

«ОСНОВИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ»

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до виконання лабораторних робіт і
самостійної роботи студентів

*Рекомендовано Науково-методичною радою
ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ
ПОЛІТЕХНІКА»
(протокол № 6 від «4» липня 2023 р.)
Обов'язково до розміщення в репозитарії*



Основи системного аналізу: методичні вказівки до виконання лабораторних робіт і самостійної роботи студентів / Уклад. Шевченко Н.Ю. Запоріжжя, ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА», 2023. 101 с.

Методичні вказівки включають завдання до лабораторних робіт за курсом «Основи системного аналізу», стислі теоретичні відомості до кожної роботи, а також приклади виконання.

Наведена самостійна робота студентів орієнтована на розширення аспектів застосування системного аналізу при прийнятті управлінських рішень.

Для базового занурення в сутність системного аналізу доданий розділ «Теоретична довідка».

Рекомендовано для студентів економічних та технічних спеціальностей.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Затверджено на засіданні кафедри
цифрових технологій та проектно-
аналітичних рішень

Протокол № 1 від «30» травня 2023 р.

Узгоджено:

Секретар Редакційної ради

Малій Х. В.

«1» червня 2023 р.

© ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА», 2023



ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1 ОСНОВИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ..	6
Лабораторна робота № 1. Проведення системного аналізу складного об'єкта	6
Лабораторна робота № 2. Формалізований опис системи і аналіз її структури	15
Лабораторна робота № 3. Ієрархічний аналіз структури складної системи	18
Лабораторна робота № 4. Якісний аналіз комплексної структури системи	25
Лабораторна робота № 5. Поведінка складних систем. Врахування фактору часу	31
Лабораторна робота № 6. Аналіз функціонування складних систем в умовах невизначеності	43
Лабораторна робота № 7. Безпека функціонування складних систем	60
Лабораторна робота № 8. Системний аналіз в управлінні інформацією	67
Лабораторна робота № 9. Використання дерев рішення для опису систем.....	74
2 ТЕОРЕТИЧНА ДОВІДКА.....	80
3 САМОСТІЙНА РОБОТА СТУДЕНТІВ.....	91
ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ	96
ДОДАТКИ	97



ВСТУП

Системний аналіз є важливою міждисциплінарною науковою галуззю, яка вивчає системи та їх функціонування, а також розробляє методи та інструменти для аналізу, моделювання, оптимізації та прийняття рішень. Вивчення системного аналізу має свої особливості, які роблять його незамінним інструментом для вирішення складних проблем сьогодення.

Вивчення дисципліни вимагає знань з різних наукових областей, таких як математика, інженерія, економіка, психологія та інші. Це дозволяє слухачам охоплювати широкий спектр проблем із різних сфер життя і розробляти комплексні рішення.

Системний аналіз передбачає використання математичних та інформаційних моделей, що надає розуміння поведінки систем, допомагає зрозуміти систему як єдине ціле, а не просто сукупність окремих елементів, дає можливість встановлювати їх взаємозв'язки та оцінювати ефективність. Моделі допомагають розробити уявлення про складні системи і здійснювати прогнозування їхньої поведінки в різних умовах.

Системний аналіз дає змогу вдосконалювати процеси, розробляти оптимальні рішення, враховувати ризики та забезпечувати більш ефективне функціонування систем. Крім того вивчення системного аналізу розвиває аналітичні та критичні навички, а також навички пошуку оптимальних рішень з урахуванням багатьох факторів.

Нарешті, системний аналіз має широке застосування в практиці. Він знайшов своє застосування в різних сферах, таких як бізнес, інженерія, управління проектами, екологія, медицина та інші. Вивчення системного аналізу дозволяє здобути навички, які можна використовувати для вирішення реальних проблем і досягнення успіху в сучасному світі.

Отже, вивчення системного аналізу як дисципліни має свої особливості, які включають міждисциплінарний характер, фокус на моделюванні систем, аналіз та оптимізацію систем, прийняття рішень, врахування взаємозв'язків та широке застосування в практиці. Вивчення системного аналізу розвиває критичне мислення, аналітичні навички та здатність до комплексного аналізу, що робить його незамінним інструментом для вирішення сучасних викликів та досягнення успіху в різних галузях.



Мета викладання дисципліни «Основи системного аналізу» – формування у студентів навичок системного підходу для вирішення задач, вміння використовувати методи математичного моделювання для оптимізації управління об'єктами і системами.

Завдання – навчити майбутнього фахівця основам аналізу функціонування та розвитку систем, застосуванню методів їх моделювання при вирішенні складних проблем в умовах наявності невизначеностей.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент буде:

знати:

- основні поняття, принципи, структуру, завдання системного аналізу;
- ознаки класифікації систем і моделей систем;
- характеристику типових структур;
- завдання і функції управління системами;
- характерні риси інформації, її види, структуру та споживчі властивості;
- основи формалізованого опису інформації, типи шкал вимірювання, системи класифікації інформації;
- математичні методи аналізу структури системи та зав'язків її елементів.

вміти:

- будувати моделі систем та вирішувати за допомогою них задачі дослідження та керування їх функціонуванням;
- використовувати системний підхід при аналізі функціонування технічного чи економічного об'єкту та його управлінні.



1 ОСНОВИ СИСТЕМНОГО АНАЛІЗУ. ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Лабораторна робота № 1.

Проведення системного аналізу складного об'єкта

Мета роботи: навчитися проводити системний аналіз складного об'єкта.

Завдання:

Необхідно обрати будь-який об'єкт і провести його системний аналіз (наприклад, вимірювальний або побутовий прилад, транспортний засіб і тому подібне).

При аналізі визначити:

- 1) систему в цілому, підсистеми;
- 2) зовнішнє середовище;
- 3) мету і призначення системи і підсистем;
- 4) входи, ресурси і (чи) витрати;
- 5) виходи, результати і (чи) прибуток;
- 6) виконавців, осіб, що приймають рішення (ОПР) і керівників;
- 7) тип системи;

8) чи має аналізована система властивості ієрархічної впорядкованості, централізації, інерційності, адаптивності, в чому вони полягають?

9) виходячи з того, що фірма хоче підвищити якість аналізованого об'єкту, які інші системи, окрім аналізованої, необхідно при цьому враховувати? Поясніть, чому на вирішення цієї проблеми впливає те, як встановлюються межі системи і зовнішнього середовища?

Теоретичні відомості

Мета завдання полягає в освоєнні понятійного апарату і схеми системного аналізу.

Склад системи в цілому залежить від завдання, для вирішення якого проводиться аналіз. Щоб об'єктом аналізу був обраний об'єкт, необхідно коректно сформулювати завдання, наприклад, забезпечення нормального функціонування цього об'єкту. Якщо завдання



сформулювати по-іншому, наприклад, проектування або діагностування, то об'єктом аналізу буде вже інша система (система проектування, система діагностування і тому подібне).

Для даного завдання щодо технічної системи типовий набір зовнішніх систем, що становлять систему в цілому, включає: систему виконавця (оператор, користувач), систему об'єктів, пов'язаних з призначенням цієї системи (система замовника), наприклад, для автомобіля це – система вантажів, для комп'ютера – система завдань і тому подібне, систему живлення, систему забезпечення і обслуговування т.п.

При визначенні функціональних підсистем слід враховувати призначення системи і її перетворювальні можливості, а також вхідні елементи системи.

За перетворювальними можливостями доцільно розрізняти три типи систем:

- а) системи, в яких відсутнє перетворення вхідного елементу;
- б) системи, в яких змінюються окремі характеристики вхідного елементу (точність, форма, розміри, фізичні, техніко-економічні параметри);
- в) системи, в яких змінюється призначення вхідного елементу.

До першого типу відносяться розподільні системи, причому розподіл може бути просторовим, часовим і (чи) на елементи деякої великої кількості. Наприклад, транспортні системи (розподілені в просторі), системи розподілу енергетичних і водних ресурсів, системи соціального забезпечення тощо.

До другого типу відносяться більшість технічних систем (вимірювальні і обчислювальні системи, побутові прилади і інш.).

До третього типу відносяться так звані великі системи: промислові, технологічні, економічні (на вході – сировина і комплектуючі, на виході – продукт, що має нове призначення).

Склад функціональних підсистем залежить також від виду вхідного елементу. Наприклад, для систем, пов'язаних з обробкою інформації (вимірювальних, обчислювальних), склад підсистем практично однотипний: система введення інформації, система перетворення інформації, система управління, система виведення, резервна система, система забезпечення умов і тому подібне.

Для технічних систем, пов'язаних з матеріальними об'єктами, склад підсистем дещо інший, наприклад, система завантаження, приводна



система, система управління, виконавська система, допоміжна система забезпечення тощо.

Приклади проведення системного аналізу об'єкта

Приклад 1. Об'єкт аналізу – вимірювальний пристрій. **Задача** – забезпечення його нормального функціонування.

Схема системного аналізу:

1. Система в цілому, повна система і підсистеми наведені на рис.1.1: S1, S2 і так далі – зовнішні системи, що враховуються при рішенні задачі;

PS1, PS2 і так далі – підсистеми вимірювального пристрою;

S1 – система виконавця (вимірник, експериментатор);

S2 – система об'єктів виміру (джерела вхідної дії, вимірювані величини);

S3 – система живлення (акумулятор, батарея, електрична мережа);

S4 – система забезпечення умов експерименту (захисні екрани, заземлення, термостати, кліматична камера і тому подібне);

PS1 – сприймаюча система (датчик);

PS2 – система перетворення (перетворювач, підсилювач);

PS3 – система передачі (передавальний елемент: електрична лінія, світлопровід);

PS4 – система виводу (шкала, екран, цифрове табло, процесор і тому подібне).

2. Оточуюче середовище.

До нього відносяться окрім перерахованих зовнішніх систем S1 – S4 (рис.1.1) також інші зовнішні системи, наприклад:

S5 – природне середовище;

S6 – служби ремонту і перевірки приладів;

S7 – система навчання (технікуми, внз) і тому подібне, які не враховуються при рішенні нашої задачі.



Рівень 1. Система в цілому

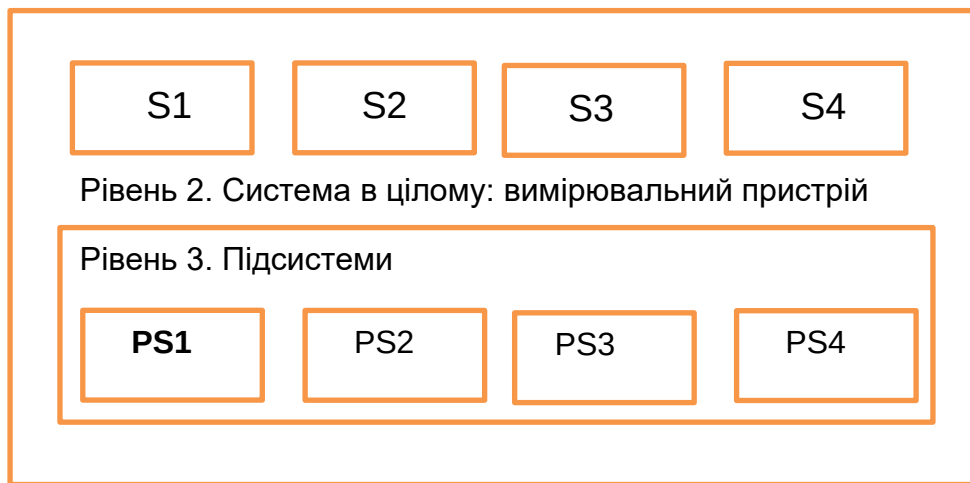


Рисунок 1.1 – Представлення рівнів системи вимірювальний пристрій

3. Цілі і призначення системи і підсистем.

Призначення системи – вимір (рішення певного класу вимірювальних завдань).

Датчик призначений для сприйняття і попереднього перетворення вхідної дії (вимірюваної величини).

Підсилювач (перетворювач) – для посилення вихідного сигналу датчика і при необхідності його перетворення в зручну форму (наприклад, в електричний сигнал).

Передавальний елемент служить для передачі сигналу на відстань.

Пристрій виводу – для обробки і зберігання отриманого сигналу, а також його індикації.

Мета визначається експериментатором у вигляді набору умов і обмежень задачі і включає наступні вимоги:

- вид вимірюваної величини (наприклад, електрична напруга постійного струму);
- діапазон вимірів (наприклад, 1-10v);
- точність вимірів (наприклад, похибка не більше 1%);
- час на один вимір (наприклад, не більше 1 хв.);
- умови вимірів: температура, вологість, тиск і тому подібне (наприклад, нормальні умови) тощо.

4. Входи, ресурси і витрати.

Входом є вхідна дія (вимірювана величина).

До ресурсів відносяться: апіорна (початкова) інформація про вимірювальне завдання, електроенергія, гроші, час і зусилля на вимір.

Витрати – це кількісна оцінка витрат ресурсів, наприклад, кількість інформації – 106 біт, добові витрати електроенергії – 1 КВт*година; витрати грошей (запчастини, обслуговування, заробітна плата) – 10 у.о.; витрати зусиль – 1000 Ккал.

5. Виходи, результати і прибуток.

Виходом є результат виміру, наприклад ($6,56 \pm 0,06v$). До результатів відносяться: апостеріорна (отримана виміром) інформація про вимірювану величину (значення величини і погрішність виміру), а також економія грошей, часу і зусиль за рахунок отримання потрібної вимірювальної інформації.

Прибуток – це кількісна оцінка економії, наприклад, економія грошей – 20 у.о., часу – 0,5 години, зусиль – 3000 Ккал.

Результати і прибуток оцінюються по відношенню до системи більш високого рівня (система управління, технологічний процес, виробництво, екологічна система і тому подібне); наприклад, у вигляді впливу на зменшення браку продукції, зниження трудовитрат, підвищення ефективності управління, зниження екологічного ризику тощо.

6. Виконавці, ОПР і керівники.

Виконавець – безпосередній вимірник (вимірники).

ОПР – експериментатор, постановник вимірювального завдання.

Керівник – науковий керівник проекту, науково-дослідної роботи, у рамках якої виконуються виміри (така робота може включати декілька експериментів, що виконуються на різних приладах).

7. Тип системи.

Вимірювальний пристрій – це технічна, замкнута, статична система; за перетворювальними можливостями відноситься до другого типу (змінюються окремі характеристики вхідного елементу).



8. Властивості системи.

Система є ієрархічно впорядкованою, оскільки складається з підсистем (п.1 цієї схеми). Система централізована, оскільки центром є датчик. Система є інерційною оскільки має кінцевий час встановлення свідчень і виміру. Система адаптивна, оскільки зберігає свої функції при зміні кваліфікації вимірника, умов вимірів (температури, вологості, тиску), при коливаннях електроживлення і інших обурюючих діях.

9. Прийняття рішення.

При прийнятті рішення про підвищення якості аналізованої системи (вимірювального пристрою) необхідно враховувати наступні зовнішні системи:

- споживачів, від яких залежать вимоги до якості продукції;
- постачальників, від яких залежить якість сировини і комплектуючих;
- технологічну систему, яка впливає на можливість поліпшення методів виміру і елементної бази;

- економічну систему, від якої залежать фінансові умови діяльності фірми і вибір стратегії (конкуренція, прибуток, ціноутворення, податки тощо).

Враховувати або не враховувати ту або іншу з перерахованих систем, залежить від того, які обмеження вона накладає на рішення, що приймається, а також від ресурсних можливостей фірми (фінансових, тимчасових, інформаційних).

Приклад 2.

Об'єкт аналізу – комп'ютер. **Задача** – забезпечення нормального функціонування комп'ютера.

Схема системного аналізу:

1. Система в цілому, повна система і підсистеми:

S1 – система виконавця (оператор, користувач);

S2 – система вирішуваних завдань (початкова інформація, джерела вхідної дії);

S3 – система живлення (електрична мережа);

S4 – система забезпечення і обслуговування (системне програмне забезпечення, інформаційні мережі, служби наладки і ремонту).

Повна система – комп'ютер, як сукупність функціональних підсистем.



При визначенні підсистем слід враховувати призначення комп'ютера – зберігання і обробка інформації.

Міркувати можна так:

1) початкову інформацію треба ввести в комп'ютер, отже має бути PS1 – система введення інформації;

2) інформацію треба обробити, отже має бути PS2 – система обробки інформації, наприклад, здійснює виконання арифметичних і логічних операцій;

3) обробкою треба управляти, отже має бути PS3 – система управління;

4) інформацію треба зберігати і багаторазово використовувати, тобто має бути PS4 – пам'ять;

5) нарешті, кінцеву інформацію треба представити в зручній формі, тобто має бути PS5 – система виводу.

2. *Оточуюче середовище* включає разом з переліченими вище зовнішніми системами S1–S4 також S5 – природне середовище, S6 – система навчання, S7 – економічна система (фірми-розробники, наприклад), S8 – технологічна система тощо.

3. Цілі і призначення системи і підсистем.

Призначення комп'ютера – зберігання і обробка інформації.

Призначення підсистем витікає з їх назв.

Мета задається набором умов і обмежень (відмітимо, що комп'ютер, як і інші технічні системи, є багатоцільовою системою) з наступного ряду:

– тип вирішуваної задачі (наприклад, редагування тексту певною мовою);

– вид тексту (наприклад, наукова стаття);

– обсяг тексту (наприклад, до 10 стор.);

– складність тексту (наявність малюнків, таблиць, формул);

– час редагування (наприклад, не більше 1 години);

– кінцева форма представлення тексту (наприклад, тип шрифту, розмір шрифту, параметри сторінки, абзацні відступи) і тощо.



4. Входи, ресурси і витрати.

Входом є початкова інформація про вирішувану задачу. До ресурсів відносяться: електроенергія, інформація, а також гроші, час і зусилля на рішення задачі.

Витрати – це кількісна оцінка витрати ресурсів, наприклад, кількість інформації – 1 Мбайт, добова витрата електроенергії – 0,5 КВт·година, витрати грошей (обслуговування, апаратне і програмне забезпечення, заробітна плата) – 20 у.о; витрати часу – 1 година.

5. Виходи, результати і прибуток.

Виходом є результат рішення задачі (інформація про рішення), наприклад, відредагований текст, схема, результат обчислення і тому подібне.

До результатів відносяться: інформація про рішення, представлена в зручній формі, а також заощадження часу, грошей і зусиль за рахунок рішення задачі на комп'ютері.

Прибуток – це кількісна оцінка економії, наприклад, економія грошей – 30 у.о., часу – 2 години.

Результати і прибуток оцінюються по відношенню до системи більш високого рівня (система управління, фінансові служби, наукові дослідження, проектні роботи тощо), наприклад, у вигляді зниження трудовитрат, підвищення ефективності управління, скорочення часу на обробку інформації.

6. Виконавці, ОПР і керівники.

Виконавець – оператор.

ОПР – кваліфікований користувач, постановник задачі.

Керівник – начальник підрозділу, в якому використовується комп'ютер.

7. Тип системи.

Технічна, відносно-закрита, статична, за перетворювальними можливостями відноситься до другого типу.

8. Властивості системи.

Система є ієрархічно впорядкованою, нецентралізованою (розподіленою), адаптивною, інерційною.



9. Прийняття рішення.

При прийнятті рішення про підвищення якості аналізованої системи (комп'ютера) необхідно враховувати наступні зовнішні системи:

виконавців (операторів, користувачів);

технологічну систему, яка впливає на можливість поліпшення функціональних можливостей системи (апаратне та програмне забезпечення);

економічну систему, від якої залежать фінансові умови обслуговування системи.

Враховувати або не враховувати ту або іншу з перерахованих систем, залежить від того, які обмеження вона накладає на рішення, що приймається, а також від ресурсних можливостей.



Лабораторна робота № 2. **Формалізований опис системи і аналіз її структури**

Мета роботи: освоєння методів формалізованого опису системи і аналізу її структури.

Завдання:

Процес створення корпоративної інформаційної системи представлений у вигляді системи, елементами якої є окремі модулі. Їх взаємозалежність задається матрицею інциденцій. За матрицею інциденцій необхідно впорядкувати модулі послідовно за логікою їх використання користувачем при реалізації певної задачі.

Кількість модулів задається таблицею 2.1.

Таблиця 2.1 – Варіанти завдання

№ варіанту	Кількість модулів
1-3	6
4-6	5
7-9	7
10-12	6
13-15	5
16-19	5
20-22	7

Елементи матриці інциденцій студент розставляє самостійно, враховуючи властивості матриці. Матрицю, ідентичну прикладу, використовувати забороняється.

Теоретичні відомості

Процес створення будь-якого об'єкту можна розглядати як систему, елементами якої є окремі елементи (операції, дії, модулі тощо). Ця процедура називається ранжируванням, тобто розташуванням в порядку черговості.



Приклад виконання

Визначимо систему:

$$S = \{X, R\},$$

де X – множина модулів: $X = (M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$;

R – відношення порядку: «реалізація модуля M_i передуює реалізації модуля M_j » (так – «1», ні – «0»).

Матриця інциденцій r , представлена таблицею:

Таблиця 2.2 – Матриця інциденцій r

Модулі	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
M_1	0	0	0	1	0
M_2	1	0	0	1	0
M_3	1	1	0	1	0
M_4	0	0	0	0	0
M_5	1	1	0	1	0

Крок 1. Складаємо вектор-рядок A_0 , рівний сумі рядків початкової матриці r :

$$A_0 = (3 \ 2 \ 0 \ 4 \ 0).$$

Нулі в рядку A_0 дають елементи, які кращі за всіх інших за відношенням R . Ці елементи утворюють порядковий рівень N_0 .

У нашому прикладі це M_3, M_5 .

Робиться формальний запис:

$$\{M_3, M_5\} - N_0.$$

Крок 2. Перетворимо рядок A_0 , а саме:

а) нулі замінімо знаком «X»;

б) виключимо з рядка A_0 значення, що відповідають «нульовим» елементам, тобто M_3, M_5 (в таблиці жовта заливка).

У результаті отримаємо рядок:

$A_1 = (1 \ 0 \ X \ 2 \ X)$ – знов перерахували суму елементів за виключенням M_3, M_5 .

Нові нулі в рядку A_1 дають елементи, які краще за інших (окрім вже виділених елементів M_3, M_5).

У нашому випадку це елемент M_2 (в таблиці блакитна заливка).

Він утворює порядковий рівень N_1 , тобто $\{M_2\} - N_1$.

Крок 3. Перетворимо рядок A_1 аналогічно кроку 2, у результаті отримаємо рядок:



$$A_2 = (0 \ X \ X \ 1 \ X).$$

Новий нуль, що з'явився, відповідає елементу M_1 (в таблиці зелена заливка), що утворює порядковий рівень $N_2: \{M_1\} - N_2$.

Крок 4. Перетворимо рядок A_2 , виключаючи значення, що відповідають «нульовому» елементу:

$$A_3 = (X \ X \ X \ 0 \ X).$$

Новий нуль відповідає елементу M_4 .

Робимо запис: $\{M_4\} - N_3$.

Результати показують, що елементи множини розташовуються за рівнями порядку таким чином:

$$N_0\{M_3, M_5\}, N_1\{M_2\}, N_2\{M_1\}, N_3\{M_4\}.$$

На першому кроці виділяються модулі M_3, M_5 , що утворюють порядковий рівень N_0 . Ці модулі реалізуються раніше усіх інших (їм не передуює ніяка інша операція). На другому кроці N_1 раніш за всіх інших, окрім вже виділених, реалізується модуль M_2 . На третьому кроці – модуль $M_1 - N_2$ і на четвертому – $M_4 - N_3$.

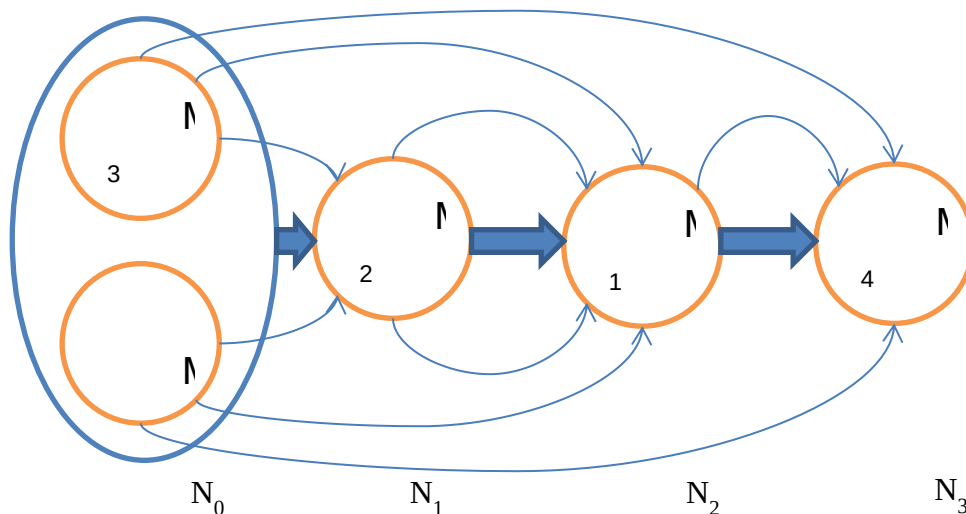


Рисунок 2.1 – Граф реалізації модулів

Висновок: система розбивається на 4 порядкові рівні. Першими реалізуються модулі рівня N_0 (M_3, M_5), а останніми – модулі рівня N_3 (M_4).



Лабораторна робота № 3. Ієрархічний аналіз структури складної системи

Мета роботи: освоєння методів ієрархічного аналізу структури складної системи.

Завдання:

Враховуючи, що за результатами тестування функціоналу інформаційної системи були виявлені типові помилки і проведено їх ранжирування за рядом ознак (виставлений пріоритет), побудуйте рівні порядку на множині несправностей по відношенню переваги («не менш важливий ніж»).

Результати ранжирування представлені у вигляді матриці інциденцій. Кількість помилок вказана у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Варіанти завдання

№ варіанту	Кількість помилок
1-3	7
4-6	8
7-9	7
10-12	8
13-15	8
16-19	8
20-22	7

Елементи матриці інциденцій студент розставляє самостійно, враховуючи властивості матриці. Матрицю, ідентичну прикладу, використовувати забороняється.

Підсумковий результат необхідно представити у вигляді порядкового графу.

Теоретичні відомості

Аналізована система представляється графом з циклами.

Для розв'язку задачі спочатку необхідно об'єднати елементи, пов'язані циклом, в групи (у класи еквівалентності).



Елементи x_i і x_j пов'язані циклом, якщо існує шлях з елементу x_i в елемент x_j і назад.

Шлях може бути прямим або опосередкованим, тобто через інші елементи.

Зокрема, при $i=j$ елемент x_i може замикатися на себе, тобто є циклічним елементом (рис. 3.1в). У матриці інциденцій цикл між елементами x_i , x_j представляється послідовністю одиниць у відповідних осередках, які зв'язують x_i і x_j , наприклад, якщо $(i, j) = 1$ і $(j, i) = 1$, то x_i , x_j пов'язані циклом (цьому випадку відповідає рис. 3.1а), якщо $(i, j) = 1$ і $(j, k) = 1$, $(k, i) = 1$, то x_i і x_j пов'язані циклом (см. рис. 3.1б) і так далі.

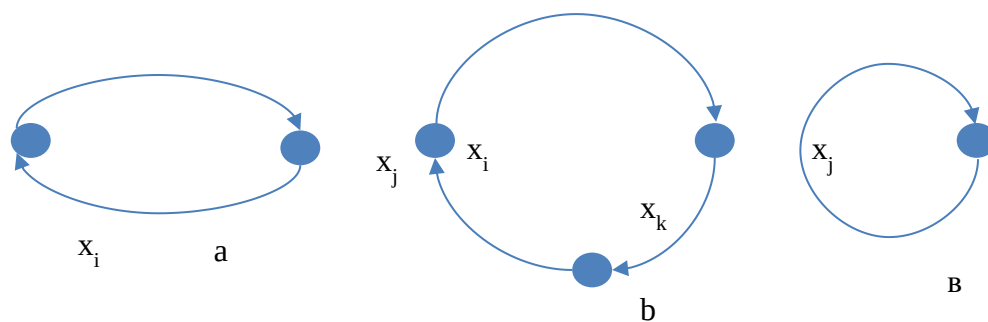


Рисунок 3.1 – Приклади зв'язків

Циклічний елемент в матриці інциденцій представляється одиницею в осередку (на головній діагоналі), що відповідає йому, наприклад, якщо $(i, i) = 1$, то елемент x_i циклічний. Після виконання вказаної операції об'єднання множина елементів виявляється розбитою на декілька класів еквівалентності, наприклад:

$C_1 = (x_1, x_5, x_6)$, $C_2 = (x_3, x_4)$, $C_3 = (x_2, x_7, x_{10})$, $C_4 = (x_8)$ і так далі.

Елементи в кожному класі пов'язані між собою циклами, тобто вважаються не відмінними.

Далі алгоритм виконання лабораторної роботи № 2 застосовується вже не до окремих елементів, а до класів C_1 , C_2 , C_3 , C_4 , оскільки ці класи утворюють простий граф без контурів.

Для побудови рівнів порядку на класах в початковій матриці усі одиниці в осередках матриці, що зв'язують елементи з одного класу, замінюються нулями. Після цього виділяються рівні порядку як в лабораторній роботі № 2. Підсумковий порядковий граф містить не окремі елементи, а класи.

Приклад виконання

Нехай матриця інциденцій r має вигляд (таблиця 3.2).

Таблиця 3.2 – Матриця інциденцій r

Помилки	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8
X_1	0	0	1	0	1	0	0	0
X_2	0	1	0	0	0	1	0	1
X_3	0	0	0	0	1	0	1	0
X_4	0	0	0	1	1	0	0	0
X_5	0	0	0	1	0	0	0	0
X_6	0	0	1	0	0	0	0	0
X_7	1	0	0	0	0	0	1	0
X_8	0	0	0	0	0	0	0	0

Легко бачити, що вектор-рядок A_0 , рівний сумі рядків початкової матриці, не містить нулів, тобто алгоритм лабораторної роботи № 2 застосувати неможливо.

Крок 1. Проводимо аналіз початкової матриці з метою виявлення циклів. Аналіз проводиться послідовно зверху вниз, починаючи з першого рядка. Кожен елемент повинен входити в один і тільки в один клас еквівалентності. Якщо якийсь елемент, наприклад, x_1 вже проаналізований і включений в клас еквівалентності, то до нього вже не повертаються при подальшому аналізі, тобто назад повернення немає. Клас еквівалентності може містити цикл, а може складатися з окремих (ізолюваних) елементів.

1-й рядок: початковий елемент x_1 .

Виявляємо його зв'язки з іншими елементами: x_1 пов'язаний з x_3 і x_5 .

Дивимося рядок x_3 . Наша мета – встановити, чи є зворотний шлях з x_3 в x_1 .

Елемент x_3 пов'язаний з x_5 і x_7 ; x_5 пов'язаний з x_4 (повернення), тобто шляху до x_1 немає.

Дивимося рядок x_7 : x_7 пов'язаний з x_1 (отримуємо цикл).

Відмічаємо також, що елемент x_7 – циклічний.

Повертаємося до рядка x_1 і розглядаємо другу гілку: x_1 - x_5 . Елемент x_5 пов'язаний з x_4 , тобто цей шлях до x_1 не веде.



Отже, маємо клас еквівалентності C_1 : $x_1 - x_3 - x_7$.

2-й рядок: початковий елемент x_2 .

x_2 пов'язаний з самим собою, тобто він циклічний, x_2 пов'язаний з x_6 .

Дивимось рядок x_6 : x_6 пов'язаний з x_3 (повернення), тобто до x_2 шляху немає і це порожня гілка.

Остаточно клас еквівалентності C_2 має вигляд: x_2 .

3-й рядок: початковий елемент x_3 . Він вже увійшов до класу C_1 , тобто аналізувати його не треба.

4-й рядок: початковий елемент x_4 . Він пов'язаний з самим собою, тобто він циклічний, а також з x_5 .

Дивимось рядок x_5 : елемент x_5 пов'язаний з x_4 , тобто маємо цикл.

Остаточно маємо клас C_3 : $x_4 - x_5$.

5-й рядок: початковий елемент x_5 . Він вже увійшов до класу C_3 , тобто аналізувати його не треба.

6-й рядок: початковий елемент x_6 . Він пов'язаний з x_3 (повернення), тобто циклу немає. Елемент x_6 – ізольований і утворює окремий клас еквівалентності C_4 : x_6 .

7-й рядок: початковий елемент x_7 . Він вже включений в клас C_1 , тобто аналізувати його не треба.

8-й рядок: початковий елемент x_8 . Він не пов'язаний ні з яким іншим елементом, тому є ізольованим і утворює окремий клас еквівалентності C_5 : x_8 .

Таким чином, система містить 5 класів еквівалентності.

Крок 2. Перетворення (занулення) початкової матриці, що полягає в тому, що для елементів, які входять до одного класу (пов'язаних одним циклом), одиниці, що відповідають зв'язку між ними, замінюються нулями.

1-й рядок: x_1 і x_3 пов'язані циклом, тому в осередку (1,3) 1 замінюється на 0;

x_1 і x_5 циклом не пов'язані, тому в осередку (1,5) залишається 1.

2-й рядок: x_2 – циклічний елемент, тому в осередку (2,2) 1 замінюється на 0;

x_2 і x_6 ; x_2 і x_8 циклом не пов'язані, тому в осередках (2,6) і (2,8) залишається 1.

3-й рядок: x_3 і x_5 циклом не пов'язані – залишається 1;

x_3 і x_7 пов'язані циклом, тому 1 замінюється на 0.



4-й рядок: x_4 – циклічний елемент – в осередку (4,4) 1 замінюється на 0;

x_4 і x_5 пов'язані циклом – в осередку (4,5) 1 замінюється на 0.

5-й рядок: x_5 пов'язаний циклом з x_4 – в осередку (5,4) 1 замінюється на 0.

6-й рядок: x_6 і x_3 циклом не пов'язані – в осередку (6,3) залишається 1.

7-й рядок: x_7 пов'язаний циклом з x_1 – в осередку (7,1) 1 замінюється на 0.

x_7 – циклічний елемент – в осередку (7,7) 1 замінюється на 0.

8-й рядок порожній.

Перетворена матриця представлена в таблиці 3.3.

Таблиця 3.3 – Перетворена матриця інцидентів

Помил ки	Х	Х	Х	Х	Х	Х	Х	Х
	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1			0		1			
x_2		0				1		1
x_3					1		0	
x_4				0	0			
x_5				0				
x_6			1					
x_7	0						0	
x_8								

Відмітимо, що зануленням ми нівелювали (усунули) відмінність між елементами, пов'язаними циклом, тобто вони стали невиразні між собою і матриця тепер циклів не містить.

Крок 3. До перетвореної матриці застосуємо алгоритм з лабораторної роботи № 2.

Утворюємо вектор-рядок A_0 , рівний сумі рядків початкової матриці:

$A_0 = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1)$.

«Нульові» елементи: (x_1, x_2, x_4, x_7) .



Порядковий рівень утворюють класи еквівалентності, а не окремі елементи, тобто доки не зберуться усі елементи, що входять в один клас, вони на цьому рівні не показуються.

У нашому випадку елементи x_1 і x_7 не складають класу (не вистачає x_3); аналогічно x_4 не утворює класу (не вистачає x_5); а ось елемент x_2 утворює клас еквівалентності C_2 , тому він складає порядковий рівень N_0 :

$$\{\{C_2\}\} - N_0.$$

Перетворимо рядок A_0 . Отримаємо рядок A_1 :

$$A_1 = (X \ X \ 1 \ X \ 1 \ 0 \ X \ 0).$$

«Нульові» елементи: (x_6, x_8) . Кожен з них утворює окремий клас, тому вони виділяються на цьому порядковому рівні N_1 :

$$\{\{C_4\}, \{C_5\}\} - N_1.$$

Перетворимо рядок A_1 , отримаємо рядок A_2 :

$$A_2 = (X \ X \ 0 \ X \ 1 \ X \ X \ X).$$

«Нульовий» елемент: (x_3) . Він разом з раніше виділеними елементами x_1, x_7 утворює клас еквівалентності C_1 , який і складає порядковий рівень N_2 :

$$\{\{C_1\}\} - N_2.$$

Перетворимо рядок A_2 , отримаємо рядок A_3 :

$$A_3 = (X \ X \ X \ X \ 0 \ X \ X \ X).$$

«Нульовий» елемент: (x_5) . Він разом з раніше виділеним елементом x_4 утворює клас C_3 , який і складає порядковий рівень N_3 :

$$\{\{C_3\}\} - N_3.$$

Остаточний результат має вигляд:

$$\begin{array}{cccc} \{\{C_2\}\} & \{\{C_4\}, \{C_5\}\} & \{\{C_1\}\} & \{\{C_3\}\} \\ N_0 & N_1 & N_2 & N_3 \end{array}$$

Представимо його у вигляді порядкового графа, в якому на рівні порядку (порядкову структуру) накладаються внутрішні зв'язки елементів (рисунок 3.1).

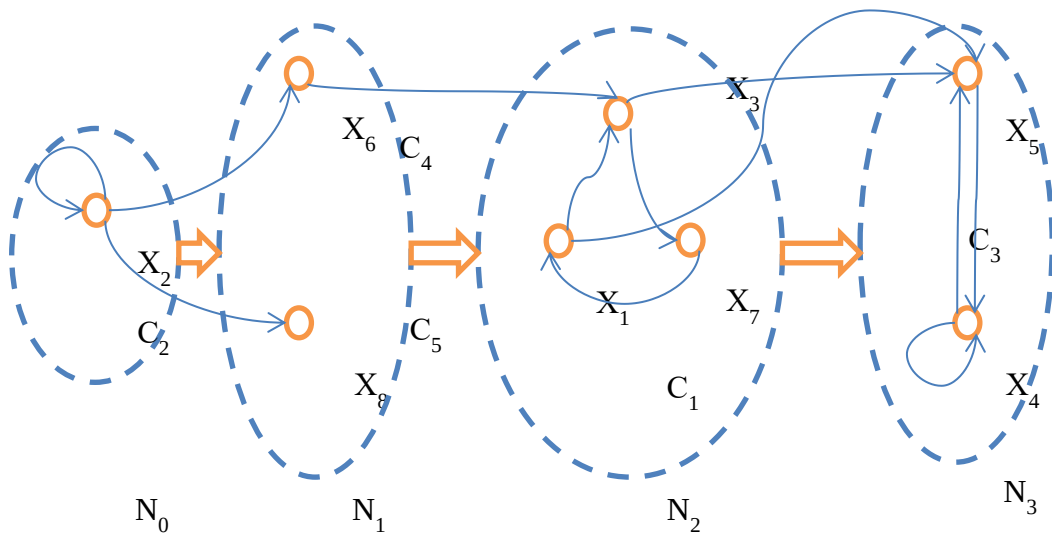


Рисунок 3.1 – Порядковий граф

Висновок: отже, система розбивається на 4 порядкові рівні. Найбільш пріоритетні класи помилок порядкового рівня N_0 (клас C_2), а найменш пріоритетні класи рівня N_3 (клас C_3).



Лабораторна робота № 4. Якісний аналіз комплексної структури системи

Мета роботи: освоєння методів аналізу структури системи через визначення комплексів та типу відношень між елементами системи.

Завдання:

У таблиці 4.1 надані дві множини X (методи) і Y (завдання), тип відношення R – відповідність.

Необхідно провести топологічний аналіз системи, а саме:

- 1) визначити перший структурний вектор Q і вектор перешкод D комплексу $K_X(Y, R)$ або $K_Y(X, R)$;
- 2) визначити число незв'язних компонентів комплексу, міру зв'язності і ексцентриситет кожного симплексу, що входить в комплекс;
- 3) вказати, який з симплексів є найбільш адаптованим;
- 4) визначити наскільки сильно пов'язаний комплекс.

Таблиця 4.1 – Варіанти завдання

№ варіанту	X (методи)	Y (завдання)
1-3	6	6
4-6	5	7
7-9	7	5
10-12	6	6
13-15	5	7
16-19	5	7
20-22	7	5

Зв'язок елементів X (методів) і Y (завдань) задається матрицею інциденцій. Елементи матриці інциденцій студент розставляє самостійно, враховуючи властивості матриці. Матрицю, ідентичну прикладу, використовувати забороняється.

Теоретичні відомості

Мета цього завдання – освоєння методу аналізу багатовимірної структури систем (багатовимірних зв'язків в системах) за допомогою топологічного аналізу.

Для вивчення структури взаємозв'язків елементів системи використовується так званий топологічний аналіз, або аналіз зв'язності, що оперує поняттями комплексу, симплексу, q -зв'язності і екцентриситета. Цей аналіз визначає зв'язність підсистем в системі.

У загальному вигляді систему можна представити у вигляді множини пар елементів, пов'язаних деяким відношенням R . Тип відношення може бути різним: відповідність, подібність, схожість, відмінність і тому подібне:

$$S = \{(x, y) : x \in X, y \in Y, xRy\}.$$

Відношення R породжує множину багатовимірних зв'язків між елементами. Аналізувати можна як зв'язки елементів множини X , так і зв'язки елементів множини Y .

Будь-який елемент множини X (чи Y) із зв'язками називається **симплексом**.

Об'єднання симплексів утворює **комплекс**.

Позначення симплексу $\sigma_X(Y, R)$ або $\sigma_Y(X, R)$.

Позначення комплексу $K_X(Y, R)$ або $K_Y(X, R)$.

Задача вивчення структури зв'язності комплексу K зводиться до побудови класів q -еквівалентності.

Для кожного значення розмірності $q = 0, 1, \dots, \dim K$ (де $\dim K$ – максимальна розмірність комплексу) можна визначити число різних класів еквівалентності θ_q .

Назвемо цю операцію q -аналізом комплексу K , а вектор $\theta = (\theta_{\dim K}, \dots, \theta_1, \theta_0)$ – **першим структурним вектором комплексу**.

Симплекс $\sigma_Y(X, R)$ називається q -мірним (зв'язковим), якщо він містить не менше ніж $q+1$ елементів, що задовольняють відношенню R (число одиниць в рядку матриці інциденцій, що відповідає симплексу).

Якщо два симплекси q -зв'язні, то вони також $q-1, q-2, \dots, 0$ -зв'язані в комплексі K .

Слід мати на увазі, що зі зменшенням міри зв'язності деякі симплекси об'єднуються в один компонент. Для об'єднання двох симплексів необхідно, щоб для міри зв'язності q , вони мали не менше $q+1$ спільних зв'язків (число одиниць в одних і тих же стовпцях матриці інциденцій).



Існування на рівні $q = n$ більш ніж одного компонента означає, що існує два n мірних симплекси (метода), які не являються n -зв'язаними.

Введемо вектор перешкод:

$$D = \theta - I,$$

де I – одиничний вектор.

Компоненти вектору D є мірою перешкоди вільному обміну інформацією в комплексі на кожному рівні розмірності (зв'язності).

Якщо на якомусь рівні компонент вектору D рівний 0, то перешкода відсутня.

Вектор перешкод є індикатором можливих варіантів вибору вирішувальних завдань для методів на кожному рівні зв'язності.

Розглянутий q -аналіз ефективний при вивченні зв'язності структури, але не дає інформації про те, як кожен окремий симплекс входить в комплекс.

Для оцінки міри інтегрованості кожного симплексу в структурі усього комплексу використовують поняття ексцентриситету.

Ексцентриситет визначається формулою:

$$\varepsilon(\sigma) = (\bar{q} - \tilde{q}) / (\tilde{q} + 1),$$

де $\bar{q}$ – максимальна розмірність (міра зв'язності) симплексу σ ;

$\tilde{q}$ – найбільше значення q , при якому σ стає зв'язаним з яким-небудь іншим симплексом.

Якщо симплексу відповідає рядок з нулів в матриці інциденцій, то формально вважають для нього $\bar{q} = \tilde{q} = -1$.

Приклад виконання

Побудуйте матрицю інциденцій для двох множин об'єктів по відношенню відповідності. Проведіть топологічний аналіз системи за цим відношенням. Перша множина X – математичні методи (M), а друга Y – вирішувані методами завдання (Z); $X = \{M_1, M_2, \dots, M_6\}$; $Y = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_7\}$.

Матриця інциденцій задана в таблиці 4.1.

Вона відповідає відношенню відповідності R : «Метод M_i відповідає завданню Z_k , якщо останнє можна вирішити цим методом» (в клітині (i, k) матриці стоїть 1, якщо відношення виконується, і 0 – якщо ні).

Таблиця 4.2 – Матриця інциденцій

Методи	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7
--------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------



M_1	1	1	1	1	1	0	0
M_2	0	0	1	1	0	1	0
M_3	0	1	1	0	0	1	1
M_4	0	0	1	1	0	0	0
M_5	0	0	0	0	0	0	0
M_6	0	1	0	0	0	0	0

Проведемо топологічний аналіз.

Аналізуватимемо комплекс методів. Комплекс $K_X(Y, R)$ включає 6 симплексів, що мають різну зв'язність.

Аналіз розпочинається з найбільшої зв'язності, а закінчується зв'язністю, рівною нулю.

За матрицею інциденцій визначаємо найбільшу зв'язність, для чого знаходимо рядок з найбільшим числом одиниць. Це рядок M_1 , що містить п'ять одиниць, отже найбільша зв'язність комплексу дорівнює:

$$q = 5 - 1 = 4.$$

На цьому рівні зв'язності є один компонент $\{M_1\}$, тобто $\theta_4 = 1$.

Знижуємо рівень зв'язності на одиницю.

На рівні зв'язності $q = 3$ маємо 2 симплекси M_1 і M_3 , оскільки їм в матриці інциденцій відповідають рядки з не менше ніж чотири одиницями. Тепер потрібно визначити чи можна цей симплекс об'єднати в один компонент або ні, тобто відрізняються вони своїми зв'язками або ні.

Відповідно до визначення, щоб на рівні зв'язності $q = 3$ симплекс M_1 і M_3 , були невиразні, тобто їх можна було об'єднати в один компонент, вони повинні мати по $3+1 = 4$ спільні стовпці з одиницями. У нашому прикладі таких стовпців всього два 3_2 і 3_3 , тобто симплекси об'єднати неможна. Отже, на рівні $q = 3$ маємо два різні компоненти $\{M_1\}$, $\{M_3\}$, тобто $\theta_3 = 2$.

Знову знижуємо розмірність на одиницю.

На рівні $q = 2$ маємо три симплекси M_1 , M_3 , M_2 (їм в матриці інциденцій відповідають рядки з не менше ніж $q+1=3$ одиницями). Перевіряємо для кожної пари симплексів умови об'єднання в один компонент. Для цього вони повинні мати по $q+1 = 3$ спільні стовпці з одиницями, що не виконується. Отже, на рівні $q = 2$ маємо три компоненти $\{M_1\}$, $\{M_3\}$, $\{M_2\}$ і $\theta_2 = 3$.

На наступному рівні зв'язності $q = 1$ маємо чотири симплекси M_1 , M_2 , M_3 , M_4 (їм відповідають рядки з $q+1 = 2$ одиницями).



Перевіримо умову об'єднання. Для об'єднання якоїсь пари симплексів в один компонент вистачає, щоб були 2 спільні стовпці з одиницями. Умови виконуються. Так, наприклад, симплекси M_1 і M_2 мають спільні стовпці Z_3, Z_4 ; симплекси M_2 і M_3 мають спільні стовпці Z_3, Z_6 ; симплекси M_2 і M_4 мають спільні стовпці Z_3, Z_4 . Отже, всі симплекси пов'язані двома спільними стовпцями, тобто їх всі можна об'єднати в один компонент $\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ і $\theta_1 = 1$.

Нарешті, на рівні $q = 0$ аналогічно визначаємо, що всі симплекси можна об'єднати в один компонент (окрім симплексу M_5 , якому відповідає нуль-рядок).

Результати аналізу мають вигляд:

$q = 4; \theta_4 = 1; \{M_1\};$

$q = 3; \theta_3 = 2; \{M_1\}, \{M_3\};$

$q = 2; \theta_2 = 3; \{M_1\}, \{M_3\}, \{M_2\};$

$q = 1; \theta_1 = 1; \{M_1, M_2, M_3, M_4\};$

$q = 0; \theta_0 = 1; \{\text{всі, виключаючи } M_5\}.$

Перший структурний вектор комплексу рівний: $\theta = (1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 1)$.

Вид вектору показує, що відносно методів комплекс сильно пов'язаний для великих і малих значень q , а для проміжних значень $q = 3$ і $q = 2$ він розпадається на декілька незв'язних компонентів.

Визначимо вектор перешкод $D = \theta - I = (0 \ 1 \ 2 \ 0 \ 0)$. Він показує, що є перешкода в обміні вирішувальними задачами на рівнях зв'язності $q=3$ і $q=2$.

Для оцінки міри інтегрованості симплексів в комплексі розрахуємо ексцентриситет: $\varepsilon(\sigma) = (\bar{q} - \tilde{q}) / (\tilde{q} + 1)$.

Результати зведені в таблиці 4.3.

Таблиця 4.3 – Ексцентриситет

Методи	$\bar{q}$	$\tilde{q}$	Ексцентриситет
M_1	4	1	3/2
M_2	2	1	1/2
M_3	3	1	1
M_4	1	1	0
M_5	-1	-1	∞
M_6	0	0	0



Висновки: результати розрахунків показують, що найбільш інтегрованим є M_1 , тобто цей метод найбільш адаптований до рішення сукупності завдань.



Лабораторна робота № 5.

Поведінка складних систем. Врахування фактору часу

Мета роботи: навчитися визначати характер поведінки систем на основі графічного і аналітичного аналізу часових рядів.

Завдання:

– визначити характер поведінки системи в залежності від виду різницевого рівняння, побудувати графіки поведінки систем. Визначити точку рівноваги кожної системи, якщо $y_0 = k$, де k – номер у списку групи.

Рівняння поведінки системи:

а) $y_t = (1 + 0, k) \cdot y_{t-1} + (k + 1);$

б) $y_t = a \cdot y_{t-1} + (k + 1);$

в) $y_t = -a \cdot y_{t-1} + (k + 1);$

– перевірити динамічний ряд на наявність автокореляції, використовуючи тест Дарбіна-Уотсона. При розрахунку автокореляції в залишках регресії, в разі, якщо коефіцієнт детермінації для лінійної регресії не перевищує 0,6; слід використовувати нелінійну регресію з найбільшим коефіцієнтом. Побудувати на базі вихідного часового ряду тимчасові ряди з лагом від 1 до 5; розрахувати коефіцієнти кореляції і побудувати корелограму.

Варіанти обираються за списком академічної групи.

Таблиця 5.1 – Вихідні дані

№ варіанту	a	№ варіанту	a	№ варіанту	a
1	0,1	11	0,25	21	0,22
2	0,2	12	0,35	22	0,34
3	0,3	13	0,45	23	0,47
4	0,4	14	0,55	24	0,56
5	0,5	15	0,65	25	0,31
6	0,6	16	0,75	26	0,29
7	0,7	17	0,85	27	0,64
8	0,8	18	0,95	28	0,76
9	0,9	19	0,05		
10	0,15	20	0,12		



Таблиця 5.2 – Вихідні дані

Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3	Варіант 4	Варіант 5	Варіант 6	Варіант 7	Варіант 8	Варіант 9	Варіант 10
150,2471	147,5394	146,9918	148,6753	140,2795	158,3519	152,3446	0,897871	152,5807	152,9302
150,905	147,3969	147,7543	148,27	140,0946	159,001	150,3648	0,807561	153,1847	152,7981
152,7407	147,7334	145,7072	149,3327	140,895	160,9937	149,6818	0,551264	155,93	154,2924
152,0478	148,429	147,6283	147,1104	140,585	160,685	148,6588	0,441947	157,4736	154,7939
151,1165	148,9487	147,8517	146,3617	140,3662	161,6466	148,3074	0,386358	157,2725	155,4699
152,9302	148,4493	147,5454	146,3599	140,5594	159,5554	148,0481	0,445526	155,7668	155,4584
152,7981	149,0543	147,0376	146,3983	141,5084	159,8802	148,055	0,345779	156,0237	156,0823
154,2924	149,1717	146,3584	145,6027	141,3917	161,135	148,5687	0,213077	155,774	156,8554
154,7939	150,982	146,3584	146,1892	142,5342	161,6182	147,8517	0,20246	153,1754	155,6996
155,4699	150,5805	145,4769	145,0761	142,9494	162,3378	147,0354	0,183887	152,8412	156,1087
155,4584	150,5227	144,2604	145,6634	143,8368	162,454	147,1798	0,196954	151,4533	155,331
156,0823	149,8599	143,7921	145,7148	143,2349	162,7638	147,5735	0,308303	151,8501	151,319
156,8554	148,9381	143,3827	146,2654	144,3386	163,5544	147,1077	0,551676	153,4113	151,9746
155,6996	149,6291	144,2878	144,6041	144,8356	165,2577	146,7965	0,441802	152,543	150,2471
156,1087	149,9571	145,5589	143,6069	145,8456	165,4695	146,8721	0,386087	152,6112	150,905
155,331	150,3802	145,6888	145,0361	146,0036	166,2418	147,2382	0,445837	152,4011	152,7407
156,2821	150,9906	145,9028	145,6642	147,5647	166,7184	147,4391	0,345725	151,6666	152,0478
156,7578	151,0309	145,5085	148,4522	146,678	166,8753	147,4281	0,212726	151,3852	151,1165
156,5265	151,3167	146,3602	148,7543	147,2047	167,6671	147,6144	0,202602	152,2997	151,6061
157,4042	150,8511	145,7951	148,8962	147,3007	168,814	147,691	0,183876	151,9875	152,3738

Таблиця 5.3 – Вихідні дані (продовження)

Варіант 11	Варіант 12	Варіант 13	Варіант 14	Варіант 15	Варіант 16	Варіант 17	Варіант 18	Варіант 19	Варіант 20
167,7597	153,1438	25,9511	27,9453	27,7703	380,1714	24,958	27,677	366,4158	29,0477
167,4119	152,8784	25,7583	27,9164	27,9453	376,7956	24,6678	27,4988	370,9717	28,9639
165,4488	152,1382	25,4657	28,1405	27,9164	380,9578	24,6028	27,3341	369,6799	28,6598
163,7783	152,7965	25,212	27,9793	28,1405	380,8787	24,5198	27,4386	373,0745	28,7515
164,3605	157,1015	25,224	28,0472	27,9793	380,1253	24,4802	27,6643	372,431	28,6600
165,9282	159,3941	25,227	28,1879	28,0472	383,4365	24,4897	27,4663	374,739	28,6600
164,3302	160,8334	25,3896	28,158	28,1879	383,5471	24,3628	27,7969	376,7931	29,2537
167,1866	160,5071	25,269	28,2578	28,158	383,5471	24,0422	27,8069	379,8219	29,1245
167,6403	160,1445	25,101	28,1018	28,2578	374,8483	24,0676	27,6158	379,8871	29,2151
166,3107	159,6469	25,0949	27,993	28,1018	374,9793	24,1958	27,2945	380,6201	28,884
163,4769	159,5312	24,8641	28,0892	27,993	375,53	24,1939	27,1903	373,3646	28,9442
162,6167	158,1078	24,8726	28,3713	28,0892	372,3096	24,4712	27,2418	370,0824	28,7681
161,4843	157,4126	25,0366	28,4599	28,3713	371,8717	24,337	26,9366	367,651	28,5708
160,2805	158,6856	24,7957	28,5316	28,4599	373,4567	24,2883	26,5469	374,2175	28,6029
158,495	158,4143	24,555	28,6451	28,5316	370,7514	24,2222	26,5685	373,7567	28,2565
158,1327	159,2375	24,327	28,5111	28,6451	370,5596	23,9486	26,5057	370,9411	28,3324
157,9121	158,0151	24,5221	28,7075	28,5111	367,4577	23,9052	26,1934	369,1766	27,8217
155,7783	158,296	24,7859	28,8121	28,7075	367,5399	24,1156	26,3026	368,5816	27,7253
155,8807	158,485	24,8777	28,9097	28,8121	366,4557	23,8882	26,1486	365,5809	27,7253
154,6224	157,8601	24,895	28,8345	28,9097	367,6964	23,8132	25,852	363,7928	27,7253



Теоретичні відомості. Поведінка динамічних систем

Динамічні моделі поділяються на безінерційні та інерційні.

Безінерційна модель, якщо в її опис входять величини, зафіксовані тільки в даний момент часу.

Інерційна модель – модель з лагом:

$$y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-n}).$$

Дискретні динамічні моделі найточніше описуються різницевиими рівняннями.

Рівняння різниці, якщо пов'язує значення деякого показника в теперішній час з його значенням в минулому.

Різницевим рівнянням 1-го порядку називається рівняння виду:

$$y_t = a_1 \cdot y_{t-1} + b,$$

де, a_1, b – коефіцієнти; y_t – економічний показник.

Якщо $b \neq 0$, то рівняння неоднорідне.

Якщо $b = 0$, то рівняння однорідне.

Вирішимо однорідне рівняння:

$$y_t = a_1 \cdot y_{t-1} \rightarrow y_t = A \cdot a_1^t.$$

Рішення неоднорідного рівняння:

$$y_t = a_1 \cdot y_{t-1} + b \rightarrow y_t = A \cdot a_1^t + \frac{b}{1 - a_1},$$

де A – константа.

З урахуванням початкових умов:

$$y_0 = A \cdot a_1^0 + \frac{b}{1 - a_1} = A + \frac{b}{1 - a_1} \rightarrow$$

$$A = y_0 - \frac{b}{1 - a_1} = y_0 + \frac{b}{a_1 - 1}.$$

Рішення з початковими умовами:

$$y_t = \left(y_0 + \frac{b}{a_1 - 1} \right) \cdot a_1^t + \frac{b}{1 - a_1}.$$

Теоретичні відомості. Аналіз часових рядів

Опис поведінки динамічної системи здійснюється за допомогою аналізу вихідного параметра, представленого у вигляді часового ряду. Наприклад, представленого за допомогою рівняння регресії виду:

$$y_t = a + \sum_{j=1}^k b_j \cdot x_{jt} + \varepsilon_t,$$

де k – число незалежних змінних моделі регресії.

Для кожного моменту часу t значення ε_t (залишків) визначається за формулою:

$$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t.$$

Вивчаючи послідовність залишків, можна побудувати графік їх залежності від часу. Відповідно до передумов методу найменших квадратів залишки повинні бути випадковими (рис. 5.1, а). Однак при моделюванні часових рядів іноді зустрічається ситуація, коли залишки містять тенденцію (рис. 5.1, б і в) або циклічні коливання (г). Це говорить про те, що кожне наступне значення залишків залежить від попередніх. В цьому випадку є автокорреляція залишків.

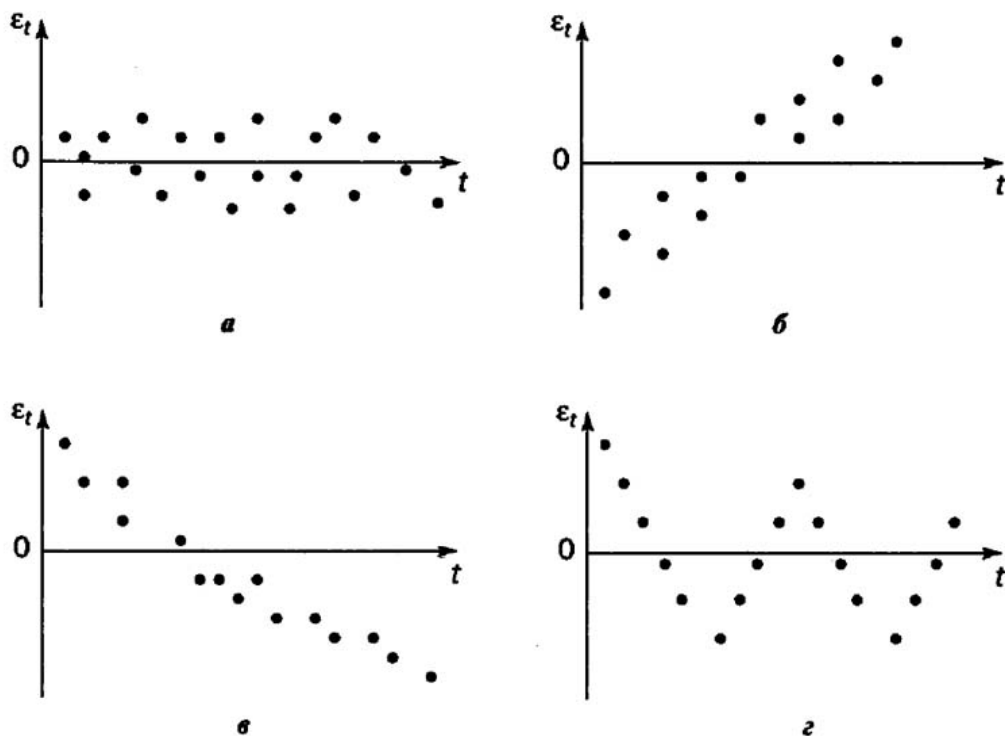


Рисунок 5.1 – Моделі залежності залишків від часу

Причиною автокорреляції є той факт, що в якості істотних факторів, що впливають на значення вихідної змінної, виступають лагові значення змінних, включених до моделі.

Автокорреляція визначається за допомогою критерію Дарбіна-Уотсона:



$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2}, 0 \leq d \leq 4.$$

Алгоритм виявлення автокореляції залишків за критерієм Дарбіна-Уотсона

Було висунуто гіпотезу про відсутність автокореляції залишків. Альтернативні гіпотези: про наявність позитивної або негативної автокореляції в залишках. Потім за таблицями визначаються критичні значення критерію Дарбіна-Уотсона d_L і d_U для заданого числа спостережень і числа незалежних змінних моделі при рівні значущості α (зазвичай 0,95). За цими значеннями відрізок $[0; 4]$ розбивають на п'ять відрізків.

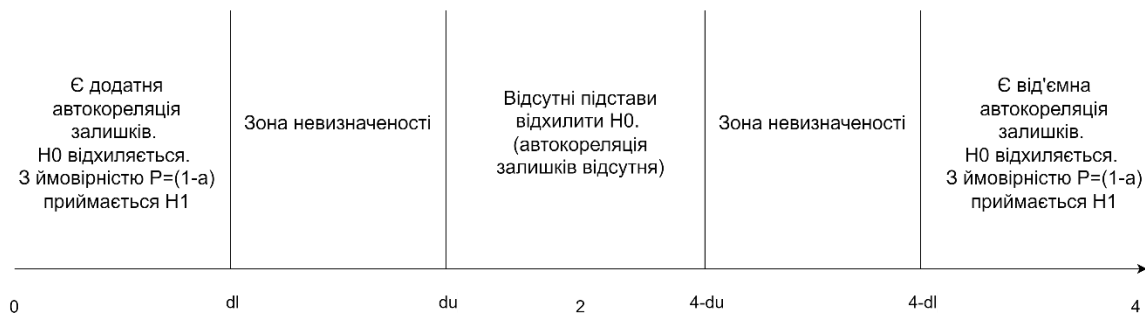


Рисунок 5.2 – Вісь значень критерію Дарбіна-Уотсона

Якщо розрахункове значення критерію Дарбіна-Уотсона потрапляє в зону невизначеності, то підтверджується існування автокореляції залишків і гіпотезу відхиляють.

Приклад виконання

1. Визначення характеру поведінки системи.

В загальному виді різницевого рівняння першого порядку має вигляд:

$$y_t = a_1 \cdot y_{t-1} + b,$$

де a і b – коефіцієнти різницевого рівняння.

Розв'язок різницевого рівняння першого порядку:



$$y_t = Aa_1^t + \frac{b}{1 - a_1},$$

де постійна A залежить від початкових умов ($t = 0$; $y_0 = y(t = 0)$):

$$y_0 = Aa_1^0 + \frac{b}{1 - a_1} \rightarrow A = y_0 - \frac{b}{1 - a_1}.$$

Розв'язок різницевого рівняння першого порядку з урахуванням початкових умов:

$$y_t = \left(y_0 - \frac{b}{1 - a_1} \right) a_1^t + \frac{b}{1 - a_1}.$$

Точка рівноваги визначається як:

$$r = \frac{b}{1 - a_1}.$$

В нашому випадку системи описуються наступними рівняннями:

Система 1; $y_t = 1.11y_{t-1} + 12$.

Система 2: $y_t = 0.25y_{t-1} + 12$.

Система 3: $y_t = -0.25y_{t-1} + 12$.

Знайдемо точки рівноваги для кожної з систем:

$$r_1 = \frac{12}{1 - 1.11} = \frac{12}{-0.11} = -109.09.$$

$$r_2 = \frac{12}{1 - 0.25} = \frac{12}{0.75} = 16.$$

$$r_3 = \frac{12}{1 - (-0.25)} = \frac{12}{1.25} = 9.6.$$

Відобразимо графіки функцій систем і відповідні точки рівноваги (рис. 1–3).

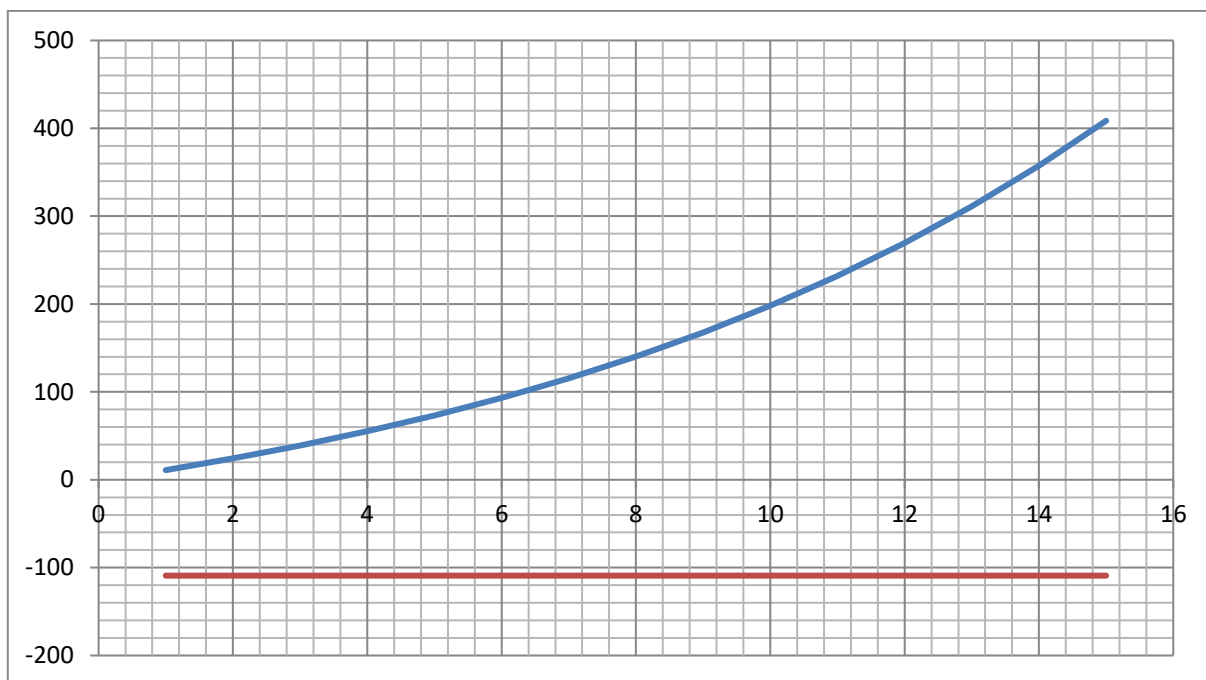


Рис. 1 – Динаміка системи $y_t = 1.11y_{t-1} + 12$

Висновок для динамічної системи 1: маємо нестійку поведінку системи, про що свідчить віддалення графіка від точки рівноваги.

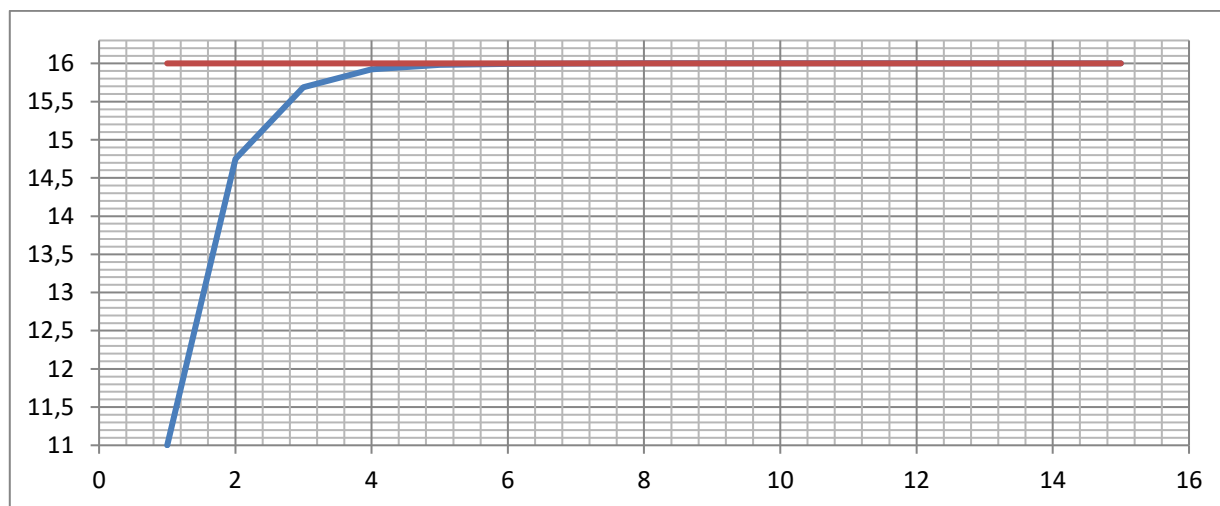


Рис. 2 – Динаміка системи $0.25y_{t-1} + 12$

Висновок для динамічної системи 2: динамічна система має асимптотичну стійкість (монотонну сходимість до точки рівноваги).

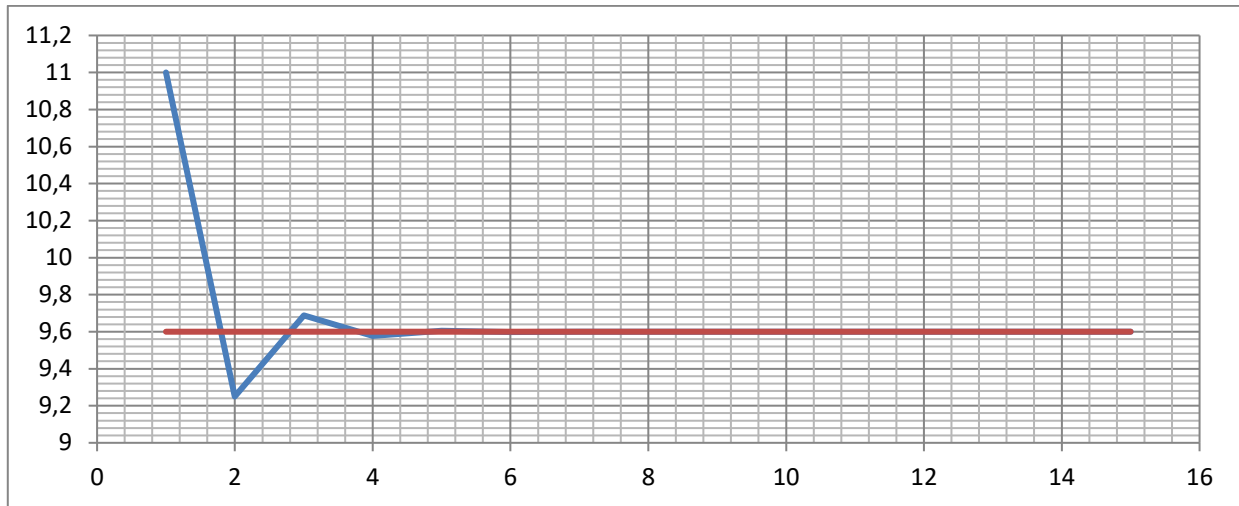


Рис. 3 – Динаміка системи $y_t = -0.25y_{t-1} + 12$

Висновок для динамічної системи 3: динамічна система демонструє стійку поведінку, бо бачимо наближення до точки рівноваги у вигляді затухаючих коливань.

2. Перевірка динамічного ряду на наявність автокореляції, використовуючи тест Дарбіна-Уотсона.

Вхідні дані вносимо до таблиці MS Excel (змінну позначимо як y), рис. 4. Також будуємо часові ряди з лагом -1, -2, -3, -4, -5 (змінні позначимо як $y(t-1)$, $y(t-2)$, $y(t-3)$, $y(t-4)$, $y(t-5)$ відповідно).

Далі визначаємо коефіцієнти кореляції для кожного набору даних: y та $y(t-1)$; y та $y(t-2)$; y та $y(t-3)$, далі аналогічно (рис. 5).

	A	B	C	D	E	F	G
1	t	y	y(t-1)	y(t-2)	y(t-3)	y(t-4)	y(t-5)
2	1	167,76	-	-	-	-	-
3	2	167,412	167,76	-	-	-	-
4	3	165,449	167,412	167,76	-	-	-
5	4	163,778	165,449	167,412	167,76	-	-
6	5	164,361	163,778	165,449	167,412	167,7597	-
7	6	165,928	164,361	163,778	165,449	167,4119	167,7597
8	7	164,33	165,928	164,361	163,778	165,4488	167,4119
9	8	167,187	164,33	165,928	164,361	163,7783	165,4488
10	9	167,64	167,187	164,33	165,928	164,3605	163,7783
11	10	166,311	167,64	167,187	164,33	165,9282	164,3605
12	11	163,477	166,311	167,64	167,187	164,3302	165,9282
13	12	162,617	163,477	166,311	167,64	167,1866	164,3302
14	13	161,484	162,617	163,477	166,311	167,6403	167,1866
15	14	160,281	161,484	162,617	163,477	166,3107	167,6403
16	15	158,495	160,281	161,484	162,617	163,4769	166,3107
17	16	158,133	158,495	160,281	161,484	162,6167	163,4769
18	17	157,912	158,133	158,495	160,281	161,4843	162,6167
19	18	155,778	157,912	158,133	158,495	160,2805	161,4843
20	19	155,881	155,778	157,912	158,133	158,495	160,2805
21	20	154,622	155,881	155,778	157,912	158,1327	158,495

Рис. 4 – Вихідні дані

КОРРЕЛ							
=КОРРЕЛ(\$B\$7:\$B\$21;G7:G21)							
	A	B	КОРРЕЛ(массив1; массив2)			F	G
1	t	y	y(t-1)	y(t-2)	y(t-3)	y(t-4)	y(t-5)
2	1	167,7597	-	-	-	-	-
3	2	167,4119	167,76	-	-	-	-
4	3	165,4488	167,412	167,76	-	-	-
5	4	163,7783	165,449	167,412	167,76	-	-
6	5	164,3605	163,778	165,449	167,412	167,7597	-
7	6	165,9282	164,361	163,778	165,449	167,4119	167,7597
8	7	164,3302	165,928	164,361	163,778	165,4488	167,4119
9	8	167,1866	164,33	165,928	164,361	163,7783	165,4488
10	9	167,6403	167,187	164,33	165,928	164,3605	163,7783
11	10	166,3107	167,64	167,187	164,33	165,9282	164,3605
12	11	163,4769	166,311	167,64	167,187	164,3302	165,9282
13	12	162,6167	163,477	166,311	167,64	167,1866	164,3302
14	13	161,4843	162,617	163,477	166,311	167,6403	167,1866
15	14	160,2805	161,484	162,617	163,477	166,3107	167,6403
16	15	158,495	160,281	161,484	162,617	163,4769	166,3107
17	16	158,1327	158,495	160,281	161,484	162,6167	163,4769
18	17	157,9121	158,133	158,495	160,281	161,4843	162,6167
19	18	155,7783	157,912	158,133	158,495	160,2805	161,4843
20	19	155,8807	155,778	157,912	158,133	158,495	160,2805
21	20	154,6224	155,881	155,778	157,912	158,1327	158,495
22			0,94644	0,87698	0,80415	0,733762	G7:G21)

Рис. 5 – Розрахунок коефіцієнтів кореляції



Будуємо корелограму (рис. 6).

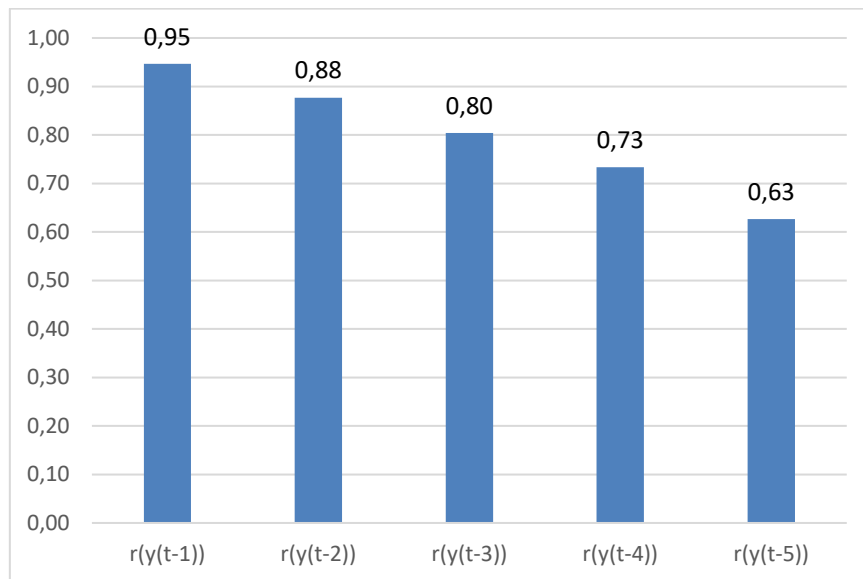


Рис. 6 – Корелограма (коефіцієнти кореляції)

Як бачимо, спостерігається очікувана тенденція – чим віддалініше подія від сучасного, тим менше вона впливає на дійсність. Про це свідчить той факт, що з поглибленням у часі (зі зростанням лагу) коефіцієнти кореляції зменшуються (тобто зв'язок (вплив) поступово втрачається). Найменше значення коефіцієнту кореляції характерне для часового ряду з лагом 5.

Для визначення коефіцієнта Дарбіна-Уотсона скористаємося формулою:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^n (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n \varepsilon_t^2}, \quad 0 \leq d \leq 4.$$

Для розрахунку залишків для даного часового ряду скористаємося наступною формулою:

$$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t,$$

де y_t – значення поточного часового ряду;

$\hat{y}_t$ – прогнозовані значення, визначені за допомогою рівняння регресії.

Для визначення прогнозних значень необхідно визначити рівняння регресії. Скористаємося рівнянням лінії тренду, яке найбільш точно відбиває поведінку вихідного часового ряду (рис. 7).

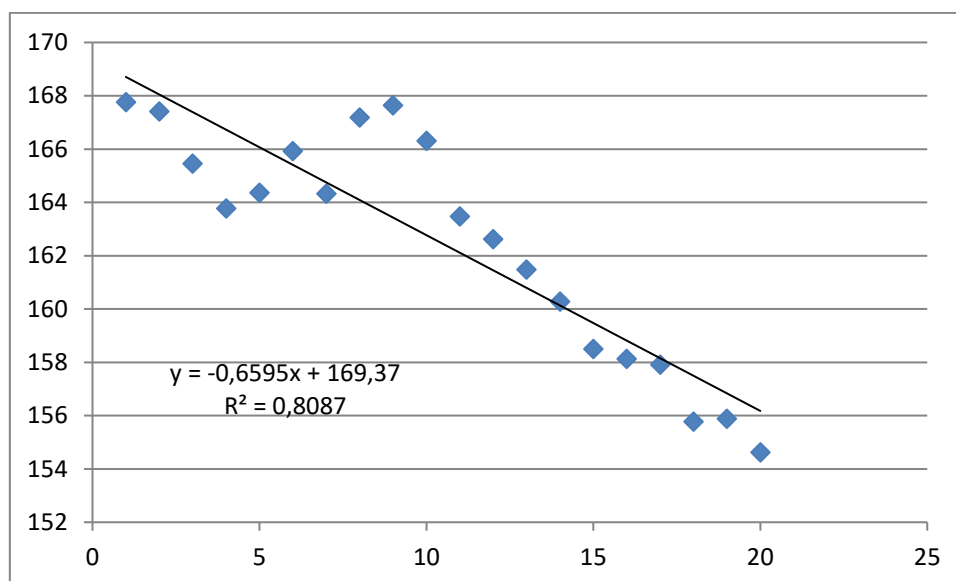


Рис. 7 – Лінійний тренд

Як бачимо з рис. 7 коефіцієнт детермінації дорівнює 0,81, що свідчить про достатню адекватність рівняння регресії.

Далі розраховуємо критерій Дарбіна-Уотсона (рис. 8).

J2		f ₂ = -0,6595*A2+169,37														
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	
1	t	y	y(t-1)	y(t-2)	y(t-3)	y(t-4)	y(t-5)		y(t)	$\bar{y}_t$	$\varepsilon(t)$	$\varepsilon(t-1)$	$\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)$	$(\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1))^2$	$\varepsilon(t)*\varepsilon(t)$	
2	1	167,7597	-	-	-	-	-		167,76	168,71	-0,95	-	-	-	0,90	
3	2	167,4119	167,76	-	-	-	-		167,412	168,05	-0,64	-0,95	0,31	0,10	0,41	
4	3	165,4488	167,412	167,76	-	-	-		165,449	167,39	-1,94	-0,64	-1,30	1,70	3,77	
5	4	163,7783	165,449	167,412	167,76	-	-		163,778	166,73	-2,95	-1,94	-1,01	1,02	8,72	
6	5	164,3605	163,778	165,449	167,412	167,7597	-		164,361	166,07	-1,71	-2,95	1,24	1,54	2,93	
7	6	165,9282	164,361	163,778	165,449	167,4119	167,7597		165,928	165,41	0,52	-1,71	2,23	4,96	0,27	
8	7	164,3302	165,928	164,361	163,778	165,4488	167,4119		164,33	164,75	-0,42	0,52	-0,94	0,88	0,18	
9	8	167,1866	164,33	165,928	164,361	163,7783	165,4488		167,187	164,09	3,09	-0,42	3,52	12,36	9,56	
10	9	167,6403	167,187	164,33	165,928	164,3605	163,7783		167,64	163,43	4,21	3,09	1,11	1,24	17,69	
11	10	166,3107	167,64	167,187	164,33	165,9282	164,3605		166,311	162,78	3,54	4,21	-0,67	0,45	12,50	
12	11	163,4769	166,311	167,64	167,187	164,3302	165,9282		163,477	162,12	1,36	3,54	-2,17	4,73	1,85	
13	12	162,6167	163,477	166,311	167,64	167,1866	164,3302		162,617	161,46	1,16	1,36	-0,20	0,04	1,35	
14	13	161,4843	162,617	163,477	166,311	167,6403	167,1866		161,484	160,80	0,69	1,16	-0,47	0,22	0,47	
15	14	160,2805	161,484	162,617	163,477	166,3107	167,6403		160,281	160,14	0,14	0,69	-0,54	0,30	0,02	
16	15	158,495	160,281	161,484	162,617	163,4769	166,3107		158,495	159,48	-0,98	0,14	-1,13	1,27	0,97	
17	16	158,1327	158,495	160,281	161,484	162,6167	163,4769		158,133	158,82	-0,69	-0,98	0,30	0,09	0,47	
18	17	157,9121	158,133	158,495	160,281	161,4843	162,6167		157,912	158,16	-0,25	-0,69	0,44	0,19	0,06	
19	18	155,7783	157,912	158,133	158,495	160,2805	161,4843		155,778	157,50	-1,72	-0,25	-1,47	2,17	2,96	
20	19	155,8807	155,778	157,912	158,133	158,495	160,2805		155,881	156,84	-0,96	-1,72	0,76	0,58	0,92	
21	20	154,6224	155,881	155,778	157,912	158,1327	158,495		154,622	156,18	-1,56	-0,96	-0,60	0,36	2,43	
22			0,94644	0,87698	0,80415	0,733762	0,626622						Sum	34,20	68,44	
23													d		0,49974	

Рис. 8 – Алгоритм розрахунку критерію Дарбіна-Уотсона

Нижня і верхня границі (критичні значення критерію Дарбіна-Уотсона) для часового ряду з 20 елементів дорівнюють: 1.2 та 1.41 відповідно (рис. 9).

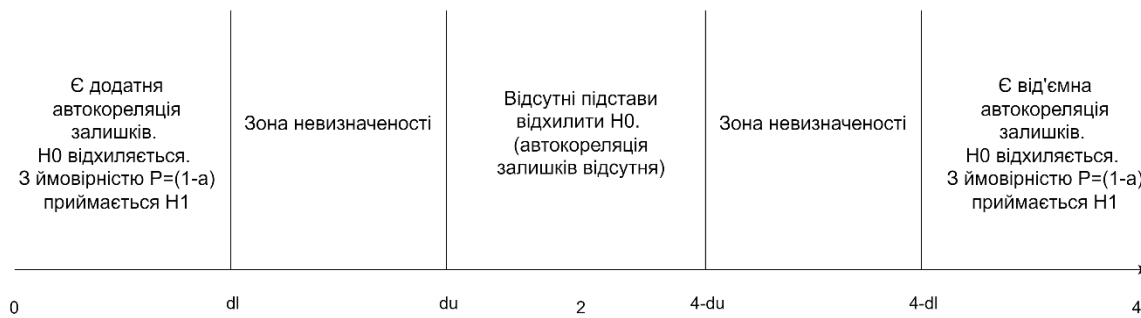


Рис. 9 – Критерій Дарбіна-Уотсона

Отже, розраховане значення критерію Дарбіна-Уотсона ($d=0.49974$) потрапляє в перший інтервал $[0; 1.2]$. Тобто можемо стверджувати, що має місце додатна автокореляція залишків. Це свідчить про те, що минуле впливає на теперішнє.



Лабораторна робота № 6.

Аналіз функціонування складних систем в умовах невизначеності

Мета роботи: навчитися визначати характер поведінки складних систем в умовах невизначеності на основі фрактального аналізу часових рядів.

Завдання:

- перевірити динамічний ряд (таблиця 6.1) на наявність довгострокової пам'яті (розрахувати показник Херста методом нормованого розмаху Херста ($\Delta = 1$) і методом послідовного R / S-аналізу);
- описати поведінку складної системи, використовуючи розрахункові значення міри кореляції і фрактальної розмірності окремо для кожного методу, порівняти результати.

Варіанти обираються за списком академічної групи.

Таблиця 6.1 – Вихідні дані

Варіант 1	Варіант 2	Варіант 3	Варіант 4	Варіант 5	Варіант 6	Варіант 7	Варіант 8	Варіант 9	Варіант 10
150,2471	147,5394	146,9918	148,6753	140,2795	158,3519	152,3446	0,897871	152,5807	152,9302
150,905	147,3969	147,7543	148,27	140,0946	159,001	150,3648	0,807561	153,1847	152,7981
152,7407	147,7334	145,7072	149,3327	140,895	160,9937	149,6818	0,551264	155,93	154,2924
152,0478	148,429	147,6283	147,1104	140,585	160,685	148,6588	0,441947	157,4736	154,7939
151,1165	148,9487	147,8517	146,3617	140,3662	161,6466	148,3074	0,386358	157,2725	155,4699
152,9302	148,4493	147,5454	146,3599	140,5594	159,5554	148,0481	0,445526	155,7668	155,4584
152,7981	149,0543	147,0376	146,3983	141,5084	159,8802	148,055	0,345779	156,0237	156,0823
154,2924	149,1717	146,3584	145,6027	141,3917	161,135	148,5687	0,213077	155,774	156,8554
154,7939	150,982	146,3584	146,1892	142,5342	161,6182	147,8517	0,20246	153,1754	155,6996
155,4699	150,5805	145,4769	145,0761	142,9494	162,3378	147,0354	0,183887	152,8412	156,1087
155,4584	150,5227	144,2604	145,6634	143,8368	162,454	147,1798	0,196954	151,4533	155,331
156,0823	149,8599	143,7921	145,7148	143,2349	162,7638	147,5735	0,308303	151,8501	151,319
156,8554	148,9381	143,3827	146,2654	144,3386	163,5544	147,1077	0,551676	153,4113	151,9746
155,6996	149,6291	144,2878	144,6041	144,8356	165,2577	146,7965	0,441802	152,543	150,2471
156,1087	149,9571	145,5589	143,6069	145,8456	165,4695	146,8721	0,386087	152,6112	150,905
155,331	150,3802	145,6888	145,0361	146,0036	166,2418	147,2382	0,445837	152,4011	152,7407
156,2821	150,9906	145,9028	145,6642	147,5647	166,7184	147,4391	0,345725	151,6666	152,0478
156,7578	151,0309	145,5085	148,4522	146,678	166,8753	147,4281	0,212726	151,3852	151,1165
156,5265	151,3167	146,3602	148,7543	147,2047	167,6671	147,6144	0,202602	152,2997	151,6061
157,4042	150,8511	145,7951	148,8962	147,3007	168,814	147,691	0,183876	151,9875	152,3738



Таблиця 6.2 – Вихідні дані (продовження)

Варіант 11	Варіант 12	Варіант 13	Варіант 14	Варіант 15	Варіант 16	Варіант 17	Варіант 18	Варіант 19	Варіант 20
167,7597	153,1438	25,9511	27,9453	27,7703	380,1714	24,958	27,677	366,4158	29,0477
167,4119	152,8784	25,7583	27,9164	27,9453	376,7956	24,6678	27,4988	370,9717	28,9639
165,4488	152,1382	25,4657	28,1405	27,9164	380,9578	24,6028	27,3341	369,6799	28,6598
163,7783	152,7965	25,212	27,9793	28,1405	380,8787	24,5198	27,4386	373,0745	28,7515
164,3605	157,1015	25,224	28,0472	27,9793	380,1253	24,4802	27,6643	372,431	28,6600
165,9282	159,3941	25,227	28,1879	28,0472	383,4365	24,4897	27,4663	374,739	28,6600
164,3302	160,8334	25,3896	28,158	28,1879	383,5471	24,3628	27,7969	376,7931	29,2537
167,1866	160,5071	25,269	28,2578	28,158	383,5471	24,0422	27,8069	379,8219	29,1245
167,6403	160,1445	25,101	28,1018	28,2578	374,8483	24,0676	27,6158	379,8871	29,2151
166,3107	159,6469	25,0949	27,993	28,1018	374,9793	24,1958	27,2945	380,6201	28,884
163,4769	159,5312	24,8641	28,0892	27,993	375,53	24,1939	27,1903	373,3646	28,9442
162,6167	158,1078	24,8726	28,3713	28,0892	372,3096	24,4712	27,2418	370,0824	28,7681
161,4843	157,4126	25,0366	28,4599	28,3713	371,8717	24,337	26,9366	367,651	28,5708
160,2805	158,6856	24,7957	28,5316	28,4599	373,4567	24,2883	26,5469	374,2175	28,6029
158,495	158,4143	24,555	28,6451	28,5316	370,7514	24,2222	26,5685	373,7567	28,2565
158,1327	159,2375	24,327	28,5111	28,6451	370,5596	23,9486	26,5057	370,9411	28,3324
157,9121	158,0151	24,5221	28,7075	28,5111	367,4577	23,9052	26,1934	369,1766	27,8217
155,7783	158,296	24,7859	28,8121	28,7075	367,5399	24,1156	26,3026	368,5816	27,7253
155,8807	158,485	24,8777	28,9097	28,8121	366,4557	23,8882	26,1486	365,5809	27,7253
154,6224	157,8601	24,895	28,8345	28,9097	367,6964	23,8132	25,852	363,7928	27,7253

Теоретичні відомості. Поведінка динамічних систем

Фрактальний аналіз – інструмент, який використовується для визначення рекурсивних (фрактальних) множин.

Фрактал – геометрична фігура (безліч), кожна частина якого при зменшенні масштабу подібна цілому.

Термін «фрактал» використовується для позначення нерегулярних самоподібних математичних структур.

Фрактал можна уявити як безліч точок, розмірність Хаусдорфа–Безиковича якого строго більше його топологічної розмірності. Фрактал має дробову розмірність.

В алгоритмічному сенсі фрактал є аттрактором (граничною множиною) правила (алгоритму), що його породжує.

Аттрактор – є нескінченна множина можливих рішень, тобто реалізацій. Положення кожної точки залежить від того, де розмістилася попередня точка, місце кожної наступної точки залежить від положення всіх попередніх.

Центральна гранична теорема (або Закон великих чисел) стверджує, що в міру проведення дедалі більшої кількості спостережень граничний розподіл випадкових значень буде нормальним розподілом. Останнє



означає, що події повинні бути незалежними, тобто не повинні впливати одне на інше, і при цьому всі вони повинні мати однакову ймовірність настання.

Херст розробив метод, названий методом нормованого розмаху, або R / S-аналізом, який використовується для поділу випадкового часового ряду і фрактального часового ряду:

$$R / S_n = C \cdot n^H, \quad (1)$$

де C – константа, а n – число спостережень (рівнів), що складають розглянутий часовий ряд.

Значення $(R / S)_n$ називається нормованим розмахом, а показник ступеня H називається показником Херста. Відзначимо при цьому, що показник Херста можна наближено, але з прийнятною точністю обчислювати за допомогою такої процедури: побудувати в декартових координатах точки зі значенням ординати $y_n = \log (R / S)_n$ і значеннями абсциси $x_n = \log (n)$ і обчислити тангенс кута нахилу відрізка прямої, що для цих точок являє просту регресію, яку знайти за допомогою методу найменших квадратів.

Якщо система за досить тривалий термін дає статистику Херста H , то це свідчить про результат взаємопов'язаних подій. Ступенем взаємного зв'язку подій, як відомо, є коефіцієнт кореляції. Вплив сучасного на майбутнє може бути представлено наступним кореляційним співвідношенням:

$$C = 2^{2H-1} - 1, \quad (2)$$

де C – міра кореляції;

H – показник Херста.

Область значень показника Херста H – це інтервал $(0,1)$.

Значення показника H дозволяє розбити (класифікувати) всі часові ряди (ЧР) на три групи:

- а) $H = 0,5$;
- б) $0 < H < 0,5$;
- в) $0,5 < H < 1$.

Значення $H = 0,5$ вказує на випадковий ЧР. Події випадкові і не корелюються (відповідно $C = 0$). Сьогодення не впливає на майбутнє.



Якщо $H \in (0,5; 1]$, то розглянутий ЧР є персистентним, або трендостойким, і характеризується ефектом довготривалої пам'яті. Події тим більше корельовані, чим ближче значення H до одиниці (відповідно S також наближається до одиниці або до 100%).

Фрактальна розмірність D ЧР визначається за такою формулою:

$$D = 2 - H. \quad (3)$$

Показник Херста також є оцінкою ступеня «зашумленості» ЧР.

У разі $H \in (0,5; 1]$ фрактальна розмірність наближається до одиниці, що відповідає повністю детермінованій системі, а тому рівень шуму тим нижчий, чим більше H , і якщо ЧР зростає (убуває) в попередній період, то ймовірно, що він (через несуттєві або малі збурення) буде зберігати цю тенденцію деякий час в майбутньому.

Значення $H \in [0; 0,5)$ відповідає антиперсистентним, або ергодичним ЧР. У нестрогому визначенні антиперсистентність означає повернення до середнього або, в іншій термінології, реверсування (чергування позитивних і негативних приростів) частіше, ніж у випадковому процесі. Стійкість такої антиперсистентної поведінки залежить від того, наскільки H наближається до нуля. Чим ближче значення H до нуля, тим ближче S до $-0,5$, т.т. негативної кореляції. Такий ЧР більш мінливий, або волатильний, ніж випадковий ЧР. В цьому випадку фрактальна розмірність D наближається до значення $D = 2$, тобто має місце значна «зашумленість» ЧР, а тому, якщо система демонструє зростання в попередньому періоді, то, швидше за все, в наступному періоді (через вплив шуму або збурень) почнеться падіння. І навпаки, якщо мало місце зниження, то вірогідним є близьке зростання.

Метод нормованого розмаху Херста

Нехай розглядається ЧР

$$Z = \langle z_i \rangle, i = 1, 2, \dots, m,$$

де m – число спостережень або рівнів, що складають цей ЧР. Обчислювальна схема методу Херста включає наступні 7 етапів.



1. Задамо цілочисельне значення величини кроку $\Delta > 1$ і сформуємо послідовність значень довжин відрізків, на які розбивається даний ЧР для кожної фіксованої довжини:

$$n_1, n_2, \dots, n_k, \dots, n_l,$$

де $n_k + 1 = n_k + \Delta$, $k = \overline{1, l-1}$ і максимальне значення індексу L визначається нерівністю $n_l \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$. Наступні нижче етапи 2 ... 6 виконуються послідовно за зростанням індексу $k = 1, 2, \dots, L$.

2. Для подальшого значення індексу k розглянутий ЧР Z розбивається на $r_k = \left\lfloor \frac{m}{n_k} \right\rfloor$ відрізків $Z_k^t = \langle z_j^t \rangle$, $j = 1, 2, \dots, n_k$, $t = 1, 2, \dots, r_k$, де для будь-якого t відрізок Z_k^t визначається своїм першим елементом z_1^t , який у вихідному ЧР Z пронумерований індексом $i = i^t = (t - 1) * n_k + 1$. Відзначимо, що в процесі розбиття ЧР Z на зазначені відрізки може створитися залишок, довжина якого менше, ніж n_k . Цей залишок відкидаємо. Для кожного відрізка Z_k^t визначається середнє значення:

$$z^t = \frac{1}{m_k} \sum_{j=1}^{n_k} z_j^t, t = \overline{1, r_k}. \quad (4)$$

3. Для кожного відрізка $Z_k^t, t = \overline{1, r_k}$ при фіксованому $k \in \{1, 2, \dots, l\}$ визначається ряд накопичених відхилень $X_{k,q}^t = \sum_{j=1}^q (z_j^t - z^t), q = \overline{1, n_k}$, на базі яких знаходиться значення розмаху:

$$R_k^t = \max_{1 \leq q \leq n_k} X_{k,q}^t - \min_{1 \leq q \leq n_k} X_{k,q}^t \quad (5)$$

для кожного $t = \overline{1, r_k}$.

4. При фіксованому k для відрізка Z_k^t визначаємо його стандартне відхилення $S_k^t = \left(\frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} (z_j^t - z^t)^2 \right)^{0.5}$ і нормуємо значення розмаху:

$$\left(\frac{R}{S}\right)_k^t = \left(\frac{R_k^t}{S_k^t}\right), t = \overline{1, r_k}, 1 \leq k \leq L. \quad (6)$$

5. Для кожного фіксованого k визначаємо середнє значення нормативних розмахів:

$$\left(\frac{R}{S}\right)_k = \frac{1}{r_k} \sum_{t=1}^{r_k} \left(\frac{R}{S}\right)_k^t, 1 \leq k \leq l. \quad (7)$$

6. На підставі отриманих середніх значень для кожного $k = 1, 2, \dots, L$ визначаємо для розглянутого ВЧ Z логарифмічні координати (абсцису і ординату) точок, які складають проміжний результат роботи алгоритму нормативного розмаху Херста:

$$x_k = \lg(n_k/2), y_k = \lg\left(\frac{R}{S}\right)_k, k = \overline{1, l}. \quad (8)$$

7. Використовуючи відомий метод найменших квадратів для множини точок з координатами (x_k, y_k) , $k = 1, 2, \dots, L$ виду, будуємо графік лінійної регресії. Нахил отриманої лінії регресії до осі абсцис дозволяє отримати усереднену оцінку показника Херста H для ЧР Z . Чисельне значення $H(Z)$ цієї оцінки визначається як тангенс кута нахилу отриманої прямої.

При деякому значенні $k = k_0$ траєкторія нормативного розмаху дуже різко змінює свій нахил.

Появу цього нахилу називають зміною тренду, або «зривом з тренда», маючи на увазі при цьому, що повернення до попереднього тренду не відбувається. При цьому мається на увазі, що в точці k_0 ефект «довгостроковій пам'яті про початок розглянутого ЧР» дисипатує. Зрив з тренду демонструє втрату пам'яті про початкові умови, а також сигналізує (можливо, з лагом, тобто з деяким запізненням) про вичерпання циклу або квазіциклу, який знаходиться в початковому відрізку цього ЧР.

Метод послідовного R/S -аналізу

Нехай розглядається ЧР

$$Z = \langle z_i \rangle, i = 1, 2, \dots, m,$$



де m – число спостережень або рівнів, що складають цей ЧР. Обчислювальна схема методу R / S-аналізу включає наступні 4 етапи.

1. Для заданого ЧР розглядаються його початкові відрізки $Z_t = z_1, z_2, \dots, z_t$, розраховується його поточне середнє значення:

$$\bar{z}_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} z_i^\tau, \tau = \overline{3, m}, \quad (9)$$

Далі для кожного відрізка знаходиться накопичене відхилення:

$$X_{\tau,i} = \sum_{i=1}^t (z_i - \bar{z}_\tau), t = \overline{1, \tau} \quad (10)$$

2. Для кожного відрізка $Z_\tau, \tau = \overline{3, m}$ визначається:

а) значення розмаху:

$$R = R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X_{\tau,i} - \min_{1 \leq t \leq \tau} X_{\tau,i}; \quad (11)$$

б) стандартне відхилення:

$$S = S(\tau) = \left(\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} (z_i - \bar{z}_\tau)^2 \right)^{0.5}; \quad (12)$$

в) нормоване значення розмаху:

$$\left(\frac{R}{S} \right)_\tau = \left(\frac{R(\tau)}{S(\tau)} \right), \tau = \overline{3, m}. \quad (13)$$

3. Будується H-траєкторія $H = H(\tau), \tau = \overline{3, m}$, координати точок якої (x_τ, y_τ) визначаються як

$$y_\tau = H = H(\tau) = \frac{\lg \left(\frac{R(\tau)}{S(\tau)} \right)}{\lg(\tau/2)}; x_\tau = \lg(\tau/2); \tau = 3, 4, \dots, m. \quad (14)$$

4. Будується R / S-траєкторія, координати точок якої (x_τ, y_τ^0) :

$$x_\tau = \lg(\tau/2), y_\tau^0 = \lg \left(\frac{R(\tau)}{S(\tau)} \right), \tau = \overline{3, m}. \quad (15)$$



Точка перетину Н-траєкторії і R / S-траєкторії є точкою зриву і визначає точку, в якій ЧР втрачає довгострокову пам'ять.

Приклад виконання

Таблиця 3.3 – Вихідні дані

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
29,0477	28,9639	28,6598	28,7515	28,66	28,66	29,2537	29,1245	29,2151	28,884
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
28,9442	28,7681	28,5708	28,6029	28,2565	28,3324	27,8217	27,7253	27,7253	27,7253

1. Метод нормованого розмаху Херста

Маємо ЧР:

$$Z = \langle z_i \rangle, i = 1, 2, \dots, m,$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
29,0477	28,9639	28,6598	28,7515	28,66	28,66	29,2537	29,1245	29,2151	28,884
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
28,9442	28,7681	28,5708	28,6029	28,2565	28,3324	27,8217	27,7253	27,7253	27,7253

1. Задамо цілочисельне значення величини кроку $\Delta > 1$ і сформуємо послідовність значень довжин відрізків, на які розбивається даний ЧР для кожної фіксованої довжини:

$$n_1=3; n_2=4; n_3=5; n_4=6; n_5=7; n_6=8; n_7=9; n_8=10.$$

де $n_k + 1 = n_k + \Delta$, $k = \overline{1, l-1}$ і максимальне значення індексу L визначається нерівністю $n_l \leq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil = \frac{20}{2} = 10$.

Наступні нижче етапи 2 ... 6 виконуються послідовно за зростанням індексу $k = 1, 2, \dots, 8$.

Перша ітерація ($n_1=3$).

2. Для подальшого значення індексу k розглянутий ЧР Z розбивається на $r_k = \left\lceil \frac{m}{n_k} \right\rceil$ відрізків $Z_k^t = \langle z_j^t \rangle$, $j = 1, 2, \dots, n_k$, $t = 1, 2, \dots, r_k$, де для будь-якого t відрізок Z_k^t визначається своїм першим елементом z_1^t , який у вихідному ЧР Z пронумерований індексом



$i = i^t = (t - 1) * n_k + 1$. Відзначимо, що в процесі розбиття ЧР Z на зазначені відрізки може створитися залишок, довжина якого менше, ніж n_k . Цей залишок відкидаємо.

Для кожного відрізка z_k^t визначається середнє значення:

$$z^t = \frac{1}{m_k} \sum_{j=1}^{n_k} z_j^t, t = \overline{1, r_k}.$$

n=3	K=1	K=2	K=3	K=4	K=5	K=6
	Z11	Z12	Z13	Z14	Z15	Z16
	29,0477	28,7515	29,2537	28,884	28,5708	28,3324
	28,9639	28,66	29,1245	28,9442	28,6029	27,8217
	28,6598	28,66	29,2151	28,7681	28,2565	27,7253
Середнє значення	28,89047	28,6905	29,19776667	28,86543333	28,47673	27,9598

3. Для кожного відрізка $Z_k^t, t = \overline{1, r_k}$ при фіксованому $k \in \{1, 2, \dots, l\}$ визначається ряд накопичених відхилень:

$$X_{k,q}^t = \sum_{j=1}^q (z_j^t - z^t), q = \overline{1, n_k},$$

на базі яких знаходиться значення розмаху:

$$R_k^t = \max_{1 \leq q \leq n_k} X_{k,q}^t - \min_{1 \leq q \leq n_k} X_{k,q}^t \text{ для кожного } t = \overline{1, r_k}.$$

4. При фіксованому k для відрізка Z_k^t визначаємо його стандартне відхилення $S_k^t = (\frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} (z_j^t - z^t)^2)^{0.5}$ і нормуємо значення розмаху:

$$\left(\frac{R}{S}\right)_k^t = \left(\frac{R_k^t}{S_k^t}\right), t = \overline{1, r_k}, 1 < k < L.$$

5. Для кожного фіксованого k визначаємо середнє значення нормативних розмахів:

$$\left(\frac{R}{S}\right)_k = \frac{1}{r_k} \sum_{t=1}^{r_k} \left(\frac{R}{S}\right)_k^t, 1 \leq k \leq l.$$

Накопичені відхилення	X11	X12	R (розмах)	S (ст. відхилення)	R/S	(R/S) _{sr}
-----------------------	-----	-----	------------	--------------------	-----	---------------------



K=1	0,230667	0,0000	0,230666667	0,16665522	1,384095	1,0054433
K=2	0,0305	0,0000	0,0305	0,043133514	0,707107	
K=3	-0,01733	0,0000	0,017333333	0,054150982	0,320093	
K=4	0,097333	0,0000	0,097333333	0,073081431	1,331848	
K=5	0,220233	0,0000	0,220233333	0,156278903	1,409233	
K=6	0,2345	0,0000	0,2345	0,266391078	0,880285	

Друга ітерація ($n_2=4$).

n=4	K=1	K=2	K=3	K=4	K=5
	Z21	Z22	Z23	Z24	Z25
	29,0477	28,66	29,2151	28,5708	27,8217
	28,9639	28,66	28,884	28,6029	27,7253
	28,6598	29,2537	28,9442	28,2565	27,7253
	28,7515	29,1245	28,7681	28,3324	27,7253
Середнє значення	28,855725	28,92455	28,95285	28,44065	27,7494

Накопичені відхилення	X21	X22	X23	R (розмах)	S (ст. відхилення)	R/S	(R/S) _{sr}
K=1	0,30015	0,1042	0,0000	0,3001	0,1563695	1,919492	1,490658
K=2	-0,5291	-0,2000	0,0000	0,5291	0,26846468	1,970837	
K=3	0,26225	0,1847	0,0000	0,2623	0,16410574	1,598055	
K=4	0,2924	0,1083	0,0000	0,2924	0,14907496	1,961429	
K=5	0,0482	0,0241	0,0000	0,0482	13,8627076	0,003477	

Третя ітерація ($n_3=5$).

n=5	K=1	K=2	K=3	K=4
	Z31	Z32	Z33	Z34
	29,0477	28,66	28,9442	28,3324
	28,9639	29,2537	28,7681	27,8217
	28,6598	29,1245	28,5708	27,7253
	28,7515	29,2151	28,6029	27,7253
	28,66	28,884	28,2565	27,7253
Середнє значення	28,81658	29,02746	28,6285	27,866



Накопичені відхилення	X31	X32	X33	X34	R (розмах)	S (ст. відхилення)	R/S	(R/S) _{sr}
K=1	0,38	0,22	0,16	0,00	0,38	0,16	2,36	1,41382
K=2	-0,14	-0,04	0,14	0,00	0,28	0,22	1,27	
K=3	0,46	0,40	0,37	0,00	0,46	0,23	1,99	
K=4	0,42	0,28	0,14	0,00	0,42	12,46	0,03	

Четверта ітерація ($n_4=6$).

n=6	K=1	K=2	K=3
	Z41	Z42	Z43
	29,0477	29,2537	28,5708
	28,9639	29,1245	28,6029
	28,6598	29,2151	28,2565
	28,7515	28,884	28,3324
	28,66	28,9442	27,8217
	28,66	28,7681	27,7253
Середнє значення	28,79048	29,0316	28,21826667

Накопичені відхилення	X41	X42	X43	X44	X45	R (розмах)	S (ст. відхилення)	R/S	(R/S) _{sr}
K=1	0,43	0,30	0,26	0,13	0,00	0,43	0,16	2,73	2,720108089
K=2	0,31	0,50	0,35	0,26	0,00	0,50	0,18	2,80	
K=3	0,74	0,78	0,89	0,49	0,00	0,89	0,34	2,63	

П'ята ітерація ($n_5=7$).

n=7	K=1	K=2
	Z51	Z52
	29,0477	29,1245
	28,9639	29,2151
	28,6598	28,884
	28,7515	28,9442
	28,66	28,7681
	28,66	28,5708
	29,2537	28,6029
Середнє значення	28,8566571	28,8728



Накопичені відхилення	X51	X52	X53	X54	X55	X56	R (розмах)	S (ст. відхилення)	R/S	(R/S)sr
K=1	0,30	0,10	0,00	-0,20	-0,40	0,00	0,70	0,22	3,19	3,08
K=2	0,59	0,61	0,68	0,57	0,27	0,00	0,68	0,23	2,98	

Шоста ітерація ($n_6=8$).

n=8	K=1	K=2
	Z61	Z62
	29,0477	29,2151
	28,9639	28,884
	28,6598	28,9442
	28,7515	28,7681
	28,66	28,5708
	28,66	28,6029
	29,2537	28,2565
	29,1245	28,3324
Середнє значення	28,89014	28,69675

Накопичені відхилення	X61	X62	X63	X64	X65	X66	X67	R (розмах)	S (ст. відхилення)	R/S	(R/S)sr
K=1	0,23	0,00	-0,14	-0,37	-0,60	-0,36	0,00	0,83	0,21	3,99	3,83
K=2	0,71	0,95	1,02	0,90	0,80	0,44	0,00	1,02	0,28	3,67	

Сьома ітерація ($n_7=9$).

n=9	K=1	K=2
	Z71	Z72
	29,0477	28,884
	28,9639	28,9442
	28,6598	28,7681
	28,7515	28,5708
	28,66	28,6029
	28,66	28,2565
	29,2537	28,3324
	29,1245	27,8217
	29,2151	27,7253
Середнє значення	28,92624	28,43398889



Накопичені відхилення	X71	X72	X73	X74	X75	X76	X77	X78	R (розмах)	S (ст. відхилення)	R/S	(R/S)sr
K=1	0,16	-0,11	-0,28	-0,55	-0,81	-0,49	-0,29	0,00	0,97	0,23	4,18	4,02
K=2	0,96	1,29	1,43	1,60	1,42	1,32	0,71	0,00	1,60	0,41	3,87	

Восьма ітерація (n₈=10).

n=10	K=1	K=2
	Z81	Z82
	29,0477	28,9442
	28,9639	28,7681
	28,6598	28,5708
	28,7515	28,6029
	28,66	28,2565
	28,66	28,3324
	29,2537	27,8217
	29,1245	27,7253
	29,2151	27,7253
	28,884	27,7253
Середнє значення	28,92202	28,24725

Накопичені відхилення	X81	X82	X83	X84	X85	X86	X87	X88	X89	R (розмах)	S (ст. відхилення)	R/S	(R/S)sr
K=1	0,17	-	-	-	-	-	-	-	0,00	0,96	0,22	4,32	4,39
K=2	1,22	1,54	1,90	1,91	1,99	1,57	1,04	0,52	0,00	1,99	0,45	4,46	

6. На підставі отриманих середніх значень для кожного k= 1, 2, ..., 8 визначаємо для розглянутого ЧР Z логарифмічні координати (абсцису і ординату) точок, які складають проміжний результат роботи алгоритму нормативного розмаху Херста:

$$x_k = \lg(n_k/2), y_k = \lg\left(\frac{R}{S}\right)_k, k = \overline{1, l}.$$

n	3	4	5	6	7	8	9	10
(R/S)sr	1,01	1,49	1,41	2,72	3,08	3,83	4,02	4,39

xk	0,176	0,301	0,398	0,477	0,544	0,602	0,653	0,699
yk	0,002	0,173	0,150	0,435	0,489	0,583	0,604	0,642

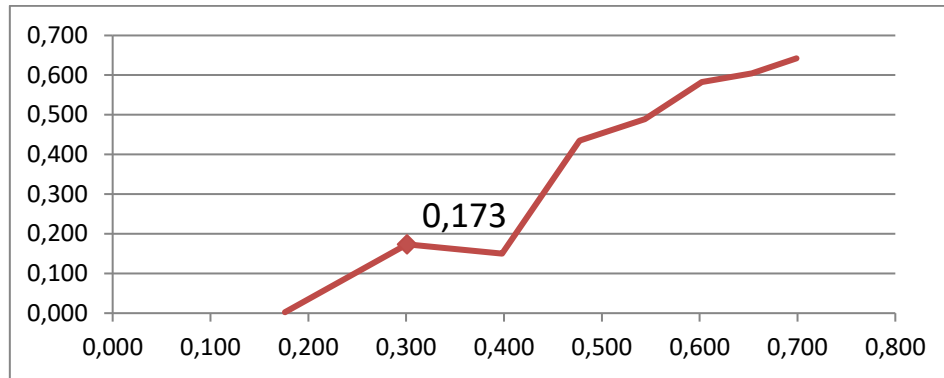


Рис. 1. Додатні значення координати y_k

7. При деякому значенні $k = k_0$ траєкторія нормативного розмаху дуже різко змінює свій нахил. Появу цього нахилу називають зміною тренду, або «зривом з тренду», маючи на увазі при цьому, що повернення до попереднього тренду не відбувається. При цьому мається на увазі, що в точці k_0 ефект «довгостроковій пам'яті про початок розглянутого ЧР» дисипатує. Зрив з тренду демонструє втрату пам'яті про початкові умови, а також сигналізує (можливо, з лагом, тобто з деяким запізненням) про вичерпання циклу або квазіциклу, який знаходиться в початковому відрізку цього ЧР.

Згідно рис. 1 зрив з тренду відбувається у точці $y_k=0,173$, що відповідає $n=4$. Для визначення показника H обираємо координати цієї точки і визначаємо його за формулою:

$$H = H(\tau) = \frac{\lg\left(\frac{R(\tau)}{S(\tau)}\right)}{\lg(n/2)} = \frac{y_k}{x_k}.$$

Отже $H=0,57$.

Значення $H \in (0,5; 1]$ фрактальна розмірність наближається до одиниці, що відповідає детермінованій системі, а тому рівень шуму тим нижчий, чим більше H , і якщо ЧР зростає (убуває) в попередній період, то ймовірно, що він (через несуттєві або малі збурення) буде зберігати цю тенденцію деякий час в майбутньому.

Стійкість такої персистентної поведінки залежить від того, наскільки H наближається до 1. Чим ближче значення H до 1, тим ближче C до 1, т.т. додатної кореляції:

$$C = 2^{2H-1} - 1 = 0.11.$$



Як бачимо, значення S досить низьке, зв'язок слабкий.

Фрактальна розмірність D ЧР визначається за такою формулою:

$$D = 2 - H = 2 - 0,57 = 1,43.$$

В нашому випадку фрактальна розмірність D наближається до значення $D = 1$, тобто має місце незначна «зашумленість» ЧР, а тому, якщо система демонструє зростання в попередньому періоді, то, швидше за все, в наступному періоді тенденція буде зберігатися.

2. Метод послідовного R / S -аналізу.

Нехай розглядається ЧР:

$$Z = \langle z_i \rangle, i = 1, 2, \dots, m,$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
29,0477	28,9639	28,6598	28,7515	28,66	28,66	29,2537	29,1245	29,2151	28,884
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
28,9442	28,7681	28,5708	28,6029	28,2565	28,3324	27,8217	27,7253	27,7253	27,7253

1. Для заданого ЧР розглядаються його початкові відрізки $Z_t = z_1, z_2, \dots, z_t$, розраховується його поточне середнє значення:

$$\bar{z}_\tau = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} z_i^\tau, \tau = \overline{3, m}.$$

	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9
Середнє значення	28,890	28,85573	28,81658	28,79048	28,85666	28,89014	28,92624	28,92202	28,92404

	Z10	Z11	Z12	Z13	Z14	Z15	Z16	Z17	Z18
Середнє значення	28,9110	28,88487	28,86473	28,82418	28,79344	28,73628	28,68012	28,62986	28,584635

Далі для кожного відрізка знаходиться накопичене відхилення (таблиці А.1 та А.2):

$$X_{\tau,i} = \sum_{i=1}^{\tau} (z_i - \bar{z}_\tau), \tau = \overline{1, m}$$

2. Для кожного відрізка $Z_\tau, \tau = \overline{3, m}$ визначається:



- а) значення розмаху: $R = R(\tau) = \max_{1 \leq t \leq \tau} X_{\tau,i} - \min_{1 \leq t \leq \tau} X_{\tau,i};$
 б) стандартне відхилення: $S = S(\tau) = (\frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} (z_i - \bar{z}_{\tau})^2)^{0.5};$
 в) нормоване значення розмаху: $(\frac{R}{S})_{\tau} = (\frac{R(\tau)}{S(\tau)}), \tau = \overline{3, m}.$

	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10
R	0,231	0,300	0,378	0,431	0,695	0,829	0,974	0,957	0,965	0,913
S	0,167	0,156	0,160	0,158	0,218	0,222	0,233	0,222	0,211	0,207
R/S	1,384	1,919	2,361	2,734	3,189	3,729	4,175	4,318	4,565	4,412

	Z11	Z12	Z13	Z14	Z15	Z16	Z17	Z18
R	0,997	1,098	1,301	1,454	2,097	2,771	3,374	3,921
S	0,218	0,223	0,263	0,281	0,356	0,416	0,458	0,488
R/S	4,564	4,929	4,940	5,169	5,890	6,655	7,368	8,037

3. Будується Н-траєкторія $H = H(\tau), \tau = \overline{3, m}$, координати точок якої (x_{τ}, y_{τ}) визначаються як $y_{\tau} = H = H(\tau) = \frac{\lg(\frac{R(\tau)}{S(\tau)})}{\lg(\tau/2)}; x_{\tau} = \lg(\tau/2); \tau = 3, 4, \dots, m.$

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n/2	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
xk	0,176	0,301	0,398	0,477	0,544	0,602	0,653	0,699	0,740	0,778
yk	0,802	0,941	0,938	0,915	0,926	0,949	0,950	0,909	0,891	0,828

n	13	14	15	16	17	18	19	20
n/2	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
xk	0,813	0,845	0,875	0,903	0,929	0,954	0,978	1,000
yk	0,811	0,820	0,793	0,790	0,829	0,863	0,887	0,905

4. Будується R / S-траєкторія, координати точок якої (x_{τ}, y_{τ}^0) :

$$x_{\tau} = \lg(\tau/2), y_{\tau}^0 = \lg\left(\frac{R(\tau)}{S(\tau)}\right), \tau = \overline{3, m}.$$

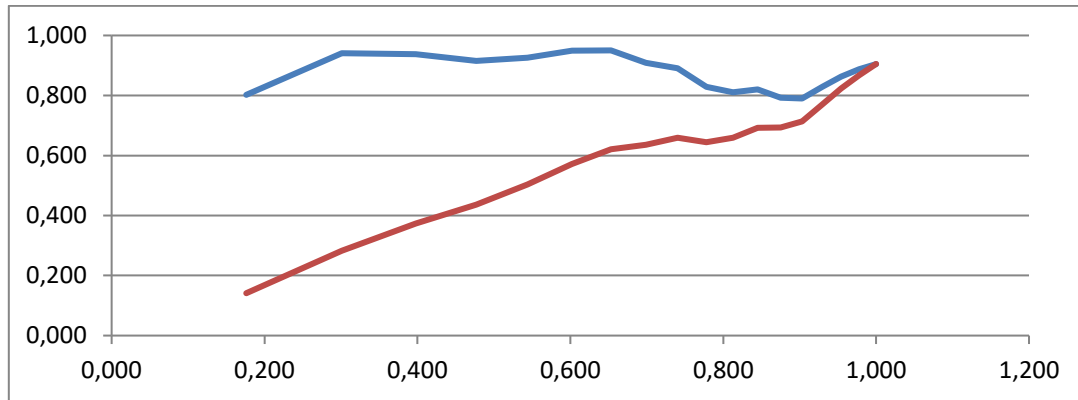


Рис. 2. Додатні значення координати y_k

Точка перетину Н-траєкторії і R / S-траєкторії є точкою зриву і визначає точку, в якій ЧР втрачає довгострокову пам'ять.

Отже маємо:

$H=0,905$ – персистентний часовий ряд;

$C=0,75$ – додатня кореляція;

$D=1,1$ – низька зашумленість часового ряду.



Лабораторна робота № 7. Безпека функціонування складних систем

Мета роботи: навчитися оцінювати надійність технічних систем на основі аналізу наявної інформації про стани системи і її структури.

Завдання:

- визначити множину можливих станів систем згідно топологічної структури;
- оцінити інформаційну ентропію працездатності систем, непрацездатності систем, повну інформаційну ентропію кожної системи;
- сформулювати висновки про ступінь надійності складних систем в залежності від їх структури.

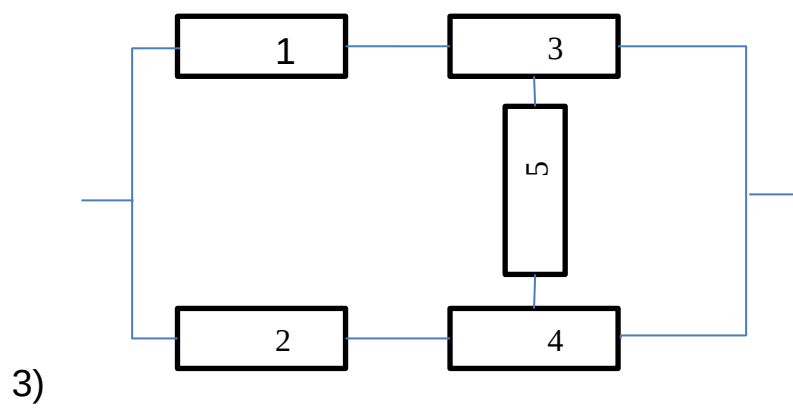
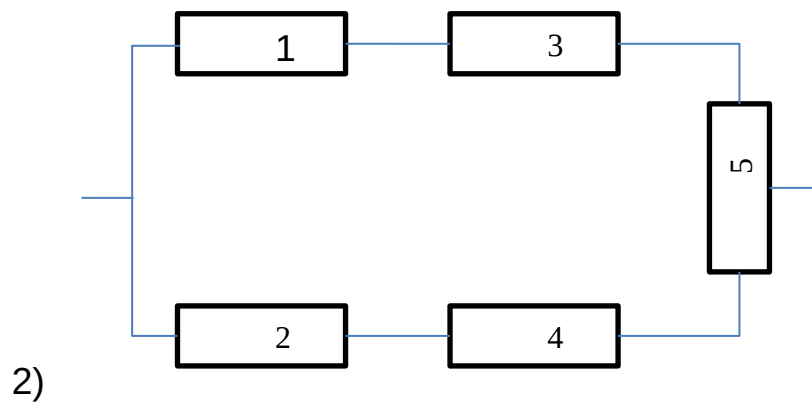
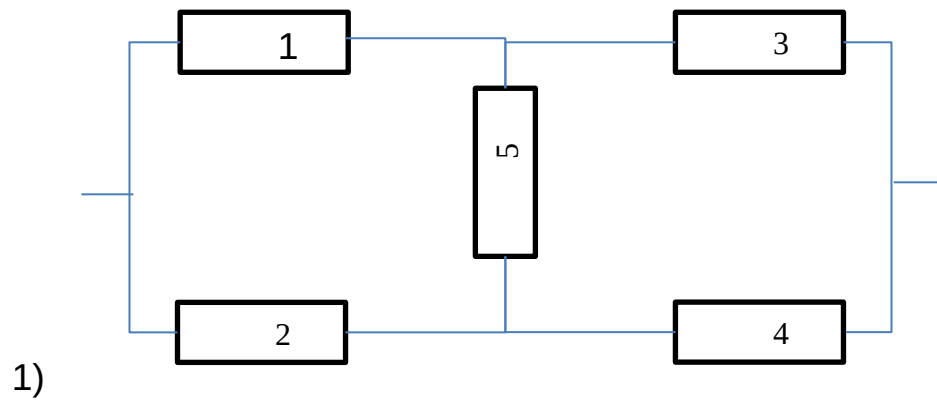
Варіанти обираються за списком академічної групи.

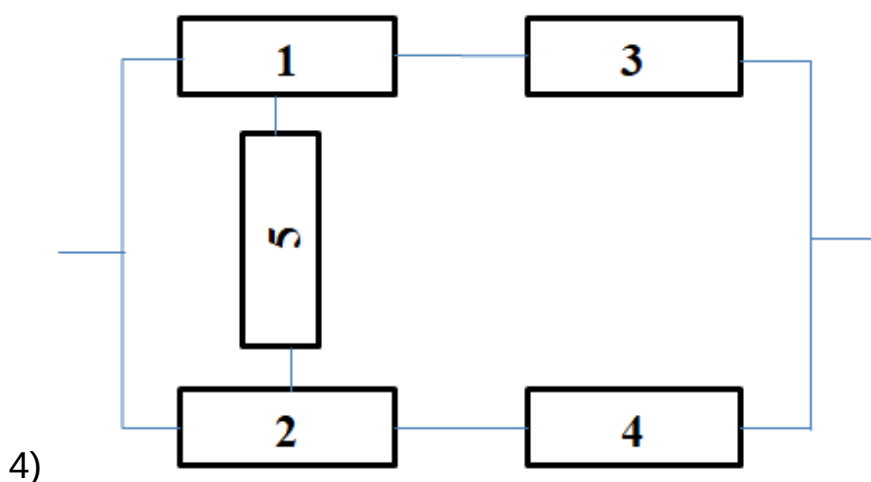
Таблиця 7.1 – Вихідні дані

№ варіанту	Топологія систем	Імовірність працездатного стану елемента системи	№ варіанту	Топологія систем	Імовірність працездатного стану елемента системи
1.	1, 2	0,7	16.	2, 3	0,75
2.	1, 3	0,75	17.	2, 4	0,8
3.	1, 4	0,8	18.	3, 4	0,85
4.	2, 3	0,85	19.	1, 2	0,9
5.	2, 4	0,9	20.	1, 3	0,6
6.	3, 4	0,6	21.	1, 4	0,65
7.	1, 2	0,65	22.	2, 3	0,7
8.	1, 3	0,7	23.	2, 4	0,75
9.	1, 4	0,75	24.	3, 4	0,8
10.	2, 3	0,8	25.	1, 2	0,85
11.	2, 4	0,85	26.	1, 3	0,9
12.	3, 4	0,9	27.	1, 4	0,6
13.	1, 2	0,6	28.	2, 3	0,65
14.	1, 3	0,65	29.	2, 4	0,85
15.	1, 4	0,7	30.	3, 4	0,9



Топології системи:





Теоретичні відомості.

Визначення ентропії методом перебору станів елементів структури

Вся сукупність станів об'єкта складається з сукупності протилежних станів:

$$N = N_p + N_q, \quad (1)$$

де N_p і N_q – кількість станів, що відносяться до роботи і відмови системи відповідно.

Визначення ентропії для кожного з двох протилежних (непересічних) множин станів елементів залежить, з одного боку, від числа елементів, станів, які розглядаються як незалежні, з іншого – від топології структури.

Сумарна ентропія двох незалежних елементів має вигляд:

$$H(\alpha) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P_i Q_j \log_2 P_i Q_j, \quad (2)$$

де P_i – ймовірність працездатності елементів системи;

Q_j – ймовірність непрацездатності елементів системи;

m – кількість працездатних елементів;

n – кількість непрацездатних елементів.

Виходячи з (2), сумарна ентропія системи в загальному вигляді:

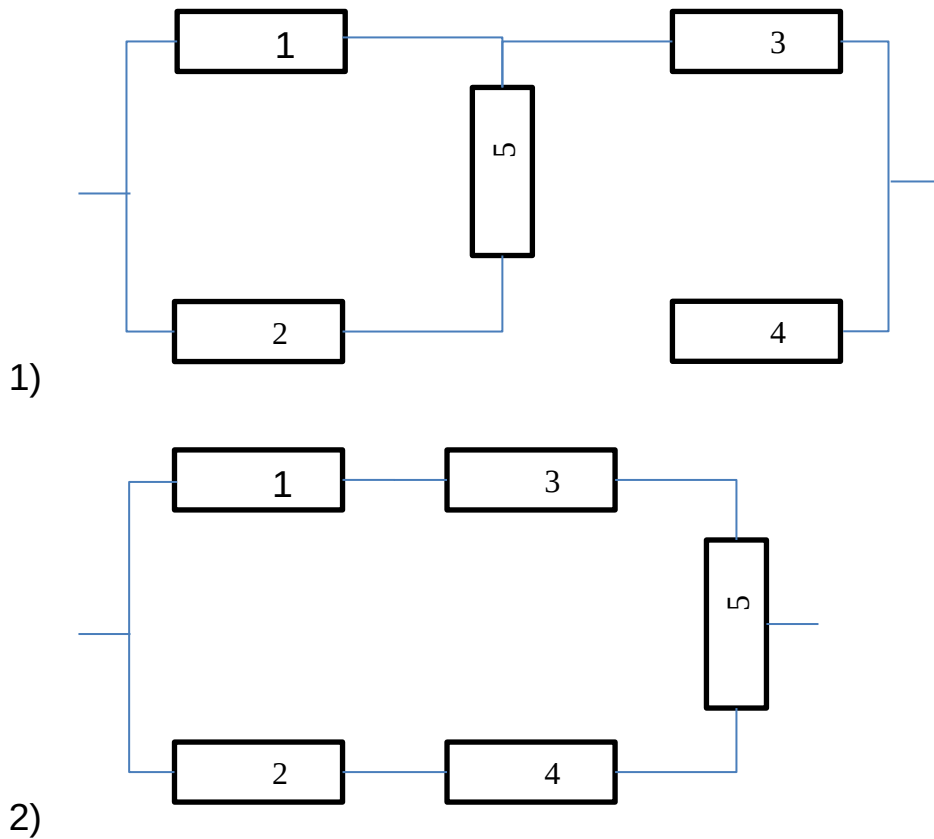
$$H\Sigma = H\Sigma(p) + H\Sigma(q). \quad (3)$$

Перейдемо до розгляду визначення ентропії з урахуванням топології структур. Для цього використовуємо метод перебору станів. Він заснований на виділенні груп станів у вигляді набору елементів структури, які візуально відображають стан всієї структури від джерела до приймача інформації: для працездатного стану – група містить наскрізний зв'язок або зв'язки джерела з приймачем; для непрацездатного – зв'язок або зв'язки відсутні.

Приклад виконання

Імовірність працездатного стану елемента системи – 0,9.

Топології систем:



Вся сукупність станів об'єкта складається з сукупності протилежних станів:

$$N = N_p + N_q, \quad (1)$$

де N_p і N_q – кількість станів, що відносяться до роботи і відмови системи відповідно.

Ентропія **для кожної окремої категорії станів** визначається як:

$$H(\alpha) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P_i Q_j \log_2 P_i Q_j$$

де P_i – ймовірність працездатності елементів системи;

Q_j – ймовірність непрацездості елементів системи;

m – кількість працездатних елементів;

n – кількість непрацездатних елементів.

Сумарна ентропія має вигляд:

$$H_{\Sigma} = H_{\Sigma}(q) + H_{\Sigma}(p).$$



Визначення ентропії для кожного з двох протилежних (непересічних) множин станів елементів залежить, з одного боку, від числа елементів, станів, які розглядаються як незалежні, з іншого – від топології структури.

Перейдемо до розгляду визначення ентропії з урахуванням топології структур.

Для цього використовуємо метод перебору станів. Він заснований на виділенні груп станів у вигляді набору елементів структури, які візуально відображають стан всієї структури від джерела до приймача інформації:

для працездатного стану – група містить наскрізний зв'язок або зв'язки джерела з приймачем;

для непрацездатного – зв'язок або зв'язки відсутні.

Умова про незалежність станів дозволяє формувати групи через добуток ймовірностей знаходження елементів у відповідних станах p і q .

Наприклад для двох станів маємо:

$$H\Sigma(p) = -(p_1 \cdot p_2 \cdot \log_2 p_2 + p_1 \cdot p_2 \cdot \log_2 p_1 + p_1 \cdot q_2 \cdot \log_2 q_2 + p_1 \cdot q_2 \cdot \log_2 p_1 + p_2 \cdot q_1 \cdot \log_2 q_1 + p_2 \cdot q_1 \cdot \log_2 p_1 + p_2 \cdot q_1 \cdot \log_2 p_2 + q_1 \cdot q_2 \cdot \log_2 q_2 + q_1 \cdot q_2 \cdot \log_2 q_1).$$

Загальна кількість станів системи: $N = 2^5 = 32$.

$P = 0,9$ – ймовірність працездатності.

$Q = 0,1$ – ймовірність непрацездатності.

Складемо множину працездатних станів для топології №1:

№ стану	Стани елементів					Формалізація	Розрахунок $H(N_p)$
1	1	1	1	1	1	$-P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 \log_2 (P_1 P_2 P_3 P_4 P_5)$	0,448781533
2	0	1	1	1	1	$-Q_1 P_2 P_3 P_4 P_5 \log_2 (Q_1 P_2 P_3 P_4 P_5)$	0,257843394
3	1	0	1	1	1	$-P_1 Q_2 P_3 P_4 P_5 \log_2 (P_1 Q_2 P_3 P_4 P_5)$	0,257843394
4	1	1	0	1	1	$-P_1 P_2 Q_3 P_4 P_5 \log_2 (P_1 P_2 Q_3 P_4 P_5)$	0,257843394
5	1	1	1	0	1	...	0,257843394
6	1	1	1	1	0	...	0,257843394
7	0	1	0	1	1	$-Q_1 P_2 Q_3 P_4 P_5 \log_2 (Q_1 P_2 Q_3 P_4 P_5)$	0,051758019
8	0	1	1	0	1	...	0,051758019
9	0	1	1	1	0	...	0,051758019
10	1	0	0	1	1	...	0,051758019
11	1	0	1	0	1	...	0,051758019
12	1	0	1	1	0	...	0,051758019
13	1	1	0	1	0	...	0,051758019
14	1	1	1	0	0	...	0,051758019
15	0	1	0	1	0	$-Q_1 P_2 Q_3 P_4 Q_5 \log_2 (Q_1 P_2 Q_3 P_4 Q_5)$	0,051758019
16	1	0	1	0	0	...	0,00831853
Разом:							$\Sigma = 2,2$



Складемо множину непрацездатних станів для топології №1:

№ стану	Стани елементів					Формалізація	Розрахунок $H(N_p)$
1	0	0	0	0	0	$-Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5\log_2(Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5)$	0,0001661
2	1	0	0	0	0	$-P_1Q_2Q_3Q_4Q_5\log_2(P_1Q_2Q_3Q_4Q_5)$	0,00120957
3	0	1	0	0	0	...	0,00120957
4	0	0	1	0	0		0,00120957
5	0	0	0	1	0	...	0,00120957
6	0	0	0	0	1	...	0,00120957
7	1	0	1	0	0	$-P_1Q_2P_3Q_4Q_5\log_2(P_1Q_2P_3Q_4Q_5)$	0,00831853
8	1	0	0	1	0	...	0,00831853
9	1	0	0	0	1	...	0,00831853
10	0	1	1	0	0	...	0,00831853
11	0	1	0	1	0	...	0,00831853
12	0	1	0	0	1	...	0,00831853
13	0	0	1	0	1	...	0,00831853
14	0	0	0	1	1	...	0,00831853
15	1	0	1	0	1	$-P_1Q_2P_3Q_4P_5\log_2(P_1Q_2P_3Q_4P_5)$	0,05175802
16	0	1	0	1	1	...	0,05175802
Разом:							$\sum = 0,176$

$$H\Sigma 1 = H\Sigma (q) + H\Sigma (p) = 2.2 + 0.176 = 2.376.$$

Складемо множину працездатних станів для топології №2:

№ стану	Стани елементів					Розрахунок $H(N_p)$
1	1	1	1	1	1	0,448781533
2	0	1	1	1	1	0,257843394
3	1	0	1	1	1	0,257843394
4	1	1	0	1	1	0,257843394
5	1	1	1	0	1	0,257843394
6	0	1	0	1	1	0,051758019
7	1	0	1	0	1	0,051758019
$\sum = 1,584$						

Складемо множину непрацездатних станів для топології №2:

№ стану	Стани елементів					Розрахунок $H(N_p)$
1	0	0	0	0	0	0,0001661
2	1	1	1	1	0	0,25784339
3	0	0	1	1	1	0,05175802
4	0	1	1	0	1	0,05175802
5	0	1	1	1	0	0,05175802
6	1	0	0	1	1	0,05175802
7	1	0	1	1	0	0,05175802
8	1	0	1	0	1	0,05175802
9	1	1	0	0	1	0,05175802
10	1	1	0	1	0	0,05175802



№ стану	Стани елементів					Розрахунок $H(N_p)$
11	1	1	1	0	0	0,05175802
12	0	0	0	1	1	0,00831853
13	0	0	1	0	1	0,00831853
14	0	0	1	1	0	0,00831853
15	0	1	1	0	0	0,00831853
16	0	1	0	1	0	0,00831853
17	1	0	0	1	0	0,00831853
18	1	0	0	0	1	0,00831853
19	1	0	1	0	0	0,00831853
20	1	1	0	0	0	0,00831853
21	0	0	0	1	1	0,00831853
22	0	0	0	0	0	0,00120957
23	0	1	0	0	0	0,00120957
24	0	0	1	0	0	0,00120957
25	1	0	0	0	0	0,00120957
$\sum = 0,8119$						

$$H\Sigma 2 = H\Sigma (q) + H\Sigma (p) = 1,58 + 0,8119 = 2.396.$$

Висновки:

Топологія № 2 менш надійна за топологію №1 при заданій ймовірності працездатності станів системи, так як $H\Sigma 2 > H\Sigma 1$. Зважаючи на кількість непрацездатних станів системи з топологією № 2, при зміні ймовірності працездатності елементів ситуація може змінитися.



Лабораторна робота № 8. Системний аналіз в управлінні інформацією

Мета роботи: навчитися використовувати властивості інформаційної ентропії для дослідження складних систем і для оцінки їх безпеки (надійності).

Завдання:

1) визначити середню кількість інформації, яка переноситься одним символом повідомлення, якщо ймовірності появи символів джерела повідомлень дорівнюють $p(x_1)$, $p(x_2)$, $p(x_3)$ (таблиця 8.1);

2) визначити інформаційні втрати при передачі повідомлення з N символів алфавіту x_1, x_2, x_3 ;

3) визначити кількість прийнятої інформації.

Складна технічна система являє собою канал зв'язку, описаний каналною матрицею.

Таблиця 8.1 – Вихідні дані

№ варіанту	$p(x_1)$	$p(x_2)$	N	Канальна матриця
1.	0,7	0,2	700	6
2.	0,3	0,5	850	2
3.	0,8	0,1	900	3
4.	0,6	0,2	1100	4
5.	0,5	0,3	700	5
6.	0,7	0,1	750	6
7.	0,8	0,15	800	2
8.	0,6	0,1	1200	3
9.	0,4	0,3	1100	4
10.	0,2	0,7	1005	5
11.	0,5	0,3	1010	6
12.	0,1	0,8	1300	2
13.	0,2	0,6	1250	3
14.	0,3	0,5	900	4
15.	0,1	0,7	650	5
16.	0,15	0,8	740	1
17.	0,1	0,6	860	2



№ варіанту	$p(x_1)$	$p(x_2)$	N	Канальна матриця
18.	0,3	0,4	1005	3
19.	0,2	0,6	1100	4
20.	0,3	0,5	1005	5
21.	0,1	0,7	1010	6
22.	0,15	0,8	1300	2
23.	0,1	0,6	1250	3
24.	0,3	0,4	900	4
25.	0,5	0,3	650	5
26.	0,7	0,1	740	1
27.	0,8	0,15	860	2
28.	0,6	0,1	1005	3
29.	0,4	0,3	1010	4
30.	0,2	0,7	1300	5
31.	0,5	0,3	1250	6

Канальні матриці:

$$P^1(Y/X) = \begin{pmatrix} 0.98 & 0.1 & 0.2 \\ 0.01 & 0.75 & 0.3 \\ 0.01 & 0.15 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

$$P^2(Y/X) = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

$$P^3(Y/X) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.5 \\ 0.15 & 0.7 & 0.1 \\ 0.15 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

$$P^4(Y/X) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.15 & 0.25 \\ 0.35 & 0.7 & 0.25 \\ 0.05 & 0.15 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

$$P^5(Y/X) = \begin{pmatrix} 0.68 & 0.3 & 0.1 \\ 0.22 & 0.5 & 0.6 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

$$P^6(Y/X) = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.2 & 0.2 \\ 0.15 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Теоретичні відомості. Інформаційна ентропія

Розглянемо каналну матрицю $P^1(Y/X) = \begin{pmatrix} 0.98 & 0.1 & 0.2 \\ 0.01 & 0.75 & 0.3 \\ 0.01 & 0.15 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Ймовірності появи символів джерела повідомлень дорівнюють:

$$p(x_1) = 0,7; p(x_2) = 0,2; p(x_3) = 0,1.$$

1. Визначимо середню кількість інформації, яка переноситься одним символом повідомлення, як ентропію джерела повідомлень за формулою:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n p_i \cdot \log p_i = -(0.7 \cdot \log 0.7 + 0.2 \cdot \log 0.2 + 0.1 \cdot \log 0.1) = 1.16 \text{ біт.}$$

2. Втрати в каналі зв'язку, тобто ненадійність технічної системи, визначаються через умовну ентропію:

$$\begin{aligned} H(Y/X) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \cdot \log_2 \frac{1}{p(y_j/x_i)} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i) \cdot p(y_j/x_i) \cdot \log_2 \frac{1}{p(y_j/x_i)} \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} H(Y/X) &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i) \cdot p(y_j/x_i) \cdot \log_2 p(y_j/x_i). \\ H(Y/X) &= -\left[0.7 \cdot (0.98 \cdot \log_2 0.98 + 0.01 \cdot \log_2 0.01 + 0.01 \cdot \log_2 0.01) + \right. \\ &\quad \left. + 0.2 \cdot (0.1 \cdot \log_2 0.1 + 0.75 \cdot \log_2 0.75 + 0.15 \cdot \log_2 0.15) + \right. \\ &\quad \left. + 0.1 \cdot (0.2 \cdot \log_2 0.2 + 0.3 \cdot \log_2 0.3 + 0.5 \cdot \log_2 0.5) \right] = 0.473 \text{ біт.} \end{aligned}$$

Втрати в каналі зв'язку при $N = 1000$ символів складе:

$$\Delta I = N \cdot H(Y/X) = 1000 \cdot 0.473 = 473 \text{ біт.}$$

3. Середня кількість отриманої інформації визначається за формулою:

$$I = N \cdot (H(Y) - H(Y/X)).$$

Значення ентропії $H(Y)$ визначається наступним чином:

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^m p(y_j) \cdot \log_2 p(y_j), \text{ де } p(y_j) = \sum_{i=1}^n p(x_i, y_j).$$



Використовуючи формулу множення $p(x, y) = p(x) \cdot p(y/x)$, побудуємо матрицю загальних ймовірностей:

$$P(X, Y) = \begin{pmatrix} 0.7 \cdot 0.98 = 0.686 & 0.2 \cdot 0.1 = 0.02 & 0.1 \cdot 0.2 = 0.02 \\ 0.7 \cdot 0.01 = 0.007 & 0.2 \cdot 0.75 = 0.15 & 0.1 \cdot 0.3 = 0.03 \\ 0.7 \cdot 0.01 = 0.007 & 0.2 \cdot 0.15 = 0.03 & 0.1 \cdot 0.5 = 0.05 \end{pmatrix}.$$

Підсумовуючи елементи в кожному рядку, отримаємо безумовні ймовірності $p(y_j)$.

$$p(y_1) = 0.686 + 0.02 + 0.02 = 0.726;$$

$$p(y_2) = 0.007 + 0.15 + 0.03 = 0.187;$$

$$p(y_3) = 0.007 + 0.03 + 0.05 = 0.087.$$

тоді

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^m p(y_j) \cdot \log_2 p(y_j) = -(0.726 \cdot \log_2 0.726 + 0.187 \cdot \log_2 0.187 + 0.087 \cdot \log_2 0.087) = 1.094 \text{ біт}.$$

Середня кількість отриманої інформації складе:

$$I = N \cdot (H(Y) - H(Y/X)) = 1000 \cdot (1.094 - 0.473) = 621 \text{ біт}.$$

Приклад виконання

Таблиця – Вихідні дані

№ варіанту	$p(x_1)$	$p(x_2)$	N	Канальна матриця
31	0,5	0,3	1250	6

Канальна матриця:

$$P^6(Y/X) = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.2 & 0.2 \\ 0.15 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

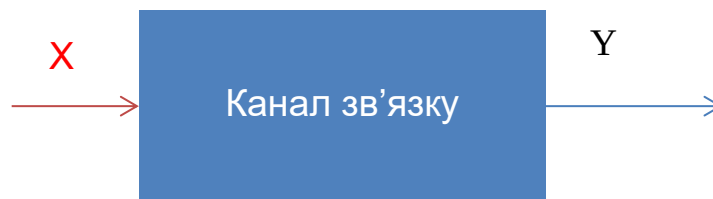


Рисунок 8.1 – Схематичний опис технічної системи

Розглянемо каналну матрицю $P^6(Y/X) = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.2 & 0.2 \\ 0.15 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Ймовірності появи символів джерела повідомлень дорівнюють:

$$p(x_1) = 0,5; p(x_2) = 0,3; p(x_3) = 1 - (0,5 + 0,3) = 0,2.$$

1. Визначимо середню кількість інформації, яка переноситься одним символом повідомлення, як ентропію джерела повідомлень за формулою:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n p_i \cdot \log_2 p_i = -(0.5 \cdot \log_2 0.5 + 0.3 \cdot \log_2 0.3 + 0.2 \cdot \log_2 0.2) = 1.485 \text{ біт.}$$

2. Втрати в каналі зв'язку, тобто ненадійність технічної системи, визначаються через умовну ентропію:

$$H\left(\frac{Y}{X}\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \cdot \log_2 \frac{1}{p\left(\frac{y_j}{x_i}\right)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i) \cdot p(y_j/x_i) \cdot \log_2 \frac{1}{p(y_j/x_i)}$$

або

$$H(Y/X) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i) \cdot p(y_j/x_i) \cdot \log_2 p(y_j/x_i).$$

$$H(Y/X) = -\left[\begin{aligned} &0.5 \cdot (0.75 \cdot \log_2 0.75 + 0.15 \cdot \log_2 0.15 + 0.1 \cdot \log_2 0.1) + \\ &+ 0.3 \cdot (0.2 \cdot \log_2 0.2 + 0.5 \cdot \log_2 0.5 + 0.3 \cdot \log_2 0.3) + \\ &+ 0.2 \cdot (0.2 \cdot \log_2 0.2 + 0.3 \cdot \log_2 0.3 + 0.5 \cdot \log_2 0.5) \end{aligned} \right] = 1.27 \text{ біт.}$$

Втрати в каналі зв'язку при $N = 1250$ символів складе:



$$\Delta I = N \cdot H(Y/X) = 1250 \cdot 1.27 = 1587.2 \text{ біт.}$$

3. Середня кількість отриманої інформації визначається за формулою:

$$I = N \cdot (H(Y) - H(Y/X)).$$

Значення ентропії $H(Y)$ визначається наступним чином:

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^m p(y_j) \cdot \log_2 p(y_j), \text{ де } p(y_j) = \sum_{i=1}^n p(x_i, y_j).$$

Використовуючи формулу множення $p(x, y) = p(x) \cdot p(y/x)$, побудуємо матрицю загальних ймовірностей:

$$P(X, Y) = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot 0.75 = 0.375 & 0.3 \cdot 0.2 = 0.06 & 0.2 \cdot 0.2 = 0.04 \\ 0.5 \cdot 0.15 = 0.075 & 0.3 \cdot 0.5 = 0.15 & 0.2 \cdot 0.3 = 0.06 \\ 0.5 \cdot 0.1 = 0.05 & 0.3 \cdot 0.3 = 0.09 & 0.2 \cdot 0.5 = 0.1 \end{pmatrix}.$$

Підсумовуючи елементи в кожному рядку, отримаємо безумовні ймовірності $p(y_j)$.

$$p(y_1) = 0.375 + 0.06 + 0.04 = 0.475;$$

$$p(y_2) = 0.075 + 0.15 + 0.06 = 0.285;$$

$$p(y_3) = 0.05 + 0.09 + 0.1 = 0.24.$$

Тоді

$$H(Y) = -\sum_{j=1}^m p(y_j) \cdot \log_2 p(y_j) = -(0.475 \cdot \log_2 0.475 + 0.285 \cdot \log_2 0.285 + 0.24 \cdot \log_2 0.24) = 1.52 \text{ біт.}$$

Середня кількість отриманої інформації складе:

$$I = N \cdot (H(Y) - H(Y/X)) = 1250 \cdot (1.52 - 1.27) = 313.33 \text{ біт.}$$

Розрахунки в Excel наведені на рис. 1-2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Канальна матриця								
2		0,75	0,2	0,2						
3		0,15	0,5	0,3						
4		0,1	0,3	0,5						
5										
6		p(x1)	p(x2)	p(x3)						
7		0,5	0,3	0,2						
8										
9	1. Середня кількість інформації, яка переноситься одним символом повідомлення, як ентропія джерела повідомлень:									
10		H(X)	1,485	біт						
11										
12	2. Втрати в каналі зв'язку, тобто ненадійність технічної системи, визначаються через умовну ентропію:									
13										
14		H(Y/X)	1,27	біт						
15		N	1250							
16		ΔI	1587,18	біт						
17										
18	3. Середня кількість отриманої інформації									
19		Матриця загальних ймовірностей								
20					Сума (p(y))					
21		0,375	0,06	0,04	0,475					
22	P(X,Y)	0,075	0,15	0,06	0,285					
23		0,05	0,09	0,1	0,24					
24				Сума (перевірка)	1					
25										
26		H(Y)	1,52	біт						
27										
28		I	313,33	біт						
29										

Рис. 1. Розрахункові значення

	A	B	C	D	E
1		Канальна матриця			
2		0,75	0,2	0,2	
3		0,15	0,5	0,3	
4		0,1	0,3	0,5	
5					
6		p(x1)	p(x2)	p(x3)	
7		0,5	0,3	=1-B7-C7	
8					
9	1. Середня кількість інформації, яка переноситься одним символом повідомлення, як ентропія джерела повідомлень:				
10		H(X)	=-(B7*LOG(B7;2)+C7*LOG(C7;2)+D7*LOG(D7;2))		біт
11					
12	2. Втрати в каналі зв'язку, тобто ненадійність технічної системи, визначаються через умовну ентропію:				
13					
14		H(Y/X)	=-(B7*(B2*LOG(B2;2)+B3*LOG(B3;2)+B4*LOG(B4;2))+C7*(C2*LOG(C2;2)+C3*LOG(C3;2)+C4*LOG(C4;2))+D7*(D2*LOG(D2;2)+D3*LOG(D3;2)+D4*LOG(D4;2)))		біт
15		N	1250		
16		ΔI	=C15*C14		біт
17					
18	3. Середня кількість отриманої інформації				
19		Матриця загальних:			
20					Сума (p(y))
21		=B57*B2	=C57*C2	=D57*D2	=СУММ(B21;D21)
22	P(X,Y)	=B57*B3	=C57*C3	=D57*D3	=СУММ(B22;D22)
23		=B57*B4	=C57*C4	=D57*D4	=СУММ(B23;D23)
24				Сума (перевірка)	=E21+E22+E23
25					
26		H(Y)	=-(E21*LOG(E21;2)+E22*LOG(E22;2)+E23*LOG(E23;2))		біт
27					
28		I	=C15*(C26-C14)		біт
29					

Рис. 2. Лист з формулами



Лабораторна робота № 9.

Використання дерев рішення для опису систем

Мета роботи: освоєння методу побудови дерев рішення для опису систем та розв'язку нескладних проблем, що виникають в них.

Завдання: Побудуйте дерево рішень для проблем, наведених в таблиці 9.1.

Таблиця 9.1 – Варіанти завдання

№ варіанту	Проблеми
1-3	Порушення правил дорожнього руху
4-6	Несправність автомобіля (помилка в управлінні автомобілем)
7-9	Помилка в програмному коді
10-11	Набір невірного телефонного номера
12-13	Запізнення на роботу (запізнення на зустріч до призначеного терміну)
14-16	Брак при виготовленні деталі на верстаті
17-19	Помилка при розв'язанні задачі на ПК
20 и далі	Помилка при митному контролі

Теоретичні відомості

Розкладання системи на частини називається декомпозицією. Зворотна їй процедура складання системи з окремих частин називається агрегацією. Декомпозиція є необхідною процедурою при рішенні проблем пов'язаних з системами, зокрема при аналізі і синтезі систем. Агрегація використовується при проектуванні систем, а також в завданнях ухвалення рішень.

При декомпозиції сукупність складових частин утворює так зване дерево цілей (дерево рішень, ієрархічне дерево).

Основна проблема, яка виникає при декомпозиції системи, – повнота відповідного дерева цілей. З одного боку дерево має бути досить повним для досягнення мети аналізу, з іншої – простим, осяжним, зручним для використання.



Міра деталізації визначається цілями аналізу. Наприклад, при діагностуванні системи (автомобіля) міра деталізації має бути вища, ніж при рішенні задачі конструювання нової системи.

Дерево має бути по можливості компактним з точки зору мети аналізу.

Розміри **«вшир»** визначаються числом елементів на кожному рівні, а **«углиб»** – числом рівнів. Процес декомпозиції ґрунтується на вивченні системи і є неформальною процедурою, на яку впливають симпатії ОПР, його рівень інформованості, стиль мислення т.п.

При виділенні елементів одного рівня слід використати наступні принципи:

- принцип істотності, т.т. включаються елементи, істотні для цього рівня (цілі аналізу);

- принцип однорідності, т.т. включаються елементи, що мають однакову важливість (міра спільності) по відношенню до мети аналізу (цьому рівню);

- принцип незалежності, т.т. елементи одного рівня мають бути взаємно незалежні.

Процес розбиття є ітеративним. Якщо у експерта (ОПР) знань недостатньо, то вводиться елемент **«усе інше»**, який надалі деталізується. Перевірка однорідності елементів цього рівня може бути проведена на послідуючих (нижчих) рівнях аналізу: число елементів на нижчому рівні, що замикаються на елемент більш високого рівня, має бути приблизно однаковим для усіх елементів більш високого рівня.

При визначенні розмірів дерева **«углиб»**, т.т. числа рівнів, істотним є те, наскільки зростає корисна інформація про систему, необхідна для досягнення цілей аналізу і наскільки вона точна. Більш високий рівень володіє більшою мірою спільності в порівнянні з нижчим (по відношенню включення, відповідності, узгодження). В деяких випадках при виділенні рівнів вдається використати головний критерій, наприклад: ефективність, витрати, час і т.п.

Декомпозиція зазвичай закінчується, коли досягли так званого елементарного рівня, т.т. рівня елементів, які немає сенсу піддавати подальшому розкладанню (декомпозиції).

У математичних завданнях поняття елементарності може бути визначене формально (у теорії алгебри систем є відповідні теореми).

У неформалізованих завданнях **«елементарність»** перевіряється експертом. Слід зазначити, що декомпозиційне дерево не є однозначним



і залежить від цілей аналізу. Наприклад, така система, як людина може бути розглянута на різних рівнях: анатомічному, фізіологічному, соматичному, психічному і т.п., при цьому виходитимуть різні декомпозиційні схеми.

Міра деталізації дерева залежить від міри інформованості експерта (ОПР), т.т. рівня знань, які має конкретний експерт, а також від загального рівня в цій предметній області.

Алгоритм декомпозиції має вигляд:

1. Визначення об'єкта аналізу і його вивчення.
2. Визначення цілей аналізу.
3. Побудова моделі системи у вигляді фрейма (семантичної мережі).
4. Перевірка елементів рівня на однорідність, істотність, незалежність.
5. Перевірка числа рівнів на достатність.
6. Перевірка схеми на придатність для вирішення поставленого завдання.

Фрейм – це структура (модель), що представляє цей об'єкт (ситуацію, поняття) і враховує його характерні особливості. Наприклад, якщо вимовити слово «лабораторія» або «бібліотека», то в пам'яті виникає відповідне представлення, що містить характерні деталі цих понять, це і є фрейм. При його побудові використовуються відношення: бути елементом класу; складати частину, мати властивість, мати, бути слідством і т.п. з вказівкою оцінки важливості елементів одного рівня.

Якщо схема дуже детальна, то на нижніх рівнях отримаємо семантичну мережу із-за існуючої у реальному світі багатозначності взаємозв'язків об'єктів.

Чи варто далі деталізувати – це питання витрат і досягнення цілей аналізу. Зазвичай дерево будується для вибору якихось варіантів. Тому міра деталізації має бути такою, щоб можна було вибрати необхідне (допустиме) рішення при певних ресурсних обмеженнях (у сенсі витрат, ефективності, часу і т.п.). Коли рішення обране, воно може уточнюватися.

Мета даного завдання – освоєння техніки побудови дерева рішень для порівняно простих проблем, а саме, таких, які не вимагають спеціального вивчення (за деяким винятком). Це завдання є неформальним, тому вимагає концентрації всіх знань, отриманих раніше при вивченні дисципліни.



Труднощі пов'язані з правильним вибором елементів на кожному рівні дерева рішень, так щоб їх впорядкована сукупність давала можливість порівняння і відбору варіантів рішень.

Найбільш поширена помилка пов'язана з довільним (хаотичним) вибором елементів різної міри спільності на кожному рівні.

При складанні дерева рішень слід врахувати, що елементи другого рівня, що замикаються на один елемент першого рівня, рівноправні і розташовуються паралельно один одному, це ж правило відноситься і до елементів третього рівня, що замикаються на один і той же елемент другого рівня.

Приклад 1

Побудуємо діаграму причин і результатів у вигляді дерева рішень для проблеми: помилка у вимірі.

Формулюємо проблему: помилка у вимірі.

Визначаємо функціональні підсистеми, які можуть бути головними причинами помилки. Потім кожна з головних причин розбивається на підпричини, а кожна з підпричин, у свою чергу, на впливаючі чинники.

Нижче наведена сукупність елементів (причин, підпричин і впливаючих чинників), що утворюють дерево вирішення проблеми. При цьому головні причини позначені індексом, що складається з однієї цифри; підпричини – індексом з двох цифр, а впливаючі чинники – індексом з трьох цифр. На рис. А.1 представлено підсумкове дерево рішень.

1 – оператор (вимірник):

11 – кваліфікація (111 – досвід, 112 – освіта, 113 – підготовка);

12 – розумовий стан (121 – концентрація уваги, 122 – розумова втома);

13 – фізичний стан (131 – зір, 132 – фізична втома).

2 – засіб вимірів:

21 – підтримка в працездатному стані (211 – ремонти, 212 – обслуговування, 213 – перевірки);

22 – умови застосування (221 – точність, 222 – діапазон, 223 – впливаючі величини);

23 – розташування (231 – висота, 232 – відстань до оператора).



3 – умови вимірів:

31 – освітлення (311 – яскравість, 312 – колір, 313 – розташування джерела, 314 – тип джерела);

32 – перерви (321 – частота вимірів, 322 – інші роботи);

33 – шум (331 – розмови, 332 – телефонні дзвінки, 333 – виробничі перешкоди).

4 – об'єкт вимірів:

41 – вид сигналу (411 – стабільність, 412 – форма, 413 – перешкоди, 414 – інтенсивність);

42 – початкова (апріорна) інформація про завдання (421 – інформаційне середовище завдання, 422 – вид об'єкту, 423 – вимоги до якості рішення).

5 – організація процесу вимірів:

51 – алгоритм вимірів (511 – метод, 512 – методика);

52 – алгоритм обробки (521 – складність розрахунків, 522 – автоматизація розрахунків).

Приклад 2

Розглянемо проблему «дорожньо-транспортна подія».

Необхідно побудувати фрейм, тобто типову структуру для опису ситуації.

На першому рівні треба виділити елементи (найбільш загальні), сукупність яких визначає проблему. Виділимо наступні елементи:

1 – суб'єкт (пішохід, водій), 2 – технічний засіб (автомобіль або інший транспорт), 3 – зовнішні умови (умови руху).

На другому рівні виділяються стани елементів першого рівня.

Для суб'єкта виділимо: 11 – фізичний стан, 12 – розумовий стан, 13 – емоційний стан; для водія слід додати елемент 14 – кваліфікація.

Для технічного засобу виділимо: 21 – справність, 22 – умови в кабіні (комфортність). Умови руху складаються з елементів: 31 – дорога, 32 – погода.

На третьому рівні виділяються характеристики станів елементів другого рівня.



Для фізичного стану виділимо елементи: 111 – здоров'я, 112 – фізична втома, 113 – зір і т. п.

Для розумового стану: 121 – розумова втома, 122 – неуважність і тому подібне

Для емоційного стану 131 – збудження, 132 – нервозність і тому подібне.

Для кваліфікації: 141 – досвід, 142 – підготовка, 143 – техніка водіння.

Для елемента 21 на третьому рівні виділимо: 211 – ремонт, 212 – поточне обслуговування (профілактика).

Для елемента 22: 221 – зручність управління, 222 – освітлення, 223 – шум в кабіні (музика, розмови) тощо.

Для елемента 31 виділимо: 311 – якість покриття, 312 – інтенсивність рухи, 313 – наявність показчиків, 314 – видимість тощо.

Для елемента 32 виділимо: 321 – опади, 322 – ожеледь, 323 – туман тощо.



2 ТЕОРЕТИЧНА ДОВІДКА

Питання:

1. Основні терміни та визначення.
2. Класифікація систем.
3. Типи і види відношень між елементами системи.

1. Основні терміни та визначення

Системний аналіз – сукупність методів дослідження складних систем на основі системного підходу, спрямованих на підвищення ефективності функціонування систем в цілому.

Системний підхід – напрям методології дослідження, який розглядає будь-який процес, або явище як цілісну систему.

Система – сукупність елементів, які зв'язані між собою певними відношеннями з метою досягнення певної мети.

Мета – суб'єктивний образ неіснуючого, але бажаного стану системи.

Стан – миттєва оцінка, або фаза розвитку системи.

Рівновага – такий стан системи, який забезпечує ефективне функціонування системи, незважаючи на внутрішні та зовнішні збурення.

Поведінка системи – правило переходу системи з одного стану до іншого, або утримання рівноваги при умові внутрішніх та зовнішніх збурень.

Елемент системи – найпростіша неподільна частина системи, властивості якої визначаються певною задачею.

Підсистема – складова системи, яка складається з взаємозв'язаних елементів, але менша за масштабами всієї системи.

Властивість – будь-яка суттєва ознака об'єкту/елементу/системи.

Структура системи – зображення елементів системи та зав'язків між ними.

Розрізняють структури: функціональні, технічні, організаційні, інформаційні, управлінські та інші.

Усі структури є ієрархічними і будь-яка система має два та більше рівнів управління.

2. Класифікація систем

Системи за походженням поділяються на:



природні – з’явилися в наслідок дії природних процесів та явищ;
штучні – створені людиною для досягнення мети;
змішані – складаються з природних та штучних підсистем.

За *видом об’єкта дослідження* системи поділяються на технічні, біологічні, організаційні та інші.

За *науковим напрямом* системи поділяються на фізичні, хімічні, економічні, математичні.

За *рівнем формалізації*: детерміновані та стохастичні.

За *характером взаємодії з навколишнім середовищем*: відкриті, закриті.

За *складністю структури*: прості, великі, складні.

За *ступенем організованості*: добре організовані, погано організовані, із самоорганізацією.

За *часом розвитку системи*: статичні та динамічні.

Майже всі системи є динамічними і функціонують у зовнішньому середовищі. Зовнішнім середовищем називається все, що не належить системі та може впливати на неї.

Розрізняють середовища прямої та опосередкованої дії на систему. До першої відносять те, що містить фактори, які безпосередньо впливають на систему, а до другої – таку частину середовища, фактори котрої можуть не мати негайного та прямого прояву у системі, але все ж таки впливають на неї.

До основних *особливостей систем* належать:

- цілісність;
- відносна відокремленість від оточуючого середовища;
- пов’язаність із середовищем;
- структурованість, тобто існування в системі певних частин та зв’язків між ними;
- певна цілеспрямованість системи.

Замкнена або замкнута система має фіксовані межі, її дія характеризується високим ступенем незалежності від оточуючого середовища.

Відкрита система характеризується взаємодією із зовнішнім середовищем. Звичайно відкрита система має властивість тією чи іншою мірою пристосовуватись до змін у зовнішньому середовищі і повинна це робити, щоб продовжувати своє існування та дію.



Системи, для дослідження яких з метою управління не вистачає матеріальних ресурсів часу, бази даних, інших засобів, вважаються великими. Тобто великими є системи, дослідження яких має труднощі, пов'язані з розмірністю.

Системи, при дослідженні яких не вистачає інформації для ефективного управління, тлумачать як складні.

Ознакою простої системи є порівняно невеликий обсяг інформації, потрібний для успішного управління нею.

До основних властивостей складної системи відносять: цілісність, неадитивність (емерджентність), ієрархічність системи, взаємозалежність системи із навколишнім середовищем, цілеспрямованість, надійність системи, розмірність системи (наявність значної кількості підсистем (7-10)), наявність підсистем різного характеру (технічних, економічних, соціальних та інших).

1. Цілісність (емерджентність).

В системі окремі частини функціонують спільно, складаючи в сукупності процес функціонування системи як цілого. Сукупне функціонування різнорідних взаємопов'язаних елементів породжує якісно нові функціональні властивості цілого, що не мають аналогів у властивостях його елементів. Це означає принципову незвідність властивостей системи до суми властивостей її елементів.

2. Взаємодія з зовнішнім середовищем.

Система реагує на вплив навколишнього середовища, еволюціонує під цим впливом, але при цьому зберігає якісну визначеність і властивості, що відрізняють її від інших систем.

3. Структура.

При дослідженні системи структура виступає як спосіб опису її організації. Залежно від поставленого завдання дослідження проводиться декомпозиція системи на елементи, і вводяться відносини і зв'язки між ними, які є важливими для вирішуваної проблеми. Разом з тим, декомпозиція системи на елементи і зв'язку визначається внутрішніми властивостями даної системи. Структура динамічна за своєю природою, її еволюція в часі і просторі відображає процес розвитку систем.



4. Нескінченність пізнання системи.

Під цією властивістю розуміється неможливість повного пізнання системи. Система може бути представлена нескінченним числом структурних і функціональних варіантів, що відображають різні аспекти системи.

5. Ієрархічність системи.

Кожен елемент в декомпозиції системи може розглядатися як цілісна система, елементи якої, в свою чергу, можуть бути також представлені як системи. Але, з іншого боку, будь-яка система – лише компонент більш широкої системи.

6. Елемент.

Під елементом розуміється найменша ланка в структурі системи, внутрішню будову якого не розглядають на обраному рівні аналізу. Відповідно до властивості 5 будь-який елемент є системою, але на обраному рівні аналізу ця система характеризується тільки цілісними характеристиками.

Цілісність, структура, елемент, нескінченність і ієрархічність складають ядро системоутворюючих понять загальної теорії систем і є основою системного уявлення об'єктів і формування концепцій системних досліджень.

Однак для докладнішого вивчення властивостей динамічних економічних систем (ЕС) необхідно розглянути ще ряд важливих властивостей та характеристик.

Стан системи. Стан системи визначається станами її елементів. Теоретично можливий набір станів дорівнює числу можливих поєднань усіх станів елементів. Однак взаємодія складових частин призводить до обмеження кількості поєднань, що реалізуються. Зміна стану елемента може відбуватися неявно, безперервно та стрибкоподібно.

Поведінка системи. Під поведінкою системи розуміється закономірний перехід із одного стану до іншого, обумовлений властивостями елементів і структурою.

Безперервність функціонування. Динамічним системам властива безперервність функціонування. Система існує, поки функціонують соціально-економічні та інші процеси в суспільстві, які неможливо



перервати, інакше система перестане функціонувати. Усі процеси в ЕС, як і живому організмі, взаємопов'язані. Функціонування елементів визначає характер функціонування цілого, і навпаки. Функціонування системи пов'язане з безперервними змінами, накопичення яких призводить до розвитку.

Розвиток системи. Життєдіяльність складної системи **обумовлює** постійну зміну фаз функціонування та розвитку, яка виявляється у безперервній функціональній та структурній перебудові системи, її підсистем та елементів.

Еволюція систем визначається однією з найважливіших властивостей складних систем – здатністю до саморозвитку. Центральним джерелом саморозвитку є безперервний процес виникнення та вирішення протиріч. Розвиток, зазвичай, пов'язаний з ускладненням системи, т.т. зі збільшенням її внутрішнього різноманіття.

Динамічність. Економічна система функціонує і розвивається в часі, вона має передісторію та майбутнє, характеризується певним життєвим циклом, у якому можуть бути виділені певні фази: виникнення, зростання, розвиток, стабілізація, деградація, ліквідація чи стимул до зміни.

Складність. Економічна система характеризується великою кількістю неоднорідних елементів та зв'язків, поліфункціональністю, поліструктурністю, багатокритеріальністю, багатоваріантністю розвитку та властивостями складних систем.

Гомеостатичність. Гомеостатичність відбиває властивість системи до самозбереження, протидію руйнівним впливам.

Цілеспрямованість. Всім динамічним системам економіки властива цілеспрямованість, тобто наявність певної мети та прагнення до її досягнення. Розвиток системи пов'язаний саме зі зміною мети.

Керованість. Свідома організація цілеспрямованого функціонування системи та її елементів називається керованістю. У процесі життєдіяльності система за допомогою цілеспрямованого управління долає суперечності, що виникають у ній, і реагує на зміну внутрішніх і зовнішніх умов свого існування. Відповідно до умов, що змінюються вона змінює свою структуру, коригує цілі розвитку та зміст діяльності елементів, тобто відбувається цілеспрямована самоорганізація системи, яка на практиці реалізує здатність до саморозвитку. Однією з основних функцій самоорганізації є збереження у процесі еволюції системи її якісної визначеності.



Властивості керованості виявляються також у таких особливостях, як відносна автономність та функціональна керованість.

Відносна автономність функціонування економічних систем означає, що внаслідок дії зворотного зв'язку кожна зі складових вихідного сигналу може бути змінена за рахунок зміни вхідного сигналу, причому інші складові залишаються незмінними.

Функціональна керованість економічної системи означає, що підходящим вибором вхідного впливу можна досягти будь-якого вихідного сигналу.

Адаптивність. Адаптивність економічної системи визначається двома видами адаптації – пасивною та активною. **Пасивна адаптація** є внутрішньою характеристикою економічної системи, яка має певні можливості саморегулювання. **Активна адаптація** представляє механізм адаптивного управління економічною системою та організацію його ефективного здійснення.

Інерційність. Інерційність економічної системи позначається у виникненні запізнення в системі, що симптоматично реагує на збурюючі та керуючі впливи. Такі запізнення враховуються, зокрема, за допомогою лагів, що включаються до моделі опису систем. Розрізняють внутрішні лаги, або лаги прийняття рішень, що стабілізують вплив, і зовнішні лаги, що відображають затриману реакцію системи на відповідні впливи.

Стійкість. Система визнається стійкою щодо введеного визначення околиці, якщо за досить малих змін **умов функціонування її поведінка суттєво не змінюється**. В рамках теорії систем досліджуються структурна стійкість та стійкість траєкторії поведінки системи. Стійкість ЕС забезпечується такими аспектами самоорганізації, як диференціація та лабільність (чутливість). **Диференціація** – прагнення системи до структурного та функціонального розмаїття елементів, яке не тільки забезпечує умови виникнення та вирішення протиріч, а й визначає здатність системи швидко пристосовуватися до наявних умов існування. Більше розмаїття – більше стійкості та навпаки. **Лабільність** означає рухливість функцій елементів при збереженні стійкості структури системи загалом.

Стан рівноваги. Стійкість системи пов'язана з її прагненням стану рівноваги, яке передбачає таке функціонування елементів системи, у якому забезпечується підвищена ефективність руху до цілей розвитку. У



реальних умовах система не може повністю досягти стану рівноваги, хоч і прагне до неї. Елементи системи функціонують по-різному за різних умов, та його динамічна взаємодія постійно впливає рух системи. Система прагне рівноваги, цього спрямовані зусилля управління, але, досягаючи його, вона відразу від нього йде. Таким чином, стійка економічна система постійно перебуває у стані динамічної рівноваги, вона безперервно коливається щодо положення рівноваги, що є не лише її специфічною властивістю.

3. Типи і види відношень між елементами системи

Відношення – взаємозалежність або взаємодія одного та більше об'єктів/елементів $R(x,y)$.

Відношення бувають рефлексивними, симетричними, транзитивними.

Рефлексивність – еквівалентність одного об'єкта самому собі ($x \sim x$).

Симетричність – один об'єкт еквівалентний іншому, а інший – першому ($x \sim y$ та $y \sim x$).

Транзитивність – два об'єкти еквівалентні між собою, якщо кожен з них еквівалентний третьому об'єкту ($x \sim y$, якщо $x \sim z$ та $y \sim z$).

Щільність зв'язку (відношень) між об'єктами визначається кореляцією.

Подібність – відношення збіжності між двома чи більше системами, визначені деякими загальними властивостями.

Аналогія – відповідність суттєвих ознак чи властивостей систем, які порівнюються.

Гомоморфізм – відношення між двома системами, коли кожную складову частину і кожне відношення однієї системи можна відобразити на деяку складову частину і деякі відношення другої системи, але не навпаки.

Ізоморфізм – відношення між двома системами, якщо кожній складовій частині однієї системи відповідає визначена складова іншої системи і навпаки.

Ідентичність – відношення між двома об'єктами чи процесами, що характеризуються однаковими властивостями (ідентичність буває абсолютною або відносною).

Еквівалентність – відношення еквівалентності або рівної вартості.



Зв'язки між елементами можуть бути прямими (послідовними, паралельними), зворотними, комбінованими.

Виходячи з типу зав'язків систем (елементів систем) розрізняють ще чотири види відношень:

«мета – засіб» – це 2-х місцеве асиметричне відношення між системою мети (її призначенням, чи задачею) та засобом реалізації цієї мети;

просторове відношення – характеризує взаємне розташування елементів системи у просторі (топологія);

логічне відношення – це відношення між об'єктами типу " $I_1 < I_2$ ". Відомі константи (структури): і, або, і-або, не-або, або-або, якщо-то, дорівнює;

часові відношення – відношення, що контролюють упорядкування процесів, дії та явищ з впливом часу.

За метою опису системи розрізняють наступні **задачі системного аналізу**:

1) задача синтезу: задано характер функціонування системи та вимоги до системи, необхідно знайти структуру системи, яка буде задовольняти заданих умовах;

2) задача аналізу: задана структура системи, необхідно визначити характер функціонування системи;

3) задача «чорної скриньки»: задана система, структура може бути невідомою, або відомою частково і необхідно визначити характер функціонування системи.

Будь-яка динамічна система в будь-який момент часу **характеризується своїм станом і напрямом руху**.

Система робить рух або під впливом внутрішніх спонукальних причин, або в результаті впливу на неї зовнішнього середовища.

Принципово різними є причини, що зумовлюють її рух, як в початковий момент часу, так і в наступні моменти.

Зі станом системи пов'язано поняття **рівноваги**.

Під **рівновагою** розуміється **стан, що зберігається як завгодно довго при відсутності зовнішніх впливів**.

Таким чином, **рівноважний стан системи** – це такий її стан, з якого **система не вийде під дією тільки внутрішніх причин** (іншими словами,



немає таких внутрішніх сил, які б прагнули і були в змозі змінити стан рівноваги).

Очевидний приклад – рівновага на ринку деякого товару, рівновага політичних сил в суспільстві.

Напрямок руху системи задається нульовим вектором, тобто рух відсутній.

Якщо система не знаходиться в стані рівноваги, то вона робить ненульовий рух під впливом внутрішніх причин.

При цьому можливий, звичайно, і зовнішній вплив на систему, проте першопричиною зміни її стану є саме внутрішні умови її існування. Наприклад, система, що випускає на ринок нову продукцію, не перебуває в стані рівноваги, оскільки всі умови її існування і зусилля якраз і спрямовані на зміну існуючого стану. А ось виробничо-економічна система, продукція якої знаходиться в стадії насиченого попиту, швидше за все знаходиться в стані рівноваги, оскільки обсяг випуску її не змінюється до тих пір, поки не буде прийнято відповідне рішення.

Під впливом зовнішніх факторів рівновага може бути порушена, і система перейде в інший стан. В цьому випадку в дію вступає друга характеристика динамічної системи – поведінка.

Розрізняють такі **види поведінки динамічних систем** (рис. 10.1).

Залежно від будови системи, її властивостей і складових її елементів поведінка може мати відчутні відмінності.

Принципово різними виявляються два варіанти розвитку подій після того, як на систему зробило деякий обурюючий вплив зовнішнє середовище: **повернення в початковий стан** (може бути при нескінченному періоді розгляду) і **подальше віддалення від початкового стану**.

Ці можливості описуються поняттям стійкості.

Під стійкістю розуміється здатність системи повертатися в рівноважний стан в разі, якщо вона була виведена з нього.

В такому випадку **стан рівноваги** називається **стійким**.

Другому варіанту відповідає **нестійкість стану і системи**.

Таким чином, в заданий момент часу система може перебувати в стані рівноваги, і в такому випадку часто говорять про рівноважній системі, або знаходитися в стані нерівноваги (нерівноважна система).

У свою чергу, **рівновага може бути стійкою і нестійкою**, і, відповідно, поділяють **стійкі і нестійкі системи**.

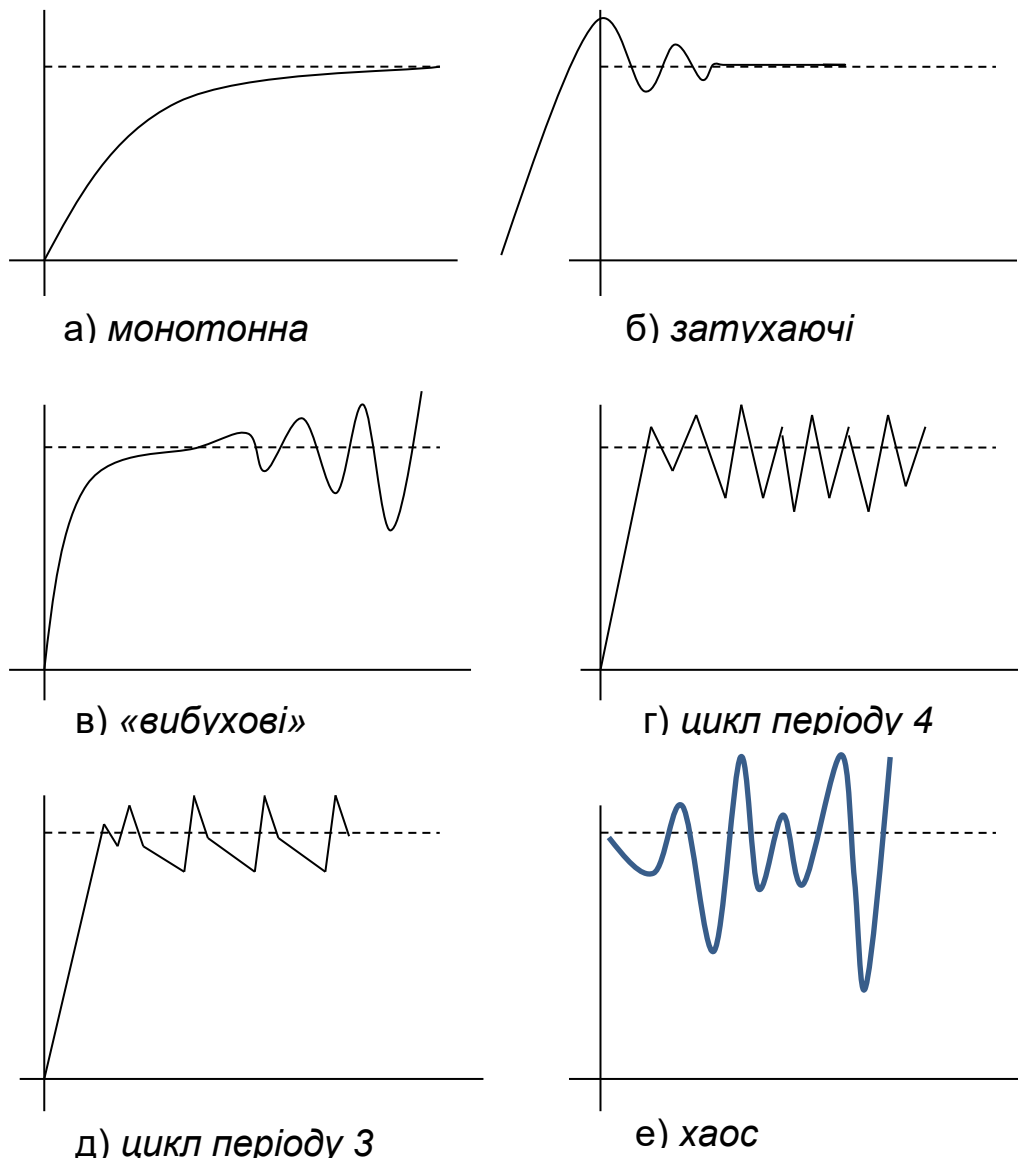


Рисунок 10.1 – Типи поведінки систем

Поняття **стійкості** застосовується також і по відношенню до руху системи, а саме – як **властивість системи мало відхилятися від заданої траєкторії руху при малих збурюючих впливах з боку зовнішнього середовища**.

У цьому сенсі можна говорити про **динамічну стійкість**.

Поведінка системи також може змінюватися в часі. Цієї можливості відповідає поняття **стаціонарності**.

Стаціонарність є властивістю поведінки, процесів, що відбуваються в системі, і означає, що характер (закон) функціонування системи не змінюється з часом.



Так, функціонування виробничо-економічної системи можна вважати стаціонарним, якщо технології виробництва не змінюються протягом аналізованого періоду. У цьому випадку систему можна описати за допомогою економіко-статистичних моделей. Якщо ж відбувається зміна технологій виробництва, то закон функціонування змінюється, наприклад, змінюються величини нормативної продуктивності ресурсів, і попередній закон функціонування виявляється недійсним. У перехідний період систему вже не можна описати за допомогою статистичних моделей.

За аналогією з поняттями рівноваги і стійкості системи часто говорять про стаціонарні і нестаціонарні системах. У **стаціонарній системі** всі процеси стаціонарні, а в **нестаціонарній** існує хоча б один нестаціонарний процес.

Отже, слід розрізняти, до якої характеристики системи відносяться різні поняття.

Рівновага є властивістю стану, стійкість – властивість системи, а стаціонарність – властивість процесів, що відбуваються в системі.

У літературі часто згадується поняття «стабільність». При цьому в різних джерелах під цим поняттям маються на увазі різні властивості. Слід зауважити, що в іноземній літературі використовується єдиний термін – stability – стійкість, стабільність. Тому існування двох різних термінів в російськомовній (україномовній) літературі пояснюється швидше перекладом, ніж дійсним розмежуванням цих понять. Виправданням існування цього терміну є те, що він, як правило, використовується як якісна, а не кількісна характеристика процесів, що відбуваються в системі, і означає поступальний, еволюційний шлях розвитку системи на противагу революційному, вибухового.

Складність і відкритість економічних систем пояснюють той факт, що рівновага і стійкість на практиці зустрічаються досить рідко. Однак ці поняття мають велике значення для економічної теорії і дозволяють досліджувати внутрішні властивості систем.

3 САМОСТІЙНА РОБОТА СТУДЕНТІВ

Самостійна робота студентів передбачає підготовку до іспиту, в тому числі розв'язання практичних задач з опису та аналізу структури складної системи.

Дерево цілей та дерево систем

Маємо складну систему «Вищий навчальний заклад».

Генеральна мета – забезпечення конкурентоспроможності випускників навчального закладу.

Підцілі першого рівня:

- 1) підвищення якості освіти (внесок у генеральну мету – 0,4);
- 2) покращення матеріальної бази закладу (внесок у генеральну мету – 0,3);
- 3) залучення великої кількості абітурієнтів (внесок у генеральну мету – 0,2);
- 4) зниження витрат на підтримку інфраструктури закладу (внесок у генеральну мету – 0,1).

Необхідно зробити опис системи та побудувати дерево цілей, визначити всі ланцюги впливу цілей найнижчого рівня на генеральну мету, якщо:

Підсистеми	Цілі	Внесок
Ректорат	підвищення середнього рейтингу випускників закладу до 4,3 (відправна точка – 3,7)	кількість випускників факультету автоматизації у загальній кількості випускників – 55%
Факультети	підвищення середнього рейтингу випускників факультету автоматизації (знайти % підвищення)	кількість випускників кафедри ІСПР у загальній кількості випускників факультету автоматизації – 20%
Кафедри	підвищення середнього рейтингу	кількість студентів-випускників, що порушують



	випускників кафедри ІСПР (знайти % підвищення)	навчальну дисципліну на кафедрі ІСПР – 15%
Студенти	–	–

Підсистеми	Цілі	Внесок
Ректорат	економія витрат енергоносіїв на 18% (загальний обсяг витрат електроенергії складає 69 000 кВт)	на обслуговування потреб факультету автоматизації витрачається 20% енергоносіїв вищого навчального закладу
Факультети	економія витрат енергоносіїв на факультеті автоматизації на 30%	на обслуговування потреб кафедри ІСПР витрачається 10% енергоносіїв факультету
Кафедри	економія витрат енергоносіїв на кафедрі ІСПР на 35%	витрати на обігрівачі складають 70%
Співробітники	–	–

Визначити внесок кожної підмети у досягнення генеральної мети.

Побудувати схему взаємодії дерева цілей та дерева систем, якщо функціонально-системна матриця має вигляд:

	Підвищення якості освіти	Покращення матеріальної бази закладу	Залучення великої кількості абітурієнтів	Зниження витрат на підтримку інфраструктури закладу
Навчальні підрозділи (факультети, кафедри)	0,6	–	0,4	0,2
Наукові підрозділи	0,3	0,2	0,3	0,2
Господарські підрозділи	–	0,5	0,1	0,5



Тендерний комітет	–	0,3	–	–
Бібліотека	0,1	–	0,2	0,1

Визначити структурні внески підсистем у досягнення генеральної мети. Зробити висновки.

Приклад виконання

Необхідно зробити опис системи та побудувати дерево цілей, визначити всі ланцюги впливу цілей найнижчого рівня на генеральну мету – зниження витрат палива підприємства, якщо загальний обсяг витрат складає **52500 л**.

Визначити внесок кожної підмети у досягнення генеральної мети, якщо у кожного підрозділу є свої цілі.

Підрозділ «Підприємство»:

- 1) знизити витрати палива на 15%;
- 2) внесок цеху харчування у витрати палива підприємства складають 45%.

Підрозділ «Цех харчування»:

- 1) зниження витрат палива на 25%;
- 2) внесок карбюраторної дільниці у витрати палива у цех харчування складають 60%.

Підрозділ «Карбюраторна дільниця»:

- 1) знизити витрати на 15%;
- 2) витрати на холостого ходу карбюраторної дільниці складають 25%.

Підрозділ «Виконавець»: немає другорядних цілей.

Визначити структурні внески підсистем у досягнення генеральної мети.

Зробити висновки.

В табличному виді постановка задачі:

Підрозділ	Мета
Підприємство	1) знизити витрати палива на 15%; 2) внесок цеху харчування у витрати палива підприємства складають 45%;



Цех харчування	1) зниження витрат палива на 25%; 2) внесок карбюраторної дільниці у витрати палива у цех харчування складають 60%;
Карбюраторна дільниця	1) знизити витрати на 15%; 2) витрати на холостого ходу карбюраторної дільниці складають 25%;
Виконавець	—

Розв'язок задачі:

Підрозділ	Мета		Розрахунок (внески)
Підприємство	1) знизити витрати палива на 15%;	M_{01}^1	$=0,15 \cdot 52\,500 = 7875 \text{ л}$
	2) внесок цеху харчування у витрати палива підприємства складають 45%;	r_{011}^1	$=0,45 \cdot 7875 = 3544 \text{ л}$
Цех харчування	1) зниження витрат палива на 25%;	M_{011}^2	$=0,25 \cdot 3544 = 886 \text{ л}$
	2) внесок карбюраторної дільниці у витрати палива у цех харчування складають 60%;	r_{0111}^2	$=0,60 \cdot 886 = 532 \text{ л}$
Карбюраторна дільниця	1) знизити витрати на 15%;	M_{0111}^3	$=0,15 \cdot 532 = 80 \text{ л}$
	2) витрати на холостого ходу карбюраторної дільниці складають 25%;	r_{01111}^3	$=0,25 \cdot 80 = 20 \text{ л}$
Виконавець	—	M_{01111}^4	20 л

Структурні внески:

1. Внесок мети цеху у мету підприємства: $\frac{M_{011}^2}{M_{01}^1} \cdot 100\% = \frac{886}{7875} \cdot 100\% = 11,3\%$.
2. Внесок мети дільниці у мету цеху: $\frac{M_{0111}^3}{M_{011}^2} \cdot 100\% = \frac{80}{886} \cdot 100\% = 9,0\%$
3. Внесок виконавця у мету дільниці: $\frac{M_{01111}^4}{M_{0111}^3} \cdot 100\% = \frac{20}{80} \cdot 100\% = 25,0\%$.

Структурні внески підрозділів у досягнення генеральної мети:

4. Внесок мети цеху у мету підприємства: $\frac{M_{011}^2}{M_{01}^1} \cdot 100\% = \frac{886}{7875} \cdot 100\% = 11,3\%$.
5. Внесок мети дільниці у мету підприємства мету цеху: $\frac{M_{0111}^3}{M_{01}^1} \cdot 100\% = \frac{80}{7875} \cdot 100\% = 1,01\%$
6. Внесок виконавця у мету підприємства: $\frac{M_{01111}^4}{M_{01}^1} \cdot 100\% = \frac{20}{7875} \cdot 100\% = 0,25\%$.

Ланцюг залежності цілей: $M_{01111}^4 \xrightarrow{r_{01111}^3} M_{0111}^3 \xrightarrow{r_{0111}^2} M_{011}^2 \xrightarrow{r_{011}^1} M_{01}^1$.

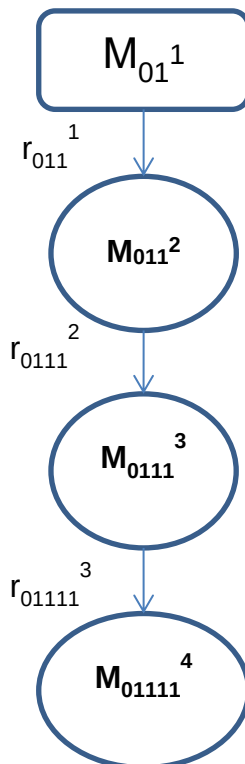


Рис.1. Дерево цілей



ПЕРЕЛІК ЛІТЕРАТУРИ

1. Данилов А. М. Системные методологии, идентификация систем и теория управления: промышленные и аэрокосмические приложения / А.М. Данилов, И. А. Гарькина, Э. В. Лапшин, Н. К. Юрков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2009. – № 1. – С. 3–11.
2. Зверева Е.Н. Сборник примеров и задач по основам теории информации и кодирования сообщений / Е.Н. Зверева, Е.Г. Лебедько. – СПб: НИУ ИТМО, 2014. – 76 с.
3. Конспект лекцій з дисципліни «Основи теорії систем і системного аналізу» (для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності «Менеджмент») / Укл.: О.Г.Водолазська, Н.В.Водолазська. – Краматорськ: ДДМА, 2003.- 75 с.
4. Ладанюк А.П. Системний аналіз складних систем управління. Курс для студентів напряму 0925 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» денної та заочної форм навчання / А.П. Ладанюк. – 227 с.
5. Модели и алгоритмы управления интегрированными производственными комплексами : моногр. / Н. К. Юрков. – Пенза : Информационно-издательский центр ПГУ, 2003. – 198 с.
6. Моделирование сложных систем. Конспект лекций по курсу «Системный анализ сложных систем управления». Учебное пособие для студентов факультета информационных технологий, обучающихся по специальности 6.0925 «Автоматизация и компьютерно-интегрированные технологии» / Сост. Е.А.Чичкарев, – 2005.
7. Оценка безопасности сложных технических систем / Н. К. Юрков // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 2. – С. 15–21.
8. Системний аналіз складних систем управління. Практикум [Електронний ресурс]: Навчальний посібник / А.П. Ладанюк, Я.В. Смітюх, Л.О. Власенко, Ю.О. Чорна. – К.: НУХТ, 2014. – 157 с.
9. Юрков Н. К. К проблеме обеспечения безопасности сложных систем / Н. К. Юрков // Надежность и качество – 2011 : тр. междунар. симп. : в 2 т. / под ред. Н. К. Юркова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2011. –Т. 1. – С. 104–106.
10. Романов В.Н. Системный анализ для инженеров / В.Н. Романов. – СПб: СЗГЗТУ, 2006. – 186 с.
11. Шевченко Н.Ю. Моделирование экономической динамики : пособие для студентов технических и экономических специальностей / Н.Ю. Шевченко, Е.Н. Крикуненко. – Краматорск : ДГМА, 2014. – 79 с.

ДОДАТКИ

НОТАТКИ



Таблиця А.1 – Початкові відрізки

Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10	Z11	Z12	Z13	Z14	Z15	Z16	Z17	Z18
29,0477	29,0477	29,0477	29,0477	29,0477	29,0477	29,0477	29,0477	29,0477	29,0477	29,0477	29,0477	29,0477	29,0477	29,0477	29,0477	29,0477	29,0477
28,9639	28,9639	28,9639	28,9639	28,9639	28,9639	28,9639	28,9639	28,9639	28,9639	28,9639	28,9639	28,9639	28,9639	28,9639	28,9639	28,9639	28,9639
28,6598	28,6598	28,6598	28,6598	28,6598	28,6598	28,6598	28,6598	28,6598	28,6598	28,6598	28,6598	28,6598	28,6598	28,6598	28,6598	28,6598	28,6598
	28,7515	28,7515	28,7515	28,7515	28,7515	28,7515	28,7515	28,7515	28,7515	28,7515	28,7515	28,7515	28,7515	28,7515	28,7515	28,7515	28,7515
		28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66
			28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66	28,66
				29,2537	29,2537	29,2537	29,2537	29,2537	29,2537	29,2537	29,2537	29,2537	29,2537	29,2537	29,2537	29,2537	29,2537
					29,1245	29,1245	29,1245	29,1245	29,1245	29,1245	29,1245	29,1245	29,1245	29,1245	29,1245	29,1245	29,1245
						29,2151	29,2151	29,2151	29,2151	29,2151	29,2151	29,2151	29,2151	29,2151	29,2151	29,2151	29,2151
							28,884	28,884	28,884	28,884	28,884	28,884	28,884	28,884	28,884	28,884	28,884
								28,9442	28,9442	28,9442	28,9442	28,9442	28,9442	28,9442	28,9442	28,9442	28,9442
									28,7681	28,7681	28,7681	28,7681	28,7681	28,7681	28,7681	28,7681	28,7681
										28,5708	28,5708	28,5708	28,5708	28,5708	28,5708	28,5708	28,5708
											28,6029	28,6029	28,6029	28,6029	28,6029	28,6029	28,6029
												28,2565	28,2565	28,2565	28,2565	28,2565	28,2565
													28,3324	28,3324	28,3324	28,3324	28,3324
														27,8217	27,8217	27,8217	27,8217
															27,7253	27,7253	27,7253
																27,7253	27,7253
																	27,7253



Таблиця А.2 – Накопичені відхилення

Накопичені відхилення	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8	Z9	Z10	Z11	Z12	Z13	Z14	Z15	Z16	Z17	Z18
X1	0,231	0,300	0,000	0,431	0,298	0,231	0,159	0,168	0,164	0,190	0,242	0,282	0,363	0,425	0,539	0,651	0,752	0,842
X2	0,000	0,000	0,378	0,300	0,101	0,001	-0,107	-0,095	-0,101	-0,062	0,017	0,077	0,199	0,291	0,463	0,631	0,782	0,917
X3		0,104	0,157	0,261	-0,004	-0,138	-0,282	-0,265	-0,273	-0,221	-0,117	-0,036	0,126	0,249	0,478	0,702	0,903	1,084
X4			0,000	0,130	-0,200	-0,368	-0,548	-0,527	-0,537	-0,472	-0,341	-0,241	-0,038	0,116	0,401	0,682	0,934	1,160
X5				0,000	-0,397	-0,598	-0,815	-0,789	-0,801	-0,723	-0,566	-0,445	-0,202	-0,018	0,325	0,662	0,964	1,235
X6					0,000	-0,234	-0,487	-0,458	-0,472	-0,381	-0,197	-0,057	0,227	0,442	0,843	1,236	1,588	1,904
X7						0,000	-0,289	-0,255	-0,271	-0,167	0,042	0,203	0,528	0,774	1,231	1,680	2,082	2,444
X8							0,000	0,038	0,020	0,137	0,372	0,554	0,919	1,195	1,710	2,215	2,667	3,074
X9								0,000	-0,020	0,110	0,372	0,573	0,978	1,286	1,857	2,419	2,922	3,374
X10									0,000	0,143	0,431	0,652	1,098	1,437	2,065	2,683	3,236	3,733
X11										0,000	0,314	0,556	1,042	1,411	2,097	2,771	3,374	3,917
X12											0,000	0,262	0,789	1,189	1,932	2,662	3,315	3,903
X13												0,000	0,568	0,998	1,798	2,585	3,288	3,921
X14													0,000	0,461	1,318	2,161	2,915	3,593
X15														0,000	0,915	1,813	2,617	3,341
X16															0,000	0,955	1,809	2,578
X17																0,000	0,905	1,719
X18																	0,000	0,859
X19																		0,000



Рисунок А.1 – Дерево рішень