

$$P := \begin{pmatrix} -55 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN} \quad d := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \quad M := \begin{pmatrix} 45 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad c := \begin{pmatrix} 2.8 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}.$$

Введіть розподілені навантаження  $q$ , їх розташування  $a$ , протяжність  $b$ , довжину балки  $L$ , та розташування опор на балці  $l_1$  та  $l_2$ :

$$q := \begin{pmatrix} -50 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad a := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \quad L := 3.4 \text{ m} \quad l_1 := 0 \text{ m} \quad l_2 := 3.4 \text{ m}.$$

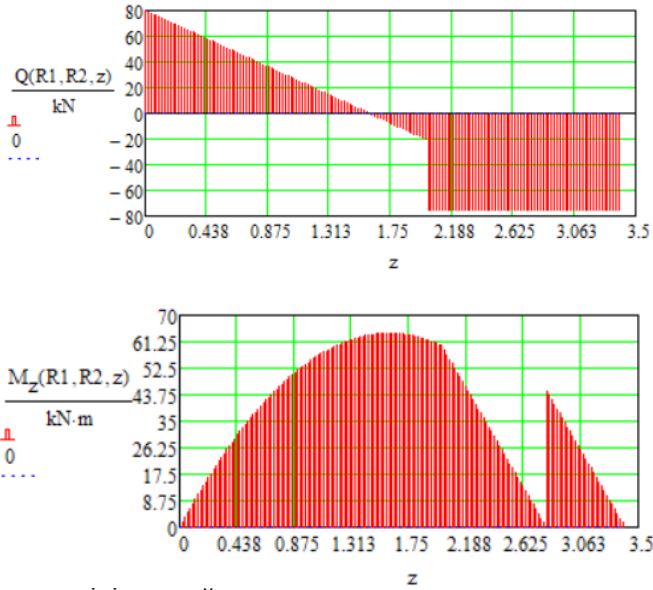


Визначаємо опорні реакції:

$$R_2 = 7.5 \times 10^4 \text{ N};$$

$$R_1 = 8 \times 10^4 \text{ N}.$$

Рисунок В.1 – Рішення прикладу 4.1 в системі Mathcad



Визначаємо мінімальний номер двотавру:

$$Prov(DT, n) = \binom{15}{30}$$

Будуємо безпечний факторний простір для визначеного номера двотавру.

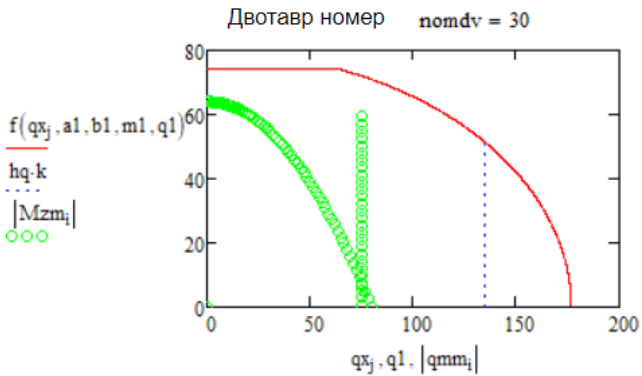
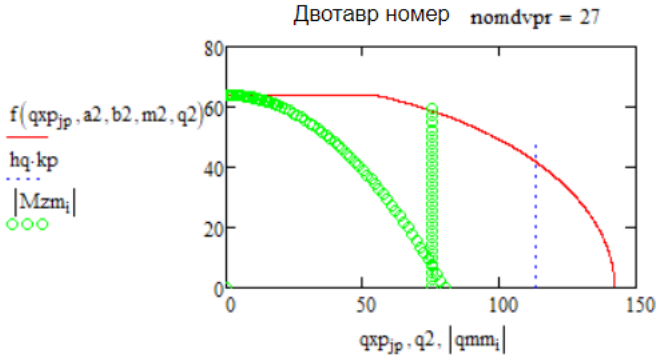
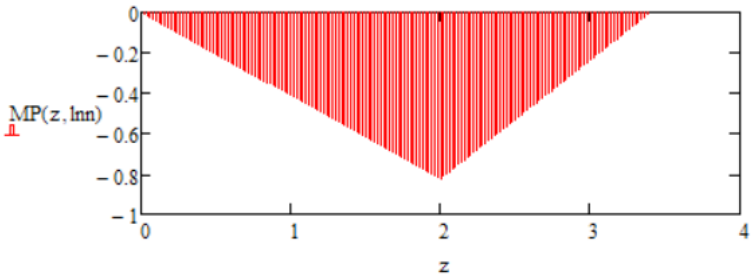


Рисунок В.1 – (арк. 114)

Будуємо безпечний факторний простір для попереднього номера двотавру.



Будуємо епору  $\bar{M}$ .



Знаходимо прогин в точці  $H = 2$  м:

$$l_{nn} = 2\text{ м};$$

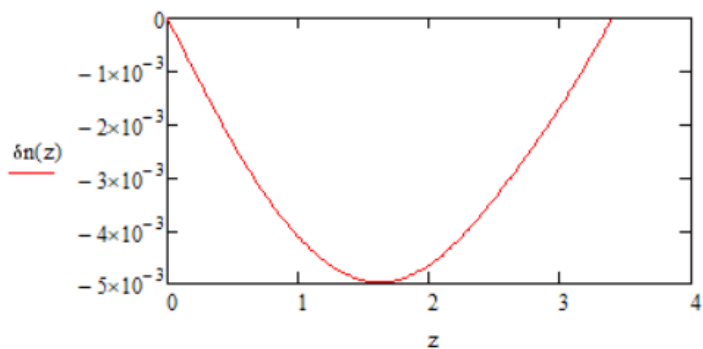
$$\delta_n(l_{nn}) = -4.64984633 \times 10^{-3} \text{ м}.$$

Знаходимо кут переміщення в точці  $K = 2$  м:

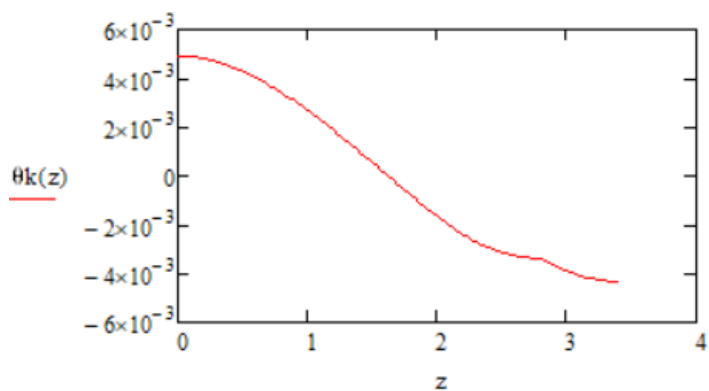
$$\theta_k(2\text{ м}) = -1.681 \times 10^{-3}.$$

**Рисунок В.1** – (арк. 114)

Будуємо графік зміни величини прогину по довжині балки.



Будуємо графік зміни величини кута повороту перерізу по довжині балки.



**Рисунок В.1** – (арк. 114)

## Приклад 4.2

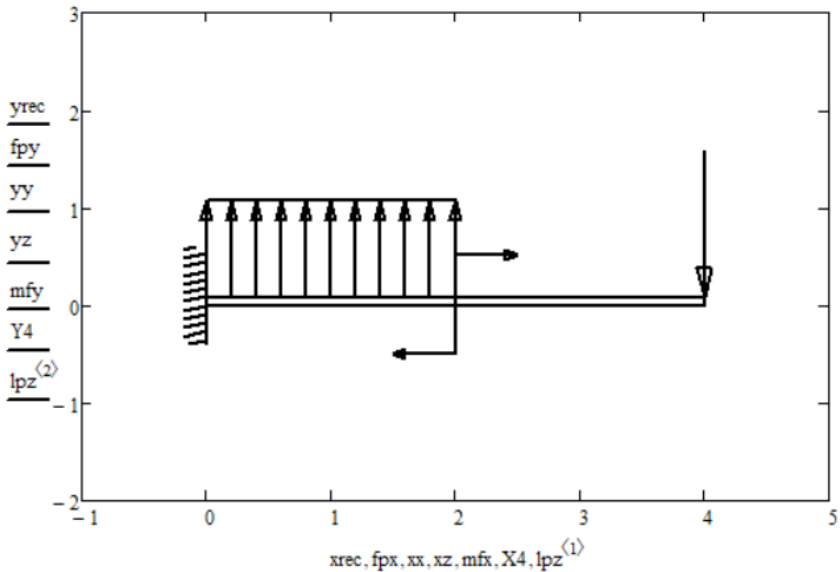
Рішення задачі наведено на рис. В2.

Введіть зосереджені сили  $P$ , їх розташування  $d$ , моменти пар сил  $M$  та їх розташування  $c$ :

$$P := \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN} \quad d := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \quad M := \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad c := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}.$$

Введіть розподілені навантаження  $q$ , їх розташування  $a$ , протяжність  $b$ , довжину балки  $L$ , та розташування опор на балці  $l_z$ :

$$q := \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad a := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \quad L := 4 \text{ m} \quad l_z := 0 \text{ m}.$$

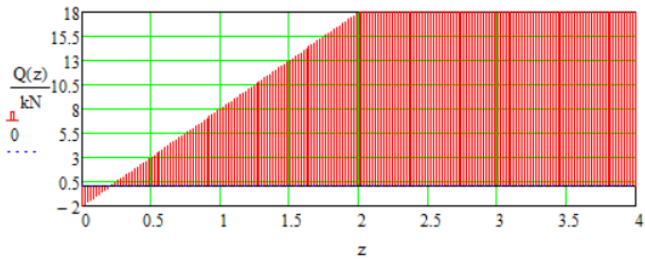


Визначаємо опорні реакції:

$$R_A = 2 \times 10^2 \text{ N}.$$

Рисунок В.2 – Рішення прикладу 4.2 в системі Mathcad

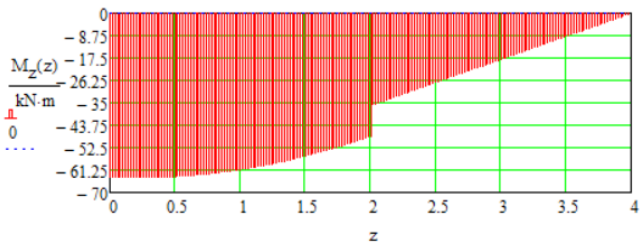
Будемо епюри поперечних сил та згинальних моментів:



Визначаємо мінімальний номер швелера:

$$Prov(DT, n) = \binom{19}{30}.$$

Будемо безпечний факторний простір для визначеного номера швелеру.



Будемо безпечний факторний простір для визначеного номера швелеру.

Швелер номер `nomdv = 30`

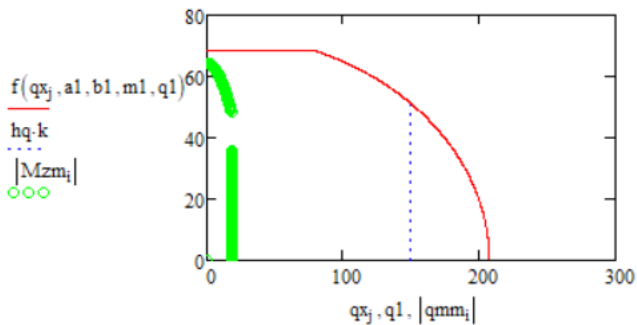
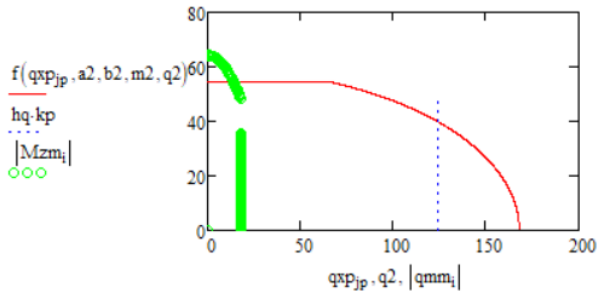


Рисунок В.2 – (арк. 118)

Будемо безпечний факторний простір для попереднього номера швелеру

Швелер номер `nomdvpr = 27`



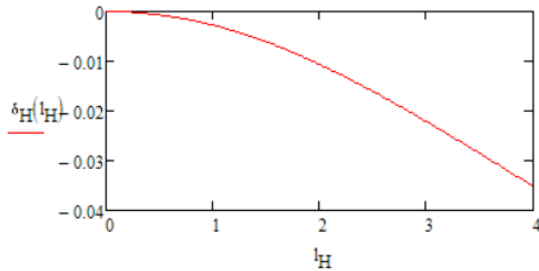
Знаходимо прогин в точці  $H = 4$  м:

$$\delta_H(4m) = -0.035227m.$$

Знаходимо кут переміщення в точці  $K = 4$  м:

$$\theta_K(4m) = -0.0133104.$$

Будемо графік зміни величини прогину по довжині балки.



Будемо графік зміни величини кута повороту перерізу по довжині балки.

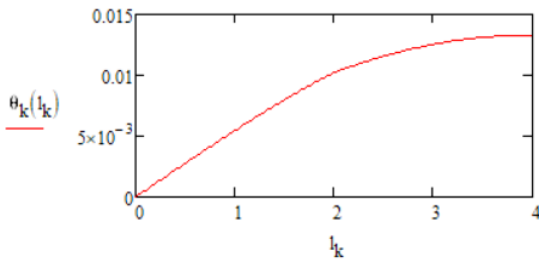


Рисунок В.2 – (арк. 118)

### Приклад 4.3

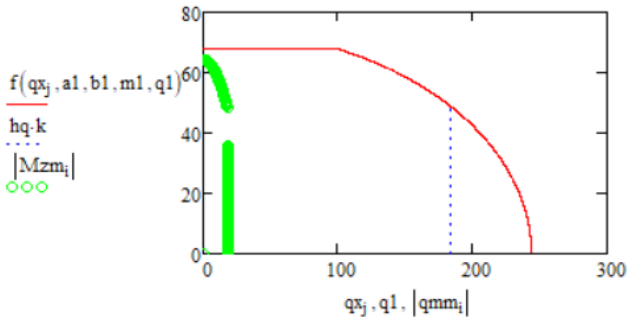
Дана задача відрізняється від попередньої лише профілем балки. В якості профілю обрано здвоєний швелер. Тому вхідні дані і епюри поперечних сил та згинальних моментів будуть такі, як в попередній задачі. Подальший хід рішення показано на рис. В3.

Визначаємо мінімальний номер здвоєного швелера:

$$Prov(DT, n) = \begin{pmatrix} 14 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Будуємо безпечний факторний простір для визначеного номера здвоєного швелера.

Швелер номер `nomdv = 22`



Будуємо безпечний факторний простір для попереднього номера швелера.

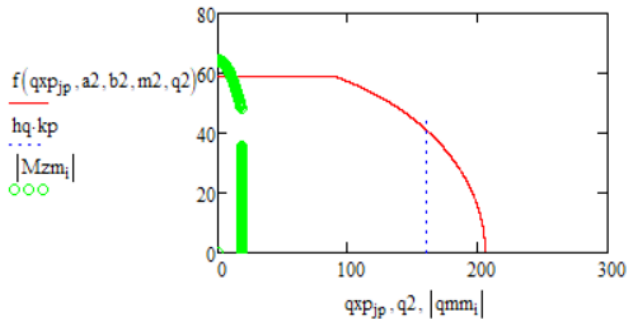


Рисунок В.3 – Рішення прикладу 4.3 в системі Mathcad

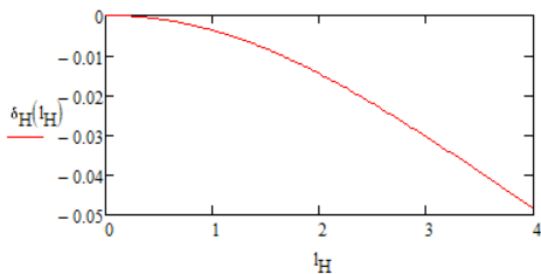
Знаходимо прогин в точці  $H=4$  м:

$$\delta_H(4m) = -0.048499m.$$

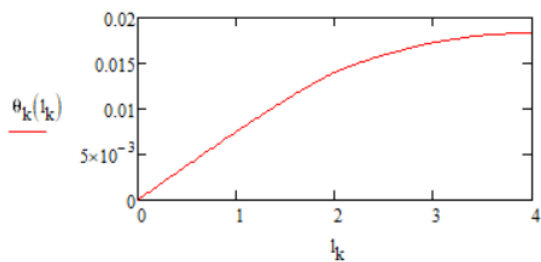
Знаходимо кут переміщення в точці  $K=4$  м:

$$\theta_K(4m) = -0.018325.$$

Будуємо графік зміни величини прогину по довжині балки.



Будуємо графік зміни величини кута повороту перерізу по довжині балки.



**Рисунок В.3** – (арк. 121)

### Приклад 4.4

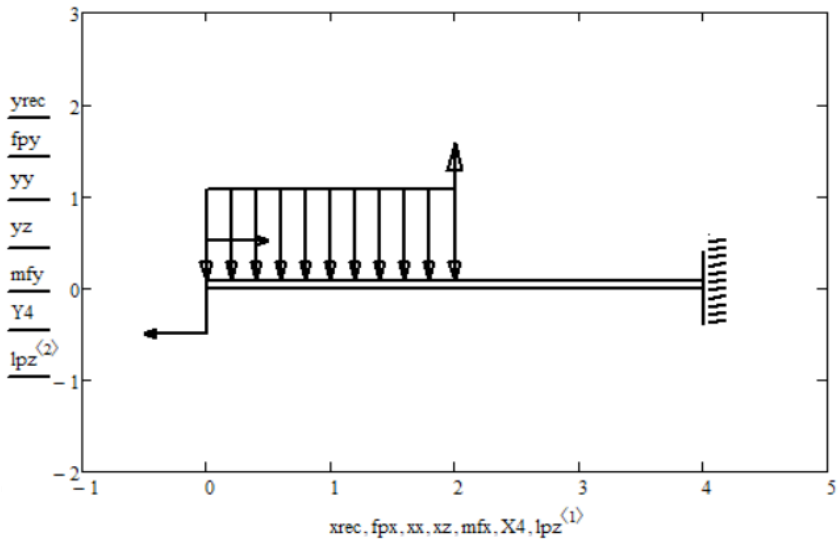
Рішення прикладу 4.4 наведено на рис. В4.

Введіть зосереджені сили  $P$ , їх розташування  $d$ , моменти пар сил  $M$  та їх розташування  $c$ :

$$P := \begin{pmatrix} -18 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN} \quad d := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \quad M := \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad c := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m}.$$

Введіть розподілені навантаження  $q$ , їх розташування  $a$ , протяжність  $b$ , довжину балки  $L$ , та розташування опор на балці  $l_2$ :

$$q := \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad a := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \quad L := 4 \text{ m} \quad l_2 := 4 \text{ m}.$$



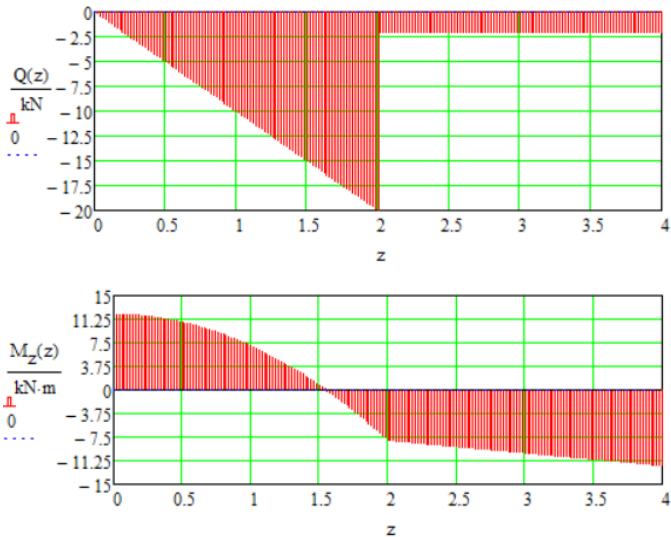
Визначаємо опорні реакції:

$$R_A = -2 \times 10^3 \text{ N};$$

$$M_A = -1.2 \times 10^4 \text{ J}.$$

Рисунок В.4 – Рішення прикладу 4.2 в системі Mathcad

Будемо епюри поперечних сил та згинальних моментів.



Визначаємо мінімальний номер сталевого гнучкого замкнутого профілю:

$$Prov(DT, n) = \begin{pmatrix} 12 \\ 160 \end{pmatrix}.$$

Умовам міцності задовольняє профіль замкнутий прямокутний  $160 \times 80 \times 4$  (12-й номер в таблиці сортаменту А3).

Будемо безпечний факторний простір для визначеного номера замкнутого прямокутного профілю.

Профіль замкнутий прямокутний  $168 \times 80 \times 40$ .

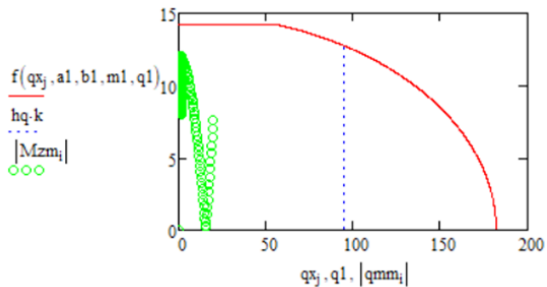
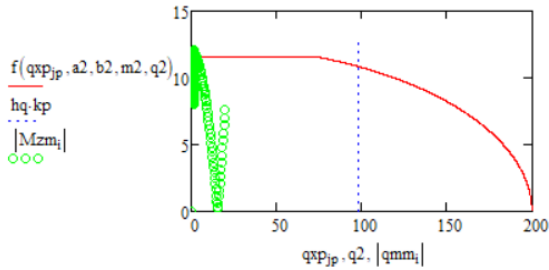


Рисунок В.4 – (арк. 123)

Будуємо безпечний факторний простір для попереднього профілю.



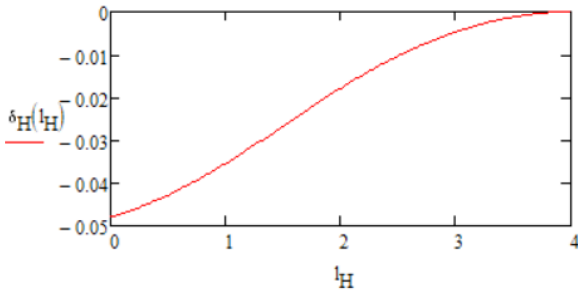
Знаходимо прогин в точці  $H = 0$  м:

$$\delta_H(0m) = -0.04797m.$$

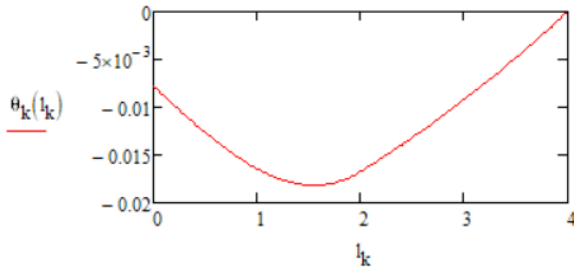
Знаходимо кут переміщення в точці  $K = 0$  м:

$$\theta_k(0m) = -7.809014 \times 10^{-3}.$$

Будуємо графік зміни величини прогину по довжині балки



Будуємо графік зміни величини кута повороту перерізу по довжині балки.



**Рисунок В.4** – (арк. 123)

## Приклад 4.5

Рішення задачі складається з наступних кроків:

1. Вводимо початкові дані (рис. В.5).

Дані	Величина	Прикладання	Довжина
Опора	0	0.0	0
Опора	0	4.0	0
Опора	0	9.0	0
Момент	30.0	0.0	0
Сила	35.0	6.0	0
Навантаження	-20.0	2.0	7.0

Рисунок В.5 – Введення початкових даних

2. За введеними даними будемо схему балки (рис. В.6).

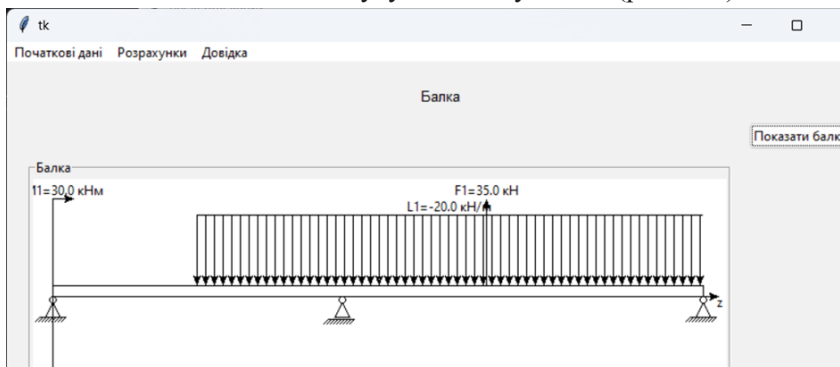


Рисунок В.6 – Схема даних для розрахунку

3. Розраховуємо опорні реакції (рис. В.7).

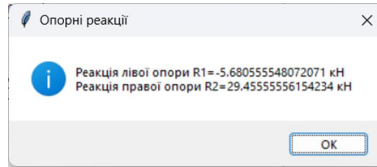


Рисунок В.7 – Опорні реакції з урахування статичної невизначеності

4. Будемо епюру поперечних сил та згинальних моментів (рис. В.8).

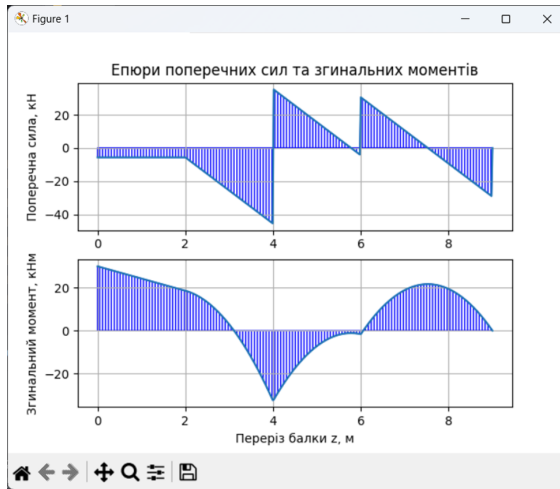


Рисунок В.8 – Епюри поперечних сил та згинальних моментів

5. Розраховуємо мінімальний номер двотавру, що задовольняє умову міцності за нормальними, дотичними і еквівалентними напруженнями (рис. В.9).

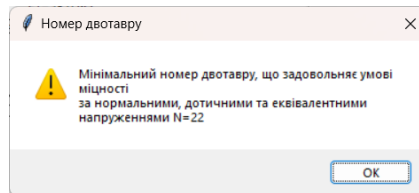


Рисунок В.9 – Визначення номера двотавру

6. Будемо безпечний факторний простір для визначеного номеру двотавра (рис. В.10).



Рисунок В.10 – Безпечний факторний простір

7. Порівнюємо факторні простори двотаврів (рис. В.11).

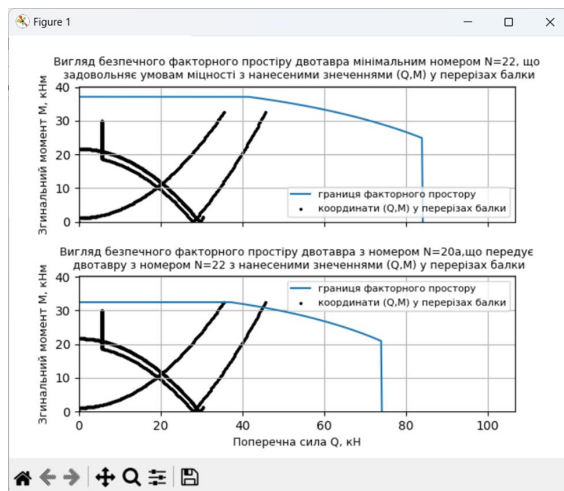
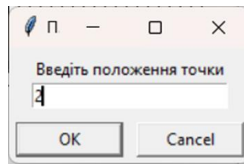


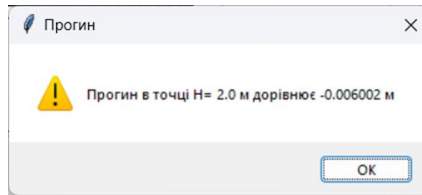
Рисунок В.11 – Порівняння факторних просторів

8. Задаємо положення перерізу балки для визначення прогину (рис. В.12).



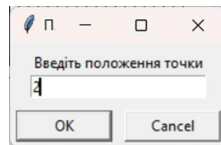
**Рисунок В.12** – Задання положення перерізу балки

9. Розраховуємо прогин балки в заданій точці (рис. В.13).



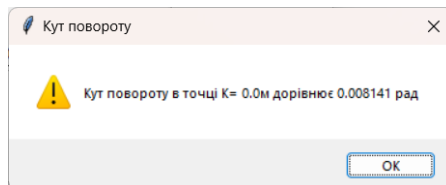
**Рисунок В.13** – Розрахунок прогину балки в заданій точці

10. Задаємо положення перерізу балки для визначення кута повороту перерізу балки (рис. В.14).



**Рисунок В.14** – Введення положення перерізу балки для розрахунку кута повороту

11. Визначаємо кут повороту в заданому перерізі (рис. В.15).



**Рисунок В.15** – Розрахунок кута повороту балки в заданій точці

12. Будуємо графіки залежності прогину і кута повороту від перерізу балки (рис. В.16).

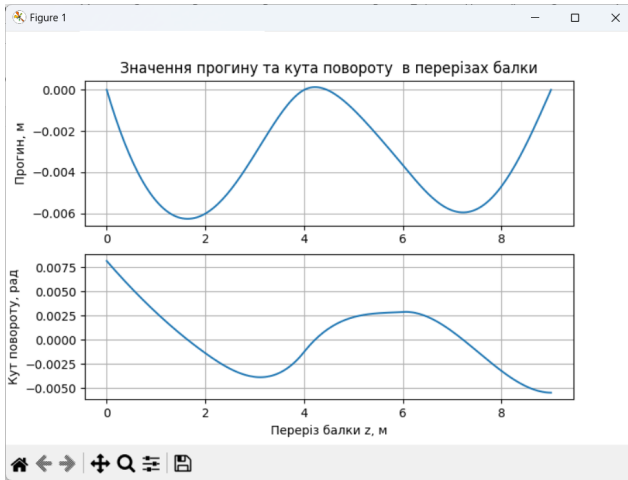


Рисунок В.16 – Значення прогину і кута повороту в перерізах балки

#### Приклад 4.6

Рішення задачі складається з наступних кроків:

1. Вводимо початкові дані (рис. В.17).
2. За введеними даними будуємо схему балки (рис. В.18).
3. Розраховуємо опорні реакції (рис. В.19).
4. Будуємо епюру поперечних сил та згинальних моментів (рис. В.20).
5. Розраховуємо мінімальний номер двотавру, що задовольняє умову міцності за нормальними, дотичними і еквівалентними напруженнями (рис. В.21).
6. Будуємо безпечний факторний простір для визначеного номеру двотавру (рис. В.22).
7. Порівнюємо факторні простори двотаврів (рис. В.23).
8. Задаємо положення перерізу балки для визначення прогину (рис. В.24).
9. Розраховуємо прогин балки в заданій точці (рис. В.25).

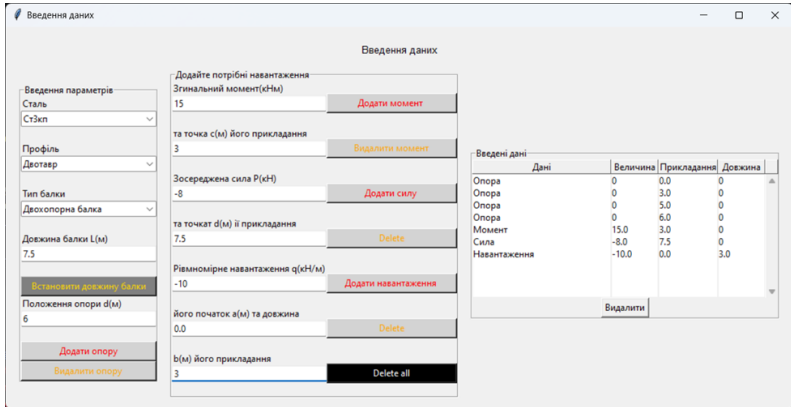


Рисунок В.17 – Введення початкових даних

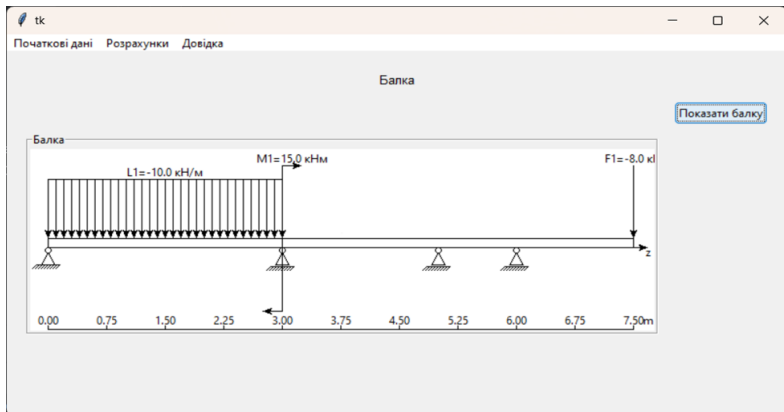


Рисунок В.18 – Схема даних для розрахунку

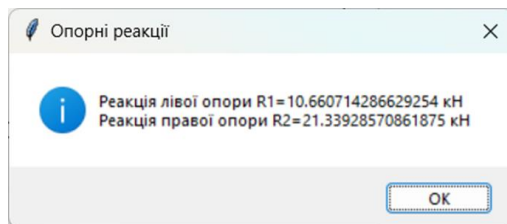


Рисунок В.19 – Опорні реакції з урахуванням статичної невизначеності

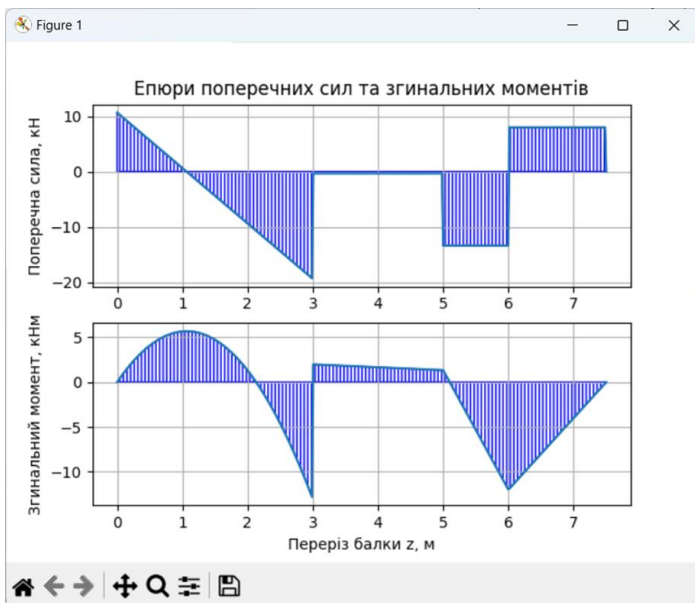


Рисунок В.20 – Епюри поперечних сил та згинальних моментів

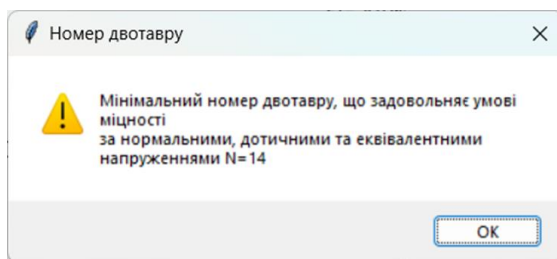


Рисунок В.21 – Визначення номера двотавру

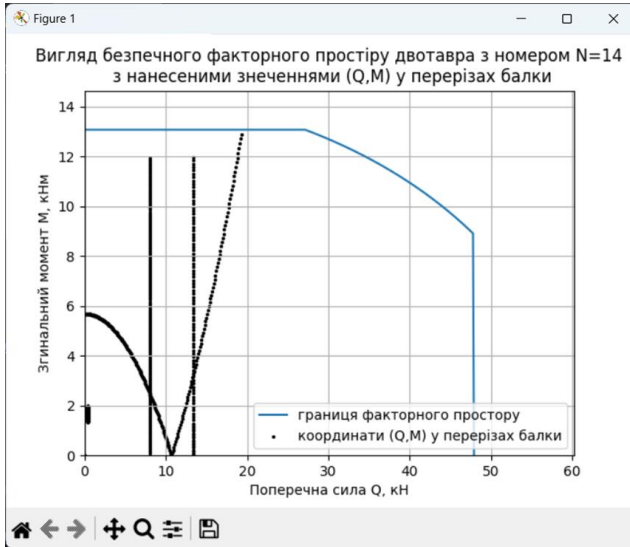


Рисунок В.22 – Безпечний факторний простір

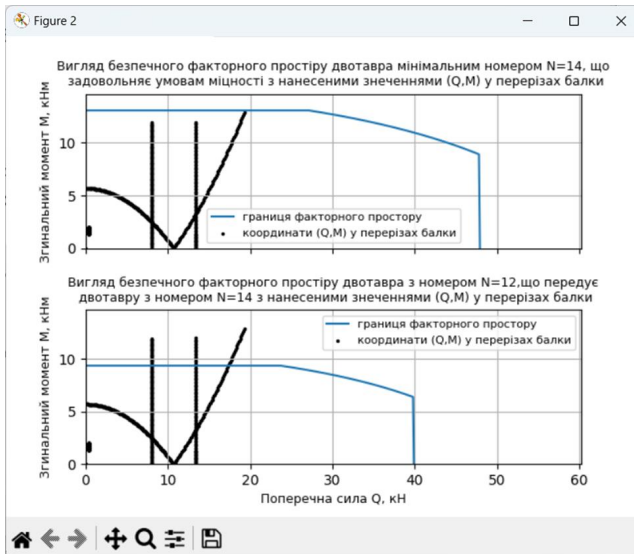
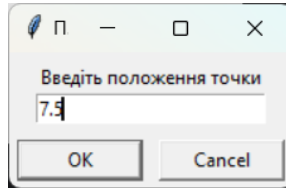
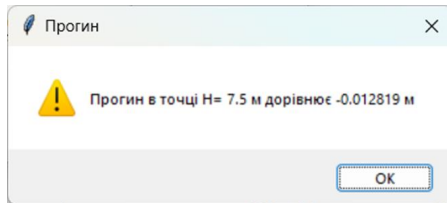


Рисунок В.23 – Порівняння безпечних факторних просторів двотаврів

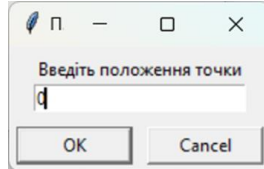


**Рисунок В.24** – Задання положення перерізу балки для визначення прогину



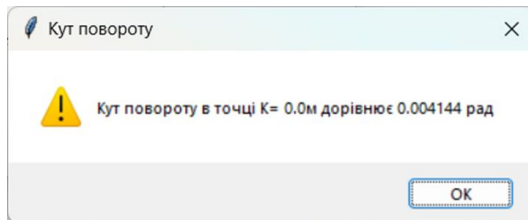
**Рисунок В.25** – Результат розрахунку прогину в заданій точці

10. Задаємо положення перерізу балки для визначення кута повороту перерізу балки (рис. В.26).



**Рисунок В.26** – Введення положення перерізу балки для розрахунку кута повороту

11. Визначаємо кут повороту в заданому перерізі (рис. В.27).



**Рисунок В.27** – Значення кута повороту балки в заданій точці

12. Будуємо графіки залежності прогину і кута повороту від перерізу балки (рис. В.28).

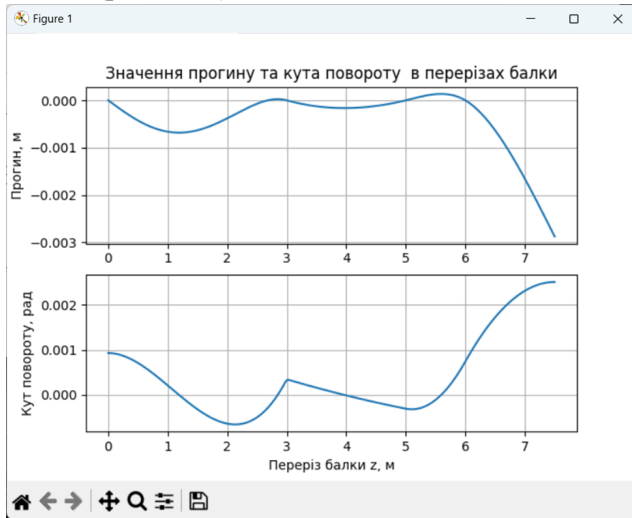


Рисунок В.28 – Значення прогину і кута повороту в перерізах балки

#### Приклад 4.7

Рішення задачі складається з наступних кроків:

1. Вводимо початкові дані (рис. В.29).
2. За введеними даними будуємо схему балки (рис. В.30).
3. Розраховуємо опорні реакції (рис. В.31).
4. Будуємо епюру поперечних сил та згинальних моментів (рис. В.32).
5. Розраховуємо мінімальний номер двотавру, що задовольняє умові міцності за нормальними, дотичними і еквівалентними напруженнями (рис. В.33).
6. Будуємо безпечний факторний простір для визначеного номеру двотавру (рис. В.34).
7. Порівнюємо факторні простори двотаврів (рис. В.35).
8. Задаємо положення перерізу балки для визначення прогину (рис. В.36).
9. Розраховуємо прогин балки в заданій точці (рис. В.37).

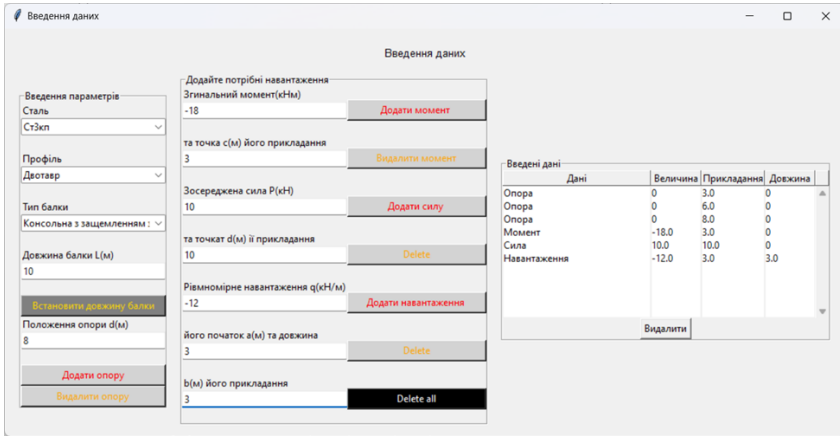


Рисунок В.29 – Введення початкових даних

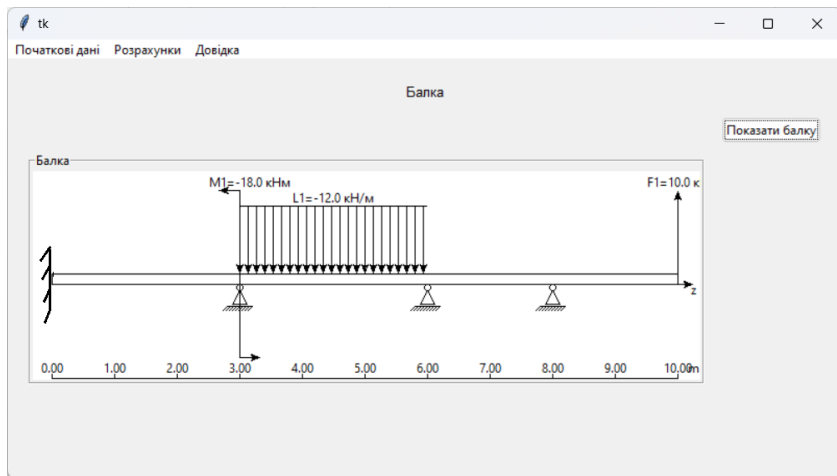


Рисунок В.30 – Схема даних для розрахунку

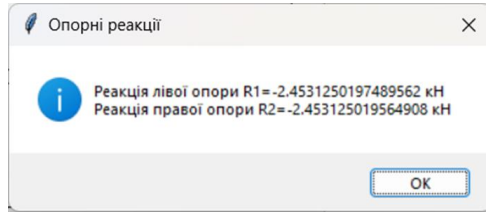


Рисунок В.31 – Опорні реакції з урахуванням статичної невизначеності

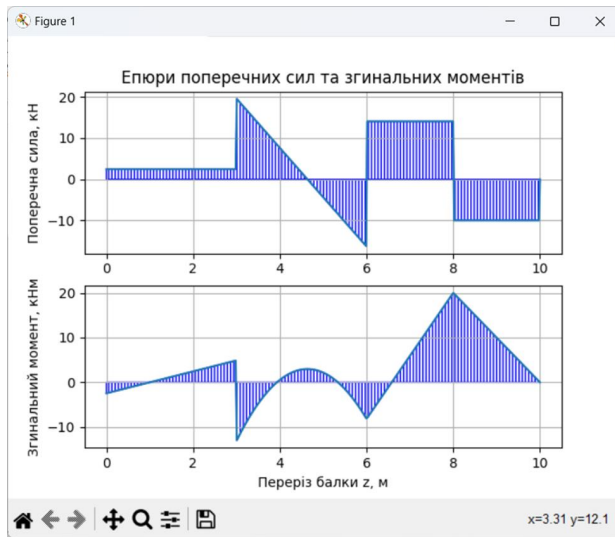


Рисунок В.32 – Епюри поперечних сил та згинальних моментів

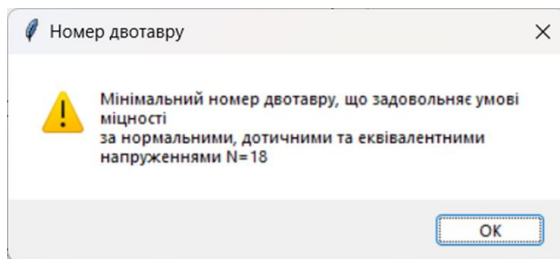


Рисунок В.33 – Визначення номера двотавру

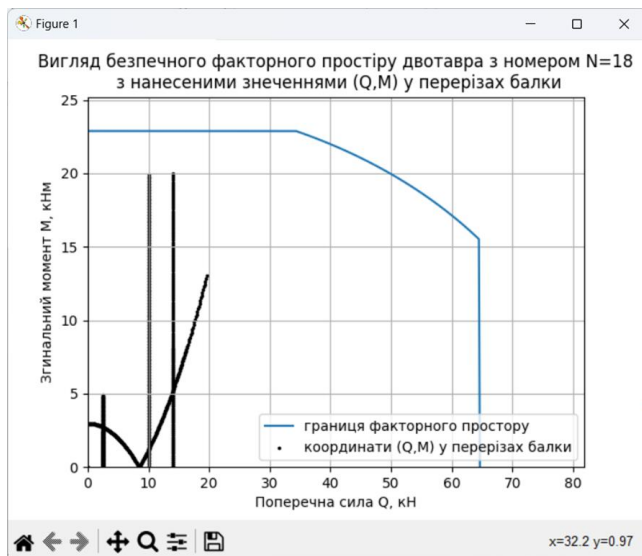


Рисунок В.34 – Безпечний факторний простір

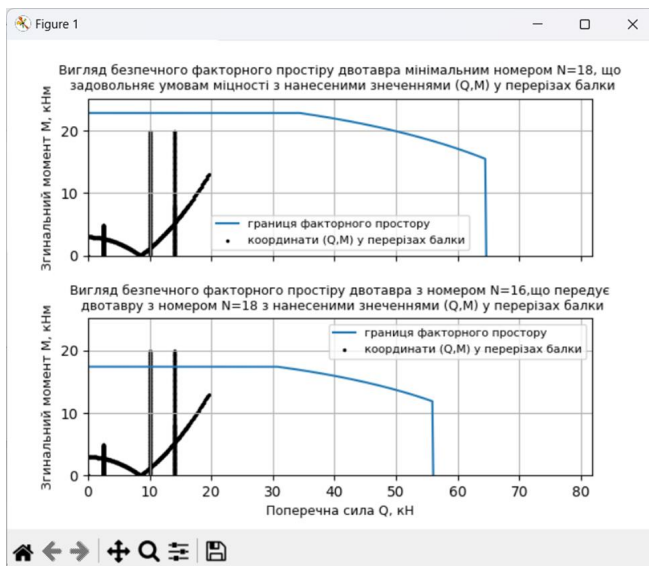
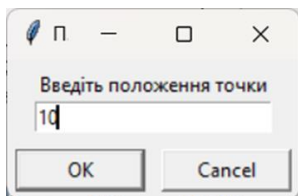
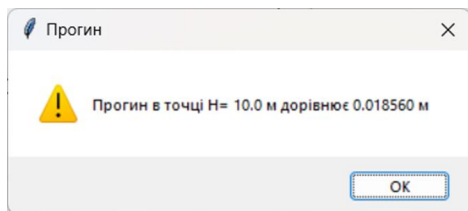


Рисунок В.35 – Порівняння безпечних факторних просторів двотаврів

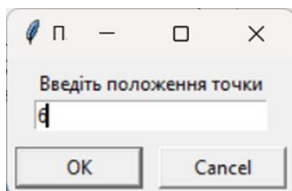


**Рисунок В.36** – Задання положення перерізу балки для визначення прогину



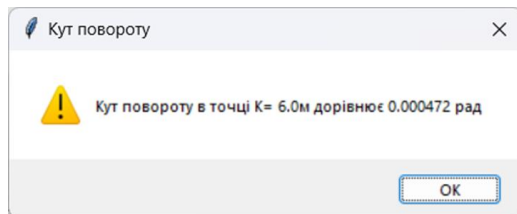
**Рисунок В.37** – Результат розрахунку прогину в заданій точці

10. Задаємо положення перерізу балки для визначення кута повороту перерізу балки (рис. В.38).



**Рисунок В.38** – Введення положення перерізу балки для розрахунку кута повороту

11. Визначаємо кут повороту в заданому перерізі (рис. В.39).



**Рисунок В.39** – Значення кута повороту балки в заданій точці

12. Будуємо графіки залежності прогину і кута повороту від перерізу балки (рис. В.40).

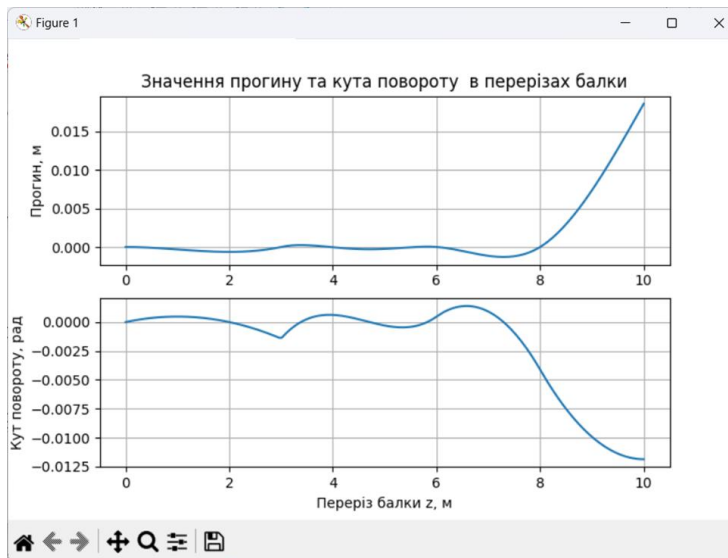


Рисунок В.40 – Значення прогину і кута повороту в перерізах балки

## Додаток Г

### Аналітичне розв'язання прикладів

#### Приклад 1

1. Зображуємо робочу схему балки і визначаємо її опорні реакції (рис. Г.1, а):

$$\sum m_A = -q \cdot 2 \cdot 1 - P \cdot 2 - M + R_B \cdot 3,4 = 0,$$

$$R_B = \frac{1}{3,4} \cdot (q \cdot 2 \cdot 1 + P \cdot 2 + M) = \frac{1}{3,4} \cdot (100 + 110 + 45) = 75 \text{ кН.}$$

$$\sum m_B = -R_A \cdot 3,4 + q \cdot 2 \cdot 2,4 + P \cdot 1,4 - M = 0,$$

$$R_A = \frac{1}{3,4} \cdot (q \cdot 2 \cdot 2,4 + P \cdot 1,4 - M) = \frac{1}{3,4} \cdot (240 + 77 - 45) = 80 \text{ кН.}$$

Перевірка:

$$\sum P_y = P_A - q \cdot 2 - P + R_B = 80 - 100 - 55 + 75 = -155 + 155 = 0,$$

тобто розрахунок виконано вірно.

2. Будуємо епюру поперечних сил (рис. Г.1, б):

$$Q_1 = R_A = 80 \text{ кН}; Q_2 = Q_1 - q \cdot 2 = 80 - 100 = -20 \text{ кН};$$

$$Q_3 = Q_2 - P = -20 - 55 = -75 \text{ кН}; Q_4 = Q_5 = Q_6 = Q_3 = -75 \text{ кН};$$

$$z_7 = Q_1 : q = 80 : 50 = 1,6 \text{ м.}$$

3. Будуємо епюру згинальних моментів (рис. Г.1, в):

$$M_1 = 0; M_2 = M_3 = R_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 160 - 100 = 60 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = R_A \cdot 2,8 - q \cdot 2 \cdot 1,8 - P \cdot 0,8 = 224 - 180 - 44 = 0;$$

$$M_5 = M_4 + M = 0 + 45 = 45 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_6 = 0;$$

$$M_7 = R_A \cdot z_7 - q \cdot z_7 \cdot \frac{z_7}{2} = 128 - 64 = 64 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

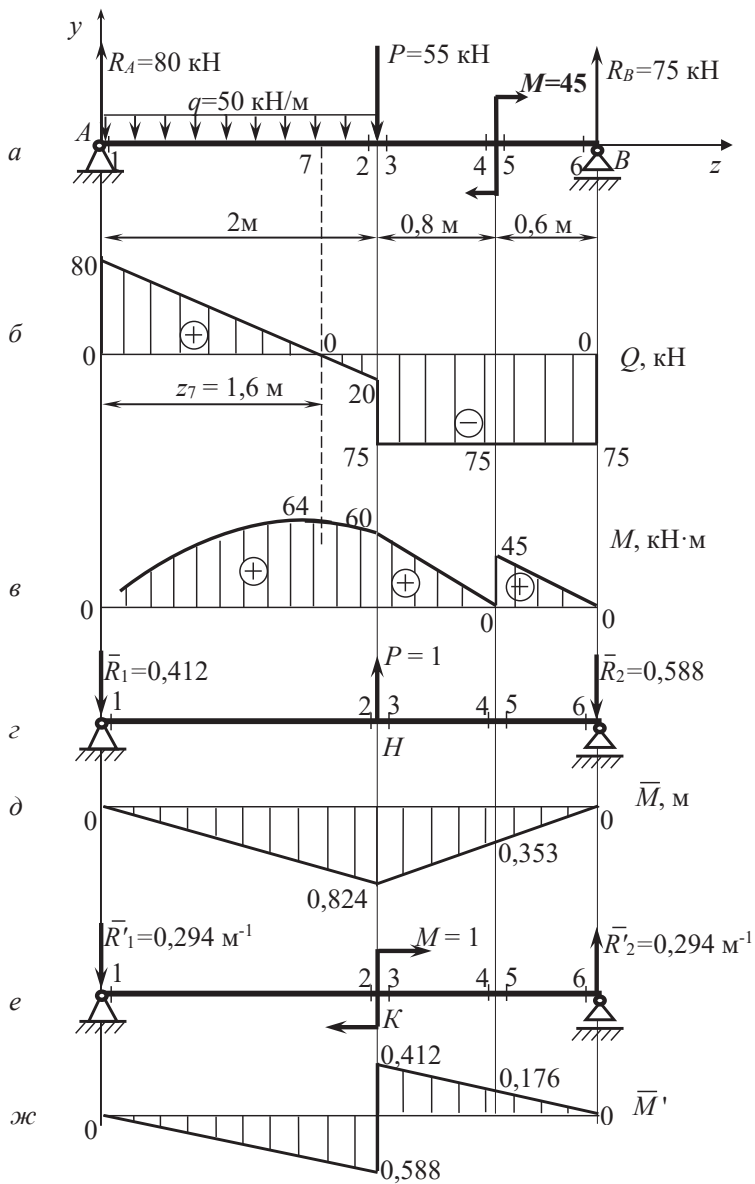


Рисунок Г.1 – Схема балки та епюри для прикладу 1

4. З умови міцності за нормальними напруженнями визначаємо потрібний осьовий момент опору перерізу балки, приймаючи для заданої марки сталі (Ст.3кп)  $[\sigma] = 157 \text{ МПа}$  (див. табл. А.5):

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{64 \cdot 10^3}{157} = 407,643 \text{ см}^3.$$

5. З відповідної таблиці сортаменту (табл. А.2) визначаємо потрібний номер двотавра і його основні параметри.

Приймаємо **двотавр 30**, у якого  $W_x = 472 \text{ см}^3$ ;  $J_x = 7080 \text{ см}^4$ ;  $S_x = 268 \text{ см}^3$ ;  $h = 300 \text{ мм}$ ;  $b = 135 \text{ мм}$ ;  $d = 6,5 \text{ мм}$ ;  $t = 10,2 \text{ мм}$ .

6. Перевіряємо міцність балки за дотичними напруженнями:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{d \cdot J_x} = \frac{80 \cdot 10^3 \cdot 268 \cdot 10^3}{6,5 \cdot 7080 \cdot 10^4} = 46,588 \text{ МПа};$$

$$[\tau] = [\tau]_{\text{III}} = \frac{1}{2} \cdot [\tau] = \frac{1}{2} \cdot 157 = 78,5 \text{ МПа}; \quad \tau_{\max} < [\tau],$$

міцність балки за дотичними напруженнями забезпечена.

7. Визначаємо місце дії в балці максимальних еквівалентних напружень.

Аналіз побудованих епюр дозволяє вважати небезпечним з точки зору еквівалентних напружень переріз 3, в якому величини  $Q$  і  $M$  мають хоча і не максимальні, але близькі до них значення:  $Q = 75 \text{ кН}$ ,  $M = 60 \text{ Кн} \cdot \text{м}$ .

У цьому перерізі згідно з пунктом 1.1:

$$\frac{M}{Q} = \frac{60 \cdot 10^6}{75 \cdot 10^3} = 800 \text{ мм},$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{M}{Q}\right)_{гр.} &= \frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot y_{ст.}} \cdot \sqrt{S_x^2 - \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_{ст.}^2\right)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{4}}{6,5 \cdot 139,8} \cdot \sqrt{\left(268 \cdot 10^3\right)^2 - \left(268 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot 139,8^2\right)^2} = 381 \text{ мм}, \end{aligned}$$

де  $y_{ст.} \equiv y_k = \frac{h}{2} - t = \frac{300}{2} - 10,2 = 139,8$  мм – ордината стику полиці профілю з його стінкою (рис. 1.7).

$$\frac{M}{Q} > \left(\frac{M}{Q}\right)_{гр.}$$

Таким чином, небезпечними місцями перерізу 3, в яких може порушуватись умова міцності за еквівалентними напруженнями, є місця стику полиць двотавра з його стінкою.

Нормальні напруження в цих місцях перерізу 3 складають:

$$\sigma_{ст.} = \frac{M}{J_x} \cdot y_{ст.} = \frac{60 \cdot 10^6}{7080 \cdot 10^4} \cdot 139,8 = 118,745 \text{ МПа.}$$

Дотичні напруження в них:

$$\begin{aligned} \tau_{ст.} &= \frac{Q}{d \cdot J_x} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_{ст.}^2\right) = \frac{75 \cdot 10^3}{6,5 \cdot 7080 \cdot 10^4} \times \\ &\times \left(268 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot 139,8^2\right) = 33,325 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Тоді:

$$\sigma_{ст.}^{екв} = \sqrt{\sigma_{ст.}^2 + 4 \cdot \tau_{ст.}^2} = \sqrt{118,745^2 + 4 \cdot 33,325^2} = 136,171 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Таким чином, і за еквівалентними напруженнями міцність балки є забезпеченою.

8. Для визначення прогину балки в точці  $H$  (див. рис. Г.1, а) прикладаємо в цій точці одиничну силу  $P=1$  (рис. Г.1, з), визначаємо від неї опорні реакції і будуємо епюру  $\bar{M}$  (рис. Г.1, д):

$$\sum m_A = P \cdot 2 - \bar{R}_2 \cdot 3,4 = 0; \quad \bar{R}_2 = \frac{P \cdot 2}{3,4} = \frac{1 \cdot 2}{3,4} = 0,588;$$

$$\sum m_B = \bar{R}_1 \cdot 3,4 - P \cdot 1,4 = 0; \quad \bar{R}_1 = \frac{P \cdot 1,4}{3,4} = \frac{1 \cdot 1,4}{3,4} = 0,412.$$

$$\sum P_y = P - \bar{R}_1 - \bar{R}_2 = 1 - 0,412 - 0,588 = 0.$$

Реакції визначені правильно.

Епюра  $\bar{M}$ :

$$\bar{M}_1 = 0; \quad \bar{M}_2 = \bar{M}_3 = -\bar{R}_1 \cdot 2 = -0,412 \cdot 2 = -0,824 \text{ м};$$

$$\bar{M}_4 = \bar{M}_5 = -\bar{R}_2 \cdot 0,6 = -0,588 \cdot 0,6 = -0,353 \text{ м}; \quad \bar{M}_6 = 0.$$

9. Значення прогину балки в точці  $H$  визначаємо, «перемножуючи» епюри  $M$  (рис. Г.1, в) і  $\bar{M}$  (рис. Г.1, д) за формулою крайніх ординат (додаток Б):

$$\begin{aligned} \delta_H = M \times \bar{M} &= \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (-2 \cdot 60 \cdot 0,824) + \frac{0,8}{6E \cdot J_x} \cdot (-2 \cdot 60 \cdot 0,824 - 60 \cdot 0,353) + \\ &+ \frac{0,6}{6E \cdot J_x} \cdot (-2 \cdot 45 \cdot 0,353) + \frac{50 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (0 - 0,824) = -\frac{395,270}{6E \cdot J_x} = \\ &= -\frac{395,270 \cdot 10^{12}}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 7080 \cdot 10^4} = -4,652 \text{ мм}. \end{aligned}$$

10. Для визначення кута повороту перерізу  $K$  балки (див. рис. Г.1, а) прикладаємо в цьому місці одиничний момент  $M = 1$ , визначаємо від нього опорні реакції балки (рис. Г.1, е) і будуємо епюру  $\bar{M}'$  (рис. Г.1, ж).

У цьому разі реакції балки створюють пару сил, яка протидіє одиничному моменту (рис. Г.1, е). З умови рівноваги пари сил [15]:

$$m(R'_1; \bar{R}'_2) - M = 0; \quad m(\bar{R}'_1; \bar{R}'_2) = M = 1; \quad \bar{R}'_1 = \bar{R}'_2 = \frac{1}{3,4} = 0,294 \text{ м}^{-1},$$

де 3,4 – відстань між опорами балки, м.

Епюра  $\bar{M}'$  :

$$\bar{M}'_1 = 0; \quad \bar{M}'_2 = -\bar{R}'_1 \cdot 2 = -0,294 \cdot 2 = -0,588;$$

$$\bar{M}'_3 = \bar{R}'_2 \cdot 1,4 = 0,294 \cdot 1,4 = 0,412;$$

$$\bar{M}'_4 = \bar{M}'_5 = \bar{R}'_2 \cdot 0,6 = 0,294 \cdot 0,6 = 0,176; \quad \bar{M}'_6 = 0.$$

11. Значення кута повороту перерізу  $K$  балки визначаємо, «перемножуючи» епюри  $M$  (рис. Г.1, *в*) і  $\bar{M}'$  (рис. Г.1, *ж*) за формулою крайніх ординат (додаток Б):

$$\begin{aligned} \theta_K = M \times \bar{M}' &= \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (-2 \cdot 60 \cdot 0,588) + \frac{0,8}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 60 \cdot 0,412 + 60 \cdot 0,176) + \\ &+ \frac{0,6}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 45 \cdot 0,176) + \frac{50 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (0 - 0,588) = -\frac{142,416}{6E \cdot J_x} = \\ &= -\frac{142,416 \cdot 10^9}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 7080 \cdot 10^4} = -1,676 \cdot 10^{-3} \text{ рад.} = -0,096 \text{ град.} \end{aligned}$$

Обидва переміщення виявилися від'ємними. Це означає, що вони спрямовані протилежно прийнятим напрямкам  $P = 1$  і  $M = 1$ .

## Приклад 4.2

1. Зображуємо робочу схему балки (рис. Г.2, *а*).

2. У аналітичних розрахунках статично визначуваних консольних балок на міцність і жорсткість опорні реакції зазвичай не знаходять, будуючи епюри  $Q$  і  $M$  в напрямку від свобідного кінця балки до жорсткого кріплення. Тому і ми в даному прикладі не відходимо від такої традиції.

3. Будуємо епюру поперечних сил у напрямку справа наліво (рис. Г.2, *б*):

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = P = 18 \text{ кН}; \quad Q_4 = Q_3 - q \cdot 2 = 18 - 10 \cdot 2 = -2 \text{ кН};$$

$$l_3 = \frac{|Q_4|}{q} = \frac{2}{10} = 0,2 \text{ м.}$$

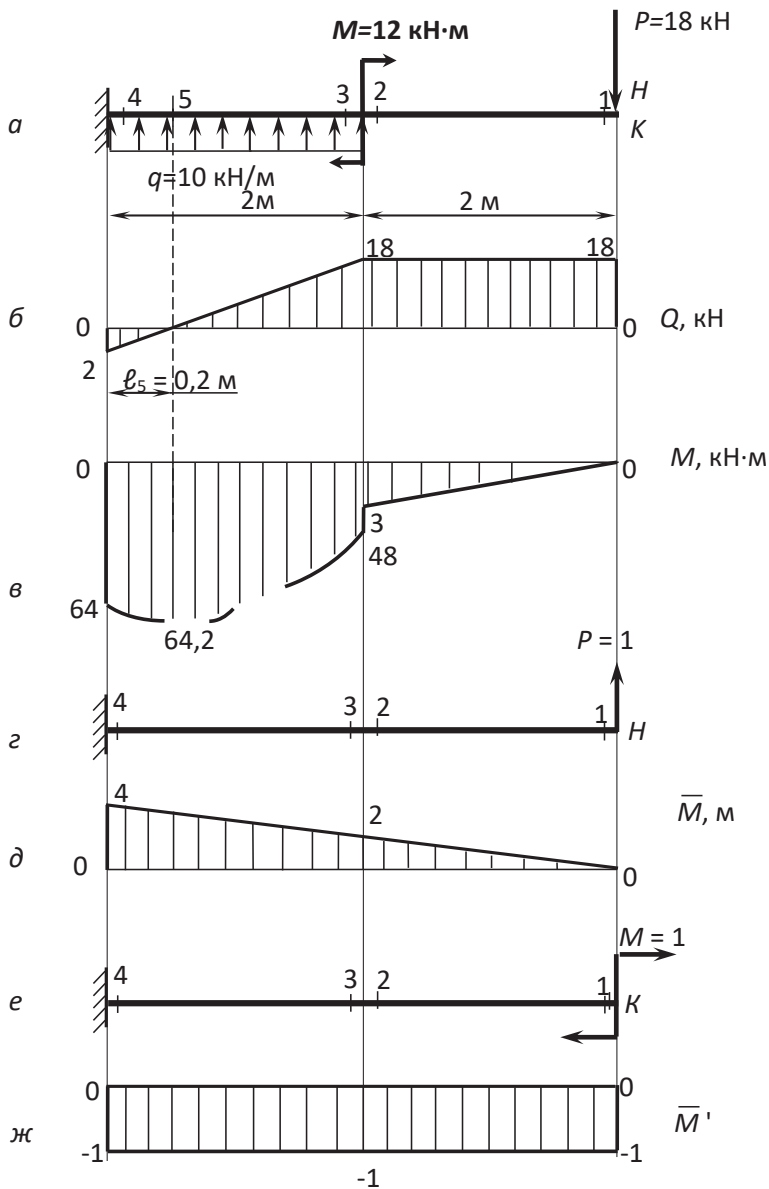


Рисунок Г.2 – Схема балки та епюри для прикладу 2

4. Аналогічно будуюмо епюру згинальних моментів (рис. Г.2, в):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = -P \cdot 2 = -18 \cdot 2 = -36 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_3 = -P \cdot 2 - M = -18 \cdot 2 - 12 = -48 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = -P \cdot 4 - M + q \cdot 2 \cdot 1 = -18 \cdot 4 - 12 + 10 \cdot 2 \cdot 1 = -64 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = -P \cdot (4 - l_5) - M + q \cdot (2 - l_5) \cdot 0,5 \cdot (2 - l_5) = \\ = -18 \cdot 3,8 - 12 + 10 \cdot 1,8 \cdot 0,9 = -68,4 - 12 + 16,2 = -64,2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5.3 умови міцності за нормальними напруженнями визначаємо потрібний момент опору перерізу балки, приймаючи для заданої марки сталі (Ст.4пс)  $[\sigma] = 177 \text{ МПа}$  (табл. А.5):

$$W_x \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{64,2 \cdot 10^3}{177} = 362,712 \text{ см}^3.$$

6.3 відповідної таблиці сортаменту (табл. А.3) визначаємо потрібний номер швелера і його основні параметри.

Приймаємо **швелер 30**, у якого  $W_x = 387 \text{ см}^3$ ;  $J_x = 5810 \text{ см}^4$ ;  $S_x = 224 \text{ см}^3$ ;  $h = 300 \text{ мм}$ ;  $b = 100 \text{ мм}$ ;  $d = 6,5 \text{ мм}$ ;  $t = 11,0 \text{ мм}$ .

7. Перевіряємо міцність балки за дотичними напруженнями:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{d \cdot J_x} = \frac{18 \cdot 10^3 \cdot 224 \cdot 10^3}{6,5 \cdot 5810 \cdot 10^4} = 10,677 \text{ МПа};$$

$$[\tau] = [\tau]_{\text{III}} = \frac{1}{2} \cdot [\sigma] = \frac{1}{2} \cdot 177 = 88,5 \text{ МПа}; \quad \tau_{\max} < [\tau].$$

Умова виконується.

8.3 аналізу епюр  $Q$  і  $M$  витікає, що потенційно небезпечними з умови міцності за еквівалентними напруженнями є перерізи 3 і 4 (рис. Г.2, б і рис. Г.2, в).

Згідно з пунктом 1.1 в перерізі 3 маємо:

$$\frac{M}{Q} = \frac{48 \cdot 10^6}{18 \cdot 10^3} = 2667 \text{ мм},$$

в перерізі 4:

$$\frac{M}{Q} = \frac{64 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^3} = 32\,000 \text{ мм}.$$

Граничне значення цього відношення для обох перерізів становить:

$$\begin{aligned} \left(\frac{M}{Q}\right)_{\text{гр.}} &= \frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot y_{CT}} \cdot \sqrt{S_x^2 - \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_{CT}^2\right)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{4}}{6,5 \cdot 139} \cdot \sqrt{(224 \cdot 10^3)^2 - \left(224 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot 139^2\right)^2} = 344 \text{ мм}, \end{aligned}$$

Як бачимо, в обох перерізах  $\frac{M}{Q} > \left(\frac{M}{Q}\right)_{\text{гр.}}$ . Це вказує на те, що найбільші еквівалентні напруження в цих перерізах діють в місцях стику полиць і стінки швелера. З'ясуємо, в якому перерізі вони більші.

**У перерізі 3:**

$$\sigma_{CT} = \frac{M}{J_x} \cdot y_{CT} = \frac{M}{J_x} \cdot \left(\frac{h}{2} - t\right) = \frac{48 \cdot 10^6}{5810 \cdot 10^4} \cdot (150 - 11,0) = 114,836 \text{ МПа},$$

$$\begin{aligned} \tau_{CT} &= \frac{Q}{d \cdot J_x} \cdot \left(S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_{CT}^2\right) = \frac{18 \cdot 10^3}{6,5 \cdot 5810 \cdot 10^4} \times \\ &\times \left(224 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot 139,0^2\right) = 7,684 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{CT}^{\text{екв}} = \sqrt{\sigma_{CT}^2 + 4 \cdot \tau_{CT}^2} = \sqrt{114,836^2 + 4 \cdot 7,684^2} = 115,860 \text{ МПа}.$$

#### У перерізі 4:

$$\sigma_{CT} = \frac{M}{J_x} \cdot y_{CT} = \frac{M}{J_x} \cdot \left( \frac{h}{2} - t \right) = \frac{64 \cdot 10^6}{5810 \cdot 10^4} \cdot (150 - 11,0) = 153,115 \text{ МПа},$$

$$\tau_{CT} = \frac{Q}{d \cdot J_x} \cdot \left( S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_{CT}^2 \right) = \frac{2 \cdot 10^3}{6,5 \cdot 5810 \cdot 10^4} \times$$
$$\times \left( 224 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} \cdot 6,5 \cdot 139,0^2 \right) = 0,854 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{CT}^{екв} = \sqrt{\sigma_{CT}^2 + 4 \cdot \tau_{CT}^2} = \sqrt{153,115^2 + 4 \cdot 0,854^2} = 153,125 \text{ МПа}.$$

Порівнюючи отримані результати, бачимо, що еквівалентні напруження в небезпечних місцях перерізу 4 більші, ніж у перерізі 3, тож вони і є максимальними для балки в цілому:  $\sigma_{\max}^{екв} = 153,125 \text{ МПа}$ . Таким чином, умова міцності балки за еквівалентними напруженнями також виконується, бо  $\sigma_{\max}^{екв} < [\sigma]$ .

9. Для визначення прогину балки в точці  $H$  (рис. Г.2, а) прикладаємо в ній одиничну силу  $P=1$  (рис. Г.2, з) і будуємо епюру  $\bar{M}$  (рис. Г.2, д):

$$\bar{M}_1 = 0; \quad \bar{M}_2 = \bar{M}_3 = P \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ м}; \quad \bar{M}_4 = P \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4 \text{ м}.$$

10. Значення прогину балки в точці  $H$  визначаємо, «перемножуючи» епюри  $M$  (рис. Г.2, в) і  $\bar{M}$  (рис. Г.2, д) за формулою крайніх ординат (додаток Б):

$$\delta_H = M \times \bar{M} = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (-2 \cdot 64 \cdot 4 - 2 \cdot 48 \cdot 2 - 64 \cdot 2 - 48 \cdot 4) +$$
$$+ \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (-2 \cdot 36 \cdot 2) - \frac{10 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (4 + 2) = -\frac{2456}{6E \cdot J_x} =$$
$$= -\frac{2456 \cdot 10^{12}}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5810 \cdot 10^4} = -35,227 \text{ мм}.$$

Прогин спрямований проти прийнятого напрямку одиничної сили.

11. Для визначення кута повороту перерізу  $K$  балки (рис. Г.2, *a*) прикладаємо в цьому місці одиничний момент  $M=1$  (рис. Г.2, *e*) і будуємо епюру  $\bar{M}'$  (рис. Г.2, *ж*):

$$\bar{M}'_1 = \bar{M}'_2 = \bar{M}'_3 = \bar{M}'_4 = M = -1.$$

12. Значення кута повороту перерізу  $K$  балки визначаємо, «перемножуючи» епюри  $M$  (рис. Г.2, *e*) і  $\bar{M}'$  (рис. Г.2, *ж*) за формулою крайніх ординат (додаток Б):

$$\begin{aligned}\theta_K &= M \times \bar{M}' = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 64 \cdot 1 + 2 \cdot 48 \cdot 1 + 64 \cdot 1 + 48 \cdot 1) + \\ &+ \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 36 \cdot 1 + 36 \cdot 1) - \frac{10 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (-1 - 1) = \\ &= \frac{928}{6E \cdot J_x} = \frac{928 \cdot 10^9}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 5810 \cdot 10^4} = 13,310 \cdot 10^{-3} \text{ рад.} = 0,763 \text{ град.}\end{aligned}$$

Поворот спрямований за прийнятим напрямком одиничного моменту.

### Приклад 4.3

У цьому прикладі хід розрахунку такий же, як і в попередньому. Його числові відмінності обумовлені лише іншою формою профілю балки. Отже:

1...5. – повторення відповідних пунктів прикладу 4.2.

6. Визначаємо потрібний номер здвоєних швелерів, що створюють переріз, та їх необхідні параметри.

З огляду на значення  $W_x \geq 362,712 \text{ см}^3$  (див. пункт 5) приймаємо **швелери 22**, у яких згідно з таблицею А.3  $W'_x = 192 \text{ см}^3$ ;

$J'_x = 2110 \text{ см}^4$ ;  $S'_x = 110 \text{ см}^3$ ;  $h'_x = 220 \text{ мм}$ ;  $b'_x = 82 \text{ мм}$ ;  $d'_x = 5,4 \text{ мм}$ ;  $t'_x = 9,4 \text{ мм}$ .

На підставі цього для всього перерізу згідно з виразами (2.22) отримаємо:

$W_x = 2 \cdot W'_x = 2 \cdot 192 = 384 \text{ см}^3$ ;  $J_x = 2 \cdot J'_x = 2 \cdot 2110 = 4220 \text{ см}^4$ ;  
 $S_x = 2 \cdot S'_x = 2 \cdot 110 = 220 \text{ см}^3$ ;  $h = h' = 220 \text{ мм}$ ;  $b = 2 \cdot b' = 2 \cdot 82 = 164 \text{ мм}$ ;  
 $d = 2 \cdot d' = 2 \cdot 5,4 = 10,8 \text{ мм}$ ;  $t = t' = 9,5 \text{ мм}$ .

7. Перевіряємо міцність балки за дотичними напруженнями:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{d \cdot J_x} = \frac{18 \cdot 10^3 \cdot 220 \cdot 10^3}{10,8 \cdot 4220 \cdot 10^4} = 8,689 \text{ МПа};$$

$$[\tau] = [\tau]_{\text{III}} = \frac{1}{2} \cdot [\sigma] = \frac{1}{2} \cdot 177 = 88,5 \text{ МПа}; \quad \tau_{\max} < [\tau],$$

умова виконується.

8. Перевіряємо міцність балки за еквівалентними напруженнями.

У попередньому прикладі встановлено, що найбільші еквівалентні напруження діють у місцях стику полиць одиночного швелера з його стінкою в перерізі 4 заданої балки. Те саме маємо і для здвоєних двотаврів, у чому легко пересвідчитись, виконавши дії відповідного пункту попереднього прикладу.

Цього разу нормальні напруження в зазначених місцях складають:

$$\sigma_{ст.} = \frac{M}{J_x} \cdot y_{ст} = \frac{M}{J_x} \cdot \left( \frac{h}{2} - t \right) = \frac{64 \cdot 10^6}{4220 \cdot 10^4} \cdot (110 - 9,5) = 152,417 \text{ МПа}.$$

Дотичні напруження в цих місцях:

$$\tau_{ст.} = \frac{Q}{d \cdot J_x} \cdot \left( S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_{ст}^2 \right) = \frac{2 \cdot 10^3}{10,8 \cdot 4220 \cdot 10^4} \times$$

$$\times \left( 220 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} \cdot 10,8 \cdot 100,5^2 \right) = 0,726 \text{ МПа}.$$

Еквівалентні напруження:

$$\sigma_{CT.}^{екв} = \sqrt{\sigma_{CT.}^2 + 4 \cdot \tau_{CT.}^2} = \sqrt{152,417^2 + 4 \cdot 0,726^2} = 152,424 \text{ МПа.}$$

Таким чином,  $\sigma_{\max}^{екв} = 152,424 \text{ МПа}$  і умова міцності за еквівалентними напруженнями виконується, бо  $\sigma_{\max}^{екв} < [\sigma]$ .

9. Повторення відповідного пункту прикладу 2.2.

10. За аналогією з прикладом 2.2 визначаємо прогин балки в точці  $H$ :

$$\delta_H = M \times \bar{M} = \dots = -\frac{2456}{6E \cdot J_x} = -\frac{2456 \cdot 10^{12}}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4220 \cdot 10^4} = -48,499 \text{ мм.}$$

Прогин спрямований проти прийнятого напрямку одиничної сили.

11. Повторення відповідного пункту прикладу 2.2.

12. За аналогією з прикладом 2.2 визначаємо кут повороту перерізу  $K$ :

$$\begin{aligned} \theta_K = M \times \bar{M}' = \dots &= \frac{928}{6E \cdot J_x} = \frac{928 \cdot 10^9}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 4220 \cdot 10^4} = \\ &= 18,325 \cdot 10^{-3} \text{ рад.} = 1,050 \text{ град.} \end{aligned}$$

Поворот спрямований за прийнятим напрямком одиничного моменту.

#### Приклад 4.4

1. Зображуємо робочу схему балки (рис. Г.3, а).

2. Як і в прикладах 4.2 і 4.3, опорні реакції не знаходимо.

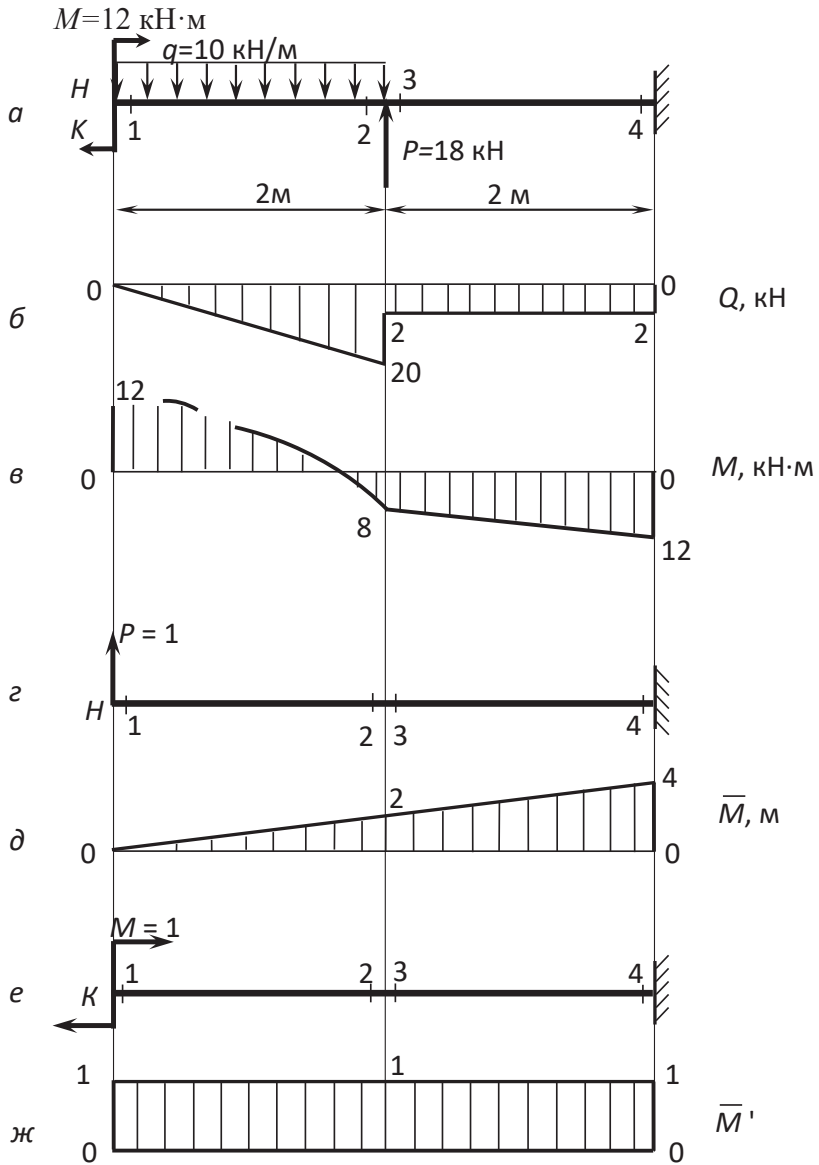


Рисунок Г.3 – Схема балки та епюри для прикладу 4

3. Будуємо епюру поперечних сил, рухаючись від свобідного кінця балки в бік жорсткого кріплення, тобто зліва направо (рис. Г.3, б):

$$Q_1 = 0; \quad Q_2 = Q_1 - q \cdot 2 = 0 - 10 \cdot 2 = -20 \text{ кН};$$

$$Q_3 = Q_2 + P = -20 + 18 = -2 \text{ кН}; \quad Q_4 = Q_3 = -2 \text{ кН}.$$

4. Аналогічно будуємо епюру згинальних моментів (рис. Г.3, в):

$$M_1 = M = 12 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_2 = M_3 = M - q \cdot 2 = 12 - 10 \cdot 2 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = M - q \cdot 2 \cdot 3 + P \cdot 2 = 12 - 10 \cdot 2 \cdot 3 + 18 \cdot 2 = -12 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

5. З умови міцності за нормальними напруженнями визначаємо потрібний момент опору перерізу балки, приймаючи для заданої марки сталі (Ст.5сп)  $[\sigma] = 190 \text{ МПа}$  (табл. А.5):

$$W_x \geq \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{12 \cdot 10^3}{190} = 63,158 \text{ м}^3.$$

6. З відповідної таблиці сортаменту (див. табл. А.4) визначаємо потрібний профіль і його основні параметри.

Приймаємо **профіль замкнутий прямокутний  $160 \times 80 \times 4$** , у якого  $W_x = 74,71 \text{ см}^3$ ;  $J_x = 597,6 \text{ см}^4$ ;  $S_x = 48,06 \text{ см}^3$ ;  $h = 160 \text{ мм}$ ;  $b = 80 \text{ мм}$ ;  $t = 4 \text{ мм}$ ;  $R = 8 \text{ мм}$ ;  $d = 2t = 8 \text{ мм}$  (розрахунковий параметр).

7. Перевіряємо умову міцності за дотичними напруженнями:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_x}{d \cdot J_x} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 48,06 \cdot 10^3}{8 \cdot 597,6 \cdot 10^4} = 20,105 \text{ МПа};$$

$$[\tau] = [\tau]_{\text{III}} = \frac{1}{2} \cdot [\sigma] = \frac{1}{2} \cdot 190 = 95 \text{ МПа}; \quad \tau_{\max} < [\tau].$$

Ця умова виконується.

8.3 аналізу епюр  $Q$  і  $M$  витікає, що потенційно небезпечними з умови міцності за еквівалентними напруженнями є перерізи 2 і 4 (рис. Г.3, б і рис. Г.3, в).

Згідно з пунктом 1.1 у перерізі 2 маємо:

$$\frac{M}{Q} = \frac{8 \cdot 10^6}{20 \cdot 10^3} = 400 \text{ мм},$$

у перерізі 4:

$$\frac{M}{Q} = \frac{12 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^3} = 6000 \text{ мм}.$$

Граничне значення цього відношення для обох перерізів становить:

$$\begin{aligned} \left( \frac{M}{Q} \right)_{гр.} &= \frac{\sqrt{\alpha}}{d \cdot y_{ст.}} \cdot \sqrt{S_x^2 - \left( S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_{ст.}^2 \right)^2} = \\ &= \frac{\sqrt{4}}{8 \cdot 76} \cdot \sqrt{\left( 48,06 \cdot 10^3 \right)^2 - \left( 48,06 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 76^2 \right)^2} = 135 \text{ мм}, \end{aligned}$$

де  $y_{ст.} \equiv y_k = \frac{h}{2} - t = \frac{160}{2} - 4 = 76 \text{ мм}$  (рис. 2.6).

Як бачимо, в обох перерізах  $\frac{M}{Q} = \left( \frac{M}{Q} \right)_{гр.}$ . Це вказує на те, що найбільші еквівалентні напруження в цих перерізах діють на стиках умовних полиць профілю з його умовною стінкою (див. рис. 2.6). З'ясуємо, в якому перерізі вони більші.

### У перерізі 2:

Нормальні напруження на рівні зазначеного стику складають:

$$\sigma_{ст.} = \frac{M}{J_x} \cdot y_{ст.} = \frac{8 \cdot 10^6}{597,6 \cdot 10^4} \cdot 76 = 101,740 \text{ МПа}.$$

Дотичні напруження на цьому рівні:

$$\begin{aligned}\tau_{CT.} &= \frac{Q}{d \cdot J_x} \cdot \left( S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_{CT.}^2 \right) = \frac{20 \cdot 10^3}{8 \cdot 597,6 \cdot 10^4} \times \\ &\times \left( 48,06 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 76^2 \right) = 10,440 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Тоді:

$$\sigma_{CT.}^{екв.} = \sqrt{\sigma_{CT.}^2 + 4 \cdot \tau_{CT.}^2} = \sqrt{101,740^2 + 4 \cdot 10,440^2} = 103,860 \text{ МПа.}$$

#### У перерізі 4:

Нормальні напруження на зазначеному рівні складають:

$$\sigma_{CT.} = \frac{M}{J_x} \cdot y_{CT.} = \frac{12 \cdot 10^6}{597,6 \cdot 10^4} \cdot 76 = 152,610 \text{ МПа.}$$

Дотичні напруження на цьому рівні:

$$\begin{aligned}\tau_{CT.} &= \frac{Q}{d \cdot J_x} \cdot \left( S_x - \frac{1}{2} \cdot d \cdot y_{CT.}^2 \right) = \frac{2 \cdot 10^3}{8 \cdot 597,6 \cdot 10^4} \times \\ &\times \left( 48,06 \cdot 10^3 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 76^2 \right) = 1,044 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

Тоді:

$$\sigma_{CT.}^{екв.} = \sqrt{\sigma_{CT.}^2 + 4 \cdot \tau_{CT.}^2} = \sqrt{152,610^2 + 4 \cdot 1,044^2} = 152,624 \text{ МПа.}$$

Порівнюючи отримані результати, бачимо, що еквівалентні напруження в небезпечних місцях перерізу 4 більші, ніж у перерізі 2, тож вони і є максимальними для балки в цілому:  $\sigma_{\max}^{екв} = 152,624 \text{ МПа}$ . Таким чином, і ця умова виконується, бо  $\sigma_{\max}^{екв} < [\sigma]$ .

9. Для визначення прогину балки в точці  $H$  (рис. Г.3,  $a$ ) прикладаємо в цій точці одиничну силу  $P=1$  (рис. Г.3,  $z$ ) і будуємо епюру  $\bar{M}$  (рис. Г.3,  $d$ ):

$$\bar{M}_1 = 0; \quad \bar{M}_2 = \bar{M}_3 = P \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad \bar{M}_4 = P \cdot 4 = 1 \cdot 4 = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

10. Значення прогину балки в точці  $H$  визначаємо, «перемножуючи» епюри  $M$  (рис. Г.3,  $b$ ) і  $\bar{M}$  (рис. Г.3,  $d$ ) за формулою крайніх ординат (додаток Б):

$$\begin{aligned} \delta_H &= \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (-2 \cdot 8 \cdot 2 + 12 \cdot 2) + \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (-2 \cdot 8 \cdot 2 - 2 \cdot 12 \cdot 4 - 8 \cdot 4 - 12 \cdot 2) + \\ &+ \frac{10 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (0 + 2) = -\frac{344}{6E \cdot J_x} = -\frac{344 \cdot 10^{12}}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 597,6 \cdot 10^4} = -47,970 \text{ мм}. \end{aligned}$$

11. Для визначення кута повороту перерізу  $K$  балки (рис. Г.3,  $a$ ) прикладаємо в цьому місці одиничний момент  $M=1$  (рис. Г.3,  $e$ ) і будуємо епюру  $\bar{M}'$  (рис. Г.3,  $ж$ ):

$$\bar{M}'_1 = \bar{M}'_2 = \bar{M}'_3 = \bar{M}'_4 = M = 1.$$

12. Значення кута повороту перерізу  $K$  балки визначаємо, «перемножуючи» епюри  $M$  (рис. Г.3,  $b$ ) і  $\bar{M}'$  (рис. Г.3,  $ж$ ) за формулою крайніх ординат (додаток Б):

$$\begin{aligned} \theta_K &= M \times \bar{M}' = \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (2 \cdot 12 \cdot 1 - 2 \cdot 8 \cdot 1 + 12 \cdot 1 - 8 \cdot 1) + \\ &+ \frac{2}{6E \cdot J_x} \cdot (-2 \cdot 8 \cdot 1 - 2 \cdot 12 \cdot 1 - 8 \cdot 1 - 12 \cdot 1) + \frac{10 \cdot 2^3}{24E \cdot J_x} \cdot (1 + 1) = \\ &= -\frac{56}{6E \cdot J_x} = -\frac{56 \cdot 10^9}{6 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 597,6 \cdot 10^4} = -7,809 \cdot 10^{-3} \text{ рад.} = -0,447 \text{ град.} \end{aligned}$$

Обидва переміщення виявилися від'ємними. Це означає, що вони спрямовані протилежно прийнятим напрямкам  $P=1$  і  $M=1$ .

*Навчальне видання*

**ХОЛОДНЯК** Юрій Сергійович  
**КОСТИКОВ** Олександр Анатолійович  
**САГАЙДА** Павло Іванович  
**КАСЬЯНЮК** Олександр Сергійович

## **АВТОМАТИЗАЦІЯ РОЗРАХУНКІВ В ІНЖЕНЕРНІЙ ПРАКТИЦІ**

**Навчальний посібник**

Друкується за авторською редакцією

Дизайн обкладинки В. Савельєва  
Технічний редактор О. Гринюк  
Верстка Ю. Семенченко



Підписано до друку 25.04.2025 р.  
Формат 60×84/16. Папір офсетний.  
Цифровий друк. Гарнітура Times.  
Ум. друк. арк. 9,30. Наклад 300.  
Замовлення № 0325-019.

Видавництво та друк: Олді+  
65101, м. Одеса, вул. Інглезі, 6/1  
тел.: +38 (095) 559-45-45, e-mail: office@oldiplus.ua  
Свідоцтво ДК № 7642 від 29.07.2022 р.

Замовлення книг:  
тел.: +38 (050) 915-34-54, +38 (068) 517-50-33  
e-mail: book@oldiplus.ua

