

# ІНЖЕНЕРНА МАТЕМАТИКА ТА СТАТИСТИКА

методичні рекомендації до виконання  
індивідуальних завдань  
із застосування векторної та лінійної алгебри,  
диференціального та інтегрального числення,  
диференціальних рівнянь  
до розв'язування прикладних задач

Запоріжжя 2024



УДК 519.6:311.2(072)  
192

Рекомендовано Науково-методичною радою  
ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»  
(протокол № 2 від 25.10.2024 р.)

**Укладач**

Грудкіна Н.С., д-р техн. наук, доцент.

192 Інженерна математика та статистика : методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань із застосування векторної та лінійної алгебри, диференціального та інтегрального числення, диференціальних рівнянь до розв'язування прикладних задач (для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти) / уклад. Н. С. Грудкіна. Запоріжжя : ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА». 2024. 26 с.

Методичні вказівки містять відомості щодо формування кейсу задач та критеріїв оцінювання індивідуальних завдань на платформі Moodle та приклади їх розв'язання з наведенням основних формул, етапів розв'язання та геометричної ілюстрації в обсязі, необхідному для виконання індивідуальних завдань із застосування векторної та лінійної алгебри, диференціального та інтегрального числення, диференціальних рівнянь до розв'язування прикладних задач при вивченні студентами дисципліни «Інженерна математика та статистика». Матеріал навчального посібника має на меті підвищити якість виконання роботи, виробити навички розв'язання задач прикладного спрямування, в тому числі з використанням табличного процесора MS Excel та системи комп'ютерної математики Maple.

Рекомендовано для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня освіти.

**УДК 519.6:311.2(072)**

© ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА», 2024



## ЗМІСТ

ВСТУП	4
1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ	5
1.1 Відомості щодо формування кейсу задач та критеріїв оцінювання індивідуального завдання на платформі Moodle	5
1.2 Кейс задач індивідуального завдання	6
2 РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТУ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ	8
2.1 Приклад розв'язання завдання 1	8
2.2 Приклад розв'язання завдання 2	12
2.3 Приклад розв'язання завдання 3	12
2.4 Приклад розв'язання завдання 4	13
2.5 Приклад розв'язання завдання 5	14
2.6 Приклад розв'язання завдання 6	15
2.7 Приклад розв'язання завдання 7	18
2.8 Приклад розв'язання завдання 8	18
2.9 Приклад розв'язання завдання 9	19
2.10 Приклад розв'язання завдання 10	22
2.11 Приклад розв'язання завдання 11	22
2.12 Приклад розв'язання завдання 12	23
ЛІТЕРАТУРА	25



## ВСТУП

Інженерна математика та статистика – курс з фундаментальної математичної підготовки, який вивчається спеціальностями 131 Прикладна механіка, 132 Матеріалознавство, 136 Металургія, 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка, 183 Технології захисту навколишнього середовища та 184 Гірництво та дозволяє набути навички із математичних розрахунків, системного підходу з моделювання й прогнозування процесів у інженерних і природних екосистемах, аналізу отриманих технічних рішень. В межах певних змістовних модулів дисципліна розглядає основні інструменти, методи та моделі лінійної та векторної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу, звичайних диференціальних рівнянь в розрізі розуміння фізико-хімічних процесів та управління процесами металургійної галузі, формалізації, побудови та розв'язання конкретних інженерно-технічних та науково-прикладних задач із забезпечення формування основ інженерно-технічного мислення. Особливістю курсу є фокус на прикладну направленість математичної підготовки із використанням комп'ютерно-інформаційних технологій та пакетів математичних прикладних програм як фундаменту для глибокого розуміння протікання фізико-хімічних процесів, явищ, механізмів та критичного осмислення теорій, принципів, методів і понять у сфері професійної діяльності.

В рамках освоєння дисципліни «Інженерна математика та статистика» студентам пропонується виконати індивідуальні завдання із застосування векторної та лінійної алгебри, диференціального та інтегрального числення, диференціальних рівнянь до розв'язування прикладних задач за темами відповідних змістовних модулів. Представлені методичні рекомендації містять відомості щодо формування кейсу задач та критеріїв оцінювання індивідуального завдання на платформі Moodle та приклади їх розв'язання з наведенням основних формул, етапів розв'язання та геометричної ілюстрації в обсязі, необхідному для виконання індивідуального завдання, в тому числі з використанням табличного процесора MS Excel та системи комп'ютерної математики Maple.



## 1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

### 1.1 Відомості щодо формування кейсу задач та критеріїв оцінювання індивідуального завдання на платформі Moodle

На платформі Moodle кейс задач індивідуальних завдань із застосування векторної та лінійної алгебри, диференціального та інтегрального числення, диференціальних рівнянь до розв'язування прикладних задач формується рандомно системою шляхом автоматичного вибору окремого варіанта серед наявних в рамках відповідної категорії. Кожен студент отримає однаковий за кількістю та змістовністю кейс задач в межах відповідної спеціальності з зазначенням переліку завдань, що виносяться на виконання. Заохочується використання табличного процесора MS Excel та системи комп'ютерної математики Maple під час розв'язання задач прикладного спрямування як у вигляді інструменту спрощення розрахунків чи побудови графіків, так і для створення модуля автоматизованого розрахунку формалізованої задачі.

Індивідуальні завдання із застосування векторної та лінійної алгебри, диференціального та інтегрального числення, диференціальних рівнянь до розв'язування прикладних задач виконуються самостійно у зручній для студента час в межах терміну подачі роботи, передбачених у розділі «Розподіл балів за контрольними точками та графік їх виконання» та розміщується у відповідному розділі на платформі Moodle. Розв'язання кожного завдання завантажується у вигляді файлу з розширенням .docx або .pdf, або .jpg, або .png, або .txt (за наявності розробленого розрахункового модуля у MS Excel та/або у системі комп'ютерної математики Maple у форматах .xls, .xlsx, .mws завантажується додатково).

Максимальна кількість балів вказана за кожне окреме завдання у зауваженнях та визначається в залежності від обґрунтування ходу розв'язання, рівня формалізації задачі, правильності отриманого розв'язку та аналізу результату, необхідності геометричної інтепретації та/або побажання використовувати можливості MS Excel та/або системи комп'ютерної математики Maple.

Використання штучного інтелекту (ШІ) не забороняється, оскільки пропозиції відомих застосунків ШІ суттєво залежать від обміркованої постановки питання і уточнюючих питань; однак в разі, якщо відповідь, отримана з використанням ШІ, містить суттєві похибки або не є комплексною, або не відповідає за усталеним оформленням, термінологією, або іншим вимогам до завдання, то оцінка за виконання знижується.

Перевірка індивідуального завдання виконується протягом тижня після завершення терміну подачі роботи. За побажанням студента при наявності похибок або виконання індивідуального завдання



«Застосування векторної та лінійної алгебри, диференціального та інтегрального числення, диференціальних рівнянь до розв'язування прикладних задач» не в повному обсязі допускається доопрацювання до передостаннього тижня навчання.

## 1.2 Кейс задач індивідуальне завдання

**Завдання 1.** Фірма випускає три види продукції, використовуючи сировину типів А, В та С. Необхідні характеристики при виробництві продукції наведені в таблиці 1. Визначити обсяг випуску продукції кожного виду за умови повного використання запасів сировини.

Таблиця 1. Характеристики виробництва

Типи сировини	Норми витрат сировини за видами продукції, ваг.од. / вир.			Запаси сировини, ваг.од.
	1	2	3	
А	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$	$b_1$
В	$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$b_2$
С	$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$	$b_3$

**Завдання 2.** Знайти роботу рівнодійної трьох сил:

$$\vec{F}_1 = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{F}_2 = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}, \quad \vec{F}_3 = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k},$$

під дією якої матеріальна точка перемістилася прямолінійно з точки  $A(x_A; y_A; z_A)$  до точки  $B(x_B; y_B; z_B)$ .

**Завдання 3.** У просторі задано точки  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$ ,  $C(x_C; y_C; z_C)$ ,  $S(x_S; y_S; z_S)$ , які є вершинами трикутної піраміди  $SABC$ . Обчислити об'єм піраміди  $SABC$ , площу грані  $ABC$  і довжину висоти  $AH$ , проведеної до цієї грані.

**Завдання 4.** З'ясувати поведінку функції  $f(x)$  на нескінченності.

**Завдання 5.** Знайти швидкість та прискорення деякої матеріальної точки через  $t_1$  с після початку прямолінійного руху, що описується законом  $S = S(t)$ .

**Завдання 6.** Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції  $y = y(x)$  в точці з абсцисою  $x_0$ . Зробити креслення кривої, дотичної та нормалі на одному рисунку.

**Завдання 7.** Розв'язання задач прикладного спрямування на екстремум (найменше або найбільше значення функції на відрізку).



**Завдання 8.** Температура поверхні заготовки розподілена за законом  $T = T(x, y)$ . Визначити напрямок найбільшого зростання температури поверхні заготовки в точці  $M(x_M; y_M)$  та максимальну швидкість її зростання.

**Завдання 9.** Знайти площу дитячого майданчика, обмеженого заданими кривими. Зробити креслення та перевірку, використовуючи формули площ відомих плоских фігур.

**Завдання 10.** Знайти шлях, пройдений матеріальною точкою при прямолінійному русі із швидкістю, що описується функцією  $v=v(t)$  за перші  $t_1$  с після початку руху. Вважаємо, що швидкість руху вимірюється у  $\frac{m}{c}$ , а шлях – у м.

**Завдання 11.** Стиск  $x$  гвинтової пружини пропорційний прикладеній силі  $F$ . Обчислити роботу сили  $F$  при стисканні пружини на  $\Delta x$  м, якщо для стискання її на  $\Delta x_1$  м потрібна сила  $F_1$  Н.

**Завдання 12.** Нехай заготовка певної температури  $T_0$  °С охолоджується до температури цеху  $T_1$  °С. Відомо, що через  $t_1$  годин температура заготовки опустилася до  $T(t_1)$  °С. Знайти закон охолодження заготовки та її температуру через  $t_2$  годин.

## 2 РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТУ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

### 2.1 Приклад розв'язання завдання 1

**Завдання 1.** Фірма випускає три види продукції, використовуючи сировину типів А, В та С. Необхідні характеристики при виробництві продукції наведені в таблиці. Визначити обсяг випуску продукції кожного виду за умови повного використання запасів сировини.

Таблиця 1. Характеристики виробництва

Типи сировини	Норми витрат сировини за видами продукції, ваг.од. / вир.			Запаси сировини, ваг.од.
	1	2	3	
А	4	3	4	34
В	4	2	3	26
С	3	2	3	24

#### Розв'язання.

Складемо математичну модель задачі. Позначимо  $x_1, x_2, x_3$  – кількість одиниць випуску продукції виду 1, 2, 3 відповідно, які необхідно випустити для повного використання запасів сировини. Тоді одержимо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 34, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 26, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

а) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь за правилом Крамера, для цього обчислимо головний визначник системи.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (6 - 6) -$$

$$-3 \cdot (12 - 9) + 4 \cdot (8 - 6) = 4 \cdot 0 - 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = -1.$$

Оскільки  $\Delta \neq 0$ , то система має єдиний розв'язок.

Обчислимо додаткові визначники  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ , замінюючи по черзі перший, другий та третій стовпець головного визначника стовпцем вільних елементів.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 34 & 3 & 4 \\ 26 & 2 & 3 \\ 24 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 34 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 26 & 3 \\ 24 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 26 & 2 \\ 24 & 2 \end{vmatrix} = 34 \cdot (6 - 6) -$$

$$-3 \cdot (78 - 72) + 4 \cdot (52 - 48) = 34 \cdot 0 - 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = -2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 34 & 4 \\ 4 & 26 & 3 \\ 3 & 24 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 26 & 3 \\ 24 & 3 \end{vmatrix} - 34 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 26 \\ 3 & 24 \end{vmatrix} = 4 \cdot (78 - 72) -$$

$$-34 \cdot (12 - 9) + 4 \cdot (96 - 78) = 4 \cdot 6 - 34 \cdot 3 + 4 \cdot 18 = -6,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 34 \\ 4 & 2 & 26 \\ 3 & 2 & 24 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 26 \\ 2 & 24 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 26 \\ 3 & 24 \end{vmatrix} + 34 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (48 - 52) -$$

$$-3 \cdot (96 - 78) + 34 \cdot (8 - 6) = 4 \cdot (-4) - 3 \cdot 18 + 34 \cdot 2 = -2.$$

Визначимо корені системи лінійних алгебраїчних рівнянь за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{-1} = 6; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Отже, шуканий розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 2.$$

б) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь матричним методом.

$$\text{Матриця норм витрат сировини має вид } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{матриця об'єму випуску продукції кожного виду } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

$$\text{матриця запасів сировини } B = \begin{pmatrix} 34 \\ 26 \\ 24 \end{pmatrix}.$$

Математична модель визначається матричним рівнянням  $A X = B$ . Його розв'язок будемо шукати за формулою:

$$X = A^{-1} B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot B,$$

де  $\Delta$  – визначник матриці  $A$ ,  $A_{ij}$  – алгебраїчні доповнення елементів  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) матриці  $A$ .

З попередніх обчислень головний визначник системи  $\Delta = -1$ . Обчислимо алгебраїчні доповнення до кожного елемента матриці  $A$ .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Запишемо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тоді стовпець невідомих елементів дорівнює:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 34 \\ 26 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 34 + 1 \cdot 26 - 1 \cdot 24 \\ 3 \cdot 34 + 0 \cdot 26 - 4 \cdot 24 \\ -2 \cdot 34 - 1 \cdot 26 + 4 \cdot 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, шуканий розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 2.$$

в) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь методом Гауса. Запишемо розширену матрицю системи і виконаємо над рядками цієї матриці елементарні перетворення.

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & | & 34 \\ 4 & 2 & 3 & | & 26 \\ 3 & 2 & 3 & | & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]-[3]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 10 \\ 4 & 2 & 3 & | & 26 \\ 3 & 2 & 3 & | & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]+[1] \cdot (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 10 \\ 0 & -2 & -1 & | & -14 \\ 3 & 2 & 3 & | & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]+[1] \cdot (-3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 10 \\ 0 & -2 & -1 & | & -14 \\ 0 & -1 & 0 & | & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2] \cdot (-1); [3] \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 10 \\ 0 & 2 & 1 & | & 14 \\ 0 & 1 & 0 & | & 6 \end{pmatrix}.$$

З розширеної матриці повернемося до системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10; \\ 2x_2 + x_3 = 14; \\ x_2 = 6. \end{cases}$$

Далі, піднімаючись в системі рівнянь знизу вгору знаходимо розв'язок:

$$x_2 = 6,$$

$$2x_2 + x_3 = 14,$$

$$x_3 = 14 - 2x_2 = 14 - 2 \cdot 6 = 2,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10,$$



## Приклад розв'язання завдання 2.

**Завдання 2.** Знайти роботу рівнодійної трьох сил:  $\vec{F}_1 = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{F}_3 = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ , під дією якої матеріальна точка перемістилася прямолінійно з точки  $A(1; -2; 0)$  до точки  $B(-2; 0; 5)$ .

### Розв'язання.

Робота, яку виконує сила  $\vec{F}$  при переміщенні матеріальної точки з точки  $A$  до точки  $B$ , визначається за формулою

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

Знайдемо  $\vec{F}$  – рівнодійну сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$ , де

$$\vec{F}_1 = (1; -2; 1), \quad \vec{F}_2 = (0; 1; -1), \quad \vec{F}_3 = (2; 2; 5),$$

та отримаємо:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (1; -2; 1) + (0; 1; -1) + (2; 2; 5) = (3; 1; 5).$$

Знайдемо вектор переміщення:

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (-2 - 1; 0 + 2; 5 - 0) = (-3; 2; 5).$$

Тоді отримаємо:

$$A = 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 5 = 18 \text{ (од. роботи).}$$

**Відповідь:** 18 одиниць роботи.

## Приклад розв'язання завдання 3

**Завдання 3.** У просторі задано точки  $A(1; -1; 2)$ ,  $B(5; 4; 5)$ ,  $C(5; 3; 4)$ ,  $S(4; 0; -3)$ , які є вершинами трикутної піраміди  $SABC$ . Обчислити об'єм піраміди  $SABC$ , площу грані  $ABC$  і довжину висоти  $AH$ , проведеної до цієї грані.

### Розв'язання.

Розглянемо вектори  $\overrightarrow{AB} = (4; 5; 3)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (4; 4; 2)$  і  $\overrightarrow{AS} = (3; 1; 1)$ . Об'єм трикутної піраміди складає шосту частину об'єму паралелепіпеда, тобто

$$V = \frac{1}{6} V_{\text{пар}} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS}|.$$

Знайдемо мішаний добуток трьох векторів, що визначають піраміду:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16 + 12 + 30 - 36 - 6 - 20 = -6.$$

Таким чином, об'єм трикутної піраміди  $SABC$  дорівнює

$$V = \frac{1}{6} |-6| = 1 \text{ (куб. од.)}.$$

Площа грані ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{AB}$  і  $\vec{AC}$ , а саме  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$ .

Обчислимо

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$$

і отримаємо:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (кв. од.)}.$$

Виходячи з формули об'єму піраміди  $V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h$ , де  $h$  – довжина висоти, проведеної до грані ABC, маємо  $h = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}}$ .

Отже,

$$h = \frac{3 \cdot 1}{3} = 1 \text{ (лін. од.)}.$$

**Відповідь:**  $V = 1$  куб. од.,  $S_{\Delta ABC} = 3$  кв. од.,  $h = 1$  лін. од.

#### Приклад розв'язання завдання 4

**Завдання 4.** З'ясувати поведінку функції  $f(x)$  на нескінченності:

$$\text{а) } f(x) = \frac{7x^5 + 2x + 1000}{8x - 9x^5 + 2}, \quad \text{б) } f(x) = \frac{6x + 10x^2 + 8}{6x^4 + 9x - 11},$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{7x^6 + 10x^2 - 1000}{2x^3 + x + 1}.$$

#### Розв'язання.

а) Обчислимо границю функції  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 2x + 1000}{8x - 9x^5 + 2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5}{-9x^5} = -\frac{7}{9}.$$

Таким чином,  $f(x) \rightarrow -\frac{7}{9}$  при  $x \rightarrow \infty$ .

б) Знайдемо границю функції  $f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 10x^2 + 8}{6x^4 + 9x - 11} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2}{6x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{3x^2} = \frac{5}{\infty} = 0.$$

Таким чином,  $f(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ .

в) Обчислимо границю функції при  $x \rightarrow \infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^6 + 10x^2 - 1000}{2x^3 + x + 1} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^6}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3}{2} = \infty.$$

Таким чином,  $f(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ .

**Відповідь:** а)  $f(x) \rightarrow -\frac{7}{9}$ ; б)  $f(x) \rightarrow 0$ ; в)  $f(x) \rightarrow \infty$ .

### Приклад розв'язання завдання 5

**Завдання 5.** Знайти швидкість та прискорення матеріальної точки через 2 с після початку прямолінійного руху, що описується законом

$$S(t) = -\frac{2t^3}{3} + 5t^2 + t + 1,$$

де шлях вимірюється в м.

#### Розв'язання.

Знаходимо швидкість:

$$\begin{aligned} v(t) = S'(t) &= \left( -\frac{2t^3}{3} + 5t^2 + t + 1 \right)' = -\frac{2}{3} \cdot 3t^2 + 5 \cdot 2t + 1 + 0 = \\ &= -2t^2 + 10t + 1. \end{aligned}$$

Обчислимо швидкість через дві секунди після початку руху:

$$v(2) = -2 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 + 1 = -8 + 20 + 1 = 13 \left( \frac{\text{м}}{\text{с}} \right).$$

Знаходимо прискорення:

$$a(t) = v'(t) = S''(t) = (-2t^2 + 10t + 1)' = -2 \cdot 2t + 10 + 0 = -4t + 10.$$

Обчислимо прискорення через дві секунди після початку руху

$$a(2) = -4 \cdot 2 + 10 = 2 \left( \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right).$$

**Відповідь:**  $v(2) = 13 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ;  $a(2) = 2 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ .

### Приклад розв'язання завдання 4 з використанням можливостей СКМ Maple.

Розв'язання запропоноване для випадку використання СКМ Maple. Умова задачі та розв'язання наведено на рис. 2.

Вставить (I) Формат (R) Вычислить (A) Инструменты (T) Окно (W) Помощь (H)

Искать Alt+:

\*Завдання\_1Площа майданчика.mw x Pr\_2\_1.mw x \*Безымянный (3) x Площа дитячого майданчика x Границі+графки (3).mw x \*Заготовка\_границ\_похідна

Текст Неисполняемая математика Математика C Text Times New Roman 14 B I U

**Приклад. Знайти швидкість та прискорення матеріальної точки через 1 с після початку прямолінійного руху за законом  $S(t) = \frac{2 \cdot t^3}{3} - t^2 + 8t + 1$ .**

restart;

$$S(t) := \frac{2 \cdot t^3}{3} - t^2 + 8 \cdot t + 1;$$

$$S := t \mapsto \frac{2}{3} \cdot t^3 - t^2 + 8 \cdot t + 1 \quad (4)$$

Знайдемо швидкість  $v(t)$  та прискорення  $a(t)$  руху:

$$v(t) = S'(t); \quad v(t) = 2t^2 - 2t + 8 \quad (5)$$

$$a(t) = S''(t); \quad a(t) = 4t - 2 \quad (6)$$

Знайдемо швидкість  $v(t)$  та прискорення  $a(t)$  руху через 3 с після початку руху:

$$t0 := 1; \quad t0 := 1 \quad (7)$$

$$v(t0) = S'(t0); \quad v(1) = 8 \quad (8)$$

$$a(t0) = S''(t0); \quad a(1) = 2 \quad (9)$$

Відповідь: швидкість  $8 \left( \frac{\text{м}}{\text{с}} \right)$ , прискорення  $2 \left( \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right)$ .

Рисунок 2 - Приклад розв'язання завдання 4 з використанням СКМ Maple

## Приклад розв'язання завдання 6

**Завдання 6.** Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції  $y(x) = 4x - x^2 - 2$  в точці з абсцисою  $x_0 = 1$ . Зробити креслення кривої, дотичної та нормалі на одному рисунку.

### Розв'язання.

Рівняння дотичної має вид:

$$D: \quad y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0);$$

рівняння нормалі:

$$N: \quad y(x) = y(x_0) - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Знаходимо:

$$y(x_0) = y(1) = 4 \cdot 1 - 1^2 - 2 = 1,$$

$$y'(x) = (4x - x^2 - 2)' = 4 - 2x,$$

$$y'(x_0) = y'(1) = 4 - 2 \cdot 1 = 2.$$

Маємо:

$D: y = 1 + 2 \cdot (x - 1)$ ; або остаточно  $y = 2x - 1$  – рівняння дотичної,

$N: y = 1 - \frac{1}{2}(x - 1)$ ; або остаточно  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$  – рівняння нормалі.

Дотична – пряма, яка проходить через точки  $P(1;1)$ ,  $A(0;-1)$ .

Нормаль – пряма, що проходить через точки  $P(1;1)$ ,  $B(0; \frac{3}{2})$ .

$y(x) = 4x - x^2 - 2 \Rightarrow y(x) = -x^2 + 4x - 2$  – парабола ( $a = -1 < 0$ ,  $b=4$ ), її гілки напрямлені вниз.

Знаходимо координати вершини:

$$x_c = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-1)} = 2;$$

$$y_c = y(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 2 = 2.$$

Отже, маємо вершину у точці  $C(2;2)$ . Зробимо креслення (рис. 3).

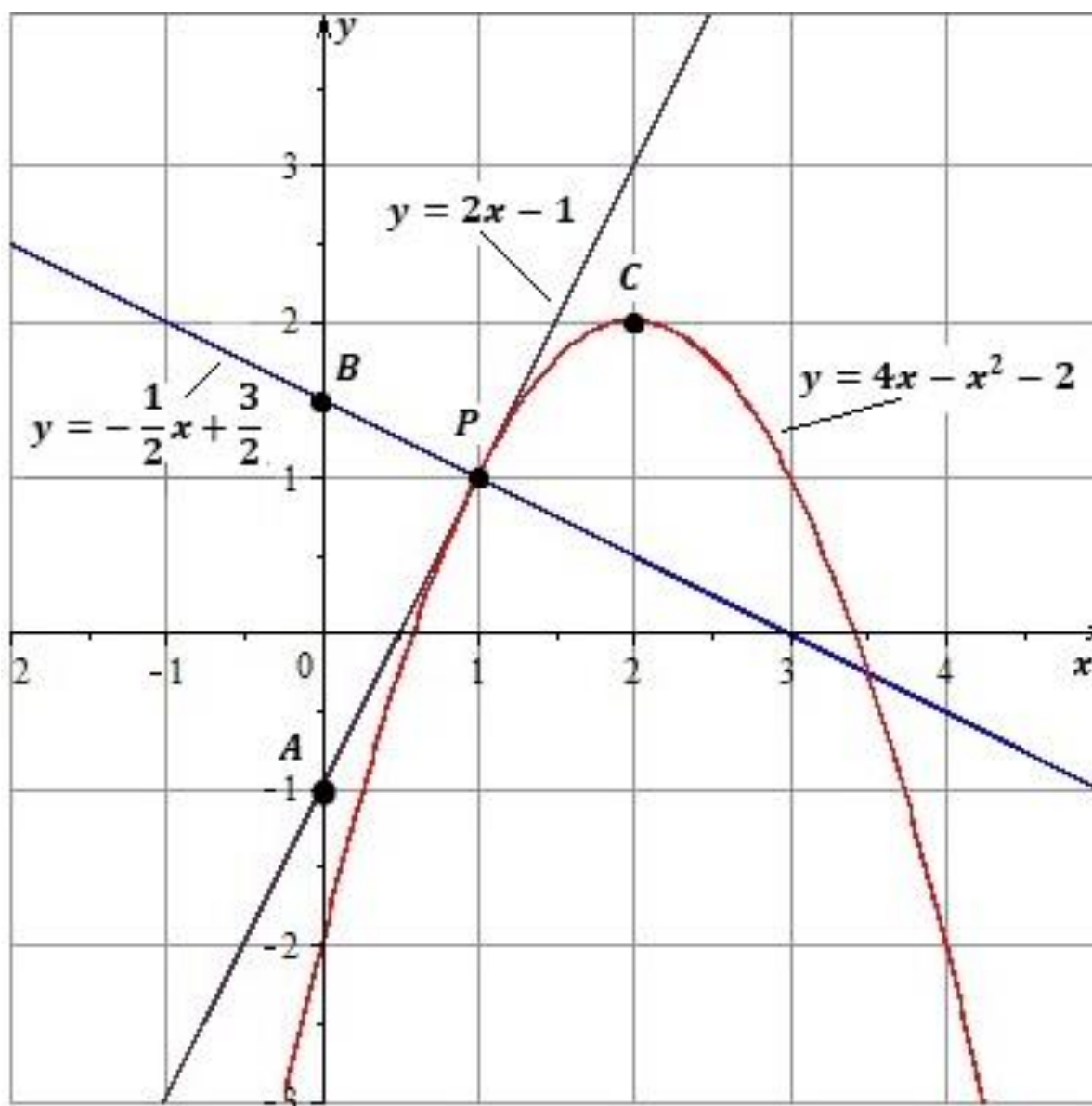


Рисунок 3 - Креслення кривої, дотичної та нормалі

**Відповідь:**  $y = 2x - 1$  – дотична,  $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$  – нормаль.

## Приклад розв'язання завдання 6 з використанням можливостей СКМ Maple.

Розв'язання запропоноване для випадку використання СКМ Maple. Умова задачі та розв'язання наведено на рис. 4.

*Приклад. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції  $f(x)=2x^2 - 6x$  в точці з абсцисою  $x_0=-1$ .*

Запишемо в загальному вигляді рівняння квадратичної функції.

`restart, a := 2; b := -6; c := 0; x0 := -1;`

`a := 2  
b := -6  
c := 0  
x0 := -1`

`y = a · x2 + b · x + c; y(x) := a · x2 + b · x + c;`

`y := 2 · x2 - 6 · x`

Знайдемо значення функції в точці  $x_0=-1$

`y(x0);`

`8`

Знайдемо похідну та значення похідної функції в точці  $x_0=-1$

`y'(x);`

`4 · x - 6`

`y'(x0);`

`-10`

Запишемо рівняння дотичної до графіка функції в точці  $x_0=-1$

`yd := y(x0) + y'(x0) · (x - x0);`

`yd := -2 - 10 · x`

Запишемо рівняння нормалі до графіка функції в точці  $x_0=-1$

`ym := y(x0) - 1/y'(x0) · (x - x0);`

`ym := 81/10 + x/10`

a)

Знайдемо координати вершини параболі, гілки якої напрямнені вгору ( $a=1>0$ !)

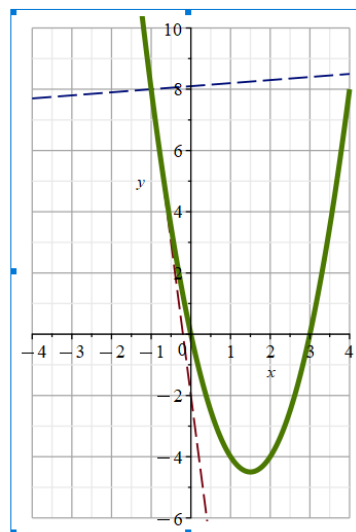
`xc := -b/a; yc := y(xc);`

`xc := 3/2`

`yc := -9/2`

Тобто отримали вершину - точку  $C(\frac{3}{2}; -\frac{9}{2})$ . Побудуємо графік функції.

`plot( {y(x), yd(x), ym(x)}, x=-4..4, y=-6..10);`



Відповідь:  $yd = -2 - 10x$  - дотична,  $ym = \frac{81}{10} + \frac{x}{10}$  - нормаль.

b)

Рисунок 4 - Приклад розв'язання завдання 6 з використанням СКМ Maple

## Приклад розв'язання завдання 7

**Завдання 7.** Залежність коефіцієнта корисної дії гідравлічного насоса від його продуктивності (витрат)  $G$  ( $\text{м}^3/\text{с}$ ) виражається формулою  $\eta = \frac{11}{9} - \frac{1}{3\sqrt{G}} - \frac{\sqrt{G}}{9}$ . Яким буде максимальний ККД насоса і при яких витратах  $G$  він досягається?

### Розв'язання.

Дослідимо функцію  $\eta(G)$  на екстремум.

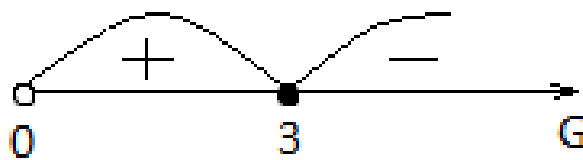
$$D(\eta) = (0, +\infty),$$

$$\begin{aligned}\eta'(G) &= \left( \frac{11}{9} - \frac{1}{3\sqrt{G}} - \frac{\sqrt{G}}{9} \right)' = 0 - \frac{1}{3} (G^{-1/2})' - \frac{1}{9} (G^{1/2})' = \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{1}{2} \right) G^{-3/2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} G^{-1/2} = \frac{1}{6\sqrt{G^3}} - \frac{1}{18\sqrt{G}} = \frac{3-G}{18\sqrt{G^3}}.\end{aligned}$$

Шукаємо критичні точки:

$$\eta'(G) = 0: \frac{3-G}{18\sqrt{G^3}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-G = 0, \\ \sqrt{G^3} \neq 0, \end{cases} \Rightarrow G = 3.$$

Дослідимо знак похідної в інтервалах області визначення, відокремлених критичною точкою  $G = 3$ .



При переході через точку  $G = 3$  похідна змінила знак з «+» на «-», тому  $G = 3$  – точка максимуму функції  $\eta(G)$ .

$$\eta_{max} = \eta(3) = \frac{11}{9} - \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{11}{9} - \frac{\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{11-2\sqrt{3}}{9}.$$

**Відповідь:** максимальний ККД насоса становить  $\frac{11-2\sqrt{3}}{9} \approx 0,84$  або 84% при  $G=3$ .

**Завдання 8.** Температура поверхні заготовки розподілена за законом  $T(x, y) = x^3 + 2xy + 3y^2 + 3$ . Визначити напрямок найбільшого зростання температури поверхні заготовки в точці  $M(1;2)$  та максимальну швидкість її зростання.

### Розв'язання.

Найбільше зростання температури поверхні заготовки відбувається в напрямку вектора  $\overrightarrow{\text{grad } T}(M)$ , який визначається за формулою:

$$\overrightarrow{\text{grad } T}(M) = \left( \frac{\partial T}{\partial x}(M); \frac{\partial T}{\partial y}(M) \right).$$

Знаходимо частинні похідні функції  $T(x, y)$ :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = T'_x = (x^3 + 2xy + 3y^2 + 3)'_x = 3x^2 + 1 \cdot 2y + 0 + 0 = 3x^2 + 2y,$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = T'_y = (x^3 + 2xy + 3y^2 + 3)'_y = 0 + 1 \cdot 2x + 3 \cdot 2y + 0 = 2x + 6y.$$

Обчислюємо їх значення в точці  $M(1;2)$ :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(1; 2) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2 = 7,$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(1; 2) = 2 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 14.$$

Таким чином,

$$\overrightarrow{\text{grad } T}(1; 2) = (7; 14).$$

Максимальна швидкість зростання температури поверхні заготовки дорівнює модулю вектора  $\overrightarrow{\text{grad } T}(M)$ , отже маємо:

$$v_{\max} = |\overrightarrow{\text{grad } T}(1; 2)| = \sqrt{7^2 + 14^2} = \sqrt{245} = 7\sqrt{5}.$$

**Відповідь:**  $\overrightarrow{\text{grad } T}(1; 2) = (7; 14), v_{\max} = 7\sqrt{5}$ .

### Приклад розв'язання завдання 9

**Завдання 9.** Знайти площу дитячого майданчика обмеженого кривими:  $y = 2x + 5$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ . Зробити креслення та перевірку, використовуючи формули площ відомих плоских фігур.

### Розв'язання.

Маємо згідно обмежень, вказаних в умові задачі, що

$y = 2x + 5$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$  – прямі.

Пряма  $y = 2x + 5$  проходить через точки  $(0;5)$  і  $(1;7)$ ,  $y=0$  – координатна ось ОХ,  $x = 0$  – координатна ось ОУ,  $x = 1$  – пряма, яка паралельна координатній осі ОУ.

Зробимо креслення (рис. 5).

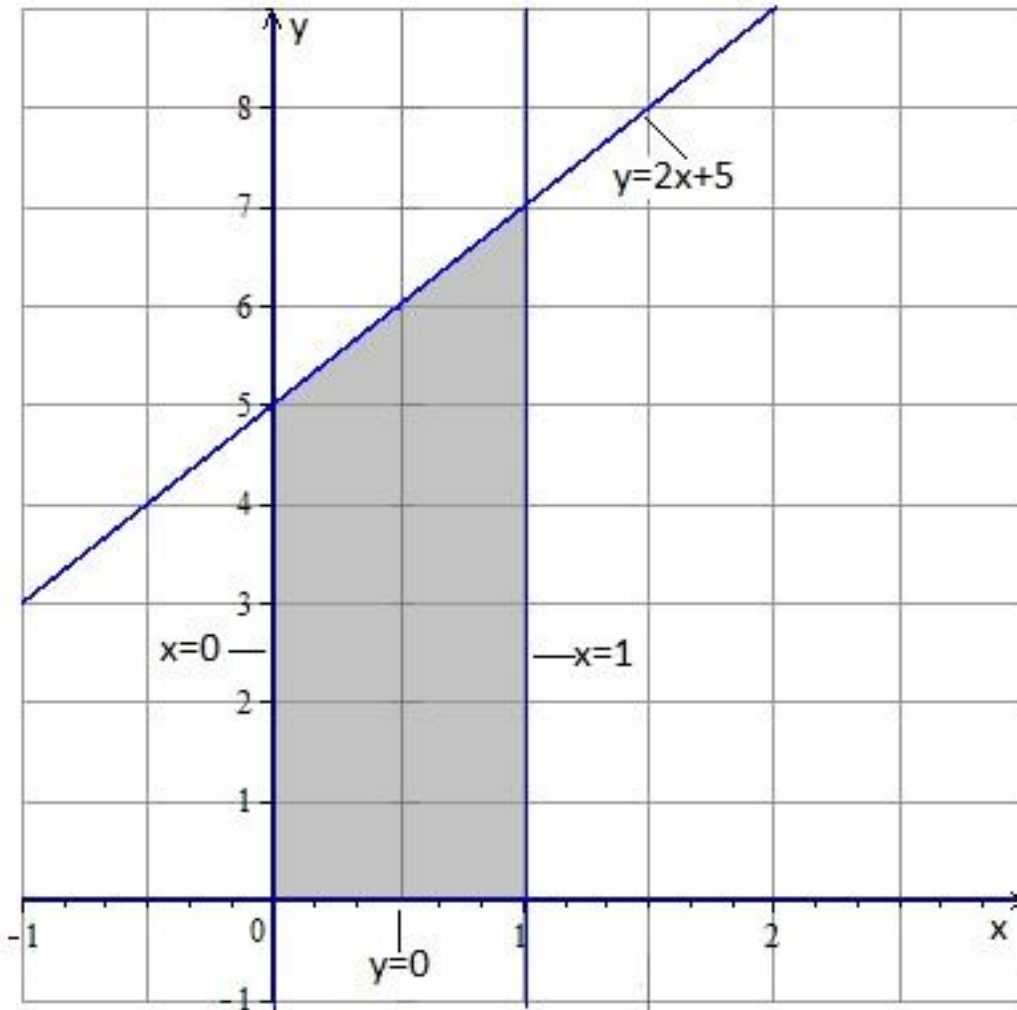


Рисунок 5 - Креслення дитячого майданчика

Обчислимо площу за формулою:

$$S = \int_a^b y(x) dx.$$

Маємо:

$$a = 0, \quad b = 1, \quad y(x) = 2x + 5,$$

$$S = \int_0^1 (2x + 5) dx = \left( 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x \right) \Big|_0^1 = (1^2 + 5 \cdot 1) - 0 - 0 = 6 \text{ (кв. од.)}.$$

Дитячий майданчик має форму прямокутної трапеції з основами  $a$ ,  $b$  та висотою  $h$ .

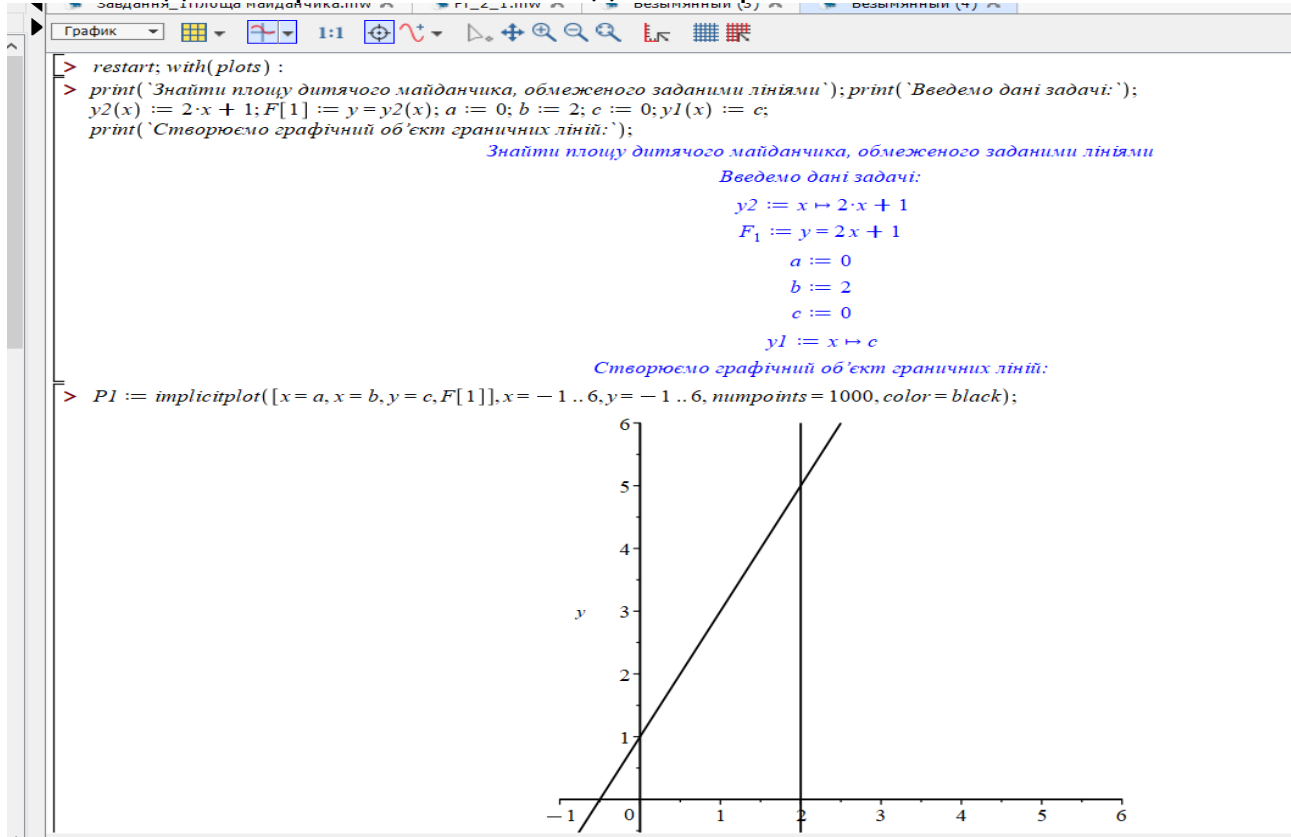
Виконаємо перевірку:

$$S_{\text{тр}} = \frac{a + b}{2} \cdot h = \frac{5 + 7}{2} \cdot 1 = 6 \text{ (кв. од.)}.$$

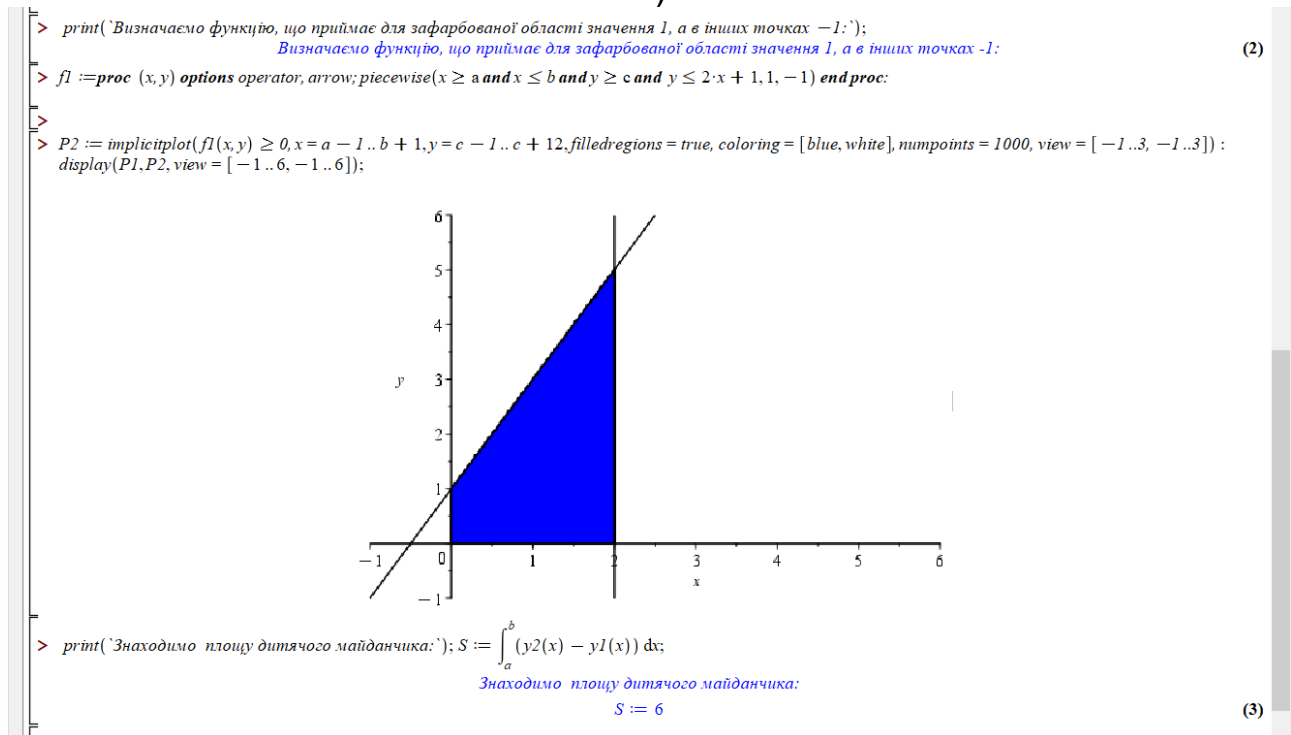
**Відповідь:** 6 кв. од.

## Приклад розв'язання завдання 9 з використанням можливостей СКМ Maple.

Розв'язання запропоноване для випадку використання СКМ Maple. Умова задачі та розв'язання наведено на рис. 6.



a)



b)

Рисунок 6 - Приклад розв'язання завдання 9 з використанням СКМ Maple

## Приклад розв'язання завдання 10

**Завдання 10.** Знайти шлях, пройдений матеріальною точкою при прямолінійному русі із швидкістю, що описується функцією  $v(t) = 2t + 3$  за перші 3 с після початку руху. Вважаємо, що швидкість руху вимірюється у  $\frac{м}{с}$ , а шлях – у м.

### Розв'язання

Шлях, пройдений матеріальною точкою, визначається за формулою:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

В даному випадку

$$v(t) = 2t + 3, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 3,$$

$$S = \int_0^3 (2t + 3) dt = \left( 2 \cdot \frac{t^2}{2} + 3t \right) \Big|_0^3 = (t^2 + 3t) \Big|_0^3 = 3^2 + 3 \cdot 3 - 0 - 0 = 18 \text{ (м)}.$$

**Відповідь:** 18 м.

## Приклад розв'язання завдання 11

**Завдання 11.** Стиск  $x$  гвинтової пружини пропорційний прикладеній силі  $F$ . Обчислити роботу сили  $F$  при стисканні пружини на 0,04 м, якщо для стискання її на 0,01 м потрібна сила 10 Н.

### Розв'язання.

Оскільки  $x=0,01$  м при  $F=10$  Н, то підставляючи ці значення в закон Гука, дістанемо:

$$10 = k \cdot 0,01,$$

звідки отримаємо:

$$k = 1000 \text{ Н/м}.$$

Підставивши тепер у цю ж рівність значення  $k$ , знаходимо:

$$F = 1000x.$$

Шукану роботу знайдемо за формулою, поклавши, що  $a=0$ ,  $b=0,04$ :

$$A = \int_0^{0,04} 1000x dx = 1000 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,04} = 500 \cdot x^2 \Big|_0^{0,04} =$$

$$= 500 \cdot (0,04^2 - 0^2) = 0,8 \text{ (Дж)}.$$

**Відповідь:** 0,8 Дж.

### Приклад розв'язання завдання 12

**Завдання 12.** Нехай заготовка температури  $600^\circ\text{C}$  охолоджується до температури цеху  $20^\circ\text{C}$ . Відомо, що через 1 годину температура заготовки становила  $560^\circ\text{C}$ . Знайти закон охолодження заготовки та її температуру через 3 години.

#### Розв'язання

Нехай  $T(t)$  – температура тіла в момент часу  $t$ , тоді

$T'(t) = \frac{dT}{dt}$  – швидкість охолодження.

Згідно умови відомо, що  $T(0)=600$ ,  $T_1=20$ ,  $T(1)=560$ .

1) Закон охолодження тіла можна описати диференціальним рівнянням першого порядку з розподіленими змінними:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - 20).$$

Розділимо змінні і проінтегруємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dT}{T(t) - 20} = -k dt,$$

$$\int \frac{dT}{T(t) - 20} = -k \int dt,$$

$$\ln|T(t) - 20| = -kt + \ln C,$$

$$\ln|T(t) - 20| = \ln e^{-kt} + \ln C,$$

Отже, отримаємо:

$T(t) = 20 + Ce^{-kt}$  – загальний розв'язок диференціального рівняння.

2) Використовуємо початкову умову:

$$T(0) = 600 \Rightarrow 600 = 20 + Ce^0,$$


$$C + 20 = 600, \quad C = 580,$$

$$T(t) = 20 + 580e^{-kt}.$$

3) Використовуємо додаткову умову:

$$T(1) = 560 \Rightarrow 560 = 20 + 580e^{-k \cdot 1},$$

$$580e^{-k} = 540,$$


$$e^{-k} = \frac{540}{580} = \frac{27}{29}.$$

Закон охолодження заготовки має вид:

$$T(t) = 20 + 580 \cdot \left(\frac{27}{29}\right)^t.$$

1) Отже, остаточно маємо, що температура заготовки через 3 години становитиме:

$$T(3) = 20 + 580 \cdot \left(\frac{27}{29}\right)^3 \approx 488^\circ\text{C}$$

**Відповідь:**  $T(t) = 20 + 580 \cdot \left(\frac{27}{29}\right)^t$ ;  $T(3) \approx 488^\circ\text{C}$ .

## ЛІТЕРАТУРА

1. Вища математика. Елементи лінійної алгебри. Практикум : навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей / КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад. М. В. Савчук. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 39 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/41841>.
2. Грудкіна Н. С., Самойленко Д. О., Міняйло Д. О. Використання системи комп'ютерної математики MAPLE для розв'язання задач інженерної математики з автоматизованим розрахунком. *Наукові відкриття та фундаментальні наукові дослідження: світовий досвід* : матеріали III Міжнародної наукової конференції, м. Вінниця, 24 листопада, 2023 р. Міжнародний центр наукових досліджень. Вінниця : ТОВ «УКРЛОГОС Груп, 2023. 502с.С.402-403.
3. Грудкіна Н. С., Колесников С. О., Старов Д. В., Чехута О. В. Впровадження ІКТ під час викладання математичних дисциплін здобувачам технічних, економічних та ІТ-спеціальностей. *Сучасні інформаційні технології, засоби автоматизації та електропривод* : матеріали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції, 18–20 квітня 2024 р. / За заг. ред. О. Ф. Тарасова. Краматорськ – Тернопіль : ДДМА, 2024. 237 с. С. 204-206.
4. Задерей П. В., Лагода О. А., Нестеренко О. Б., Харитоновна М. О. Інтегральне числення : навч. посіб. Київ : КНУТД, 2021. 216. URL: [https://er.knutd.edu.ua/bitstream/123456789/19923/1/Integral\\_NP\\_2021.pdf](https://er.knutd.edu.ua/bitstream/123456789/19923/1/Integral_NP_2021.pdf).
5. Ічанська Н. В., Лозицький Д. Ю. Використання математичного апарату та ІКТ для розв'язання прикладних задач. *Науковий вісник Ужгородського університету*. Серія «Математика і інформатика». 2023. Т. 43. Вип. 2. С. 119-129. doi:10.24144/2616-7700.2023.43(2).
6. Михалевич В. М. Використання систем комп'ютерної математики у процесі навчання студентів ВНЗ : монографія. Вінниця : ВНТУ, 2016. 279 с.
7. Основи вищої математики. Т. 2. Ч. 1 : навч. посіб. / С. А. Щоголев, Арк. О. Кореновський. Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. Мечникова, 2019. 244 с.
8. Пасічник Я. А. Вища математика : підручник. Острог : Вид-во НаУОА, 2021. 432 с. URL: <https://lib.oa.edu.ua/files/funds/vudavnutstvo/1-5,425-430,432.pdf>.
9. Скуратовський Р. В. Вища математика з прикладами і задачами : підручник. Київ : Національна академія управління, 2021. 232 с. URL: <https://nam.kyiv.ua/files/publications/matematika-2021.pdf>.
10. Bernard V Liengme Maple: A Primer. Morgan & Claypool Publishers, 2019. 171 p. DOI: <https://doi.org/10.1088/2053-2571/ab0bb3>.
11. Maple : веб-сайт. URL: <https://www.maplesoft.com/products/Maple/> (дата звернення: 15.09.24).



*Навчально-методичне видання*

**Грудкіна Наталія Сергіївна**

# **ІНЖЕНЕРНА МАТЕМАТИКА ТА СТАТИСТИКА**

**методичні рекомендації до виконання  
індивідуального завдання  
«Застосування векторної та лінійної алгебри,  
диференціального та інтегрального числення,  
диференціальних рівнянь  
до розв'язування прикладних задач»**

Самостійне електронне мережеве видання

Публікується в авторській редакції