

**ТЕОРІЯ ПРОКАТКИ:  
методичні рекомендації до вивчення розділу  
«Основи теорії обробки металів тиском»  
з дисципліни  
«Прокатне виробництво у чорній металургії» за  
освітньо-професійною програмою першого  
(бакалаврського) рівня «Металургія чорних  
металів» спеціальності 136 Металургія**

Рекомендовано Науково-методичною радою  
ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»  
(протокол № 2 від 25.10.2024 р.)

### **Укладачі**

Грибков Е.П., д-р техн. наук, професор,  
Кухар В.В., д-р техн. наук, професор

Т30 Теорія прокатки : методичні рекомендації до вивчення розділу «Основи теорії обробки металів тиском» з дисципліни «Прокатне виробництво у чорній металургії» за освітньо-професійною програмою першого (бакалаврського) рівня «Металургія чорних металів» спеціальності 136 Металургія / уклад.: Е. П. Грибков, В. В. Кухар. Запоріжжя : ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА», 2024. 99 с.

Наведено поняття пластичної деформації матеріалів, умови та фактори, що впливають. Розкрито поняття напруженого та деформованого стану, надані основні закономірності та теорії. Представлені основні елементи теорії прокатки та методи для визначення напружено-деформованого стану при прокатці та енергосилових параметрів процесу.

**УДК 621.771.01(072)**

© ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МЕТИНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА», 2024



## ЗМІСТ

ВСТУП .....	5
1 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ОБРОБКИ МЕТАЛІВ ТИСКОМ.....	6
1.1 Фізичні основи пластичної деформації .....	8
1.2 Механізм пластичної деформації.....	9
1.3 Холодна деформація металів .....	12
1.4 Зміна властивостей металу при холодній обробці тиском .....	14
1.5 Зміна властивостей наклепаного металу під час нагрівання .....	15
1.6 Релаксація.....	17
1.7 Гаряча деформація.....	17
1.8 Концепція напруженого стану. Тензор напружень .....	18
2 ГОЛОВНІ НОРМАЛЬНІ НАПРУЖЕННЯ. ЕЛІПСОЇД НАПРУЖЕНЬ.....	21
2.1 Кругова діаграма. Головні дотичні напруження. Октаедричні напруження. Поняття про деформований стан металу .....	24
2.1.1 Головні дотичні напруження .....	24
2.1.2 Октаедричні напруження .....	28
2.2 Поняття про деформований стан металу (малі деформації) .....	29
2.3 Швидкість та ступінь деформації. Зв'язок між напруженнями та деформаціями.....	32
2.3.1 Швидкість деформації.....	34
2.3.2 Зв'язок між напруженням та деформаціями .....	35
2.3.3 Машинна діаграма розтягування.....	36
2.4 Умови рівноваги в осередку деформації. Плоскодеформований та плосконапружений стан. Теорія граничного стану .....	38
2.4.1 Умова рівноваги в осередку деформації .....	38
2.4.2 Плоский напружений та плоский деформований стан.....	39
2.4.3 Умова пластичності Треска-Сен-Венана .....	41
2.4.4. Умова пластичності Губера-Мізеса.....	43
2.4.5 Фізична інтерпретація основного рівняння пластичності.....	43
2.4.6 Порівняння двох рівнянь пластичності .....	45
2.4.7 Рівняння пластичності для двовимірної деформації.....	46
3 АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ КОНТАКТНОГО ТИСКУ ПРИ ОМТ. СПРОЩЕНІ ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ І ЇХ РІШЕННЯ СПІЛЬНО З РІВНЯННЯМИ ПЛАСТИЧНОСТІ .....	48
3.1 Аналітичні методи визначення зусиль, що деформують .....	48



3.2	Метод Леві (метод ліній ковзання) .....	49
3.3	Метод характеристик .....	51
3.4	Спосіб Прандтля .....	52
3.5	Інженерний метод .....	53
3.6	Спрощене диференціальне рівняння рівноваги та їх вирішення спільно з рівняннями пластичності .....	54
4	ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ГІПОТЕЗИ ТЕОРІЇ ПРОКАТКИ. РОЛЬ ТЕРТЯ ПРИ ПРОКАТЦІ. УМОВИ ЗАХВАТУ ПРОКАТУ ВАЛКАМИ .....	57
4.1	Умова захвату смуги валками .....	57
4.2	Роль тертя при обробці металів тиском .....	58
4.3	Осередок деформації та його параметри .....	59
4.4	Нейтральний кут, нейтральний переріз .....	62
4.5	Випадки прокатки .....	64
5	ЗУСИЛЛЯ ДЕФОРМАЦІЇ. КОНТАКТНИЙ ТИСК. ФОРМУЛА ЦЕЛІКОВА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ СЕРЕДНЬОГО ПИТОМОГО ТИСКУ. ОПІР ДЕФОРМАЦІЇ І ПЛАСТИЧНІСТЬ. ЧИННИКИ, ЩО ВПЛИВАЮТЬ НА ОПІР ДЕФОРМАЦІЇ І ПЛАСТИЧНІСТЬ .....	68
5.1	Визначення зусилля при холодній прокатки. Диференціальне рівняння контактного напруження .....	68
5.2	Розв'язання рівняння контактного напруження при ковзанні металу з постійним коефіцієнтом тертя .....	70
6	ВИЗНАЧЕННЯ ТИСКУ МЕТАЛУ НА ВАЛКИ. ЧИННИКИ, ЩО ВПЛИВАЮТЬ НА ОПІР ДЕФОРМАЦІЇ .....	76
6.1	Коефіцієнти впливу зовнішніх зон та зовнішнього тертя .....	78
6.2	Методика визначення тиску металу на валки за наявності пружного сплющування .....	80
6.3	Напрямок рівнодіючої сил під час прокатки .....	81
6.4	Момент при прокатуванні на гладкій бочці .....	83
7	ВИПЕРЕДЖЕННЯ ТА ВІДСТАВАННЯ ПРИ ПРОКАТЦІ І ВИЗНАЧАЮЧІ ЇХ ФАКТОРИ. НАЛАШТУВАННЯ ШВИДКОСТЕЙ ВАЛКІВ ПРИ БЕЗПЕРЕРВНІЙ ПРОКАТЦІ. УШИРЕННЯ ПРИ ПРОКАТЦІ І ВИЗНАЧАЮЧІ ЙОГО ФАКТОРИ .....	87
7.1	Вплив випередження та відставання на напружено-деформований стан .....	87
7.2	Поширення при прокатці та фактори, що його визначають .....	93
	Література .....	98



## ВСТУП

Вирішення завдань щодо збільшення обсягів виробництва та поліпшення якості готового металопрокату нерозривно пов'язане з широким технічним переозброєнням металургійних підприємств, що включає створення нового та модернізацію діючого механічного обладнання прокатних станів. При цьому одним з основних критеріїв ефективності процесів прокатного виробництва є можливість найповнішого забезпечення всього комплексу вимог, що висувуються споживачами до точності геометричних характеристик, якості поверхні та фізико-механічних властивостей як гарячекатаної, так і холоднокатаної металопродукції.

Поряд з цим суттєві додаткові витрати та значне ускладнення конструкції механічного обладнання, що мають місце при модернізації виробництва, роблять необхідним і одночасне підвищення ступеня наукової обґрунтованості технічних рішень, що приймаються, а це, у свою чергу, пред'являє додаткові вимоги до методів розрахунку основних техніко-економічних показників, що використовуються на стадії виконання проектно-конструкторських робіт.

Вищесказане, поряд із широкими можливостями сучасних обчислювальних засобів, свідчить про доцільність використання широкого кола математичних моделей та відповідного їм програмного забезпечення, що дозволяють повною мірою прогнозувати як основні показники напружено-деформованого стану металу при прокатці, так і основні показники якості готової металопродукції. Дуже важливим у цьому випадку є максимальне наближення об'єктів моделювання до умов конкретного промислового виробництва за рахунок використання максимально математично суворих, у тому числі й чисельних методів вирішення, а також за рахунок уточнення механічних властивостей, кінематичних умов та технологічних особливостей процесів прокатки.



## 1 ОСНОВИ ТЕОРІЇ ОБРОБКИ МЕТАЛІВ ТИСКОМ

Обробка металів тиском є основною ланкою в ланцюзі технологічних процесів виробництва виробів із металів та сплавів. Призначення цього методу полягає в тому, щоб змінити геометричну форму та розміри тіла, а також надати йому певних механічних і фізичних властивостей (при отриманні поковок зі злитків, зливки піддають осадці, навіть якщо цього не вимагають розміри виробу). Ця мета тією чи іншою мірою може бути досягнута й іншими шляхами, головними з яких є лиття та обробка різанням.

Для отримання виробів складної форми та конструкцій застосовують зварювання, клепання, паяння окремих деталей, отриманих цими методами.

*Обробка металів тиском* заснована на пластичності металів та сплавів. (Пластичністю називають здатність металів залишково змінювати свою форму, деформуватися без руйнування під впливом зовнішніх зусиль).

Залежно від форми та розмірів виробу, а також властивостей металу, що деформується, або сплаву застосовують різні процеси обробки тиском.

*Кування.* При вільному куванні всю заготовку або її ділянки піддають впливу бойка, молота або преса (при цьому вплив інструменту на бічні поверхні заготовки відсутня або не має значення).

Застосовують для отримання великих поковок зі злитків і для виготовлення середніх та дрібних поковок із прокату.

При серійному та масовому виробництві дрібних та середніх поковок застосовують *об'ємне штампування* на пресах та молотах. Складні кування отримують послідовним штампуванням заготовки в ряді штампів.


Для виготовлення виробів з листів, що використовуються при виробництві автомобілів, літаків тощо широко застосовують *листо́ве штампування*.

Для виробництва прутків з різною формою поперечного перерізу та труб застосовують *пресування (видавлювання)*. При пресуванні заготовку поміщають у контейнер і під впливом пуансону метал видавлюють через отвори матриці.

*Волочіння* застосовують для виробництва дроту, прутків і труб. Сутність процесу полягає в тому, що виріб протягується через отвір у матриці (фільєру, волоку), що має менший переріз, а іноді і іншу форму ніж круг.

Волочіння застосовують іноді для отримання точних розмірів та чистої поверхні гарячекатаних профілів, а також з метою зміцнення виробів.

Винятково велике значення у народному господарстві має *прокатка*. Сутність процесу *поздовжньої* прокатки полягає в деформації металу між двома валками, що обертаються в різні боки. При цьому заготовка набуває форми зазору між валками (калібру). При виробництві деяких видів прокату, зокрема безшовних труб, застосовують *гвинтову прокатку*.



Такі процеси ОМТ як прокатка, волочіння і частково пресування характеризуються послідовністю, безперервністю дії інструменту на метал, що обробляється, і є більш сучасним, ніж періодичні (кування, штампування).

Понад 80% металу, що виплавляється в країні, піддається прокатці. Заготовками для інших видів ОМТ також служить прокат.

Теорія обробки металів тиском – прикладна інженерна дисципліна, що розробляє загальні основи раціональної побудови та аналізу технології всіх процесів ОМТ.

Завдання, які вирішуються в теорії ОМТ:

а) визначення зусиль деформування у різних технологічних процесах, забезпечення зниження зусиль та витрати енергії;

б) отримання заготовок та виробів з оптимальним поєднанням фізико-механічних властивостей;

в) забезпечення найвищої пластичності металу і тим самим можливості максимальної деформації у кожній стадії обробки металу;

г) вивчення закономірності течії металу в осередку деформації та фізичних основ деформації.

Теорія обробки металів тиском розвивається у трьох напрямках: механіко-математичному, фізичному та фізико-хімічному та тісно пов'язана з теорією пружності, теорією пластичності, фізикою металів та металознавством.


Механіко-математичний напрямок вивчає напруження та деформації в тілі, що пластично деформується, і умови переходу пружної деформації в пластичну. Радянські вчені досягли великих успіхів у розвитку математичної теорії пластичності. Широко відомі праці С. А. Християнова, Л.С. Лейбелзона, А. А. Ільюшина, В. В. Соколовського.

Потрібно відзначити іноземних учених, які заклали основи теорії пластичності (Сен-Венан, Генкі, Мізес) та сприяли подальшому її розвитку (Карман, Надаї, Хілл).

Математична теорія пластичності тісно пов'язана з теорією пружності, використовує основні поняття та математичний апарат останньої. Однак при математичній розробці питань пластичної деформації є великі труднощі, порівняно з теорією пружності. Якщо за пружної деформації основним законом є пропорційність напружень і деформації ( $\sigma = E\varepsilon$ ), то в умовах пластичної деформації при безперервній зміні фізичних та фізико-хімічних властивостей тіла цей закон непридатний.

Фізичне спрямування теорії пластичності теоретично та експериментально вивчає механізм пластичної деформації з урахуванням анізотропності металів. При цьому досліджують вплив на процес пластичної деформації швидкості та ступеня деформації, температури та зовнішнього тертя.

Фізико-хімічний напрямок вивчає зв'язок хімічного складу та фазового стану металу з процесом пластичної деформації.



Теорія обробки металів тиском як прикладна наука почала створюватися з 20-х років минулого століття і по суті перебуває у початковій стадії розвитку. Проте в останні роки досягнуто великих успіхів у цьому напрямі, тому можна стверджувати, що створено основи теорії ОМТ.

Сучасний стан теорії ОМТ дозволяє проводити інженерні розрахунки з метою визначення силових параметрів, оптимізацію умов здійснення процесу.

### 1.1 Фізичні основи пластичної деформації

Тверді металеві тіла при дії на них зовнішніх сил змінюють свої розміри та форму – деформуються. *Деформація* - це сукупність трьох процесів, що взаємно накладаються і протікають послідовно: пружної деформації, пластичної деформації і руйнування.

Якщо тіло після зняття сил, що викликають деформацію, повністю відновлює свою початкову форму та розміри, то така деформація називається *пружною*.

У процесі пружної деформації тіло накопичує потенційну енергію (зміна відстані між атомами в кристалічній решітці). При розвантаженні накопичена енергія витрачається на відновлення розмірів та форми тіла.

Закон Гука, описує зв'язок між  $\sigma$  и  $\varepsilon$

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (1.1)$$

Для деформації зсуву

$$\tau = G\varphi, \quad (1.2)$$

де  $\tau$  - дотичне напруження;

$G$  – модуль зсуву (модуль другого роду);

$\varphi$  - кут перекосу решітки щодо рівноважної зміни, тобто пружна деформація зсуву.

Величина  $E$  носить назву модуля нормальної пружності і пов'язана з модулем зсуву таким відношенням:

$$G = \frac{E}{2(1 + m)},$$

де  $m \leq 0,5$  - коефіцієнт Пуассона.

Якщо після зняття прикладених сил тіло не відновлює повністю первісну форму та розміри, то така деформація називається *залишковою*  $\varepsilon_0$  (рисунок 1.1). Будь-яка залишкова деформація супроводжується пружною

деформацією  $\varepsilon_{пр}$  та їх сума є *повною* деформацією  $\varepsilon_{п}$ . Після зняття навантаження, форма тіла частково відновлюється в результаті пружної деформації.

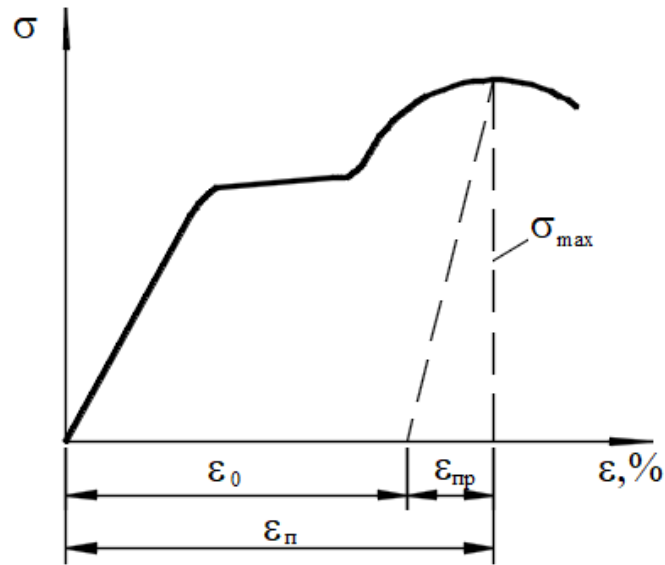


Рисунок 1.1 – Крива зміцнення матеріалу

Таким чином *пластична* деформація є частиною повної деформації, яка не зникає після усунення причини, що її викликає.

Напруження, за якого починається пластична деформація, називається *межею плинності*. Для технічних цілей вводять поняття макроскопічної межі плинності як напруження, коли залишкова деформація сягає величини  $\sim 0,2\%$  ( $\sigma_{0,2}$ ).

При пластичній деформації зовнішні сили, що діють на тіло, здійснюють роботу, яка частково перетворюється на внутрішню енергію тіла, але переважно йде подолання опору пластичної деформації, тобто. переходить у тепло.

## 1.2 Механізм пластичної деформації

Метали або їх сплави у твердому стані мають кристалічну будову. Їх деформація під впливом навантажень залежить від типу кристалічної структури, і навіть від наявності недосконалостей у цій структурі.

Полікристалічне тверде тіло складається з безлічі безладно орієнтованих кристалів або зерен з яскраво вираженою анізотропією. Зерна обмежені поверхнею твердого тіла або поверхнями інших зерен, причому останні утворюють межу зерен (рисунок 1.2). На межах зерен знаходяться нерозчинні включення (окиси, неметалеві включення, атоми основного металу, що мають невпорядковане розташування) називається міжкристалічною речовиною. Кожен окремих кристал складається з правильно розташованих у просторі однотипних елементарних осередків з атомами, які розташовані у вузлових точках.



Сукупність таких осередків утворює просторові атомні решітки.

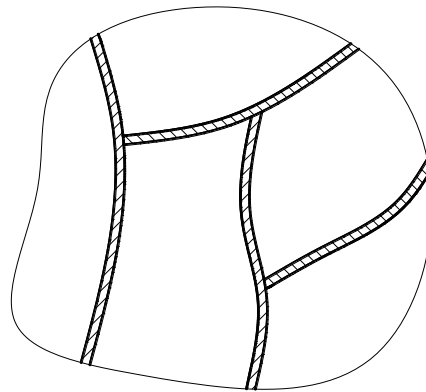


Рисунок 1.2 - Полікристалічне тверде тіло

За своєю кристалографічною будовою метали відрізняються один від одного і їх можна звести до 82 кристалічних класів. З них лише три становлять інтерес для технології обробки металів, так як більшість металів відноситься саме до цих трьох груп:

- а) гранецентровані кубічні решітки (Cu, Ag, Au, Al, Pb,  $\gamma$ Fe);
- б) об'ємно-центровані кубічні решітки (Na, V, Mo, W,  $\alpha$ Fe,  $\delta$ Fe);
- в) гексагональна щільно упакована решітка (Be, Mg, Zn, Cd, Cr).

Характер решітки визначає пластичні властивості металу. Чим більше граней із щільною упаковкою атомів, тим пластичніший матеріал.

Прикладанням зовнішніх сил до кристалу можна викликати як пружну, так і пластичну деформацію. Щоб пластична деформація могла статися, необхідно, щоб дотичні напруження досягли певної критичної величини. Такі дотичні напруження можуть викликати два основні види деформації: так зване *трансляційне ковзання* по деяким площинам або *двойникування*. Трансляційне ковзання є звичайним механічним ковзанням при холодній та гарячій обробці металів тиском.

При трансляційному ковзанні один шар атомів кристала ковзає по інших шарах, причому переміщення відбувається на дискретну величину (переривчасто, стрибкоподібно), рівну цілій кількості міжатомних відстаней (рисунок 1.3).

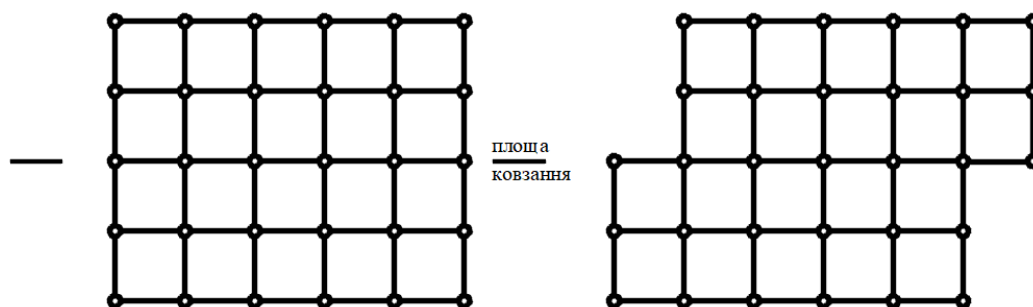


Рисунок 1.3 - Трансляційне ковзання

Розташування атомів в елементарних осередках після кожного ковзання зберігається і тверде тіло не змінює своєї кристалічної будови під час пластичної деформації. Деформація цього типу відбувається не за суміжними атомними площинами, а, по площинам, на значно більших відстанях одна від іншої. Така деформація зазвичай має гетерогенний (неоднорідний) характер і відбувається на площинах з найбільшою упаковкою атомів. Таким чином, чим більше можливих площин ковзання, тим пластичніший метал (ГЦК, ОЦК).

При прикладанні дотичних напружень до реальних кристалів зсув їх відбувається відразу по всій площині ковзання. Ковзання починається в точці дефекту в кристалі і поширюється при значно меншому напрямку зсуву, ніж при одночасному ковзанні будь-якого цілого блоку атомів. Цей процес є поширенням дефекту у формі дислокацій.

Цей процес аналогічний переміщенню гусениці (рис.1.4 а) або черв'яка (рис.1.4 б) або процесу переміщення великого килима по підлозі (рис.1.4, в).

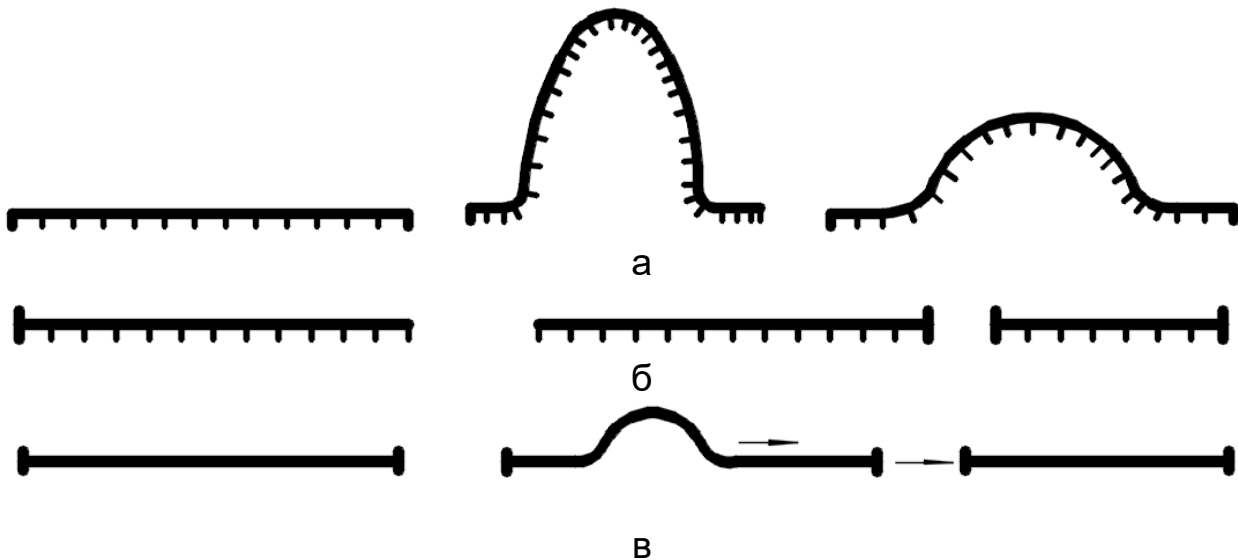



Рисунок 1.4 - Механізм ковзання

Дислокація є лінійним дефектом кристалічних решіток, тобто лінією, вздовж якої порушені зв'язки між сусідніми атомами в кристалічній решітці.

Причинами виникнення дислокацій в кристалах можуть бути попадання в розплав стороннього мікророзчинення, зародження дефектів під дією напружень, що прикладаються.

Зародження дислокацій у результаті докладання напружень є одним із головних механізмів, завдяки якому протікає пластична деформація в технічних металах і сплавах. Дислокації виникають під час зростання кристалів. Винятком є ниткоподібні кристали «вуса», висока міцність яких пояснюється відсутністю дислокацій.



Накопичення включень, під якими маються на увазі вільні від атомів вузли атомної решітки, також можуть бути причиною утворення дислокацій. Дислокації утворюються і процесі пластичної деформації, причому їх джерелом служать самі дислокації.

Двійникування також відбувається тільки при досягненні дотичним напруженням деякої критичної величини. Однак цей вид ковзання є гомогенною (однорідною) деформацією (рисунок 1.5).

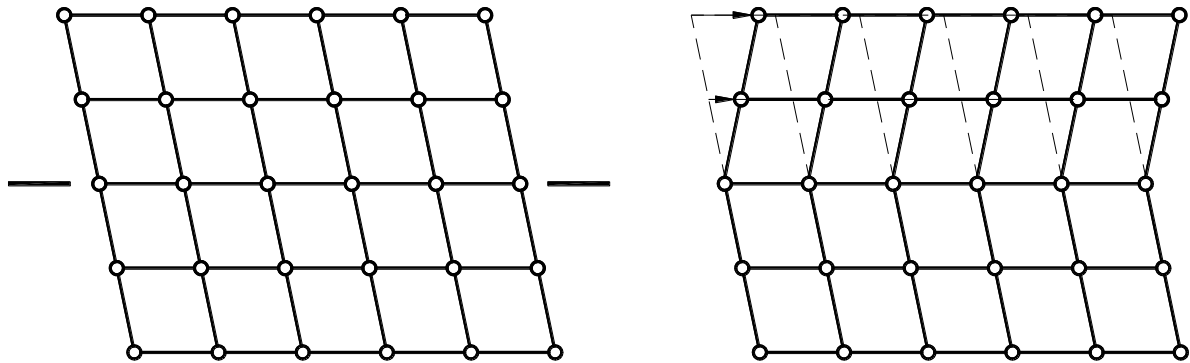


Рисунок 1.5 – Двійникування

Кожен шар кристала зміщується на пропорційну відстань. В результаті такої деформації новий кристал є дзеркальним відображенням початкового кристала. Таким чином, в кінцевому результаті деформації кристалічна будова зберігається, хоча під час процесу деформації вона тимчасово порушується.

Слід зазначити, що крім основних двох видів деформації у полікристалічних твердих тілах можуть відбуватися вторинні деформації, такі як згинання та скручування площини ковзання.

### 1.3 Холодна деформація металів

Обробку металів тиском здійснюють переважно за високих температур, використовуючи зниження опору деформації при підвищенні температури. Однак у ряді випадків необхідно обробляти метали тиском у холодному стані, незважаючи на те, що для цього потрібні великі зусилля та підвищена витрата енергії:

а) коли перерізи оброблюваного металу малі і неможливо забезпечити високу температуру в зоні деформації у зв'язку зі швидким окисненням металу;

б) при волочінні, коли необхідно забезпечити міцність кінця, що виходить з волоки;

в) для підвищення міцності наклепом особливо чистих металів, збільшити міцність яких термічною обробкою неможливо;

г) надання спеціальних фізичних, зокрема, магнітних властивостей;

д) для отримання виробів підвищеної точності розмірів та високої якості поверхні.

Деформація реальних металів, якими є полікристали, здійснюється в результаті деформації кожного окремого зерна і переміщення, повороту зерен відносно один одного.

Перший механізм називають внутрішньокристалічною деформацією, а другий міжкристалічною.

Внутрішньокристалічна пластична деформація відбувається ковзанням та двійковуванням.

У відпаленому металі зерна розташовані хаотично своїми кристалографічними елементами, можливі площини ковзання розташовані під різними кутами до напрямку діючої сили.

Розглянемо схему деформації полікристалу, що складається з порізного орієнтованих зерен (рисунок 1.6).

В першу чергу створюються умови для деформації зерен (I), площини ковзання яких розташовані під кутом  $45^\circ$  до напрямку дії сили, тому що у цих площинах дотичні напруження досягнуть максимального значення. У зернах (II і III), у яких площини ковзання перпендикулярні або паралельні напрямку дії сили, умови для пластичної деформації відсутні, так як дотичні напруження на цих площинах рівні 0. Зерна, що мають проміжне орієнтування (IV) площин ковзання також не будуть деформуватися пластично  $\tau_{IV} < \tau_{кр} < \tau_{II}$ .

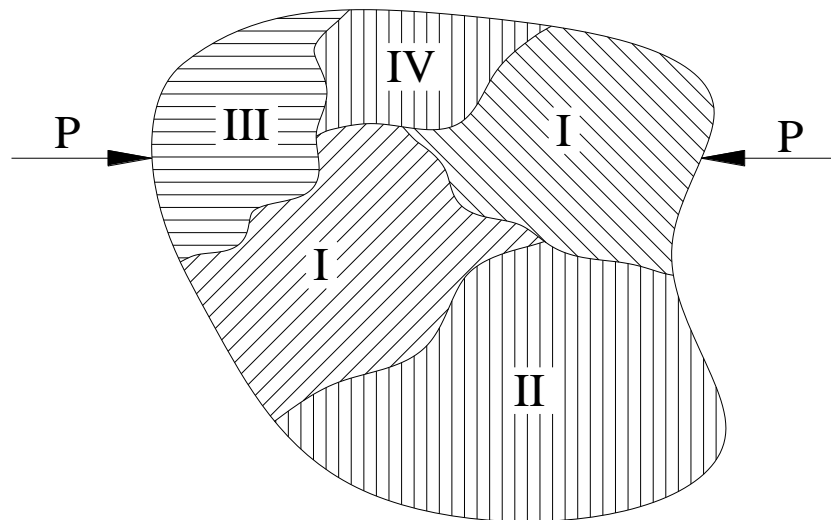


Рисунок 1.6 – Схема деформації полікристалу

В результаті зерна I в першу чергу можуть деформуватися пластично, решта пружно. Для того щоб деформувати пластично всі зерна полікристалу, зусилля має бути підвищено.

Розглянемо тепер умови міжзеренної деформації (рис. 1.7). Досліди з розтягуванням зразків, що складаються з 2-3 кристалів, показали, що поблизу меж зерна деформуються меншою мірою, ніж далеко від них.

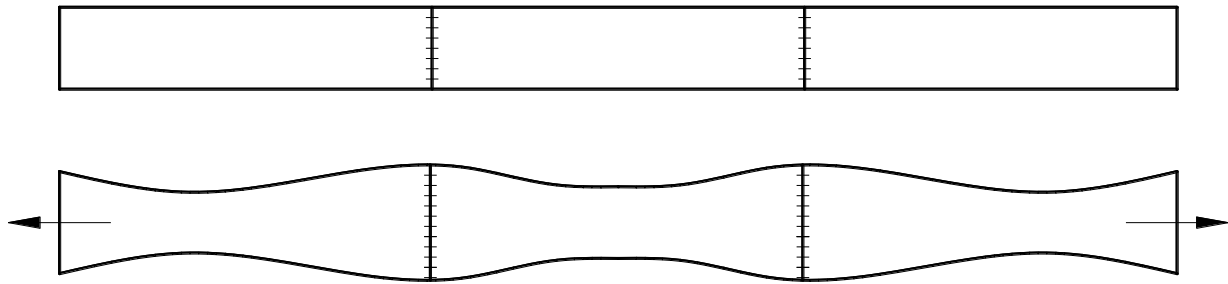


Рисунок 1.7 – Результати дослідів із розтягуванням зразків

Прикордонний шар виявляється більш міцним, ніж основне тіло зерна, завдяки спотворенню решітки у шарах, що примикають до межі, а також завдяки великій складності деформацій зсуву поблизу меж через взаємодію різно орієнтованих зерен. Зерна мають нерівні межі, що викликає заклинювання їх при деформації, енергії на здійснення міжкристалічної деформації потрібно більше, ніж на здійснення внутрішньокристалічної деформації, таким чином при деформації в холодному стані міжкристалічна деформація не протікає.

У полікристалах зони складної деформації розташовані по всіх межах зерен та їх зміцнююча дія тим більше, чим більша довжина меж. Протяжність меж залежить від кількості зерен в одиниці об'єму полікристалу. Чим дрібніше зерна, тим більший опір деформації полікристалу.

Міцність меж зерен – необхідна умова міцності полікристалу. Міжкристалічна деформація небажана, тому що навіть невеликий розвиток може призводити до руйнування металу.

#### 1.4 Зміна властивостей металу при холодній обробці тиском

При холодній обробці металів тиском відбувається суттєва зміна властивостей металу.

Зі збільшенням ступеня деформації підвищуються всі показники міцності – межа пружності, межа пропорційності, межа плинності, межа міцності (рис. 1.8). Це явище називається *наклепом*. Справа в тому, що зерна подрібнюються, зростає обсяг міжкристалічної речовини, зменшується відстань між атомами в кристалічній решітці, що спричиняє збільшення опору пластичної деформації.

У процесі деформації відбуваються міжкристалічні та внутрішньокристалічні руйнування, з'являються субмікроскопічні тріщини, які з підвищенням ступеня деформації збільшуються, що призводить до зменшення пластичності металу.

Зниження пластичності більше при напруженому стані розтягування, ніж при схемі всебічного стискання.

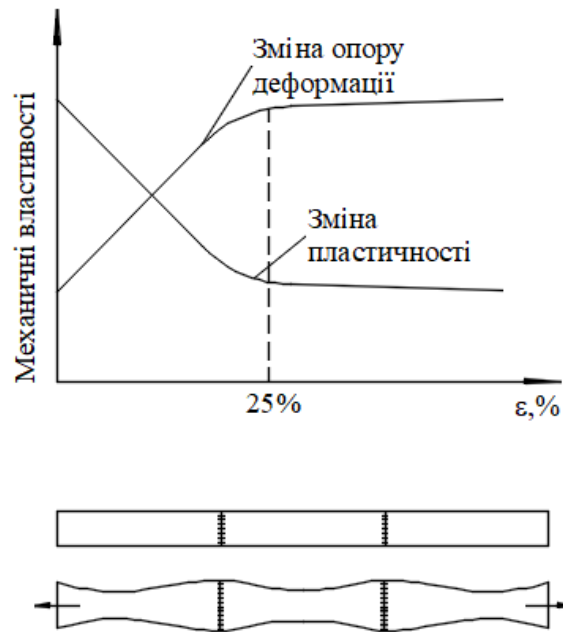


Рисунок 1.8 – Залежність механічних властивостей металу від деформації

При холодній обробці змінюється форма зерен відповідно до схеми деформації всього полікристалу – зерна витягуються у напрямку деформації розтягування та зменшують розміри у напрямку деформацій стиснення. Так, при волочінні та прокатці метал отримує волокнисту будову, внаслідок чого механічні властивості наклепаного металу будуть неоднаковими в різних напрямках.

Поряд із зміною форми зерен відбувається зміна орієнтування їх решітки в результаті кристалографічної спрямованості ковзання за певними площинами та напрямками, тобто утворюється текстура деформації.

У процесі деформації утворюються міжкристалічні порожнечі, тріщини, що зменшує щільність і збільшує об'єм металу, але ця зміна жорсткості та об'єму дуже мала (0,1 ... 0,25%), що дозволяє знехтувати цією зміною.

Крім того, відбувається зміна електропровідності, корозійної стійкості, модуля пружності, магнітних властивостей.

### 1.5 Зміна властивостей наклепаного металу під час нагрівання

Наклепаний метал знаходиться у нерівноважному стані з підвищеною вільною енергією тіла. Неоднорідність напруженого стану та нерівномірність розподілу енергії, створені пластичною деформацією, можуть бути усунені при термічній обробці. При цьому утворюються нові, менш спотворені зерна, відбувається з'єднання кількох зерен в одне зерно, що має меншу поверхню на одиницю об'єму.

При нагріванні металів до порівняно низьких температур (приблизно до  $0,3 T_m$  за абсолютною шкалою) у металах відбувається процес *повернення* або *відпочинку*, при якому наклепаний метал частково розміцнюється

(процеси *відпуски*). В результаті знижуються внутрішні напруження, підвищується пластичність. Структура металу залишається деформованою.

При підвищенні температури до 0,4 T<sub>m</sub> та вище відбувається рекристалізація металу. Температура рекристалізації залежить від ступеня попередньої деформації: чим більший ступінь деформації, тим легше і за нижчих температур протікає процес рекристалізації.

У процесі рекристалізації відбувається глибока зміна всіх властивостей металу, притаманних наклепаному стану – метал повністю розміцнюється, пластичність підвищується до рівня, відповідного ненаклепаному стану. Змінюється структура металу: відбувається зародження нових зерен рівноосної форми, волокниста будова та пов'язана з ним механічна анізотропія зникають. Разом із зародженням зерен відбувається їхнє зростання. Розмір зерен до моменту закінчення рекристалізації залежить від багатьох факторів: температури, тривалості відпалення, ступеня попередньої деформації та величини зерен до холодної деформації.

Зі збільшенням температури та тривалості відпалення, розміри зерен збільшуються. Великий вплив на величину зерна в рекристалізованому металі має ступінь деформації. З підвищенням ступеня деформації зростають спотворення решітки, завдяки цьому зростає швидкість зародження центрів кристалізації, тому чим більше ступінь деформації, тим дрібніше зерна (рисунки 1.9). При малих ступенях деформації, до 5...10%, спотворення решітки малі, межі між зернами не зруйновані і рекристалізація не відбувається. Отже, за якогось середнього, відносно невисокого ступеня деформації, але достатнього для перебігу процесів рекристалізації зерна будуть особливо великими. Цей ступінь деформації називають *критичним*, він складає приблизно 5...15% відносної деформації.

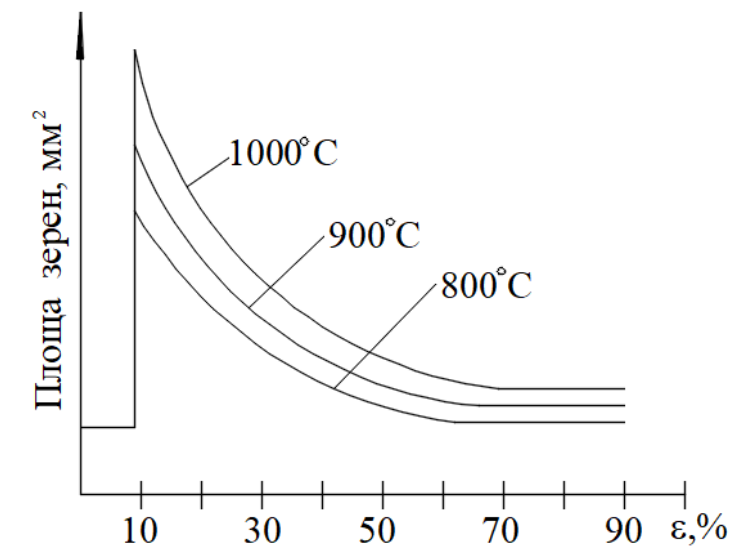


Рисунок 1.9 – Залежності площі зерен від деформації та температури

Для обробки тиском, коли рекристалізаційний відпал є проміжним між етапами холодної деформації, отримання великого зерна небажане, оскільки крупнозернистий метал має знижену пластичність.

## 1.6 Релаксація

У процесі пластичного деформування поряд із зміцненням йде процес розміцнення. Явище, пов'язане із зменшенням напружень в деформованому тілі з часом – називають *релаксацією*. Релаксація відбувається тому, що атоми з часом переходять у положення стійкої рівноваги.

При холодному стані металу релаксація протікає дуже повільно і не суттєво впливає на деформацію, оскільки швидкість зміцнення набагато вища за швидкість розміцнення (рисунок 1.10).

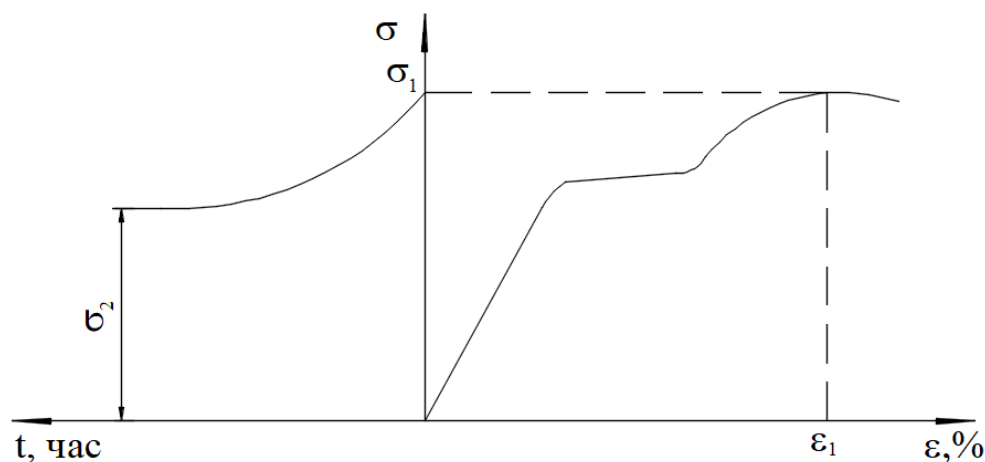


Рисунок 1.10 – Діаграма релаксаційних процесів

## 1.7 Гаряча деформація

Гаряча обробка тиском є основним видом обробки. Її перевага в порівнянні з обробкою в холодному стані - значне зменшення опору деформації та, як правило, збільшення пластичності зі зростанням температури.

При гарячій обробці поруч із процесом деформації (отже, і зміцнення) відбувається процес рекристалізації. Швидкість перебігу цих процесів залежить від умов деформації (швидкості та ступеня деформації) та будови металу. Залежно від того, який процес відбувається швидше, результати деформації будуть різні. Під гарячою деформацією розуміється деформація, у процесі якої всі зерна встигають рекристалізуватися (розміцнюватися). Неповною гарячою деформацією називається така деформація, у процесі якої розміцнення зерен іде в повному обсязі (поруч із розміцненими зернами залишаються зміцнені). Така деформація при обробці тиском небажана, через великі напруження в металі, що виникають при цьому, і можливе руйнування.

Неповна холодна (тепла) деформація застосовується при прокатці і волочінні сплавів, що важко деформуються.

Основні механізми пластичної деформації при гарячій обробці: внутрішньозеренним ковзанням та двійникуванням та міжзеренним взаємним переміщенням та поворотом зерен. Причому при гарячій обробці міжкристалічна речовина має меншу міцність, ніж основний метал і швидше подрібнюється.

### 1.8 Концепція напруженого стану. Тензор напружень

Технічні метали є полікристалічними. Найчастіше розміри кристалів малі проти розмірів тіла та напрями їх орієнтації різні. У зв'язку з цим полікристалічні тіла у першому наближенні поводяться також як тіла однорідні та ізотропні. Хоча анізотропію полікристалічних тіл при відповідному режимі обробки легко виявити, наявністю її в теорії пружності та пластичності зазвичай нехтують, що значно спрощує ці теорії.

Візьмемо суцільне, однорідне та ізотропне тіло довільної форми, що знаходиться під дією системи сил і подумки розсічемо його площиною на дві частини А та В. Частину В відкинемо (рисунок 1.11). Напрямок відносно площини характеризуватимемо зовнішньою нормаллю  $\vec{n}$ . Путь  $dS$  - рівнодіюча всіх сил, що діють на елементарному майданчику  $dF$ , виділеній у площині перерізу. Тоді вектор  $\vec{P} = dS/dF$  - повне напруження на даній площині.

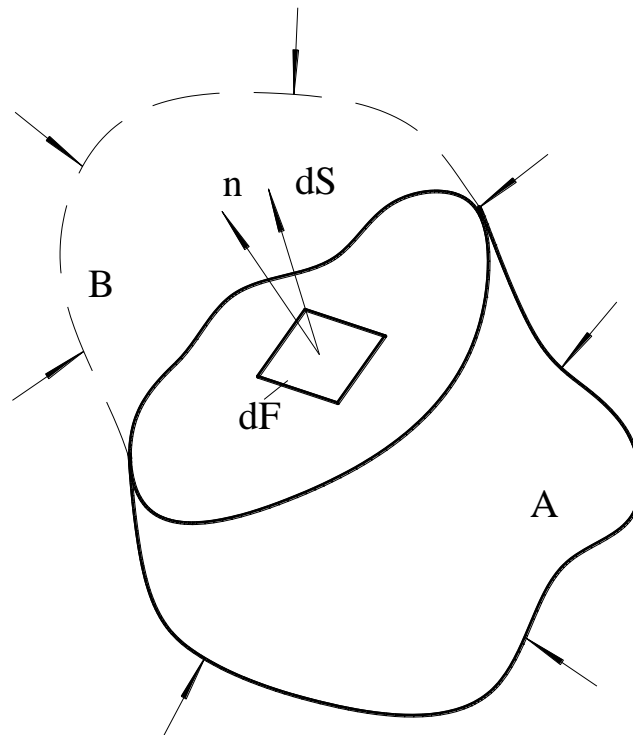


Рисунок 1.11 – Розрахункова схема щодо визначення напруженого стану довільного тіла

Повне напруження на даній елементарному майданчику може бути розкладена за правилом перпендикуляра на три складові напруження: одна за нормаллю до площини (нормальне напруження) і дві паралельно площині (дотичні напруження).

Напруження – це інтенсивність внутрішніх зусиль під впливом зовнішніх сил, прикладених до тіла. Термін «напруження» можна застосовувати і для інтенсивності зовнішніх сил, які зазвичай називають тиском, контактним (робочим) напруженням.

Розрізняють лінійний, плаский та об'ємний напружений стан. При обробці металів тиском домінують пласкі та об'ємні напружені стани.

Напруження в тілі, що деформується, різні в різних його точках. У зв'язку з цим необхідно вміти визначати напруження в точці за будь-яким напрямом. Це можливо за умови, що відомі три вектори напружень, що діють у трьох взаємно перпендикулярних площинах (рисунок 1.12). Знаючи три напруження можна визначити напруження в будь-якій площині, що проходить через цю точку. Таким чином, напружений стан характеризується сукупністю трьох векторів. Величина, що характеризується сукупністю трьох векторів, називається тензоромю. Виділяємо точку з тіла, що деформується, у вигляді нескінченно малого паралелепіпеда. Замінивши дію відкинутої частини тіла відповідними силами та виразивши останні через проекції на координатні осі, отримаємо:

$$T_H = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

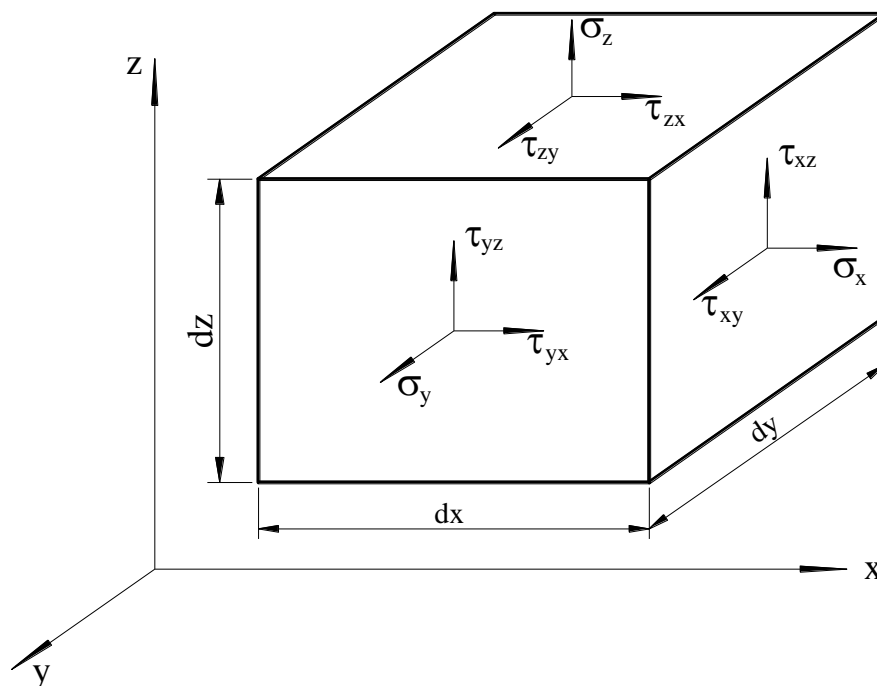


Рисунок 1.12 – Розрахункова схема щодо визначення компонентів напруженого стану



Сукупність цих дев'яти величин носить назву *тензора напружень*.

Припустимо, що елементарний паралелепіпед знаходиться в рівновазі і, прирівняємо нулю суми моментів сил щодо осей, що проходять через напрямок нормальних напружень, отримаємо:

$$\left. \begin{array}{cc} \tau_{xy} & \tau_{yx} \\ \tau_{yz} & \tau_{zy} \\ \tau_{zx} & \tau_{xz} \end{array} \right\}.$$

Наприклад,  $\tau_{xy} \frac{dx}{2} dydz = \tau_{yx} \frac{dy}{2} dxdz$ .  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ .

Отримані співвідношення виражають закон парності дотичних напружень.

Нами отримано дев'ять величин, з яких можна описати напружений стан у кожній точці тіла. Оскільки дотичні напруження попарно рівні, напружений стан довільної точки тіла може бути охарактеризовано шістьма величинами.

Тензор  $T_H$  можна подати як суму кульового тензора напружень  $T_H^0$  та дівіатора напружень  $D_H$

$$T_H = T_H^0 + D_H.$$

Введемо позначення  $\sigma_{cp} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ . Тоді можна написати:

$$T_H = \begin{vmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_{cp} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{cp} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{cp} \end{vmatrix}.$$

Кульовий тензор напружень характеризує такий напружений стан елемента, при якому відбуватиметься тільки зміна його обсягу. Дівіатор напружень характеризує напружений стан, при якому відбувається тільки зміна форми елементарного обсягу. При досягненні напруженням цієї величини починається пластична деформація.

## 2 ГОЛОВНІ НОРМАЛЬНІ НАПРУЖЕННЯ. ЕЛІПСОЇД НАПРУЖЕНЬ

Виділимо в тілі, що деформується, точку  $O$  і приймаємо її за початок координат  $XUZ$ . Проведемо похилу площину  $abc$ , отримаємо тетраедр  $OABC$  (рисунок 2.1). Положення площини визначаємо напрямними косинусами кутів між нормаллю  $N$  до цієї площини та осям координат:

$$\begin{aligned} \cos(N_x) &= \cos \alpha_x = a_x; \\ \cos(N_y) &= \cos \alpha_y = a_y; \\ \cos(N_z) &= \cos \alpha_z = a_z. \end{aligned}$$

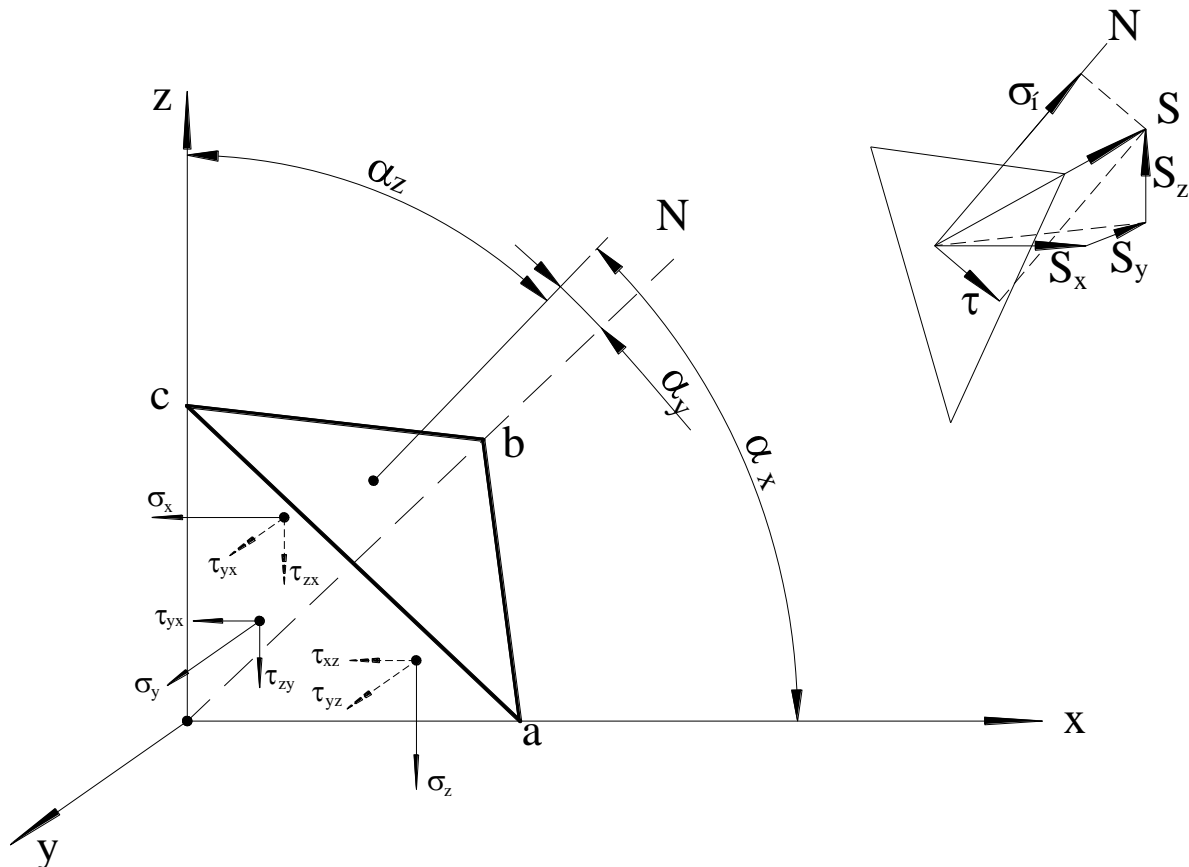


Рисунок 2.1 – Розрахункова схема щодо визначення напружень

На координатних майданчиках діють повні напруження  $S'_x, S'_y, S'_z$ , які можна розкласти на нормальні та дотичні напруження, що паралельні осям координат. Індексація: 1-й індекс – паралельна вісь; 2-й індекс - перпендикулярна вісь.

На похилому майданчику тетраедра діє повне напруження  $S$ , що розкладається на  $S_x, S_y, S_z$ .

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2. \quad (2.1)$$

Виділений тетраедр знаходиться в рівновазі, отже, сума проєкцій на осі координат усіх сил, що діють на тетраедр, дорівнює нулю.



Прийmemo, що  $\Delta F$  - площа похилого майданчика, тоді площі координатних майданчиків:

$$\Delta F_x = \Delta F_{ax}; \quad \Delta F_y = \Delta F_{ay}; \quad \Delta F_z = \Delta F_{az}.$$

Напишемо умови рівноваги тетраедра:

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \sigma_x a_x + \tau_{xy} a_y + \tau_{xz} a_z \\ S_y &= \sigma_y a_y + \tau_{yx} a_x + \tau_{yz} a_z \\ S_z &= \sigma_z a_z + \tau_{zx} a_x + \tau_{zy} a_y \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Тоді

$$S^2 = (\sigma_x a_x + \tau_{xy} a_y + \tau_{xz} a_z)^2 + (\sigma_y a_y + \tau_{yx} a_x + \tau_{yz} a_z)^2 + (\sigma_z a_z + \tau_{zx} a_x + \tau_{zy} a_y)^2. \quad (2.3)$$

При виділенні об'єму тетраедра ми не обмежували його розмірів, тому вираз (9.3) справедливий і для точки О.

Отже для визначення напружень в точці тіла необхідно знати напруження на координатних майданчиках (їх 9, а враховуючи умову міцності - 6).

Визначимо нормальні  $\sigma_n$  та дотичні напруження на похилому майданчику:

$$\sigma_n = S_x a_x + S_y a_y + S_z a_z. \quad (2.4)$$

Підставимо в (2.4) значення  $S_x, S_y, S_z$  і беручи до уваги умову парності, отримуємо:

$$\sigma_n = S_x a_x^2 + S_y a_y^2 + S_z a_z^2 + 2\tau_{xy} a_x a_y + 2\tau_{xz} a_x a_z + 2\tau_{yz} a_y a_z; \quad (2.5)$$

$$\tau^2 = S^2 - \sigma_n^2. \quad (2.6)$$

Перетворимо вираз (2.5). Відкладемо у напрямку нормалі N вектор r

$$r^2 = C^2 / \sigma_n,$$

де C – const.

Проекції вектора r на осі координат

$$x = r a_x, \quad y = r a_y, \quad z = r a_z$$

звідси



$$a_x = x/r; \quad a_y = y/r; \quad a_z = z/r.$$

Підставимо отримані вирази у (2.5), отримаємо

$$C^2 = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + \sigma_x x^2 + 2\tau_{xy}xy + 2\tau_{xz}xz + 2\tau_{yz}yz. \quad (2.7)$$

Це рівняння еліпсоїда, віднесене до центру. З аналітичної геометрії відомо, що рівняння поверхні другого порядку, віднесене до центру може бути перетворена обертанням координатної системи до збігу осей координат з осями поверхні. Такі рівні поверхні будуть віднесені до центру та осей. Похідні координат у цьому випадку перетворюються у нулі.

Отже, через точку тіла, що знаходиться в напруженому стані, можна провести три взаємно перпендикулярні осі. На майданчиках, перпендикулярних до цих осей, дотичні напруження відсутні і діють тільки нормальні напруження. Ці напруження називають головними нормальними напруженнями, майданчики, на яких вони діють - головними майданчиками, а напрямки головних нормальних напружень - головними вісями

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3.$$

У головних напруженнях:  
складові повного напруження:

$$S_x = \sigma_1 a_x; \quad S_y = \sigma_2 a_y; \quad S_z = \sigma_3 a_z; \quad (2.8)$$

Повне напруження:

$$S^2 = \sigma_1^2 a_x^2 + \sigma_2^2 a_y^2 + \sigma_z^2 a_z^2; \quad (2.9)$$

Нормальне напруження:

$$\sigma_n = \sigma_1 a_x^2 + \sigma_2 a_y^2 + \sigma_z a_z^2; \quad (2.10)$$

Дотичне напруження:

$$\tau^2 = \sigma_1^2 a_x^2 + \sigma_2^2 a_y^2 + \sigma_z^2 a_z^2 - (\sigma_1 a_x^2 + \sigma_2 a_y^2 + \sigma_z a_z^2). \quad (2.11)$$

Поняття тензора напружень може бути інтерпретовано алгебраїчно:  
З рівняння (2.8)

$$a_x^2 = \frac{S_x^2}{\sigma_1^2}; \quad a_y^2 = \frac{S_y^2}{\sigma_2^2}; \quad a_z^2 = \frac{S_z^2}{\sigma_3^2},$$

враховуючи, що

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1, \quad (2.12)$$

отримаємо

$$\frac{s_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{s_y^2}{\sigma_2^2} + \frac{s_z^2}{\sigma_3^2} = 1. \quad (2.13)$$

Це рівняння еліпсоїда, віднесене до центру та головних осей, називають еліпсоїдом напружень (рисунок 2.2). Півосі еліпсоїда напружень рівні головним напруженням. Будь-який відрізок від центру до перетину з поверхнею еліпсоїда є величиною повного напруження  $S$  на майданчику перпендикулярній до відрізка, а проєкції відрізка на осі координат рівні складовим повного напруження по осях.

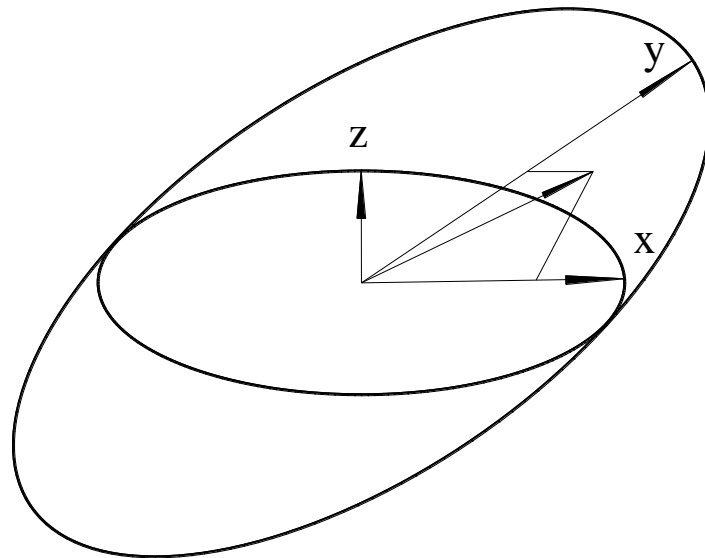


Рисунок 2.2 – Еліпсоїд напружень

## 2.1 Кругова діаграма. Головні дотичні напруження. Октаедричні напруження. Поняття про деформований стан металу

### 2.1.1 Головні дотичні напруження

При заданих величинах головних нормальних напружень величини напружень на похилому майданчику  $\sigma_n - \tau$  змінюються при зміні нахилу майданчика до головних осей.

Визначимо максимальні дотичні напруження та положення похилих майданчиків, якими вони діють. Для цього скористаємося колами Мора, що графічно представляють співвідношення між нормальними і дотичними напруженнями (рисунок 2.3). Маємо:



$$S^2 = \sigma_n^2 + \tau^2. \quad (2.14)$$

Рівняння (2.9), (2.10), (2.11), (2.14) вирішені щодо квадратів косинусів, для чого до правої та лівої частин рівняння (2.14) додамо  $\sigma_2\sigma_3$  і віднімемо  $\sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3)$ :

$$\begin{aligned} & \sigma_1^2 a_x^2 + \sigma_2^2 a_y^2 + \sigma_3^2 a_z^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_1 a_x^2 + \sigma_2 a_y^2 + \sigma_3 a_z^2) + \sigma_2 \sigma_3 = \\ & = \sigma_n^2 + \tau^2 - \sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2 \sigma_3; \\ & \sigma_1^2 a_x^2 + \sigma_2^2 a_y^2 + \sigma_3^2 a_z^2 - \sigma_2 \sigma_1 a_x^2 - \sigma_2^2 a_y^2 - \sigma_2 \sigma_3 a_z^2 - \sigma_1 \sigma_3 a_x^2 - \\ & - \sigma_2 \sigma_3 a_y^2 - \sigma_3^2 a_z^2 + \sigma_2 \sigma_3 = \tau^2 + \sigma_n^2 - \sigma_n \sigma_2 - \sigma_n \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3; \\ & a_x^2(\sigma_1^2 - \sigma_2 \sigma_1 - \sigma_1 \sigma_3) + \sigma_2 \sigma_3(1 - a_y^2 - a_z^2) = \tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3); \\ & a_x^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) = \tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3); \end{aligned}$$

$$a_x^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)}. \quad (2.15)$$

Аналогічно

$$a_y^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)}; \quad (2.16)$$

$$a_z^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)}. \quad (2.17)$$

Квадрати косинусів завжди позитивні, тоді

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geq 0; \quad (2.18)$$

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_3) \leq 0; \quad (2.19)$$

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geq 0. \quad (2.20)$$

У граничному випадку ці вирази перетворюються на рівняння кіл у координатах  $\sigma - \tau$  з центром на осі  $\sigma$ .

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) = 0. \quad (2.21)$$

Додаємо до обох частин виразу (2.21)  $\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$ , отримаємо

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

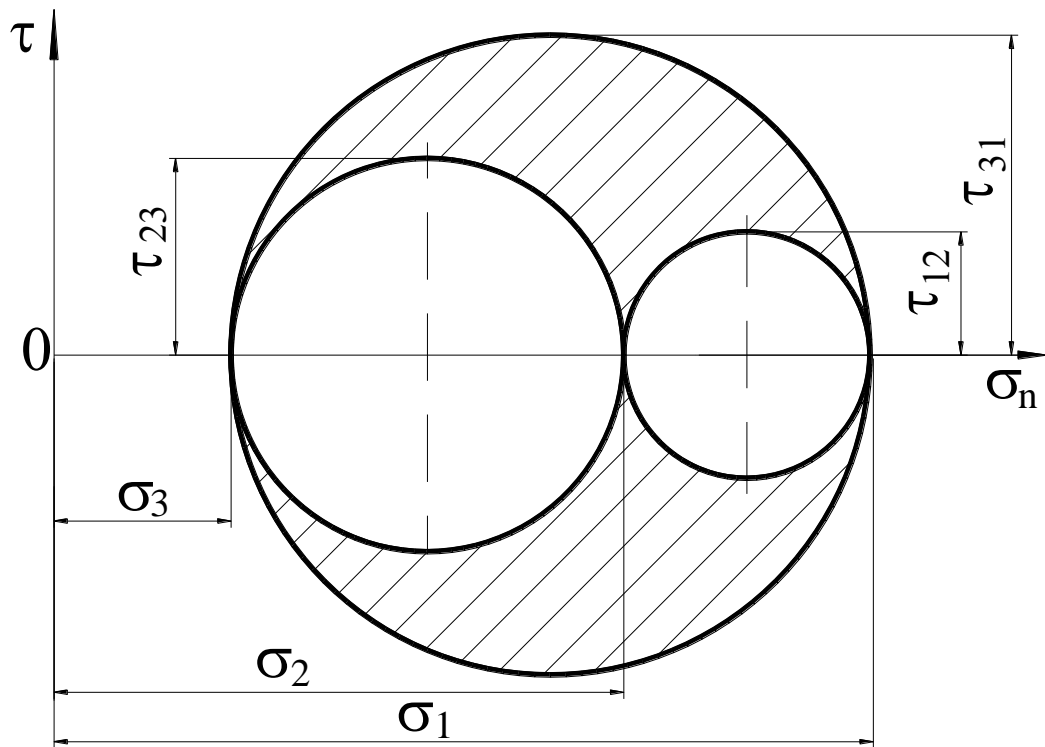


Рисунок 2.3 – Кола Мора

або

$$\tau^2 + \sigma_n^2 - \sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 + \frac{\sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2}{4} = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2.$$

Отримаємо

$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2.$$

Це рівняння кола з діаметром  $(\sigma_2 - \sigma_3)$  та з центром на осі  $\sigma_n$  на відстані  $\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$ . Аналогічно можна отримати ще два кола діаметром  $(\sigma_1 - \sigma_2)$  та  $(\sigma_1 - \sigma_3)$ .

Так як (2.18) і (2.20) більше або дорівнює нулю, а (2.19) менше або дорівнює нулю, то співвідношення між  $\sigma_n$  і  $\tau$  визначаються координатами точок, що лежать у заштрихованій частині кола.

З рисунка 2.3 видно, що є три максимальні значення дотичних напружень:

$$\tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{31} = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}. \quad (2.22)$$

Ці напруження називають головними дотичними напруженнями. З рисунка 2.3 видно, що головні дотичні напруження діють на майданчиках, де нормальні напруження відповідно дорівнюють:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}; \quad \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}; \quad \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}.$$

Для визначення майданчиків, у яких діють головні дотичні напруження, скористаємося виразами (2.15)-(2.17), підставивши в них значення максимального дотичного напруження (2.21).

Визначимо положення майданчиків дії  $\tau_{31}$ :

$$\tau = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}; \quad \sigma_n = \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2};$$

$$\begin{aligned} a_x^2 &= \frac{\left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} - \sigma_2\right) \left(\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} - \sigma_3\right)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} = \\ &= \frac{\left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 - \sigma_3 \left(\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right) - \sigma_2 \left(\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right) + \sigma_2 \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} = \\ &= \frac{\frac{\sigma_3^2 - 2\sigma_3\sigma_1 + \sigma_3^2 + 2\sigma_3\sigma_1 + \sigma_1^2}{4} - \frac{\sigma_3^2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3}{2}}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}(\sigma_3^2 + \sigma_1^2 - \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

або

$$a_x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

тобто кут між нормаллю до майданчика та віссю 1 дорівнює  $45^\circ$ ;

$$a_y^2 = 0,$$

тобто нормаль до майданчика перпендикулярна до осі 2;

$$a_z^2 = \frac{1}{2}.$$

Отже, площі дії  $\tau_x$  паралельні осі 2 і нахилені під кутом  $45^\circ$  до осей 1 і 3 (рисунок 2.4). Таких майданчиків дві і вони взаємно перпендикулярні. Аналогічно можна визначити положення площі дії дотичних напружень  $\tau_{12}$  та  $\tau_{23}$ .

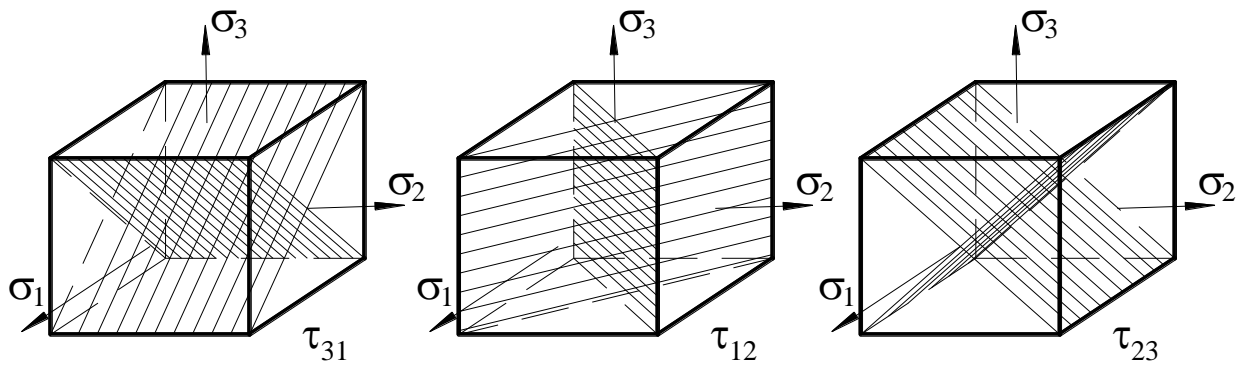


Рисунок 2.4 – Тетраедр напружень

Усього майданчиків, на яких діють максимальні дотичні напруження, шість.

З кіл Мора видно, що

$$\sigma_1 - \sigma_3 = (\sigma_2 - \sigma_3) + (\sigma_1 - \sigma_2)$$

або

$$(\sigma_1 - \sigma_2) + (\sigma_2 - \sigma_3) + (\sigma_3 - \sigma_1) = 0.$$

Розділивши обидві частини цієї рівності на 2, отримаємо:

$$\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = 0,$$

Сума головних дотичних напружень дорівнює нулю.

### 2.1.2 Октаедричні напруження

Велике значення теорії пластичної деформації мають майданчики рівнонахилені до головних осей. Ці майданчики називають октаедричними. Усього їх 8 і разом вони утворюють октаедр. Напруження, що діють на таких майданчиках, називають октаедричними.

Визначимо нормальне та дотичне октаедричні напруження:

$$a_x = a_y = a_z = a; \quad a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1; \quad a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Повне октаедричне напруження:

$$S_{\text{окт}}^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3}.$$

Нормальне октаедричне напруження:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}.$$

Це напруження називають також гідростатичним тиском.

Октаедричне дотичне напруження:

$$\tau_{\text{окт}}^2 = S_{\text{окт}}^2 - \sigma_{\text{окт}}^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3} - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{9}(3\sigma_1^2 + 3\sigma_2^2 + 3\sigma_3^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2 - \sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3);$$

$$\tau_{\text{окт}}^2 = \frac{1}{9}(2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2\sigma_3);$$

$$\tau_{\text{окт}}^2 = \frac{1}{9}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2];$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2};$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}.$$

Скалярна величина, що чисельно дорівнює октаедричній дотичній напрузі, називається інтенсивністю дотичних напружень  $\tau_i$ , і викликає зміну не обсягу тіла, що деформується, а його форми. Це напруження має велике значення для дослідження й пластичної деформації..

## 2.2 Поняття про деформований стан металу (малі деформації)

У процесі пластичної деформації тіло змінює свою форму та розміри. Аналогічно напруженням деформації змінюються від точки до точки деформованого тіла, тому співвідношення між деформаціями визначали для малого обсягу тіла. Виділимо в тілі нескінченно малий паралелепіпед (рисунок 2.5).

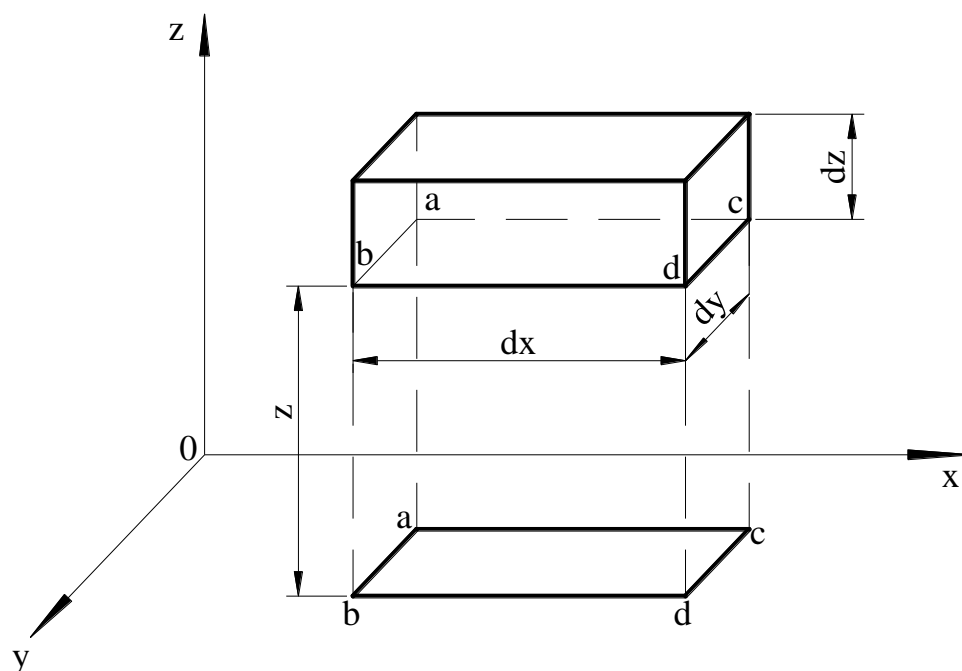


Рисунок 2.5 – Розрахункова схема елементарного об'єму

При деформації паралелепіпед переміщається, довжина його ребер та кути між гранями змінюються. При цьому спостерігається деформація двох видів - лінійна (подовження, скорочення) та кутова (зсуву) (рисунок 2.6).

Розглянемо проекцію паралелепіпед на координатну площину  $\alpha O y$ .

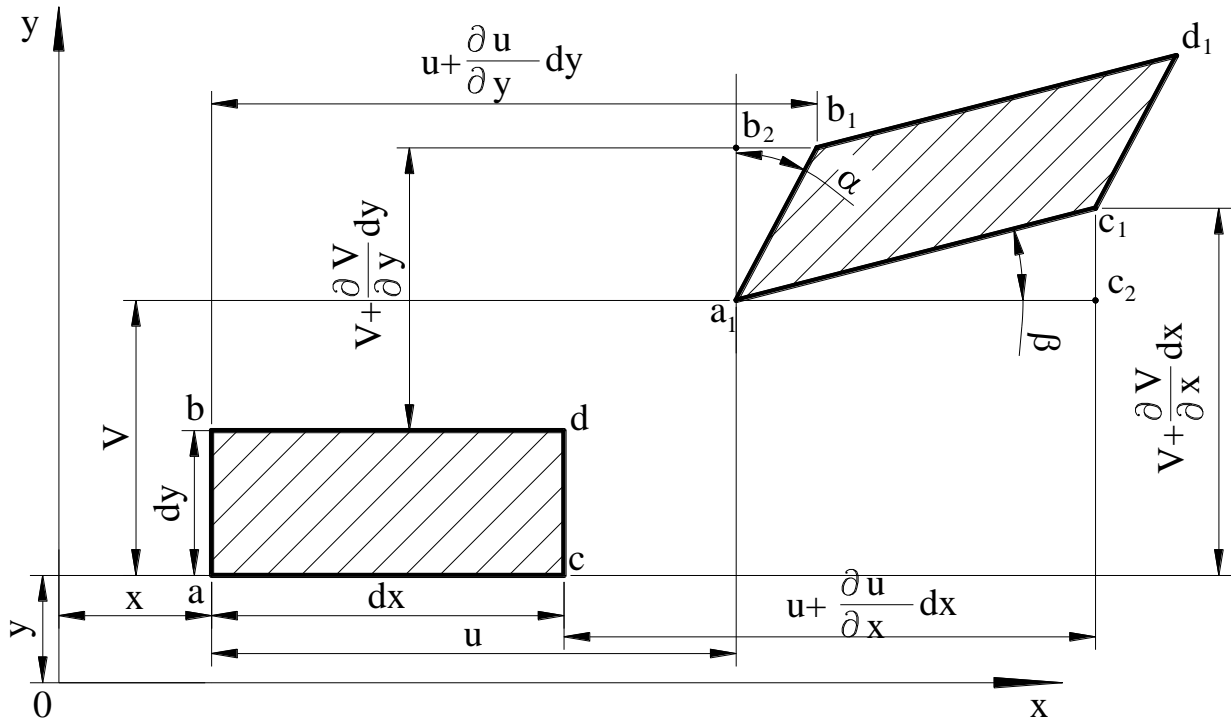


Рисунок 2.6 – Розрахункова схема щодо деформацій елементарного об'єму

Відносне подовження ребра ас дорівнює  $d\phi$  деформації  $dx$ :

$$\varepsilon_x = \frac{(dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - \phi) - dx}{dx} = \frac{\partial \phi}{\partial x};$$

$$\varepsilon_y = \frac{(dy + V + \frac{\partial V}{\partial y} dy - V) - dy}{dy} = \frac{\partial V}{\partial y};$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial \omega}{\partial z}.$$

Відносна деформація елемента вздовж осі дорівнює приватної похідної від переміщення цієї осі.

Деформація зсуву у площині  $XOY$ :

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta.$$

З трикутника  $a_1 c_1 c_2$ :



$$tq\beta = \frac{c_1 c_2}{a_1 c_2} = \frac{V + \frac{\partial V}{\partial x} dx - V}{dx + U + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx - \phi};$$

$$tq\beta = \frac{\frac{\partial V}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx} = \frac{\frac{\partial V}{\partial x} dx}{(1 + \frac{\partial \phi}{\partial x}) dx}.$$

Так як  $\frac{\partial \phi}{\partial x} \ll 1$  і за малих деформацій можна вважати, що  $tq\beta = \beta$ :

$$\beta = \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Аналогічно

$$\alpha = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Отже деформація зсуву:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

Аналогічно

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z};$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y}.$$

Деформований стан у точці визначається дев'ятьма складовими, які можна розташовувати у наступній таблиці:

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

Це тензор деформації.

Деформований стан у точці цілком визначено, якщо нею заданий тензор деформації. Тензор деформації має ті ж властивості, що й тензор напруження.

Отже, у кожній точці тіла існує три взаємно перпендикулярні напрямки, які називають головними осями деформації. Уздовж цих осей відбувається лише лінійна деформація

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$$

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}.$$

Усі формули теорії деформації можна записати за аналогією з відповідними формулами теорії напружень.

При пластичній деформації зміна обсягу практично не відбувається. Збільшення обсягу при холодній деформації і зниження його при гарячій деформації можна знехтувати.

З умови сталості обсягу випливає, що сума малих лінійних деформацій дорівнює нулю. Дійсно збільшення обсягу елементарного кубика (довжина ребра у вихідному стані дорівнює 1) після його деформації можна уявити

$$\Delta V = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1 = 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 - 1 = 0.$$

Нехтуючи доданками малих деформацій, отримуємо:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.$$

### 2.3 Швидкість та ступінь деформації. Зв'язок між напруженнями та деформаціями.

Під час обробки металів тиском відбуваються великі деформації, коли у процесі деформації розміри тіла значно змінюється. В цьому випадку правильніше абсолютну деформацію за малий проміжок часу відносити до розміру тіла у початковий момент цього проміжку. Тоді повна відносна деформація визначиться як сума малих деформацій весь процес деформації.

Розглянемо осаджування тіла з початкової висоти  $h_0$  до висоти  $h_1$  (рисунок 2.7). Припустимо, що в якийсь момент часу висота тіла дорівнює  $h$ , а нескінченно мала зміна його висоти (зменшення) дорівнює  $dh$ , тоді нескінченно мала деформація

$$d\delta_h = \frac{dh}{h}.$$

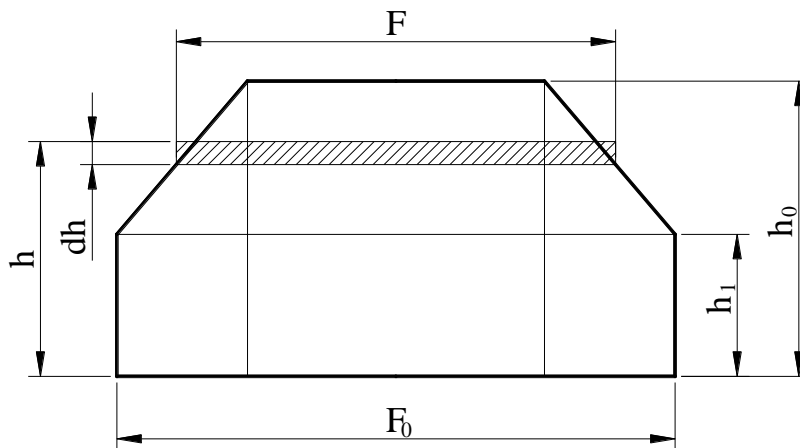



Рисунок 2.7 – Схема осаджування заготовки



Сумарна відносна деформація осаджування тіла від  $h_0$  до  $h_1$

$$\delta_h = \int_{h_0}^{h_1} \frac{dh}{h} = (\ln h) \Big|_{h_0}^{h_1} = \ln h_1 - \ln h_0 = \ln \frac{h_1}{h_0}.$$

Допустимо початкові розміри тіла:  $h_0, l_0, b_0$  та кінцеві розміри тіла  $h_1, l_1, b_1$ :

$$\delta_l = \ln \frac{l_1}{l_0}; \quad \delta_b = \ln \frac{b_1}{b_0}.$$

Відносні деформації  $\delta_h, \delta_b, \delta_l$  називають системними, логарифмічними, інтегральними.

Відношення розмірів тіла після деформації до його розмірів до деформації називають коефіцієнтами деформації.

$\eta = \frac{h_1}{h_0}$  – коефіцієнт обтиснення;

$\beta = \frac{b_1}{b_0}$  – коефіцієнт поширення;

$\lambda = \frac{l_1}{l_0}$  – витяжка.

З умови постійності об'ємів

$$h_0 b_0 l_0 = h_1 b_1 l_1.$$

$$\frac{h_1 b_1 l_1}{h_0 b_0 l_0} = \eta \beta \lambda = 1.$$

Після логарифмування:

$$\ln \eta + \ln \beta + \ln \lambda = 0,$$

тобто сума дійсних деформацій дорівнює 0. Отже, дійсні деформації не можуть бути одного значення.

Визначимо співвідношення між істинними та відносними деформаціями:

$$\delta_h = \ln \frac{h_1}{h_0} = \ln \frac{h_0 + (-\Delta h)}{h_0} = \ln(1 + \varepsilon_h);$$

$$\delta_b = \ln(1 + \varepsilon_b);$$

$$\delta_l = \ln(1 + \varepsilon_l).$$

Розбіжність між істинними та відносними деформаціями при зміні останніх у межах 5-20% становить 2-10%. Логарифмічні деформації більше відносних. В інженерних розрахунках при відносних деформаціях менше 0,1 можна приймати  $\delta \approx \varepsilon$ . Логарифмічні деформації мають властивість адитивності, тобто їх можна складати при певній сумарній деформації, здійсненій за кілька операцій.

Припустим  $h_0 - h_1$ ;  $h_1 - h_2$ ;

$$\delta_{\Sigma} = \ln \frac{h_2}{h_0} = \ln \left( \frac{h_1 h_2}{h_0 h_1} \right) = \ln \frac{h_1}{h_0} + \ln \frac{h_2}{h_1} = \delta_I + \delta_{II}.$$

Відносна деформація цією властивістю не володіє.

У розрахунках процесів ОМТ вибір характеристики деформації визначається зручностями обчислення та необхідною точністю розрахунку.

### 2.3.1 Швидкість деформації

Швидкістю деформації називають зміну ступеня деформації за одиницю часу. Так, швидкість деформації при осадці паралелепіпеда:

$$\omega_b = \frac{d\delta_h}{dt} = \frac{\frac{dh}{h}}{dt} = \frac{V}{h};$$

$$dt = \frac{dh}{V},$$

де  $V$  – швидкість деформування.

Швидкість деформації залежить від швидкості деформування та розміру тіла у напрямку деформування.

При прокатці  $\omega = 2 \frac{V_y}{h_y}$  (рисунок 2.8).

При незмінній ширині смуги з умови сталості секундних об'ємів:

$$\begin{aligned} V_0 h_0 &= V_1 h_1 = V_x h_x; \\ V_x &= \frac{V_1 h_1}{h_x}; \quad V_y = V_x t q \gamma; \\ V_y &= \frac{V_1 h_1}{h_x} t q \gamma; \\ \omega &= 2 \frac{V_1 h_1}{h_y^2} t q \gamma; \\ \omega &\approx \frac{V}{l} \varepsilon. \end{aligned}$$

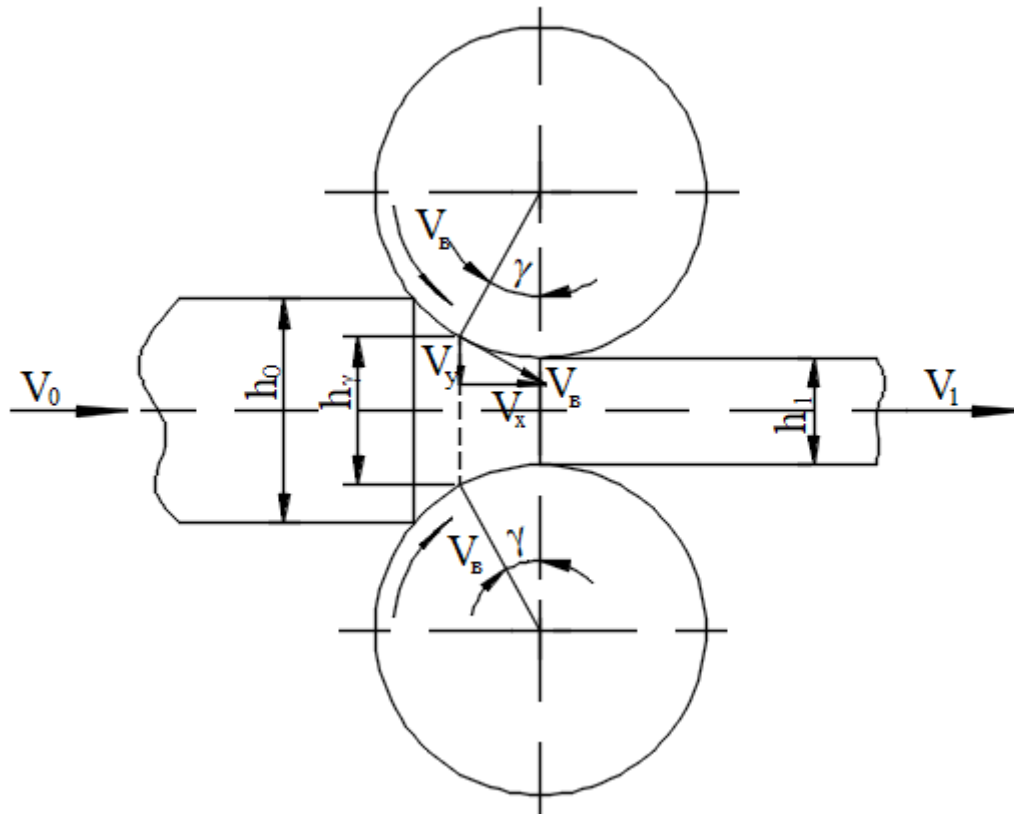


Рисунок 2.8 – Розрахункова схема прокатки

### 2.3.2 Зв'язок між напруженням та деформаціями

При пружних деформаціях залежності між напруженнями та відповідними деформаціями лінійні:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon_{cp} &= \frac{1}{2G} (\sigma_x - \sigma_{cp}); & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y - \varepsilon_{cp} &= \frac{1}{2G} (\sigma_y - \sigma_{cp}); & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z - \varepsilon_{cp} &= \frac{1}{2G} (\sigma_z - \sigma_{cp}); & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \right\}$$

де  $G$  – модуль пружності другого роду (модуль зсуву),  $G = \text{const}$ .

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3};$$

$$\sigma_{cp} = P;$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

При пластичній деформації є аналогічні залежності лише за простому порушенні тіла, коли зусилля, прикладене до тіла, зростає пропорційно до зміни одного параметра. В цьому випадку напрям основних осів напружень і деформацій не змінюються протягом процесу деформації.

Наприклад, якщо ці напруження зростатимуть пропорційно ( $\sigma_2$  та  $\sigma_3$  пропорційно  $\sigma_1$ ), то брус, деформуючись, залишається брусом, інакше змінюється його деформація (рисунок 2.9).

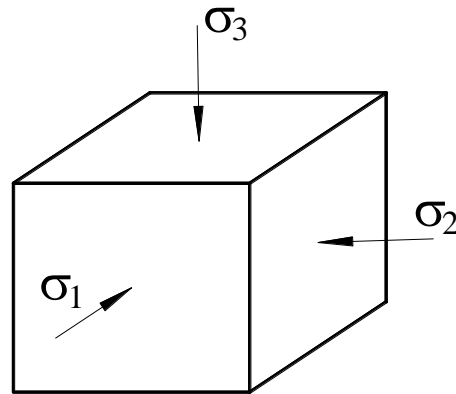


Рисунок 2.9 – Напрямок головних напружень

Враховуючи, що за пластичної деформації  $\varepsilon_{cp} = 0$ :

$$\varepsilon_{cp} = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = 0,$$

можна записати:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G'}(\sigma_x - \sigma_{cp}); & \varepsilon_y &= \frac{1}{2G'}(\sigma_y - \sigma_{cp}); & \varepsilon_z &= \frac{1}{2G'}(\sigma_z - \sigma_{cp}); \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G'}\tau_{xy}; & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G'}\tau_{yz}; & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G'}\tau_{zx} \end{aligned} \right\}$$


де  $G'$  - модуль пластичності другого роду,  $G'$ -Var (залежить від умов деформації та структури металу).

Це ускладнює визначення деформацій за напруженнями при пластичній деформації на відміну від пружної.

### 2.3.3 Машинна діаграма розтягування

На підставі індикаторної діаграми будують діаграму умовних напружень у координатах: умовне призначення – відносне подовження:

$$\sigma = \frac{P}{F_0}; \quad \varepsilon = \frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$



де  $F_0$  – початкова площа поперечного перерізу зразка;  
 $l_0$  і  $l_1$  – довжина зразків до та після випробування.

Умова напруження  $\sigma_b$ , при якому починається утворення шийки, називається межею міцності (тимчасовим опором розриву). Умови напруження  $\sigma_s$ , при якому починається пластична деформація зразка, називається межею плинності.

Умовне напруження не є дійсним напруженням в матеріалі, оскільки навантаження тут відноситься до початкового поперечного перерізу зразка.

При малих деформаціях різниця між  $F_0$  та  $F_x$  невелика, тому границю текучості визначають як умовне напруження. За великих деформацій похибка стає значною. У цьому випадку будують діаграми справжнього напруження в координатах: справжнє напруження - відносне подовження (рисунок 2.10).

Якщо вважати, що деформація робочої частини зразка здійснюється рівномірно, то, виходячи з умови сталості обсягу, можна отримати:

$$F_x = \frac{F_0 l_0}{l_0 + \Delta l} = \frac{F_0 l_0}{l_0 + \varepsilon_{xx} l_0},$$

звідси

$$F_x = \frac{F_0 l}{1 + \varepsilon_{xx}}.$$

В цьому випадку справжнє напруження  $\sigma_x$  визначається як відношення зусилля  $P$  до площі поперечного перерізу  $F_x$  зразку.

Починаючи з моменту утворення шийки деформації робочої частини зразка здійснюється нерівномірно і тому наведена рівність для визначення  $F_x$  буде несправедливо.

Аналіз експериментальних даних показує, що у більшості металів крива істинного напруження після початку утворення шийки збігається з дотичною, проведеною через точку, що відповідає моменту утворення шийки.

Екстраполюючи дотичну, можна визначити справжнє напруження і після утворення шийки

$$\sigma_x = \sigma_b (1 + \varepsilon_{xx}).$$

У цьому випадку зв'язок між деформаціями та напруженнями апроксимується лінійною функцією так, що при цьому пружними деформаціями нехтують. Якщо прийняти, що  $\varepsilon_{xx} = 0$ , то  $\sigma_x = \sigma_b$ . При гарячій деформації межа міцності приблизно дорівнює межі плинності  $\sigma_b \approx \sigma_s$ , тому  $\sigma_x = \sigma_b \approx \sigma_s$ , тобто матеріал можна вважати ідеально пластичним.

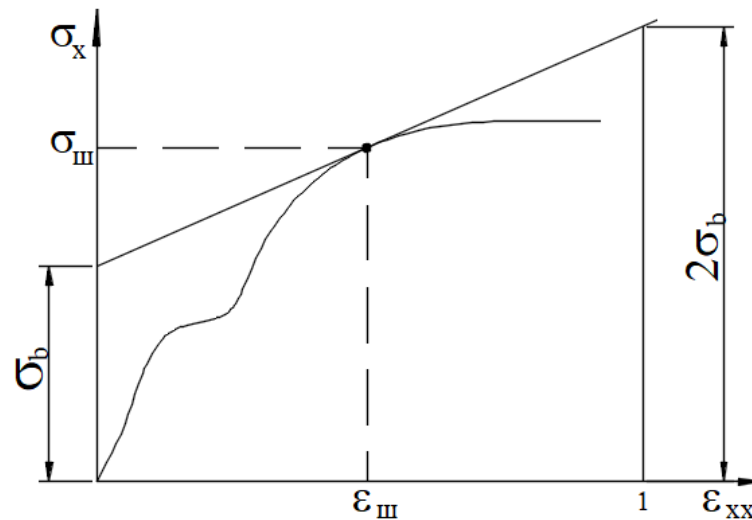


Рисунок 2.10 – Машинна діаграма

## 2.4 Умови рівноваги в осередку деформації. Плоскодеформований та плосконапружений стан. Теорія граничного стану

### 2.4.1 Умова рівноваги в осередку деформації

У тілі, що у напруженому стані, величина напружень змінюється від точки до точки і є безперервною функцією координат. Визначимо умову рівноваги нескінченно малої паралелепіпеда, виділеного в осередку деформації (рисунок 2.11).

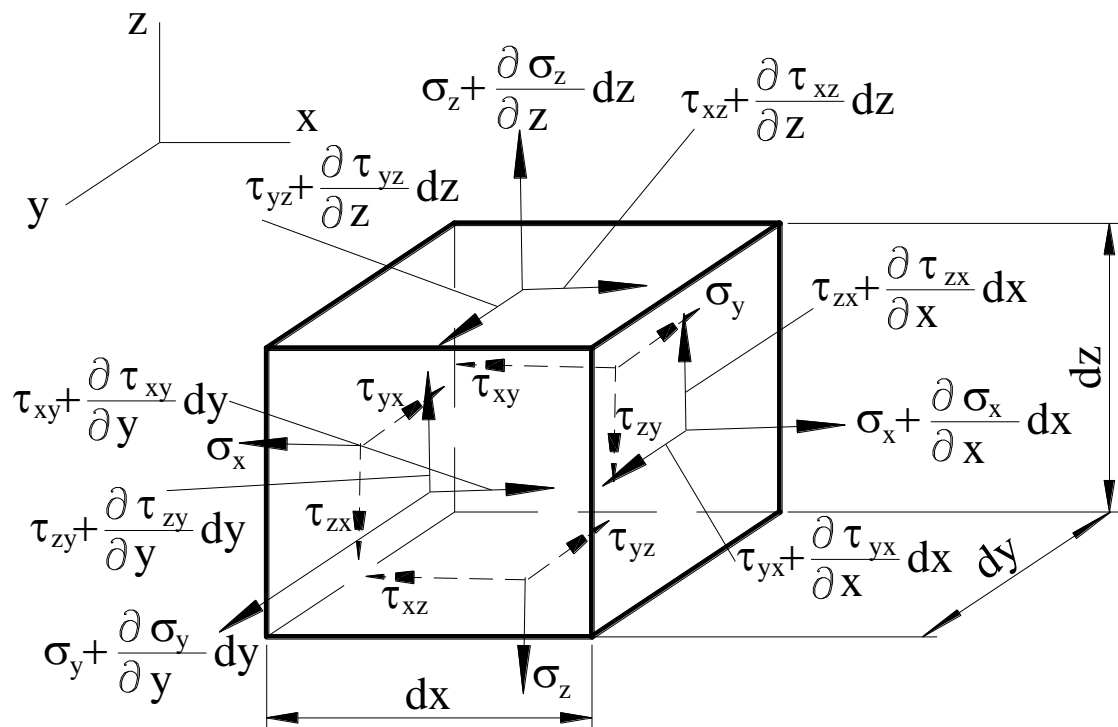


Рисунок 2.11 – Розрахункова схема до визначення напруженого стану

$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}, \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}, \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$  – інтенсивність зміни  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  відповідно по  $x, y$  та  $z$ .

Сили, які діють межі паралелепіпеда, рівні добутку напружень площею відповідних граней.

Проектуючи сили, що діють на вісь  $x$  і прирівнюючи їх нулю, отримаємо:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_{xz} dx dy + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx dz - \tau_{xy} dx dz = 0.$$

Після перетворення, отримуємо:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Ці рівняння називають диференціальними рівняннями рівноваги. Вони описують об'ємну деформацію.

## 2.4.2 Плоский напружений та плоский деформований стан

При обробці металів тиском, крім об'ємного, може бути плоский напружений стан (наприклад, в деяких випадках листового штампування), коли напруження по одній осі незначна і ними можна знехтувати (рисунком 2.12). Деформація при цьому може відбуватися по всіх трьох осях.

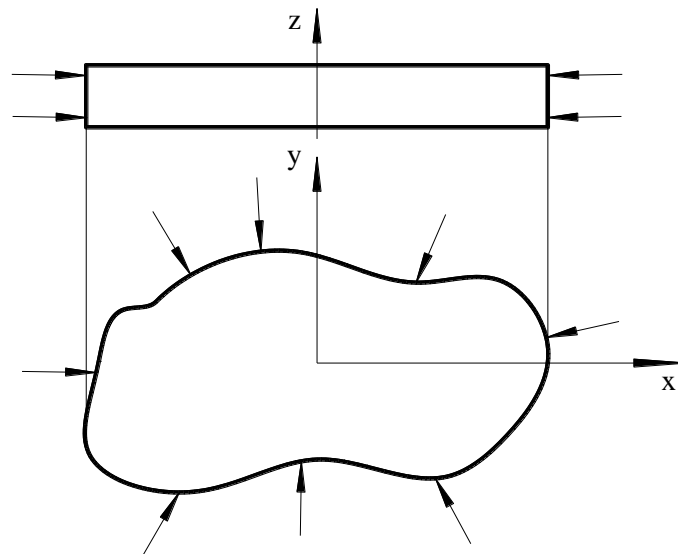


Рисунок 2.12 – Розрахункова схема для визначення плоского напруженого стану

$$\sigma_z = 0; \tau_{zx} = \tau_{xz} = 0; \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0.$$

Умова рівноваги

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Гідростатичний тиск

$$P = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3};$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G'}(\sigma_x - P) = \frac{1}{6G'}(2\sigma_x - \sigma_y);$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2G'}(\sigma_y - P) = \frac{1}{6G'}(2\sigma_y - \sigma_x);$$

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{2G'}P = -\frac{1}{6G'}(\sigma_x + \sigma_y);$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y.$$

У деяких випадках нехтують деформацією по одній з осей при дії напруження по всіх трьох осях. Такий деформований стан називають плоским деформованим станом. Прикладом плоскої деформації є прокатка тонких широких листів (рисунок 2.13). Так як відносна деформація у напрямку ширини листа мала (близько 1%), процес деформації можна розглядати у площині, перпендикулярній до осей валків..

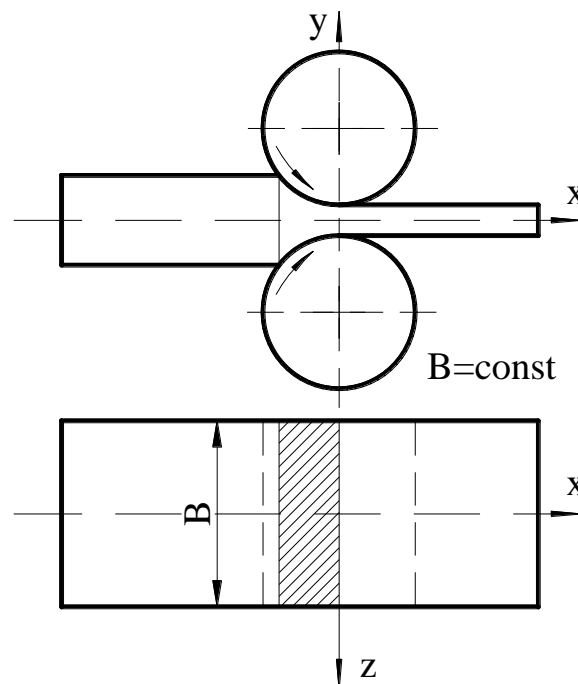



Рисунок 2.13 – Розрахункова схема прокатки листів


$$\varepsilon_z = 0.$$

Тоді з умови сталості об'єму

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0;$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{2G'}(\sigma_z - P) = 0; \sigma_z - P = 0; \sigma_z = P,$$

але

$$P = \sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3},$$

звідси

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}.$$

Отже, при рівності нулю деформації по будь-якій осі напруження вздовж цієї осі дорівнює напівсумі двох інших напружень. Оскільки  $\sigma_z$  є постійною величиною, це напруження є одним з головних, а вісь  $Z$  – головним напрямком, отже

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = 0.$$

Так як  $\sigma_z = const$  і  $\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \tau_{zy}$ , умови рівноваги при цьому випадку однакові з умовами рівноваги для плоского напруженого стану.

### 2.4.3 Умова пластичності Треска-Сен-Венана

При одновісному розтягуванні пластична деформація починається тоді, коли нормальне напруження досягає межі плинності, тобто  $\sigma_1 = \sigma_T$ .

У процесі деформації  $\sigma_T$  змінюється. Тому  $\sigma_T$  теоретично пластичності слід відрізняти від межі плинності, застосовуваного теорії пружності, опорі металів. Надалі  $\sigma_T$  будемо називати опором деформації та позначати  $\sigma_{cp}$ :

$$\sigma_{cp} = \sigma_{\phi} = \sigma_s = \sigma_T = n_t n_v n_{\Sigma},$$

де  $\sigma_{\phi}$  ( $\sigma_{cp}$ ) - фактичний опір деформації при лінійній деформації з урахуванням впливу температури, швидкості та ступеня деформації.

При об'ємному напруженому стані має бути певне співвідношення між опором деформації  $\sigma_{cp}$  і головними нормальними напруженнями для того, щоб тіло деформувалося пластично.

На підставі дослідних даних Тріска встановлено, що для початку пластичної деформації  $\tau_{max}$  має досягти певної, постійної для даного металу величини.

Сен-Венан на підставі дослідів Тріска запропонував умову пластичності, яка полягає в тому, що тіло тоді починає деформуватися пластично, коли  $\tau_{max}$  досягає певного значення незалежно від схеми напруженого стану

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{cp}}{2}$$

При  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  найбільшу величину має  $\tau_{31}$  та досягнення їм граничного значення  $\tau_{max}$  визначає початок пластичної деформації

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{cp}.$$

Отже, пластична деформація настає тоді, коли максимальна різниця основних нормальних напружень досягне величини опору деформації.

При об'ємному напруженому стані, коли є три головні напруження  $\sigma_1, \sigma_2$  та  $\sigma_3$  умова початку пластичної деформації запишеться у вигляді:

$$\left. \begin{array}{l} |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_{cp} \\ |\sigma_1 - \sigma_3| \leq \sigma_{cp} \\ |\sigma_2 - \sigma_3| \leq \sigma_{cp} \end{array} \right\} \text{ або } \left. \begin{array}{l} |\tau_{12}| \leq \frac{\sigma_{cp}}{2} \\ |\tau_{13}| \leq \frac{\sigma_{cp}}{2} \\ |\tau_{23}| \leq \frac{\sigma_{cp}}{2} \end{array} \right\}.$$

Необхідною та достатньою умовою пластичної деформації є досягнення однієї із зазначених трьох різниць головних нормальних напружень величини  $\pm \sigma_{cp}$ .

У прямокутній системі координат ці умови можна подати у вигляді простору, обмеженого трьома площинами, проведеними відповідно до рівнянь (рисунок 2.14):

$$\tau_{12} = \pm \frac{\sigma_{cp}}{2}; \tau_{13} = \pm \frac{\sigma_{cp}}{2}; \tau_{23} = \pm \frac{\sigma_{cp}}{2},$$

які є гранями кубу з центром, що знаходиться на початку координат і зі стороною  $\sigma_{cp}$ .

Так як у реальному випадку всі три дотичних напруження одночасно не можуть дорівнювати границі текучості на зсув

$$\tau_{12} + \tau_{13} + \tau_{23} = 0,$$

замість граничної поверхні куба, при досягненні якої починалося б пластична деформація виходить граничний замкнутий контур, в результаті перетину куба площиною (I) (рисунок 2.14). Цей контур є правильним п'ятикутником зі стороною, що дорівнює  $\frac{\sigma_{cp}}{\sqrt{2}}$ .

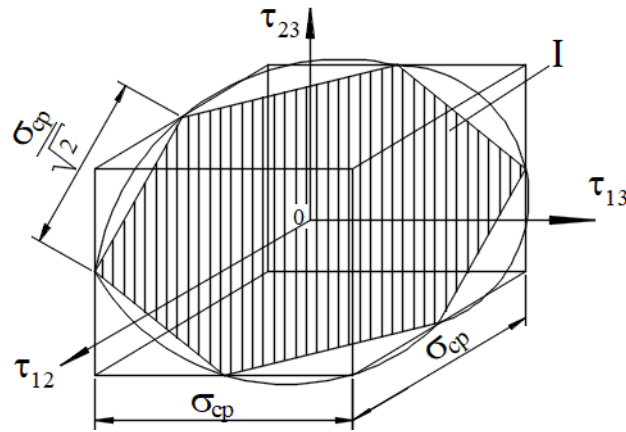


Рисунок 2.14 – Представлення напруженого стану у вигляді кубу

#### 2.4.4. Умова пластичності Губера-Мізеса

Мізес звернув увагу, що в кутових точках шестикутника два головні дотичні напруження досягають найбільшого значення, що дорівнює  $\frac{\sigma_{cp}}{2}$ , а третя дотичне напруження при цьому дорівнює нулю. Таким чином, умова пластичної деформації не враховує впливу третьої головного дотичного напруження. У зв'язку з цим він запропонував замінити шестикутник більш простою фігурою – описаним колом. Замість куба тоді має бути куля, рівняння якої має вигляд:

$$\tau_{12}^2 + \tau_{13}^2 + \tau_{23}^2 = \frac{\sigma_{cp}^2}{2};$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_{cp}^2.$$

В даний час ці рівняння є основними рівняннями пластичності, що показують співвідношення між головним дотичним напруженням або головними нормальними при пластичній деформації тіла при будь-якому напруженому стані.

#### 2.4.5 Фізична інтерпретація основного рівняння пластичності

Кількість потенційної енергії, що накопичується тілом під час пружної деформації, не характеризує початок пластичної деформації.

Наприклад, при всебічному стисканні величина цієї енергії може бути дуже значною, а тіло при цьому пластично деформуватися не буде (рисунок 2.15).

Губер запропонував як критерій, визначального співвідношення напружень при пластичної деформації, приймати не повну енергію пружної деформації, лише її частина, що витрачається зміну форми тіла. Іншу частину потенційної енергії пружної деформації, що витрачається на зміну об'єму тіла, не слід враховувати.

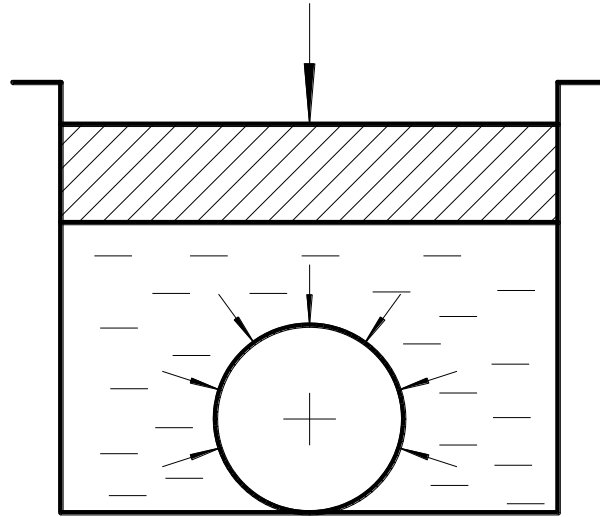


Рисунок 2.15 – Всебічне стискання тіла (гідростатичний тиск)

Таким чином, накопичена тілом потенційна енергія при пружній деформації, спрямована лише на зміну форми тіла, повинна бути цілком певною величиною, яка не залежить від характеру напруженого стану.

Потенційна енергія пружної деформації формозміни:

$$A_{\text{пр}} = A_{\text{п}} - A_{\text{об}},$$

де  $A_{\text{п}}$  – повна потенційна енергія;

$A_{\text{об}}$  – потенційна енергія, спрямована на зміну об'єму тіла, що деформується:

$$dA_{\text{п}} = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{xz} d\gamma_{xz} + \tau_{yz} d\gamma_{yz}.$$

Підставивши до цього рівняння значення пружних деформацій:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \end{aligned} \right\}$$

отримуємо

$$A_{\text{п}} = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z +)] + \frac{\tau_{xy}^2}{2G} + \frac{\tau_{xz}^2}{2G} + \frac{\tau_{yz}^2}{2G}.$$

Потенційна енергія спрямована на зміну об'єму

$$A_{\text{об}} = \frac{P\Delta V}{2},$$

де  $\Delta V$  – зміна об'єму;

$$\Delta V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z);$$

$$A_{об} = \frac{1-2\mu}{2E} \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2}{3};$$

$$A_{ср} = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)] +$$

$$+ \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) - \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2;$$

$$\frac{1}{2G} = \frac{1+\mu}{E}.$$

Перетворивши, отримаємо:

$$A_{ср} \Leftrightarrow = \frac{1+\mu}{8E} [\sigma_x^2 \Leftrightarrow + \sigma_y^2 \Leftrightarrow + \sigma_z^2 \Leftrightarrow - \sigma_x\sigma_y \Leftrightarrow - \sigma_x\sigma_z \Leftrightarrow - \sigma_y\sigma_z \Leftrightarrow + 3(\tau_{xy}^2 \Leftrightarrow + \tau_{xz}^2 \Leftrightarrow + \tau_{yz}^2 \Leftrightarrow)].$$

Це значення потенційної енергії пружної деформації формозміни. Для лінійної деформації

$$A_{ср} = \frac{1+\mu}{8E} \sigma_x^2.$$

Пластична деформація почнеться тоді, коли  $\sigma_x = \sigma_{ср}$ , звідси

$$A_{ср} = \frac{1+\mu}{8E} \sigma_{ср}^2.$$

Враховуючи, що величина  $A_{ср}$  не залежить від напруженого стану, ми можемо прирівняти праві та ліві частини отриманих рівнянь та помножити їх на два

$$2\sigma_{ср}^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2).$$

В головних напруженнях (рівняння Губера-Мізеса)

$$2\sigma_{ср}^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2.$$

#### 2.4.6 Порівняння двох рівнянь пластичності

- 1)  $2\sigma_{ср}^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2$
- 2)  $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{ср}$

а) припустимо  $\sigma_2 = \sigma_1$

$$2\sigma_{cp}^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{cp}$$

б) припустимо  $\sigma_2 = \sigma_3$

$$2\sigma_{cp}^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{cp}$$

в) припустимо  $\sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$

$$2\sigma_{cp}^2 = \left(\sigma_1 - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \sigma_3\right)^2;$$

$$2\sigma_{cp}^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = \frac{3}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)^2;$$

$$4\sigma_{cp}^2 = 3(\sigma_1 - \sigma_3)^2;$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_{cp};$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 1,15\sigma_{cp}.$$

Максимальна різниця в результатах обчислень за формулами (9.24) та (9.25) – 15%:

$$1,15\sigma_{cp} = 2K;$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2K.$$

#### 2.4.7 Рівняння пластичності для двовимірної деформації

При прокатці широких штаб деформації за однією оссю відсутні (рисунки 2.16).

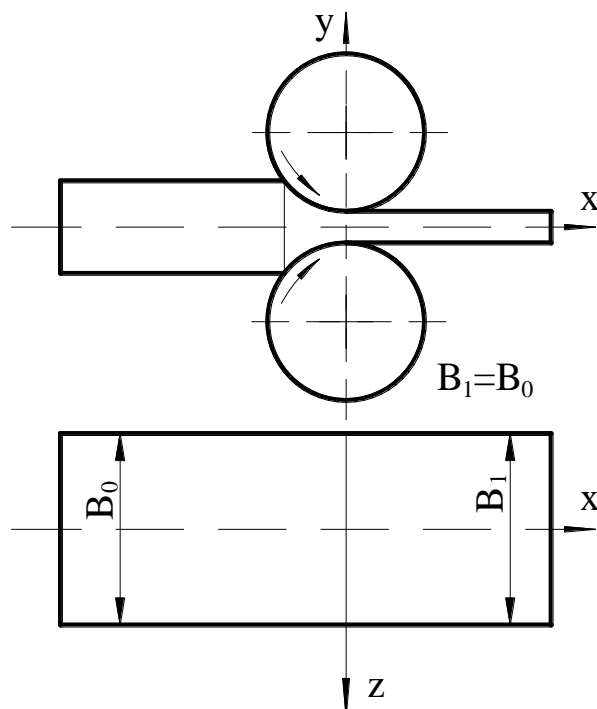


Рисунок 2.16 – Схема прокатки широких штаб

Тобто, в цьому випадку є плосконапружений стан і рішення буде та-  
ким:

$$2\sigma_{\text{cp}}^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2);$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0;$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2};$$

$$2\sigma_{\text{cp}}^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \left(\sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \left(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + 6\tau_{xy}^2;$$

$$2\sigma_{\text{cp}}^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \frac{1}{4}(\sigma_y - \sigma_x)^2 - 6\tau_{xy}^2;$$

$$2\sigma_{\text{cp}}^2 = \frac{3}{2}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 6\tau_{xy}^2;$$

$$4\sigma_{\text{cp}}^2 = 3(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 12\tau_{xy}^2;$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = \frac{4}{3}\sigma_{\text{cp}}^2;$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_{\text{cp}} = 2K;$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4K^2;$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2K.$$



### 3 АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ КОНТАКТНОГО ТИСКУ ПРИ ОМТ. СПРОЩЕНІ ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ І ЇХ РІШЕННЯ СПІЛЬНО З РІВНЯННЯМИ ПЛАСТИЧНОСТІ

#### 3.1 Аналітичні методи визначення зусиль, що деформують

При розробці технологічних процесів ОМТ та проектуванні обладнання необхідно знати зусилля, яке потрібно докласти до тіла, що деформується, для подолання опору деформації та тертя на поверхні металу з інструментом. Повне зусилля визначає характеристику необхідного обладнання – зусилля преса, потужність двигуна під час прокатки тощо. У ряді випадків поряд з повним зусиллям необхідно знати розподіл напружень на контактній поверхні. Так, момент, що крутить, і потужність двигуна при прокатці залежать від повного тиску металу на валки і відстані від центру валка до повного зусилля. Ця відстань (плече рівнодіючої) залежить від розподілу нормальних напружень і напружень тертя на контактній поверхні.

Нині таких розв'язків задач об'ємної деформації не отримано. При наближеному розв'язанні задач об'ємної деформації застосовують варіаційні методи, метод робіт.

Метод робіт ґрунтується на положенні, що при пластичній деформації робота зовнішніх сил дорівнює сумі робіт внутрішніх опорів. Робота зовнішніх сил дорівнює різниці робіт активних сил, що розвиваються машиною, та сил зовнішнього тертя:

$$A_B = A_a - A_p = A_d.$$

Варіаційні методи визначення зусиль та деформацій, як і метод робіт, ґрунтуються на енергетичному принципі. Основне положення методу звучить так: «Сума робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил на можливих переміщення близько стану рівноваги дорівнюють нулю».

При вирішенні більшості завдань доводиться застосовувати ряд припущень, які зводять тривимірне завдання до двовимірного чи одновимірного.

Так, наприклад, для плоского напруженого та плоского деформованого станів маємо два рівняння рівноваги та одне рівняння пластичності. Усього три рівняння з трьома невідомими:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0; \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4K^2. \end{cases}$$

Вирішення цієї системи можливе такими методами:

1 Метод Сен-Венана.

Маємо  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  – функції, що залежать від координати  $(xy)$ .

Сен-Венан запропонував замінити  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  через функції  $F = F(xy)$  таким чином, щоб задовольнялася умова рівноваги:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} &= 0; \\ -\frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} &= 0; \\ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right) + 4\left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right) &= 4K^2. \end{aligned}$$

Замість трьох рівнянь ми здобули одне з одним невідомим. Метод розвитку не отримав через складність рішення.

### 3.2 Метод Леві (метод ліній ковзання)

При розтягуванні циліндричного зразка на поверхні виявляється сітка ліній, що переміщуються під прямим кутом один з одним і нахилених під кутом  $45^\circ$  до осі зразка. Ці лінії (їх називають лініями ковзання або лініями Чернова-Людєрса) є слідами перетину поверхні зразка площинами максимальної дотичної напружень (рисунок 3.1). Дослідження показали, що лінії ковзання збігаються з траєкторіями найбільшого дотичного напруження.

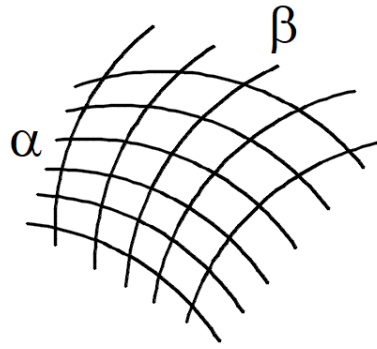


Рисунок 3.1 – Траєкторії дії максимальних дотичних напружень

Леві встановив зв'язок між максимальним дотичним напруженням і положенням майданчиків, в яких вони діють.

$$\begin{cases} \sigma_x = P + K \sin 2\varphi; \\ \sigma_y = P - K \sin 2\varphi; \\ \tau_{xy} = -K \cos 2\varphi; \end{cases}$$

$$2K = 1,15\sigma_{cp},$$

де  $p$  – гідростатичний тиск;

$\varphi$  – кут між напрямком осі  $X$  та площини, де діє максимальне дотичне напруення.

Вираз (10.1) тотожно задовольняють рівняння пластичності:

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4K^2.$$

При плоскій пластичній деформації

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{cp}}{2}; \quad \tau_{max} = K.$$

Підставляємо ці висловлювання до рівняння рівноваги.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial x} + 2K \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y} - 2K \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 2K \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 2K \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + 2K \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2K \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + 2K \left( \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + 2K \left( \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 0.$$

Ці рівняння визначають у системі координат  $x$  і значення кута  $\varphi$ , тобто. напрям найбільших дотичних напружень. Рівняння містять два невідомі  $p$  і  $\varphi$ . Вирішення цих рівнянь є принципово можливим, проте таке рішення утруднене через часткові похідні. Найбільш просто ці рівняння вирішувати графічно, будуючи сітку ліній ковзання з використанням властивостей ліній ковзання (рисунок 3.2).

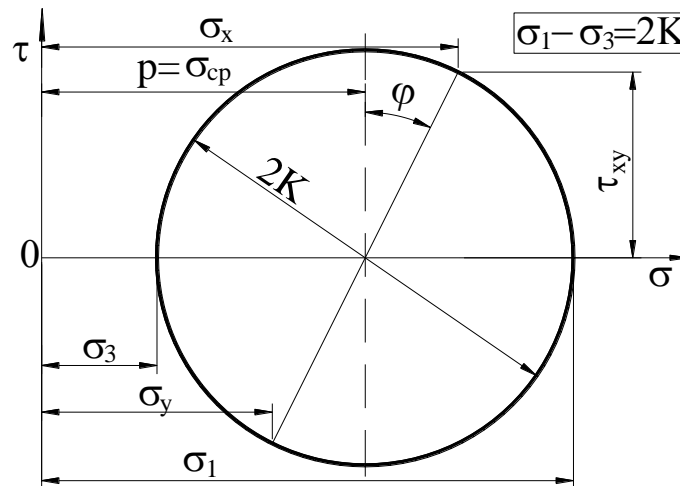


Рисунок 3.2 – Розрахункова схема до методу полів ліній ковзання

### 3.3 Метод характеристик

У випадку рівняння Леві вирішують шляхом відсікання параметрів. Виключаємо з цих рівнянь  $P$ , для чого продиференціюємо перше рівняння за  $Y$ , а друге за  $X$  і відніmemo з першого рівняння друге.

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} + 2K \left[ -2 \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \cos 2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + 2 \cos 2\varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \sin 2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] -$$

$$- \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} - 2K \left[ 2 \cos 2\varphi \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \sin 2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right] = 0.$$

Після перетворень

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2ctq2\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 4 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + 2ctq2\varphi \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] = 0.$$

Це квазілінійне диференціальне рівняння у часткових похідних другого порядку.

Визначивши характеристичне рівняння отриманого рішення та вирішуючи його щодо  $\frac{dy}{dx}$ , отримуємо два диференціальні рівняння характеристик.

$$\frac{dy}{dx} = tq\varphi; \quad \frac{dy}{dx} = ctq\varphi.$$

Характеристики збігаються з лініями ковзання і мають всі їхні властивості.

### 3.4 Спосіб Прандтля

Прандтлем вирішено завдання зі стиснення пластичної маси між двома паралельними шорсткими плитами (рисунок 3.3).

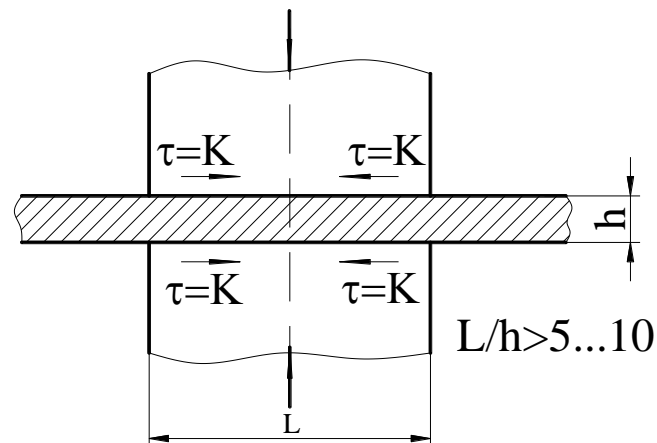


Рисунок 3.3 – Стиснення матеріалу між двома рухомими плитами

Продиференціюємо перше рівняння рівноваги за  $Y$ , а друге за  $X$ :

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y \partial x} = 0.$$

Віднімемо з першого рівняння друге

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x - \sigma_y) = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2};$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 = 4\tau_{xy}^2 = 4K^2;$$

$$\sigma_x - \sigma_y \pm 2K \sqrt{1 - \frac{\tau_{xy}^2}{K^2}};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\pm 2K \sqrt{1 - \frac{\tau_{xy}^2}{K^2}}) = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2}.$$

### 3.5 Інженерний метод

Метод заснований на таких положеннях:

- а) напружено-деформований стан розглядається або осесиметричним або плоским;
- б) диференціальні рівняння рівноваги для плоскої задачі спрощуються прийняттям припущень, що нормальне напруження залежить тільки від однієї координати (рисунок 3.4) (двовимірна задача зводиться до одновимірної);
- в) приймається спрощене рівняння пластичності:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2K.$$

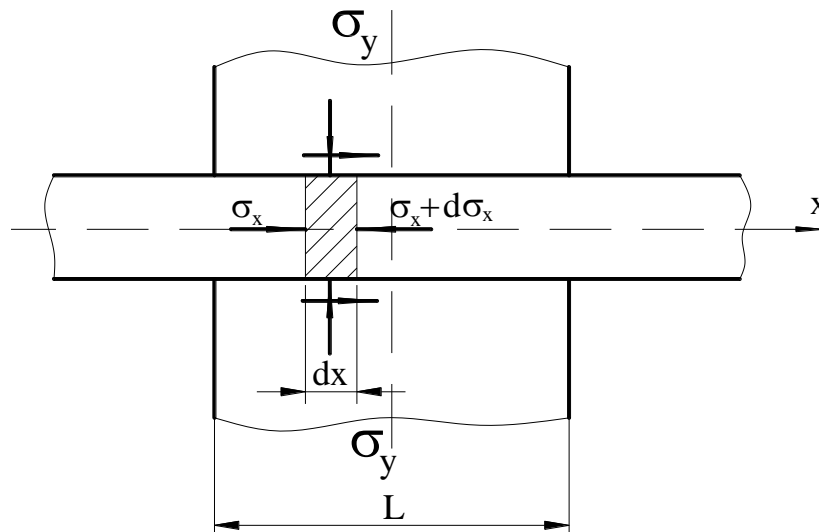


Рисунок 3.4 – Розрахункова схема з переходу від двовимірної до одновимірної задачі

### 3.6 Спрощене диференціальне рівняння рівноваги та їх вирішення спільно з рівняннями пластичності

Метод заснований на припущенні про рівномірний розподіл тисків та швидкостей по висоті осередку деформації. Напрямок дії напружень показаний на розрахунковій схемі (рисунок 3.5).

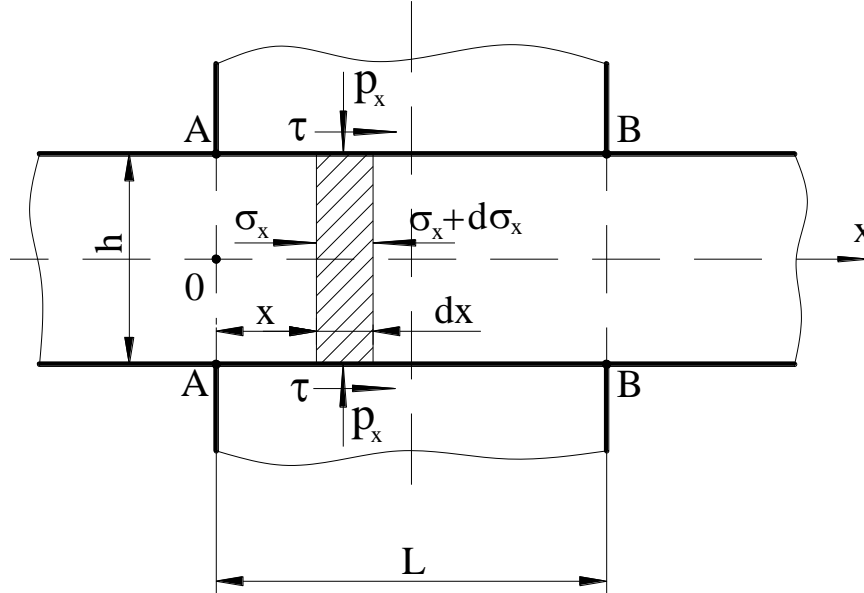


Рисунок 3.5 – Розрахункова схема до методу диференційних рівнянь

$$V=1;$$

$$\Sigma x = 0;$$

$$\sigma_x h + 2\tau dx - (\sigma_x + d\sigma_x)h = 0;$$

$$2\tau dx - d\sigma_x h = 0;$$

$$d\sigma_x = 2\tau \frac{dx}{h};$$

$$(\sigma_y + \sigma_x)^2 + 4\tau_{xe}^2 = 4K^2.$$

Різниця нормальних напружень залежить від дотичного напруження. Приймаємо, що головні осі відповідають вертикальним та горизонтальним осям.

Тоді:

$$\tau_{xy} \cong 0; \sigma_y - \sigma_x = 2K; \sigma_y = P_x;$$

$$P_x - \sigma_x = 2K; dP_x = d\sigma_y; 2K = \text{const};$$

$$dP_x = 2\tau \frac{dx}{h}.$$

Вважаємо, що

$$\tau = \mu P_x; dP_x = 2\mu P_x \frac{dx}{h};$$

$$\frac{dP_x}{P_x} = 2\frac{\mu}{h} dx; \int \frac{dP_x}{P_x} = 2\frac{\mu}{h} \int dx;$$

$$\ln P_x = \frac{2\mu}{h} x \ln e.$$

Постійну інтегральну величину  $\ln e$  знаходимо при граничних умовах. При  $X=0$   $\sigma_x = 0$ . Тоді з умови пластичності  $P_x=2K$ .

$$P_A = 2K;$$

$$\ln 2K = \frac{2\mu}{h} x + \ln e;$$

$$\ln e = \ln 2K;$$

$$\ln P_x = \frac{2\mu}{h} x + \ln 2K;$$

$$\ln \frac{P_x}{2K} = \frac{2\mu}{h} x;$$

$$\frac{P_x}{2K} = e^{\frac{2\mu}{h} x};$$

$$P_x = 2K e^{\frac{2\mu}{h} x}.$$

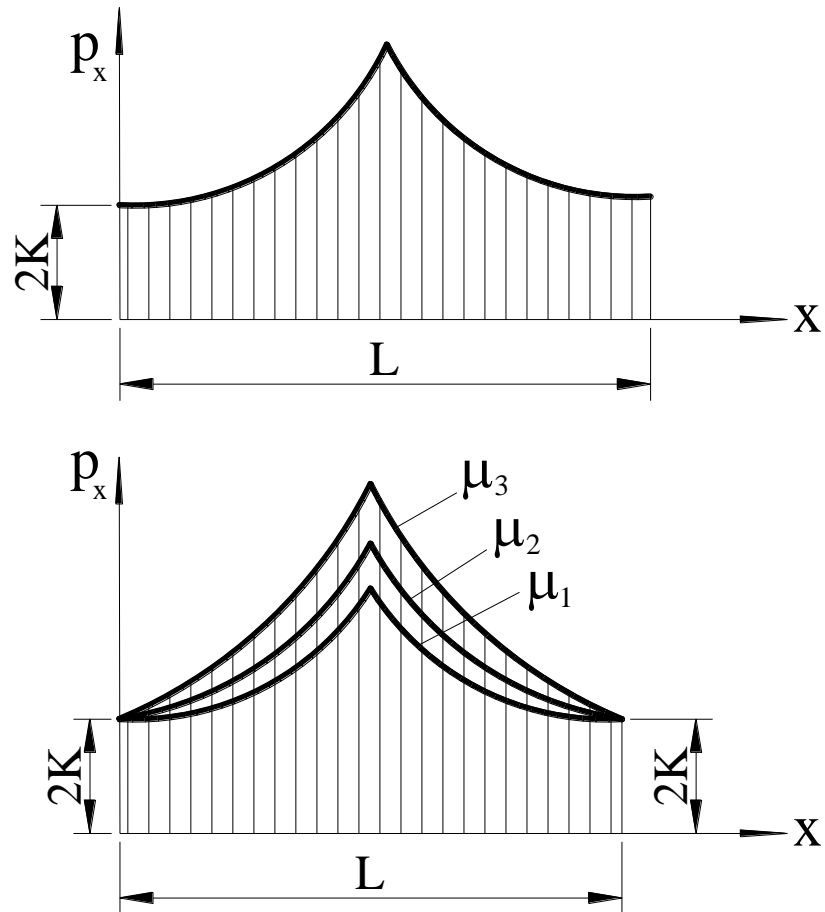
Побудуємо епюру нормальних контактних напружень (рисунок 3.6). Зі зростанням коефіцієнта тертя нормальні напруження зростають:

$$P = 2b \int_0^{1/2} P_x dx = 2b \int_0^{1/2} 2K e^{\frac{2\mu}{h} x} dx = 2b2K \int_0^{1/2} \frac{h}{2\mu} e^{\frac{2\mu}{h} x} dx =$$

$$= 2b2K \frac{h}{2\mu} \left. e^{\frac{2\mu}{h} x} \right|_0^{1/2} = 2b2K \frac{h}{2\mu} (e^{\frac{\mu l}{h}} - 1);$$

$$P_{cp} = \frac{b}{bl}; \frac{P_{cp}}{2K} = n_\sigma;$$

$$n_\sigma = \frac{h}{\mu l} (e^{\frac{\mu l}{h}} - 1).$$



*Рисунок 3.6 – Епюра нормальних контактних напружень*

Цей метод дає хороші результати, коли  $\frac{1}{h_{cp}} > 1$ . При  $\frac{1}{h_{cp}} < 1$  спостерігається велика похибка з-за припущень рівномірного розподілу напружень по товщині прокату.

## 4 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ГІПОТЕЗИ ТЕОРІЇ ПРОКАТКИ. РОЛЬ ТЕРТЯ ПРИ ПРОКАТЦІ. УМОВИ ЗАХВАТУ ПРОКАТУ ВАЛКАМИ

Сутність процесу прокатки полягає в тому, що заготівля або злиток внаслідок дії сил тертя втягується валками, що обертаються, в зазор між ними і обтискаються. Розрізняють три види прокатки: поздовжню, поперечну та порожнисту (гвинтову).

При поздовжній прокатці заготівля втягується в зазор між валками, що обертаються в різні боки, стискається по висоті і збільшується по довжині та ширині. При цьому переріз заготовки набуває форми зазору (калібру) між валками.

### 4.1 Умова захвату смуги валками

Для втягування заготовки валками необхідно, щоб між ними та заготовкою діяли сили тертя достатньої величини.

Розглянемо умови, за яких валки табору зможуть захопити смугу та забезпечити її рух.

Для випадку симетричної прокатки валки надаватиме на смугу дію у вигляді двох сил  $N$ , спрямованих нормально до поверхні валків і двох сил тертя  $T$ , спрямованих дотично (рисунок 4.1).

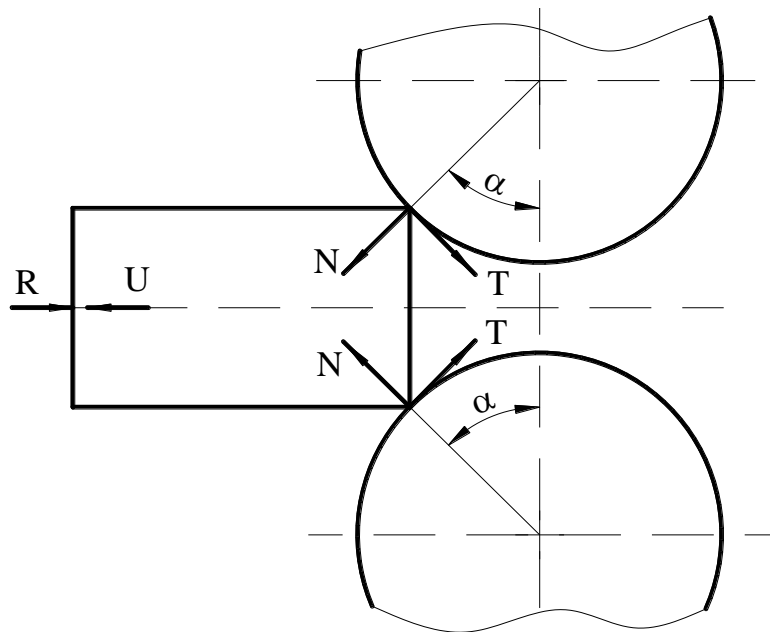


Рисунок 4.1 – Напрямок дії сил при захваті металу валками

З умови рівноваги смуги, що прокатується, отримуємо:

$$2T \cos \alpha - 2N \sin \alpha + R - U = 0$$



або

$$T \cos \alpha - N \sin \alpha + \frac{R-U}{2} = 0,$$

де  $\alpha$  - кут захвату;

$R$  – можлива зовнішня сили, що вштовхує смугу в зазор між валками;

$U$  – сили інерції.

Знаходимо

$$T = N t q \alpha + \frac{U-R}{2 \cos \alpha}.$$

Так як  $T$  не може бути більшим за добуток сили  $N$  на коефіцієнт тертя, тобто

$$T \leq N \mu$$

Отримуємо умову захвату металу валками

$$\mu \leq t q \alpha + \frac{U-R}{2 N \cos \alpha}.$$

Якщо сила  $R$  відсутня, а силою  $U$  знехтувати, то

$$\mu \geq t q \alpha.$$

Або, виражаючи  $\mu$  через кут тертя  $\phi$ , отримуємо

$$t q \phi \geq t q \alpha;$$


$$\phi \geq \alpha.$$

Це означає, що захоплення смуги відбудеться тоді, коли кут тертя дорівнює або більше кута захвату.

У зв'язку з цим допустимий кут захоплення визначається станом контактних поверхонь металу та валків та умовами їхнього дотику.

## 4.2 Роль тертя при обробці металів тиском

Зовнішнім тертям називається таке явище, коли при переміщенні одного тіла поверхнею іншого виникає опір. Для подолання цього опору потрібна певна сила, звана силою тертя.



Для обробки металів тиском характерне тертя ковзання. Слід зазначити, що у нашому випадку тертя ковзання значно відрізняється від тертя ковзання у вузлах машин як кількісно, а й якісно.

При ОМТ на поверхні тертя діють високий тиск (до 250 кг/мм<sup>2</sup>) у той час, як у вузлах машин тиск не вище 1...5 кг/мм<sup>2</sup>.

При ОМТ відбувається значне оновлення поверхні контакту інструменту з металом, що деформується, у зв'язку із загальним збільшенням поверхні останнього. У підшипниках спостерігається незначне оновлення поверхні контакту, що відбувається лише внаслідок зношування.

Зміщення частинок металу по контактній поверхні деталей, що труться, в машинах однаково у всіх точках контакту, а при ОМТ величина і швидкість зміщення різні для різних точок контакту. Так, при осаді циліндричного зразка в центрі контактної поверхні зміщення металу, що деформується, щодо інструменту відсутня. У деяких випадках ковзання відсутнє по всій поверхні контакту і деформація здійснюється зміщенням частинок обсягом тіла.

При гарячій обробці металів тиском на умову тертя впливає окалина, властивості якої залежать від хімічного складу металу, що деформується, і температури.

Для деформації металу за наявності тертя необхідно докласти зусилля більше необхідного природною міцністю металу даних умовах, тобто. опором деформації. Чим більше тертя, тим більше потрібне зусилля для деформації і тим більша витрата енергії на деформацію.

Тертя є однією з причин нерівномірності деформації. У частинах тіла, що деформується, розташованих поблизу поверхні тертя, дія сил тертя, що утворюють деформацію більше, ніж у частинах тіла, віддалених від контакту з інструментом.

Тертя призводить до зносу та нерівномірного вироблення інструменту, тобто. псування його поверхні. Таким чином, тертя при обробці металів є небажаним. Для зниження тертя зазвичай застосовують різні способи. (У деяких випадках ОМТ тертя бажано).

### **4.3 Осередок деформації та його параметри**

При поздовжній прокатці пластичної деформації одночасно піддається не весь об'єм металу, а лише його невелика частина, що знаходиться поблизу валків. Цю частину називають осередком деформації (рисунки 4.2).

В основному осередок деформації складається з обсягу металу, укладеного між валками та відповідного обсягу AA<sub>1</sub>BB<sub>1</sub>. Однак експериментальними дослідженнями встановлено, що деформація пластично поширюється також і на відносно невеликі зони, прилеглі до цього обсягу, звані зовнішніми або позаконтактними зонами.

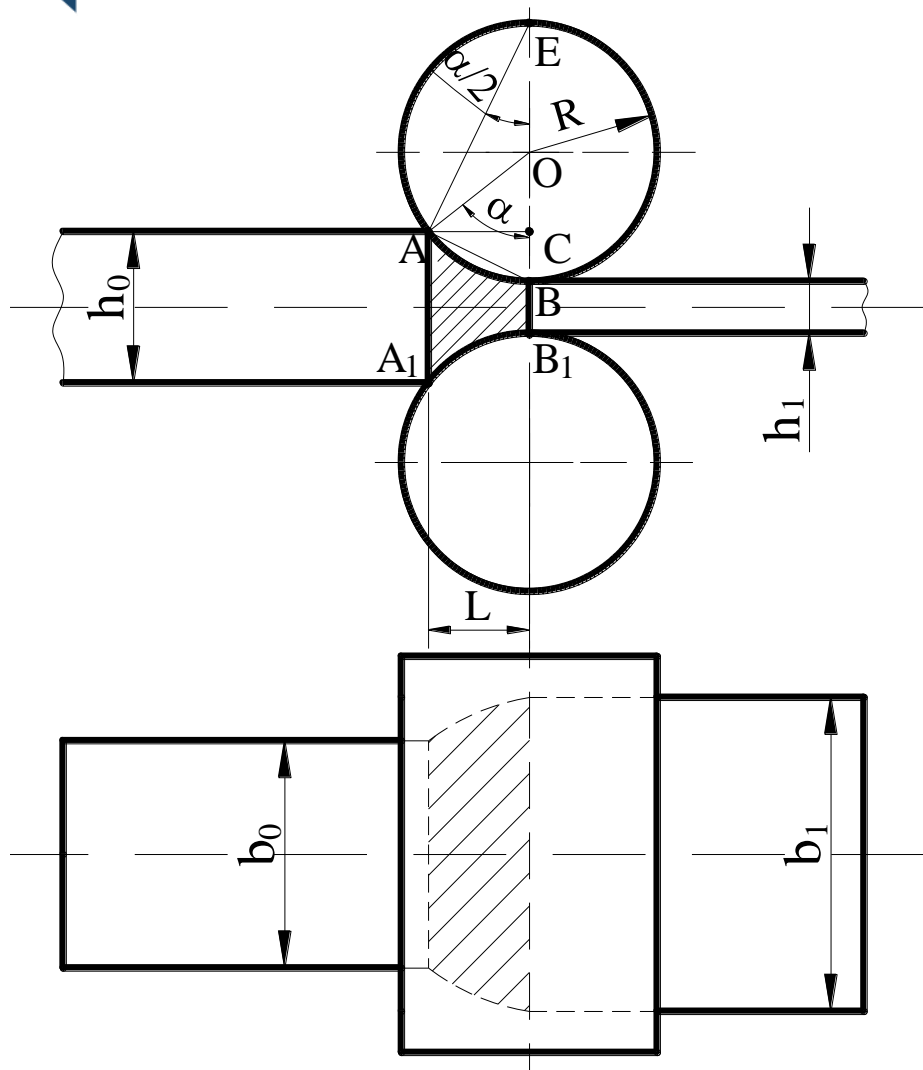


Рисунок 4.2 – Осередок деформації при прокатці

У зв'язку з цим обсяг  $AA_1BB_1$  називають геометричним осередком деформації. Форму геометричного вогнища деформації характеризують кутом контакту, висотами перерізу  $h_0$  і  $h_1$  входу у валки та виходу з них, довжиною  $L$ , початковою  $b_0$  та кінцевою  $b_1$  шириною.

Кут контакту  $\alpha$ :

$$\cos \alpha = \left( R - \frac{\Delta h}{2} \right) \frac{1}{R},$$

де  $\Delta h = h_0 - h_1$ .

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\Delta h}{2R}.$$

Величину  $L$  можна визначити за значенням кута захвату

$$L = R \sin \alpha$$



або з трикутника ABC:

$$l = FC = \sqrt{AB^2 - BC^2},$$

де  $BC = \frac{\Delta h}{2}$ .

Трикутник ABC подібний до трикутника ABE:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{BC}{AB};$$

$$AB^2 = BE \cdot BC = 2R \frac{\Delta h}{2};$$

$$AB = \sqrt{R\Delta h}.$$

Тоді

$$L = \sqrt{R\Delta h - \frac{\Delta h^2}{4}}.$$

Оскільки другий член отриманого виразу дуже малий у порівнянні з першим, то з достатньою точністю можна записати:

$$l \approx \sqrt{R\Delta h};$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{BE} = \frac{\sqrt{R\Delta h}}{2R};$$


$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{\Delta h}}{R}.$$

Внаслідок тиску металу на валки в останніх виникають місцеві пружні деформації стиснення. При холодній прокатці металів пружна деформація стиснення внаслідок високого питомого тиску може бути настільки значною, що помітно збільшить довжину захоплення дуги (на 20...50%). Це явище має особливо велике значення при холодній прокатці тонких листів та стрічок з малими кутами захвату.

У цьому випадку наведені формули для розрахунку довжини осередку деформації, виведені для ідеального (недеформованого) валка стають непридатними.

У цьому випадку

$$l \approx \sqrt{R\Delta h + x_2^2} + x_2,$$


$$\text{де } x_2 = \frac{8(1-\mu^2)}{\pi E} R p.$$

Тут

$\mu$  - коефіцієнт Пуассона матеріалу валків;

$E$  – модуль пружності матеріалу валків;

$R$  – радіус валків;

$p$  - питомий тиск металу на валки.

Для сталевих валків

$$x_2 = \frac{pR}{95000}.$$

#### 4.4 Нейтральний кут, нейтральний переріз

Після входу смуги у валки та утворення нейтрального осередку деформації умови руху її суттєво змінюються. Нормальні і дотичні сили в цьому випадку діють на метал, що прокочується по всій дузі захвату. При цьому зважаючи на прагнення металу деформуватися у напрямку найменшого опору контактні сили тертя діють на метал у бік його руху не по всій дузі контакту. Наприкінці дуги контакту ці сили змінюють напрям дії на протилежний. Вертикальний переріз, в якому контактні сили тертя змінюють напрям, називають нейтральними, а кут між радіусом, проведеним в точку перетину нейтрального перерізу з дугою контакту та лінією, що з'єднує центри валків, називають нейтральним кутом. ( $\gamma$ ) (рисунок 4.3).

Інтервал між  $\gamma$  та  $\alpha$  називають зоною відставання. Тут (рисунок 4.4)

$$V_B \cos \phi > V_{cp\phi},$$

$$V_B \cos \phi < V_{cp\phi}.$$

де  $\phi$  – поточний кут.

Інтервал між  $\gamma$  і  $O$  (II) називають зоною випередження (рисунок 4.5).

У нейтральному перерізі, коли  $\phi = \gamma$ :

$$V_B \cos \gamma = V_{cp\gamma}.$$

Процес поздовжньої прокатки можна розбити на кілька випадків стосовно  $\frac{l}{h_{cp}}$ . Як відомо поєднання трьох параметрів осередку деформації  $\frac{l}{h_{cp}}$ ,  $\alpha$  та  $\frac{B_0}{h_0}$  визначають напружено-деформований стан та кінематику переміщення металу в осередку деформації.

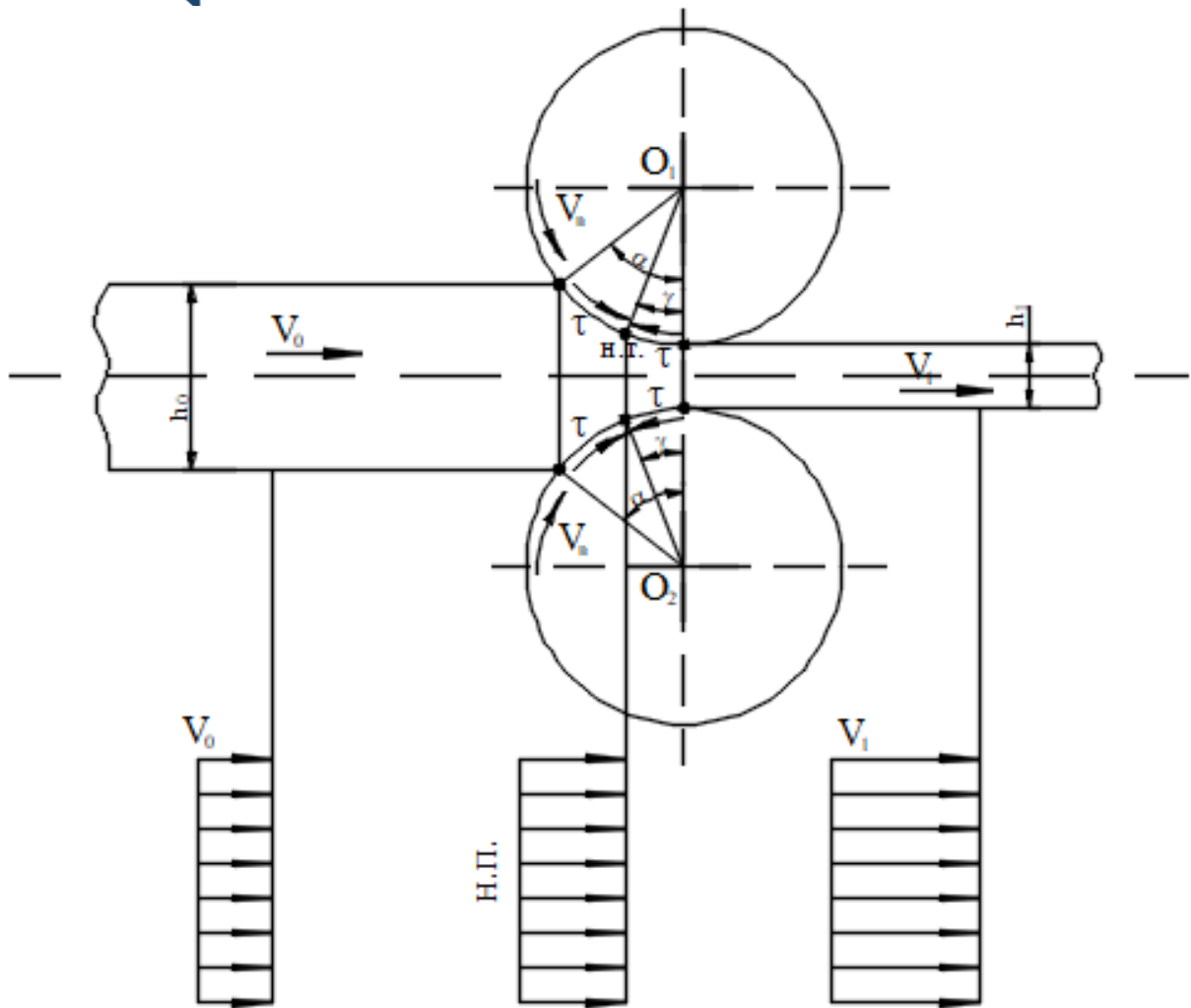


Рисунок 4.3 – Геометричний осередок деформації при прокатці

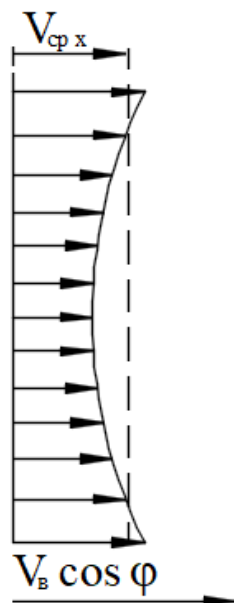


Рисунок 4.4 – Розподіл швидкостей в зоні відставання

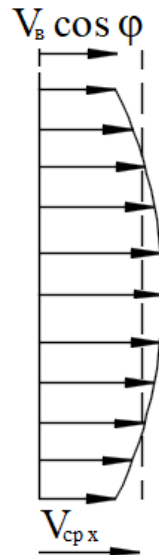


Рисунок 4.5 – Розподіл швидкостей в зоні випередження

#### 4.5 Випадки прокатки

$$\frac{l}{h_{cp}} < 0,2 \dots 0,5.$$

Цей випадок прокатки характерний для перших перепусток на обтискних станах, слябінгах та блюмінгах. Характерною особливістю є те, що пластична деформація не проникає на всю висоту вогнища деформації і метал тече не тільки у довжину, а й ширину в приконтактних шарах (рисунок 4.6).

Прагнення металу до ковзання по контактній поверхні дуже невелике. Має місце область прилипання (тобто деякий обсяг металу рухається зі швидкістю, що дорівнює кутовій швидкості валків) (рисунок 4.7).

$$0,2 < \frac{l}{h_{cp}} < 2$$

В цьому випадку пластична деформація проникає на всю висоту осередку деформації. Наявна зона прилипання. Зі зростанням  $\frac{l}{h_{cp}}$  виникає опуклість у середній частині епюри. При  $\frac{l}{h_{cp}} = 2$  на контактній поверхні можуть з'явитися зони ковзання (рисунок 4.8).

$$\frac{l}{h_{cp}} > 2 \dots 5.$$

Поряд із зоною прилипання на контактній поверхні є зона ковзання на вході металу в осередок деформації і на виході з нього (рисунок 4.9). Дотичні напруження зростають у порівнянні з першим випадком.

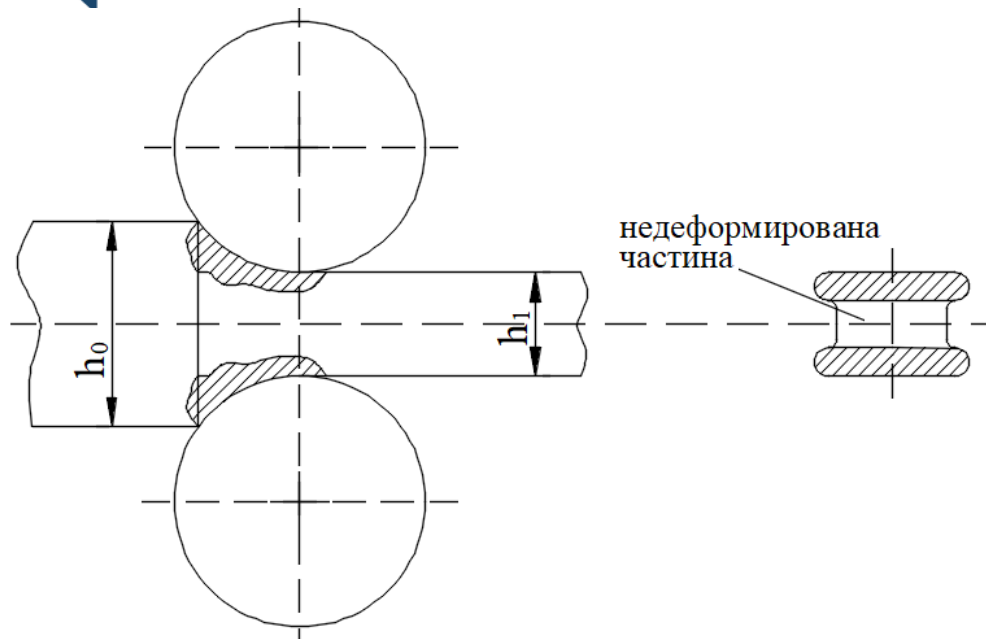


Рисунок 4.6 – Розрахункова схема до високого осередку деформації

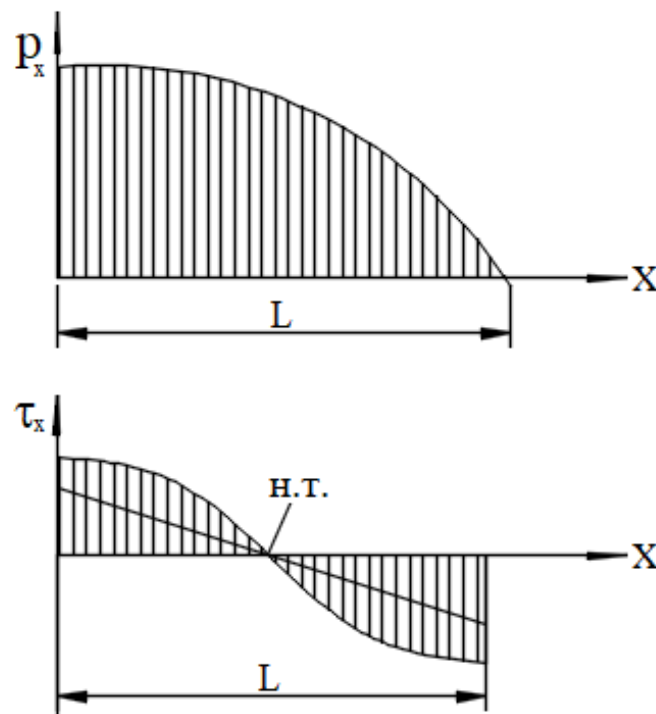


Рисунок 4.7 – Розподіл нормальних контактних напружень при високому осередку деформації

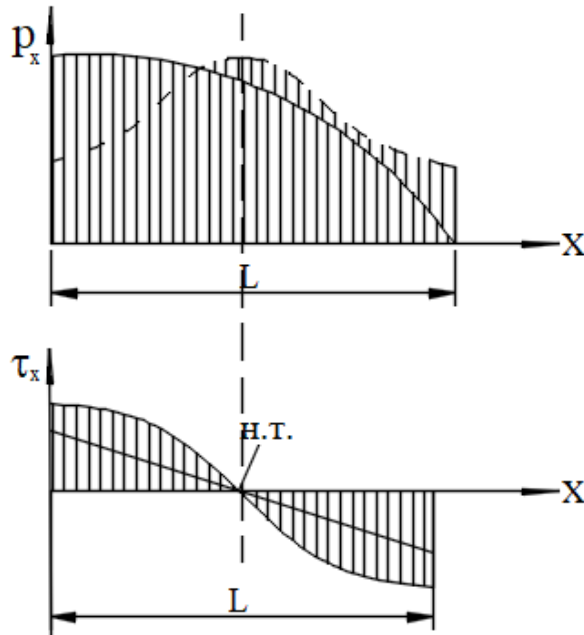


Рисунок 4.8 – Розподіл контактних напружень при середньому осередку деформації

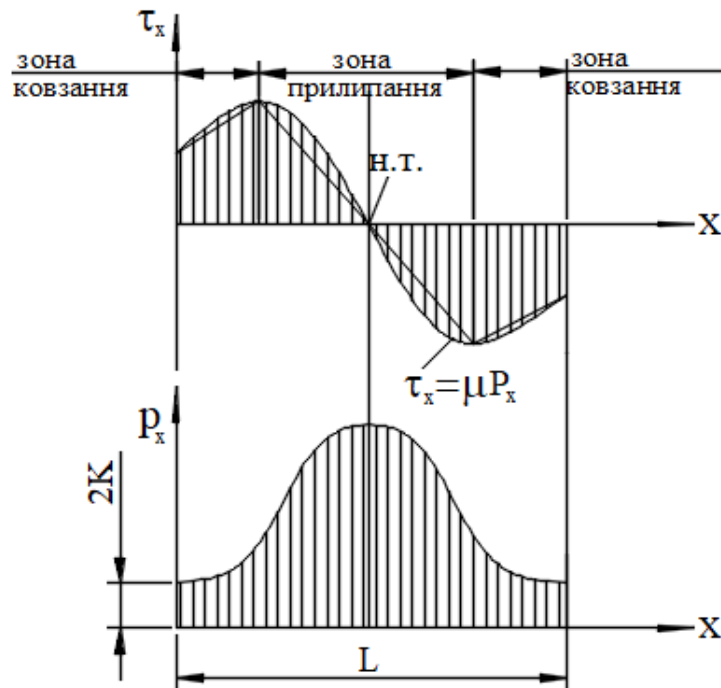
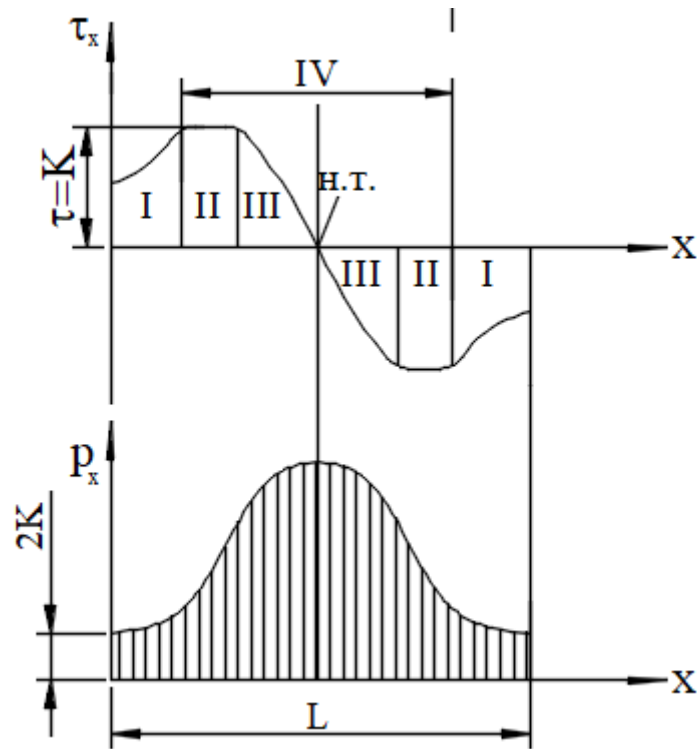


Рисунок 4.9 – Розподіл контактних напружень при наявності зони ковзання в осередку деформації

$$\frac{l}{h_{cp}} > 5.$$

Цей випадок прокатки характерний для прокатки тонких штаб та смуг. Розподіл нормальних напружень по висоті прокату рівномірний. Наявність певних зон в осередку деформації показана на рис. 4.10.



- I – зона сухого тертя  $\tau = \mu P_x$ ;
- II –  $\tau_{max}$ ;
- III – зона пригальмованої деформації;
- IV – зона прилипання

Рисунок 4.10 – Розподіл контактних напружень при прокатці відносно тонких штаб

При математичному описі процесу прокатки з метою визначення силових та швидкісних його параметрів важливо знати розподіл напружень, деформацій та швидкостей по висоті осередку деформації. Теоретичними та експериментальними дослідженнями було виявлено, що напруження, деформації та швидкості по висоті осередку деформації розподіляються нерівномірно.

При  $\frac{l}{h_{cp}} > 5$  цією нерівномірністю можна знехтувати (справедлива гіпотеза «пласких перерізів»).

При  $\frac{l}{h_{cp}} < 1$  нерівномірність дуже велика (можна помилитися в 2,5 рази, якщо не враховувати нерівномірність напруження, швидкості та деформації по висоті перерізу).

## 5 ЗУСИЛЛЯ ДЕФОРМАЦІЇ. КОНТАКТНИЙ ТИСК. ФОРМУЛА ЦЕЛІКОВА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ СЕРЕДЬОГО ПИТОМОГО ТИСКУ. ОПІР ДЕФОРМАЦІЇ І ПЛАСТИЧНІСТЬ. ЧИННИКИ, ЩО ВПЛИВАЮТЬ НА ОПІР ДЕФОРМАЦІЇ І ПЛАСТИЧНІСТЬ

### 5.1 Визначення зусилля при холодної прокатки. Диференціальне рівняння контактного напруження

Нерівномірний розподіл напружень, швидкостей та деформацій має місце за будь-якого випадку прокатки. Однак ступінь нерівномірності при прокатуванні тонких смуг зі змащенням, коли  $\frac{l}{h_{cp}} > 5$ , невелика і нею можна знехтувати.

Вперше рішення у загальному вигляді щодо визначення зусиль прокатки було отримано Карманом з такими припущеннями:

- 1 Про плоску деформацію (поширення відсутнє);
- 2 На контактній поверхні мають місце лише зони ковзання;
- 3 По висоті осередку деформації має місце рівномірність розподілу напружень, швидкостей і деформацій і передбачається, що нормальне напруження залежить тільки від однієї координати (тобто справедлива гіпотеза «плоских перерізів»);

4 Закон тертя на контактній поверхні підпорядковується закону сухого тертя.

Розрахункова схема для цього випадку прокатки показана на рис. 5.1.

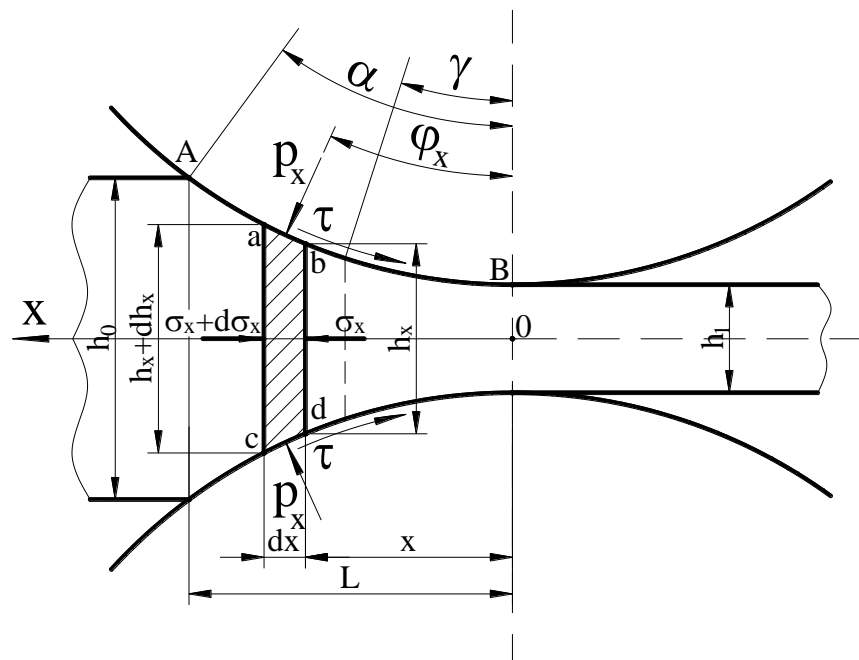


Рисунок 5.1 – Розрахункова схема для визначення диференціального рівняння контактного напруження при прокатці відносно тонких смуг

Вважаємо, що ширина прокату  $b=1$ .

Сума горизонтальних проекцій усіх сил, що діють у елементарному об'ємі осередку деформації:

$$\Sigma X = 2P_x \frac{dx}{\cos \varphi} \sin \varphi + \sigma_x h_x - 2\tau \frac{dx}{\cos \varphi} \cos \varphi - (\sigma_x + d\sigma_x)(h_x + dh_x) = 0;$$

$$2P_x t\varphi dx + \sigma_x h_x - 2\tau dx - \sigma_x h_x - \sigma_x dh_x - d\sigma_x h_x - d\sigma_x dh_x = 0;$$

$$2P_x t\varphi dx - 2\tau dx - \sigma_x dh_x - d\sigma_x h_x = 0;$$

$$dx = \frac{dh_x}{2t\varphi};$$

$$2P_x t\varphi \frac{dh_x}{2t\varphi} - 2\tau \frac{dh_x}{2t\varphi} - \sigma_x dh_x - d\sigma_x h_x = 0;$$

$$P_x dh_x - \tau \frac{dh_x}{t\varphi} - \sigma_x dh_x - d\sigma_x h_x = 0.$$

Розділимо на  $h_x$

$$d\sigma_x + \sigma_x \frac{dh_x}{h_x} + \tau \frac{dh_x}{h_x t\varphi} - P_x \frac{dh_x}{h_x} = 0;$$

$$d\sigma_x - \frac{dh_x}{h_x} (P_x - \sigma_x) + \tau \frac{dh_x}{h_x t\varphi} = 0;$$


$$(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4K^2.$$

Вважаємо, що головні осі відповідають вертикальним та горизонтальним осям.

$$\sigma_y - \sigma_x = 2K; \quad \sigma_y \cong P_x;$$

$$P_x - \sigma_x = 2K; \quad \sigma_x = P_x - 2K;$$

$$d(P_x - 2K) - \frac{dh_x}{h_x} 2K + \tau \frac{dh_x}{h_x t\varphi} = 0;$$



$$d(P_x - 2K) - \frac{dh_x}{h_x} \left( 2K - \frac{\tau}{\operatorname{tg}\varphi} \right) = 0.$$

Приймаємо, що  $2K$  змінюється по дузі захвату, тобто.  $2K = \text{const}$ . Дослідженнями Смирнова було показано, що  $2K$  можна приймати:

$$2K = \frac{(2K)_A + (2K)_C}{2}.$$

Тоді

$$dP_x = \left( 2K \mp \frac{\tau}{\operatorname{tg}\varphi} \right) \frac{dh_x}{h_x},$$

де знак «-» - для зони відставання;  
знак «+» - для зони випередження.

## 5.2 Розв'язання рівняння контактного напруження при ковзанні металу з постійним коефіцієнтом тертя

Вважаємо, що  $\tau = \mu P_x$ .

Підставляємо це значення в отримане рівняння контактного напруження:

$$dP_x = \left( 2K \mp \frac{\mu P_x}{\operatorname{tg}\varphi} \right) \frac{dh_x}{h_x}.$$

Подальше рішення буде пов'язане із встановленням співвідношень між  $\varphi$  і  $h_x$ . Для простоти рішення Целіковим було запропоновано замінити дугу захвату двома хордами: однією  $AC$  – для зони відставання та іншою  $BC$  – для зони випередження (рисунок 5.2). Похибки у разі незначні.

Тоді величина  $\operatorname{tg}\varphi$  для зони відставання:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \gamma}{2},$$

для зони випередження

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

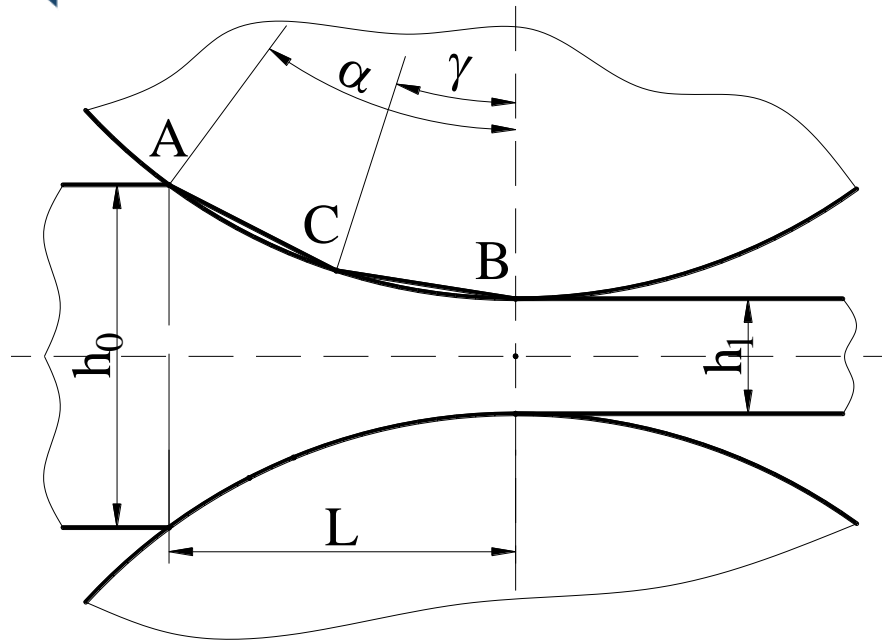


Рисунок 5.2 – Розрахункова схема до заміни дуги контакту хордами

Отримуємо для зони відставання:

$$dP_x = (2K - \delta_0 P_x) \frac{dh_x}{h_x}.$$

Для зони випередження

$$dP_x = (2K + \delta_1 P_x) \frac{dh_x}{h_x},$$

$$\text{де } \delta_0 = \frac{\mu}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \gamma}{2}}; \quad \delta_1 = \frac{\mu}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}.$$

У рівнянні, отриманому для зон відставання розділимо змінні:

$$\frac{dP_x}{2K - \delta_0 P_x} = \frac{dh_x}{h_x}.$$

Проінтегруємо

$$-\frac{1}{\delta_0} \ln(2K - \delta_0 P_x) = \ln h_x - \ln l_0;$$



$$2K - \delta_0 P_x = h_x^{-\delta_0} l_0.$$

При

$$h_x = h_0; P_x = P_A;$$

$$P_x - \sigma_x = 2K;$$

$$P_A - \sigma_A = 2K;$$

$$P_A = 2K + \sigma_A;$$

$$P_A = 2K + \sigma_0 - \text{задній підпір};$$

$$P_A = 2K - \sigma_0 - \text{задній натяг};$$

$$P_A = 2K - \sigma_0 = 2K\xi_0;$$

$$2K - \sigma_0 \cdot 2K\xi_0 = h_0^{-\delta_0} l_0;$$

$$C_0 = [2K(1 - \sigma_0\xi_0)]h_0^{\delta_0};$$

$$2K - \sigma_0 P_x = h_0^{-\delta_0} 2K(1 - \delta_0\xi_0)h_0^{\delta_0};$$

$$\sigma_0 P_x = 2K - 2K(1 - \delta_0\xi_0)\left(\frac{h_0}{h_x}\right)^{\delta_0}.$$

Для зони відставання (рисунок 5.3)

$$P_x = \frac{2K}{\delta_0} [(\delta_0\xi_0 - 1)\left(\frac{h_0}{h_x}\right)^{\delta_0} + 1].$$

Для зони випередження (рисунок 12.3)

$$P_x = \frac{2K}{\delta_1} [(\delta_1\xi_1 - 1)\left(\frac{h_x}{h_1}\right)^{\delta_1} - 1];$$

$$P_B = 2C - \sigma_1 = \xi_1 2K;$$

$$\xi_1 = 1 - \frac{\sigma_1}{2K}; \quad \xi_0 = 1 - \frac{\sigma_0}{2K}.$$

При  $\xi_0 = \xi_1 = 1$ ; ( $\sigma_1 = \sigma_0 = 0$ ).

Для зони відставання

$$P_x = \frac{2K}{\delta_0} [(\delta_0 - 1) \left(\frac{h_0}{h_x}\right)^{\delta_0} + 1].$$

Для зони випередження

$$P_x = \frac{2K}{\delta_1} [(\delta_1 + 1) \left(\frac{h_x}{h_1}\right)^{\delta_1} - 1].$$

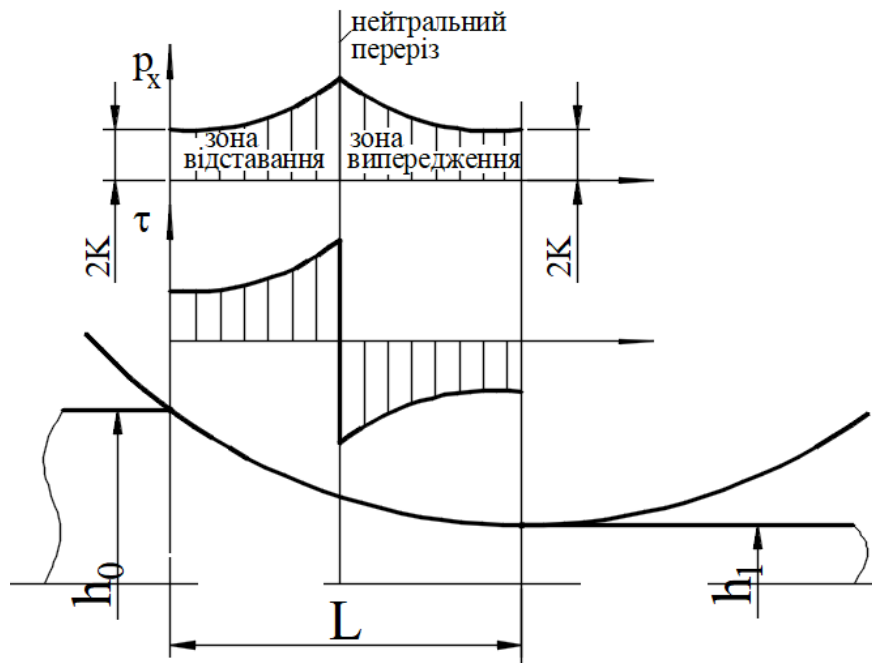


Рисунок 5.3 – Розрахункова схема для визначення напружень в зонах відставання та випередження

Розглянемо, як різні умови прокатки впливають на питомий тиск (рисунок 5.4...5.5):

$$1) \frac{1}{h_{cp}} = \text{const}, \quad \alpha = \text{const}; \quad D_{\text{валк}} = \text{const}; \quad \mu = \text{Var}$$

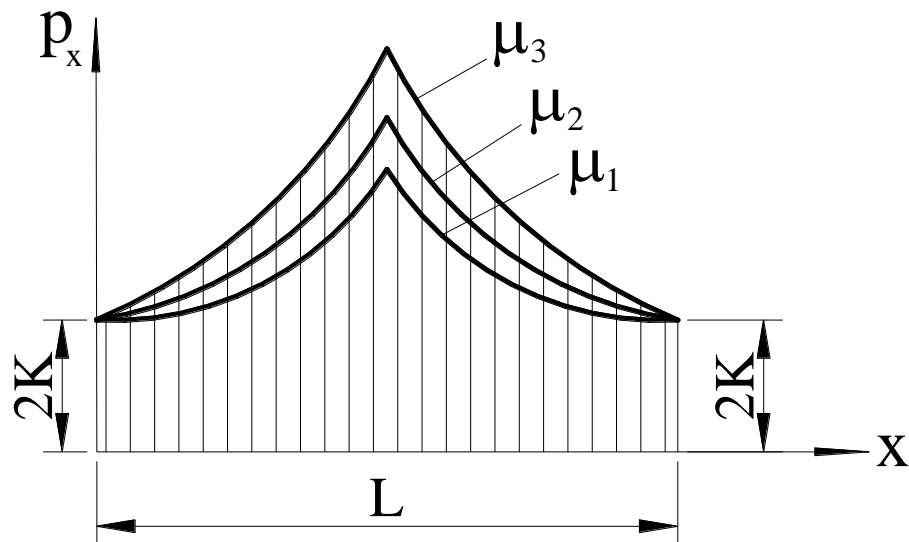


Рисунок 5.4 – Епюра нормальних контактних напружень при різних коефіцієнтах тертя

$$2) \frac{1}{h_{cp}} = \text{Var}, \quad h_{cp} = \text{const}; \quad \mu = \text{const}; \quad l_0 = \sqrt{R\Delta h}$$

Зі зростанням  $\frac{1}{h_{cp}}$  питомий тиск збільшується (рисунок 5.5).

3 Вплив переднього та заднього натягу (рисунок 5.6).

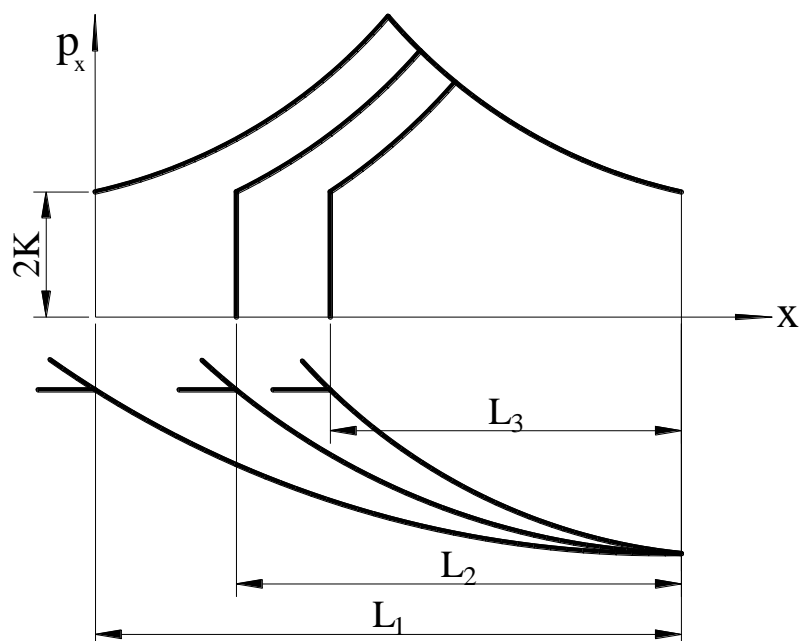


Рисунок 5.5 – Епюри нормальних контактних напружень при різних довжинах осередку деформації

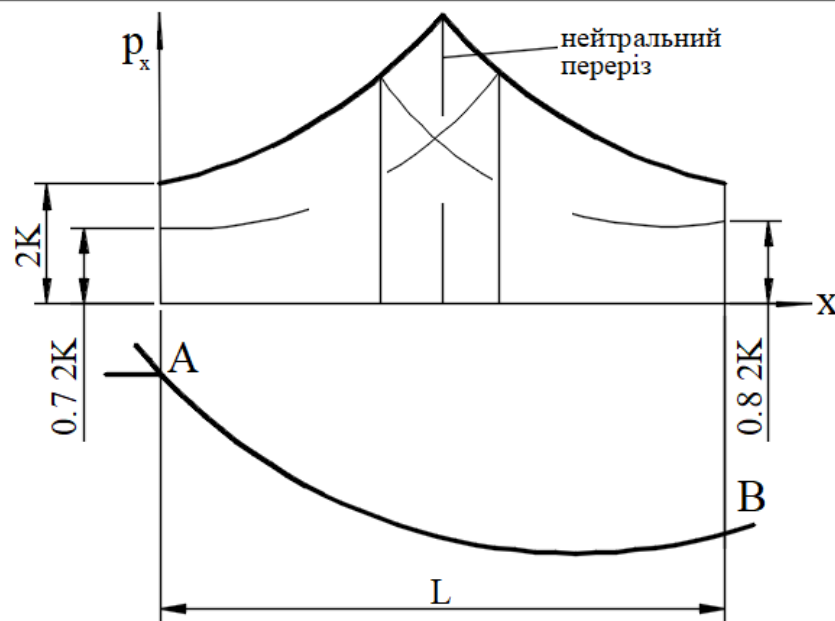


Рисунок 5.6 – Епюри нормальних контактних напружень при різних значеннях переднього та заднього натягів

$$P_B = 2K - \sigma_1; \sigma_1 = 0,2 \cdot 2K; P_B = 2K - 0,2 \cdot 2K = 0,8 \cdot 2K;$$

$$P_A = 2K - \sigma_0; \sigma_0 = 0,3 \cdot 2K; P_A = 2K - 0,3 \cdot 2K = 0,7 \cdot 2K.$$

За переднього натягу нейтральний кут збільшується, а за заднього – зменшується. За наявності заднього натягу до валків необхідно прикласти більший момент. При збільшенні переднього натягу момент прокатки зменшується і може звернутися в «0» (прокатка перероджується у волочіння).

Під дією переднього та заднього натягу питомий тиск знижується, причому заднє натяг робить більший вплив, ніж передній (зона відставання має більшу протяжність, ніж зона випередження) (рисунок 5.6).

## 6 ВИЗНАЧЕННЯ ТИСКУ МЕТАЛУ НА ВАЛКИ. ЧИННИКИ, ЩО ВПЛИВАЮТЬ НА ОПІР ДЕФОРМАЦІЇ

Тиск металу на валки складається як сумарне зусилля від нормальних та дотичних напружень, що діють на контактній поверхні (рисунок 6.1).

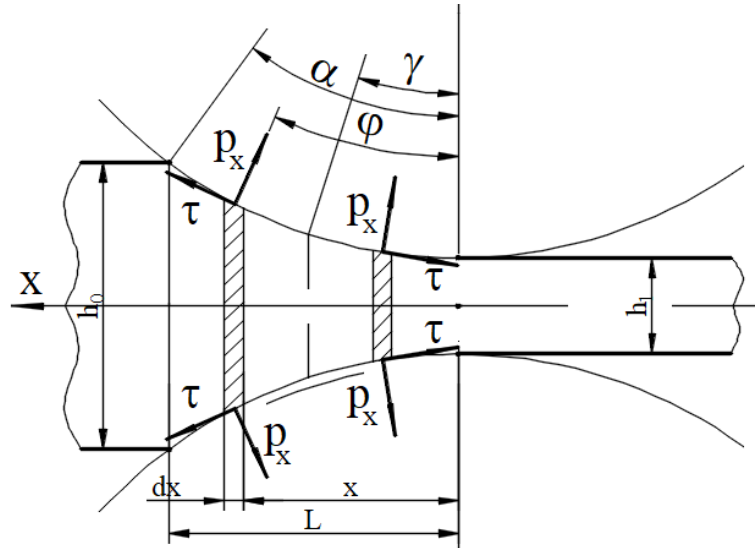


Рисунок 6.1 – Розрахункова схема для визначення тиску металу на валки

$$p = b \int_0^\alpha p_x \frac{dx}{\cos \phi} \cos \phi - b \int_0^\gamma \tau \frac{dx}{\cos \phi} \sin \phi + b \int_\gamma^\alpha \tau \frac{dx}{\cos \phi} \sin \phi.$$

Другим і третім членом рівняння можна знехтувати через незначність їх різниці порівняно з першим членом рівняння:

$$P \cong b \int_0^\alpha p_x dx.$$

Це площа епюри рівнянь, побудованої на горизонтальній проекції для дуги захвату.

$$P = p_{cp} F,$$

де  $F$  – площа контактної поверхні.

$$p_{cp} = \frac{1}{l} \int_0^l p_x dx.$$

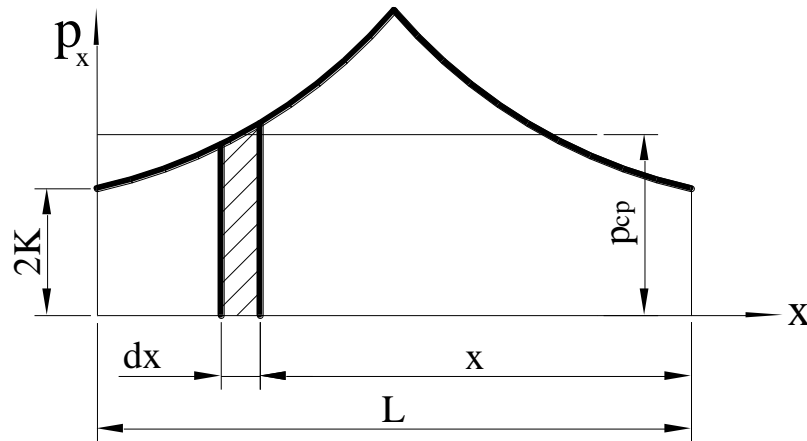


Рисунок 6.2 – Розрахункова схема для визначення площі епюри

Таким чином, щоб визначити тиск металу на валки, потрібно визначити:

- а) площу контактної поверхні;
- б) середній тиск на валки.

Середній тиск визначається двома групами факторів:

1 Фактори, що залежать від механічних властивостей смуги, що прокочується

$$\sigma_{cp} = \sigma_{s0} k_u k_\varepsilon k_\tau;$$

2 Фактори, що впливають на  $P_{cp}$  через нормальний стан в осередку деформації (зовнішні сили тертя, зовнішні зони, натяг)

$$P_{cp} = \sigma_{cp} \frac{2n_\sigma}{\sqrt{3 + \beta^2}},$$

де  $n_\sigma$  - коефіцієнт напруженого стану, часто надає більший вплив на тиск, ніж інші коефіцієнти і змінюється від 0,8 до 3;

$\frac{2n_\sigma}{\sqrt{3 + \beta^2}}$  змінюється від 1 до 1,15 та враховує вплив середнього го-

ловного напруження  $\sigma_2$  на співвідношення напружень при пластичній деформації.

Для плоскої деформації

$$\frac{2}{\sqrt{3 + \beta^2}} = 1,15;$$

$$n_{\sigma} = n'_{\sigma} n''_{\sigma} n'''_{\sigma},$$

де  $n'_{\sigma}$  - коефіцієнт, що враховує вплив зовнішнього тертя;

$n''_{\sigma}$  - коефіцієнт, що враховує вплив зовнішніх зон;

$n'''_{\sigma}$  - коефіцієнт, що враховує вплив натягу чи підпору.

Перші два коефіцієнти зазвичай більше 1, а третій коефіцієнт може досягати значення 0,7...0,8.

$$\left. \begin{aligned} n'_{\sigma} &= (1...3) \\ n''_{\sigma} &= (1...2,57) \end{aligned} \right\} f\left(\frac{l}{h_{cp}}\right);$$

$$n'''_{\sigma} = (0,7...1)$$

У багатьох випадках прокатку можна розглядати як двовимірну деформацію, тоді:

$$p_{cp} = n_{\sigma} 2K,$$

де  $2K=1,15\sigma_{cp}$ .

### 6.1 Коефіцієнти впливу зовнішніх зон та зовнішнього тертя

Зі зменшенням  $\frac{l}{h_{cp}} < 1$  коефіцієнт напруженого стану збільшується, незважаючи на зниження впливу зовнішнього тертя. Целіков пояснив це явище впливом зовнішніх зон.

Смирновим було проведено експеримент (рисунок 6.3).

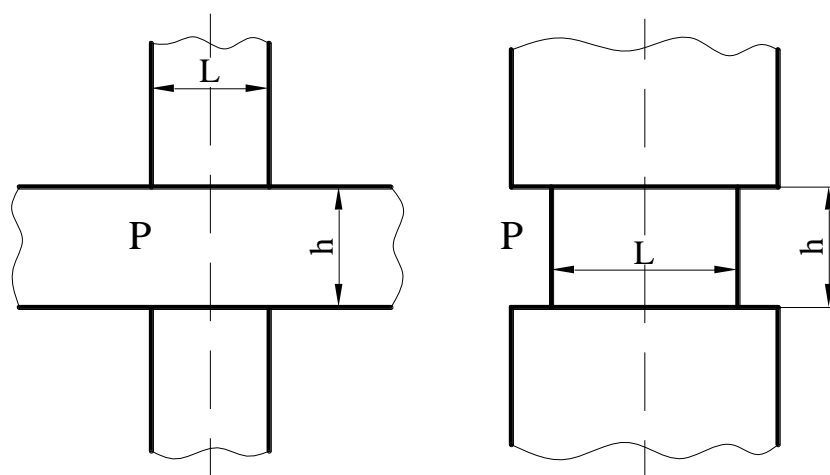


Рисунок 6.3 – Розрахункова схема для визначення впливу зовнішніх зон на напружено-деформований стан

Осаджувались зразки, мають зовнішні зони

при  $\frac{P'}{p} > 1$ ;  $\frac{P'}{p} = 1 \dots 2,57$ .

Отримаємо залежність (рисунок 6.4):

$$\frac{P'}{p} = n''_{\sigma} = \left(\frac{1}{h_{cp}}\right)^{-0,4}.$$

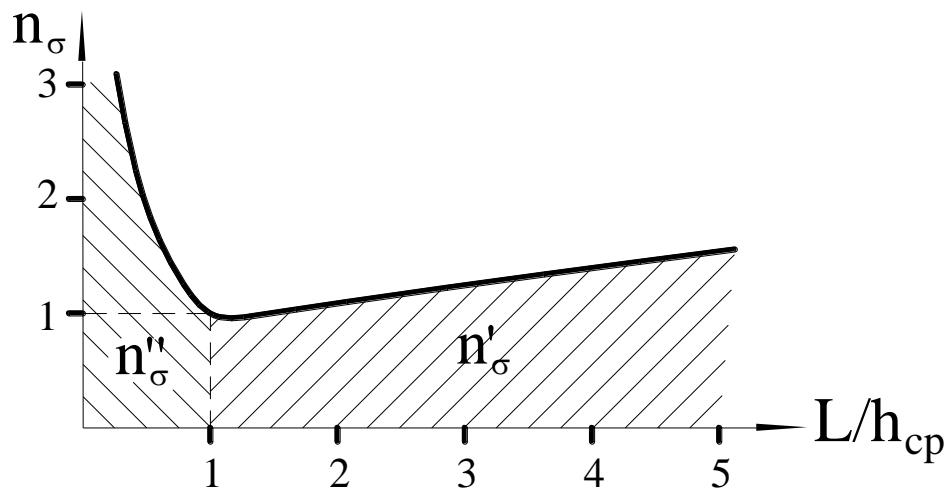


Рисунок 6.4 – Залежність коефіцієнтів напруженого стану від величини зовнішніх зон

При  $n'''_{\sigma} = 1$ ,  $n_{\sigma} = n'_{\sigma}$ , коли Отримаємо залежність  $\frac{1}{h} > 1$ .

$$n_{\sigma} = n''_{\sigma}, \text{ коли } \frac{1}{h} < 1.$$

При  $\frac{1}{h_{cp}} = 1$ ,  $n_{\sigma \min} = 1$  (у цьому випадку деформація наближається до

рівномірної. Зі зростанням чи зменшенням  $\frac{1}{h_{cp}}$  вплив зовнішніх зоні чи зовнішнього тертя спотворює рівномірність деформації).

Для визначення  $n'_{\sigma}$  при прокатуванні тонких смуг ( $\frac{1}{h_{cp}} > 3$ ) Целіко-

вим отримано діаграму впливу зовнішнього тертя на тиск залежно від  $\delta$  при різних  $\varepsilon$  (рисунок 6.5).

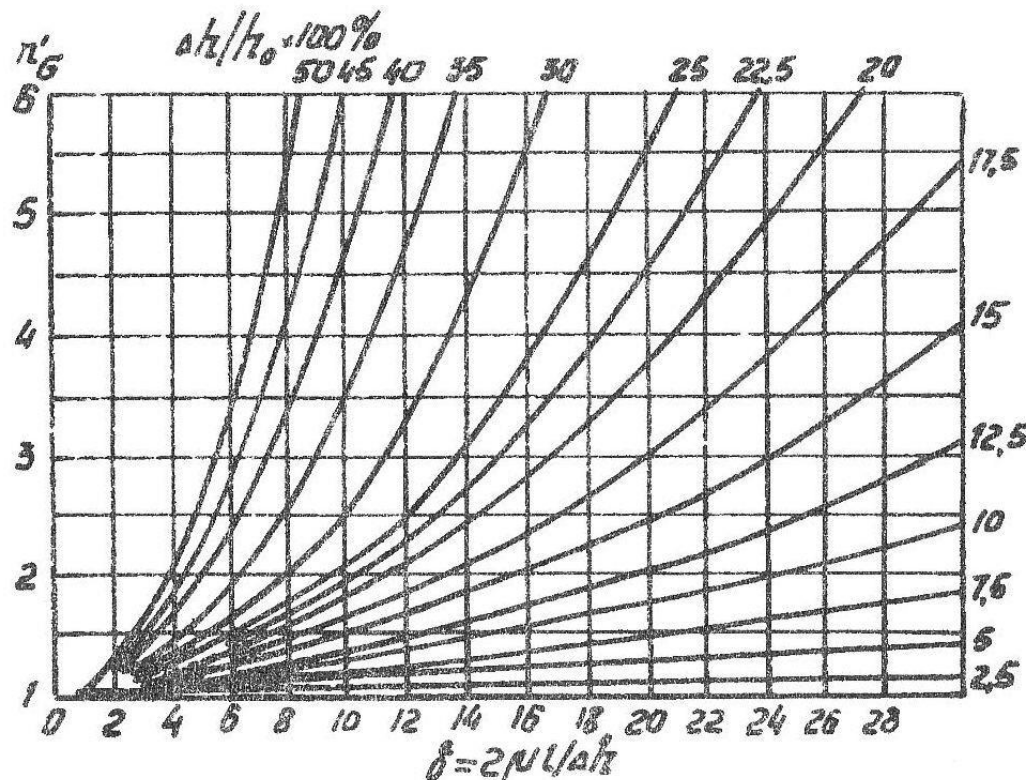


Рисунок 6.5 – Залежність коефіцієнту напруженого стану від параметрів осередку деформації

## 6.2 Методика визначення тиску металу на валки за наявності пружного сплющування

Розв'язання цього завдання здійснюється методом ітерації. Задаються довжиною дуги захвату дещо більшою, ніж при абсолютно жорстких валках, а потім перевіряють, чи правильно вона була обрана.

1  $\Delta h = h_0 - h_1$ ;

2  $\mu$ ;

3  $\varepsilon = \frac{\Delta h}{h_0}$ ;

4  $2K$ ;

5  $l_1 = \sqrt{R\Delta h}$ ;

6 Задаємося

$l = (1,1 - 1,15)l_1$ ;

7 Для цієї  $l$  визначаємо

$\delta = \frac{2\mu l}{\Delta h}$ ;

8 За номограмою Целікова визначаємо  $n'_\sigma$  з відомими ( $\delta$  и  $\varepsilon$ )

9 По відомому  $n'_\sigma$

$$p_{cp} = n'_\sigma 2K;$$

10 За формулою

$$V_2 = \frac{p_{cp} R}{9500};$$

$$11 l' = \sqrt{R\Delta h + x_2^2} + x_2.$$

Порівнюємо результати, якщо  $l$  і  $l'$  не відрізняються більше ніж 3...5%, то розрахунок продовжується:

$$P = p_{cp} l b.$$

Якщо не збігаються, розрахунок повторюють знову, задавшись іншою величиною дуги захвату.

### 6.3 Напрямок рівнодіючої сил під час прокатки

Розглянемо випадок прокатки, коли на смугу не діють будь-які сили, крім сил докладання від валків, рух смуги при вході у валки та виході з них рівнополярний, обидва валка приводні і одного діаметра, мають однакові окружні швидкості, а матеріал прокату за механічними властивостями однорідний. Цей випадок називають простим процесом прокатки. Елементарні сили, прикладені до смуги від валка, можна подати у вигляді 3-х рівнодіючих (рисунок 6.6).

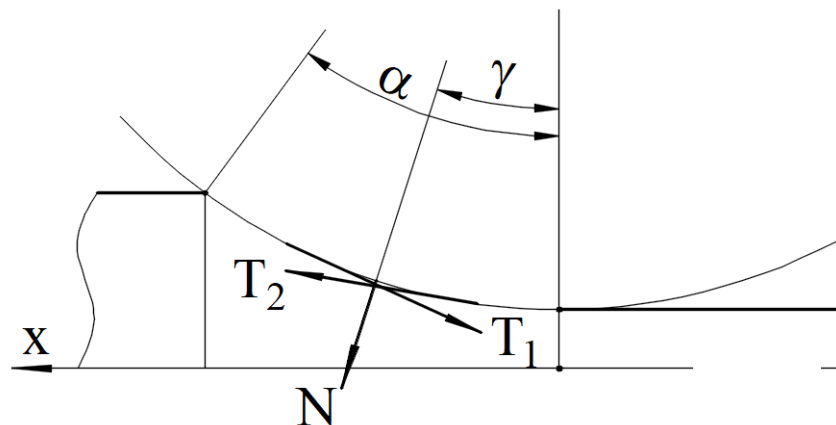


Рисунок 6.6 – Розрахункова схема для визначення сил, що прикладені до смуги від валку

Якщо знехтувати силами інерції, то очевидно, що 6 сил, що діють на метал, що прокочується від верхнього і нижнього валка повинні врівноважуватися, тобто, їх геометрична сума повинна дорівнювати «0». Це можливо, коли  $P_1 = P_2$  та спрямовані назустріч один одному. При цьому  $AC = BD$  (рисунок 6.7).

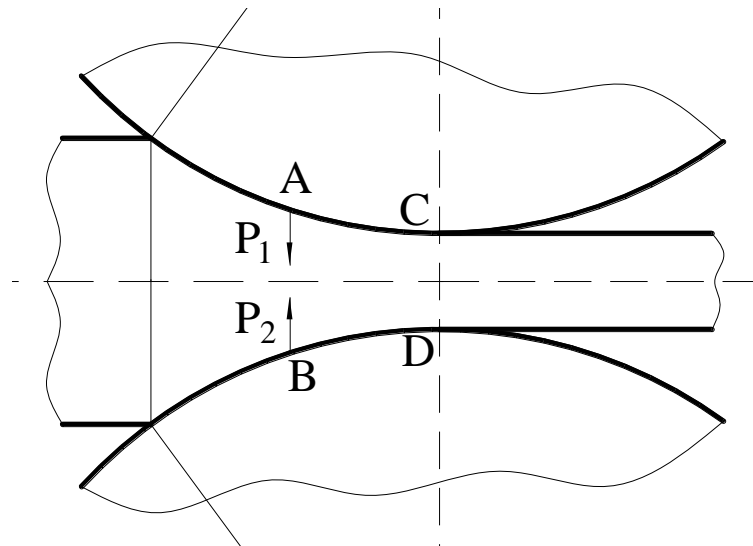


Рисунок 6.7 – Розрахункова схема для визначення рівнодіючої сили прокатки

Звідси можна дійти невтішного висновку, що рівнодіюча тиску валка на метал, включаючи сили тертя, має бути спрямована паралельно лінії, що з'єднують центри валків, тобто, вертикально.

Насправді, проте, який завжди дотримується комплекс умов, відповідних випадку простого процесу прокатки. Можливі такі варіанти:

1 На метал, що прокочується, крім сил, прикладених від валків, діють ще інші поздовжні сили (передній і задній натяг, сили інерції). Тут можливі три випадки:

$$T_0 > T_1; T_0 < T_1; T_0 = T_1.$$

При  $T_0 > T_1$ , рівнодіюча  $P$  відхиляється у бік виходу з осередку деформації (рисунок 6.8).

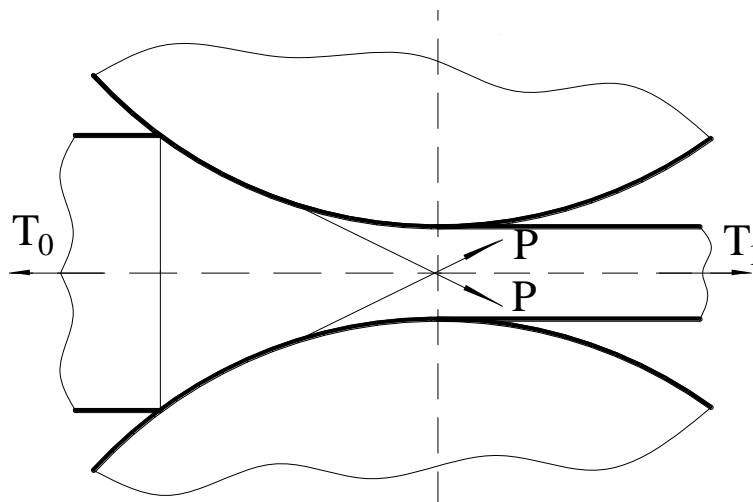


Рисунок 6.8 – Розрахункова схема для визначення рівнодіючої при наявності заднього натягіння

При  $T_0 < T_1$  рівнодіюча  $P$  відхиляється у бік входу в осередок деформації, а при  $T_0 = T_1$  сила  $P$  залишається вертикальною (рисунок 6.9).

2 Прокатка з одним приводним валком (тонколистові стани дуо)

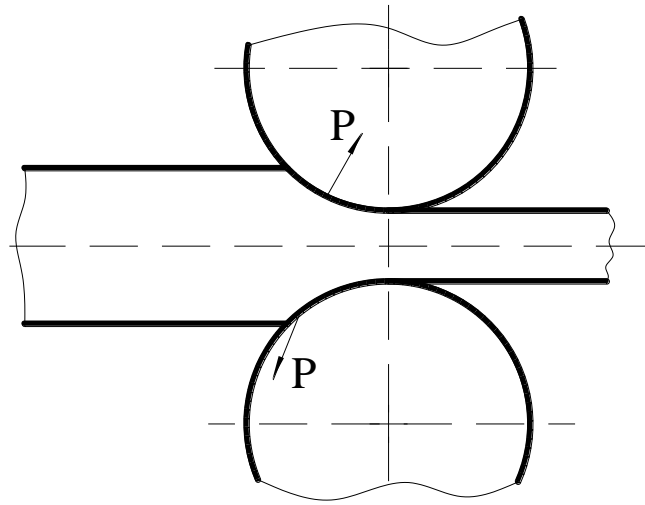


Рисунок 6.9 – Розрахункова схема для визначення рівнодіючої сили прокатки при одному приводному валку

Якщо знехтувати силами тертя в підшипниках холостого валка, то рівнодіючі зусилля металю на цьому валку повинна проходити через його вісь.

Оскільки дія дорівнює протидії, то зусилля на нижньому валку дорівнює зусиллю на верхньому, лежить на одній прямій з останнім, але спрямоване в протилежний бік.

3 Валки обертаються з різними окружними швидкостями (верхній та нижній тиск).

4 Різні діаметри валків

5 Метал, що прокочується за механічними властивостями неоднорідний (прокатка біметалу, нерівномірно нагрітого металю).

6 Різні коефіцієнти тертя на контакті прокату з робочими валками.

7 Різні ширини верхньої і нижньої частин смуги, що прокочується.

У всіх перерахованих і подібних випадках рівнодіючий тиск металю на валки спрямована не вертикально, крім того у випадках 2 ... 7 з'являється нерівність моментів, необхідних для обертання кожного валка.

#### 6.4 Момент при прокатуванні на гладкій бочці

Момент  $M_{дв}$  на валу двигуна прокатного стану можна подати у вигляді суми чотирьох складових:

$$M_{дв} = M_{пр} + M_{тр} + M_{хх} + M_{дин}.$$

$M_{тр}$  не включає момент  $M_{хх}$ , тому, що в процесі розрахунку зручніше ці складові обчислити окремо.

Для простого випадку прокатки

$$M_{тр} = 2Pa = 2P\psi l,$$

де  $\psi = \frac{a}{l}$  - коефіцієнт положення рівнодіючого тиску металу на валки (рисунок 6.10).

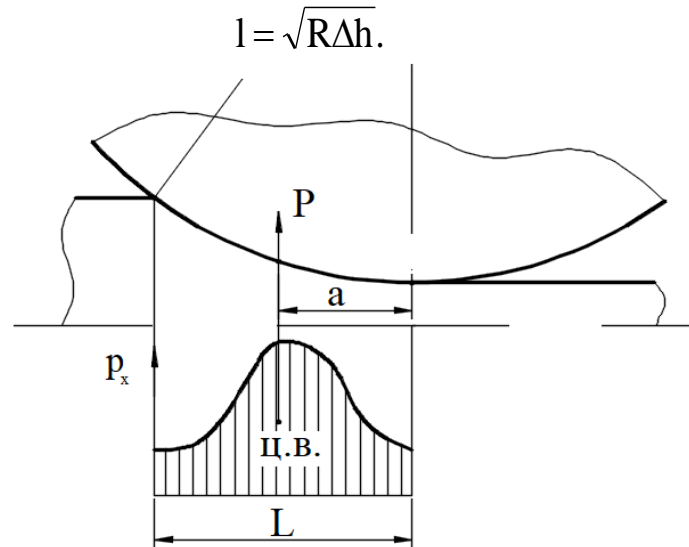


Рисунок 6.10 – Розрахункова схема для визначення плеча  $a$  сили прокатки (ц.в. – центр ваги епюри нормальних контактних напружень)

Точка прикладання рівнодіючої буде перебувати на вертикалі, що проходить через центр ваги енергетичних питомих тисків. Для визначення коефіцієнта плеча потрібно знати положення ц.в. питомих тисків на контактній поверхні (рисунок 6.11):

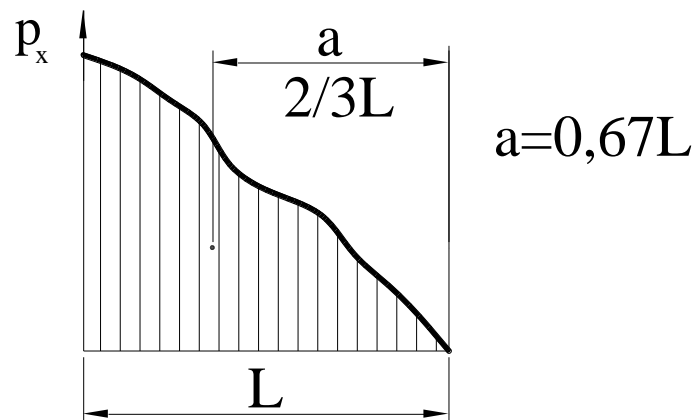


Рисунок 6.11 – Визначення центру ваги епюри нормальних контактних напружень



$$\psi = 0,2 \dots 0,7.$$

При гарячій прокатці смуг, коли  $\frac{1}{h_{cp}} < 1$ .

При гарячій прокатці товстих смуг, коли  $\frac{1}{h_{cp}} < 2 \dots 2,5$ ;  $\psi = 0,5 \dots 0,7$ .

У разі холодної прокатки зі змащенням

$$\psi = 0,2 \dots 0,5.$$

При  $\frac{1}{h_{cp}} < 1$ ,  $\psi$  не залежить від умов тертя на контакті і кута захвату.

При  $\frac{1}{h_{cp}} > 1$ ,  $\psi$  зменшується зі зростанням кута захвату і збільшується зі зростанням коефіцієнта тертя.

Коефіцієнт положення рівнодіючої  $\psi$  можна визначити як експериментально, так і теоретично, використовуючи отримані залежності для визначення контактного напруження в осередку деформації.  $M_{тр}$  являє собою суму моменту, необхідного для подолання сил тертя в підшипниках валків прокатного та моменту, необхідного для подолання сил тертя в передавальних механізмах стану:

$$M_{тр} = q\alpha \frac{f}{2},$$

де  $q$  – число валків.

Момент сил тертя в передавальному механізмі, наведених до валу двигуна:

$$M_{тр2} = \left(\frac{1}{\eta} - 1\right) \frac{M_{пр} + M_{тр1}}{i},$$

де  $\eta$  - к.к.д. передачі від двигуна до валків;

$i$  – передатне число від двигуна до валків;

$M_{тр1}$  – момент сил тертя в підшипниках валків, що наведені до останніх.

Загальний момент, що витрачається на подолання сил тертя, наведений до валу двигуна:

$$M_{\text{тр}} = \frac{M_{\text{тр1}}}{i\eta} + \left(\frac{1}{\eta} - 1\right) \frac{M_{\text{пр}}}{i}$$

або

$$M_{\text{тр}} = \frac{M_{\text{тр1}}}{i} + M_{\text{тр2}}.$$

Сумарний момент холостого ходу, наведений до валу двигуна, потрібний для обертання  $n$  деталей:

$$M_{\text{х.х}} = \sum_1^n \frac{G_{\text{д}} f_{\text{д}}}{2i_{\text{д}}}.$$

Динамічний момент  $M_{\text{дин}}$  виникає при нерівномірному обертанні валків. Тому динамічний момент враховують при розрахунку реверсивних станів з режимом розгону і гальмування валків, що часто повторюються:

$$M_{\text{дин}} = I \frac{d\omega}{dt}, \quad \omega = \frac{\pi n}{30};$$

$$M_{\text{дин}} = I \frac{\pi}{30} \frac{dn}{dt}; \quad \frac{dn}{dt} = 80 \dots 120 \frac{\text{об/мин}}{\text{сек}};$$

$$I = \frac{GD_{\text{пр}}^2}{4q};$$

$$M_{\text{дин}} = \frac{GD_{\text{пр}}^2}{375} \frac{dn}{dt},$$

де  $D_{\text{пр}}$  – наведений діаметр інерції частин, що обертаються.

У разі прискорення  $M_{\text{дин}} > 0$ , а у разі гальмування  $M_{\text{дин}} < 0$ .

При обчисленні потужності приводу стану доводиться враховувати здатність двигуна до перевантаження, перевіряти його на нагрівання.

У разі прокатки складних профілів великі труднощі виникають як щодо контактної поверхні і повного тиску металу на валки, так і при визначенні моменту прокатки. В цьому випадку більш надійні результати одержують при підрахунку моменту за експериментальними даними про витрату енергії при прокатці.

## 7 ВИПЕРЕДЖЕННЯ ТА ВІДСТАВАННЯ ПРИ ПРОКАТЦІ І ВИЗНАЧАЮЧІ ЇХ ФАКТОРИ. НАЛАШТУВАННЯ ШВИДКОСТЕЙ ВАЛКІВ ПРИ БЕЗПЕРЕРВНІЙ ПРОКАТЦІ. УШИРЕННЯ ПРИ ПРОКАТЦІ І ВИЗНАЧАЮЧІ ЙОГО ФАКТОРИ

### 7.1 Вплив випередження та відставання на напружено-деформований стан

Швидкість поступального руху кінця смуги, що виходить із валків більше, ніж окружна швидкість валків (рисунок 7.1). Це явище отримало назву *випередження*. Швидкість заднього кінця смуги, менша за горизонтальну складову окружної частини валків. Це явище отримало назву *відставання*.

Випередження та відставання є результатами осадження смуги по висоті в процесі прокатки.

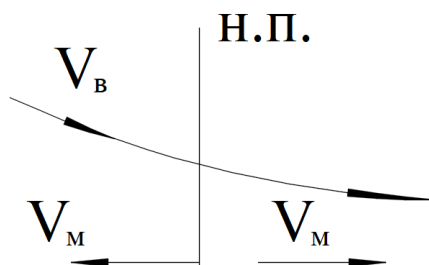


Рисунок 7.1 – Напрям дії швидкостей валку (індекс *v*) та прокату (індекс *m*)

Випередження та відставання при прокатці значною мірою визначають характер розподілу та величину контактних напружень, а також величину уширення при прокатці. Величини випередження та відставання необхідно визначати для налаштування безперервного стану, щоб уникнути надмірного натягу та утворення петель між клітьми стану:

$$S = \frac{V_1 - V_B}{V_B} = \frac{V_1}{V_B} - 1.$$

Випередження буває від 2 до 15%.

Насправді випередження визначають методам кернів (рисунок 7.2).

$$S = \frac{l_1 - l_B}{l_B},$$

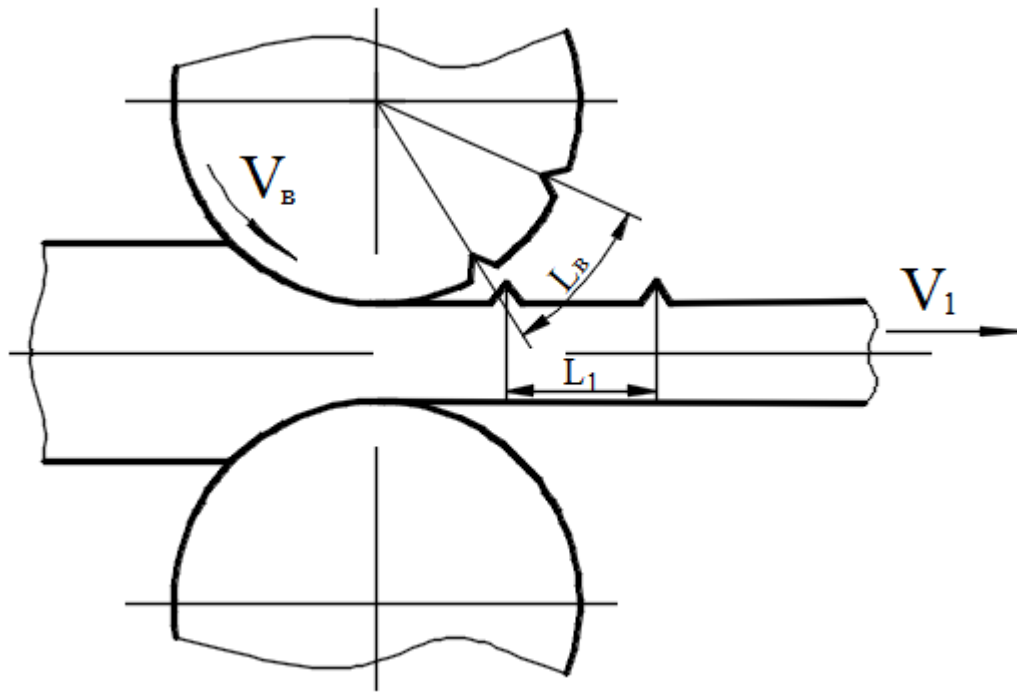


Рисунок 7.2 – Розрахункова схема методу кернів

Оскільки за час  $t$

$$l_B = V_B t; V_B = \frac{l_B}{t};$$

$$l_1 = V_1 t; V_1 = \frac{l_1}{t}.$$

При гарячій прокатці, коли відстань  $l_1$  вимірюють після охолодження металу, необхідно враховувати температурну усадку металу

$$l_1 = l_0 [1 + \alpha(t_1^0 - t_0^0)].$$

Теоретично випередження можна визначити залежно від положення нейтрального перерізу (рисунок 7.3). При двовимірній деформації з умови сталості секундного об'єму витікає:

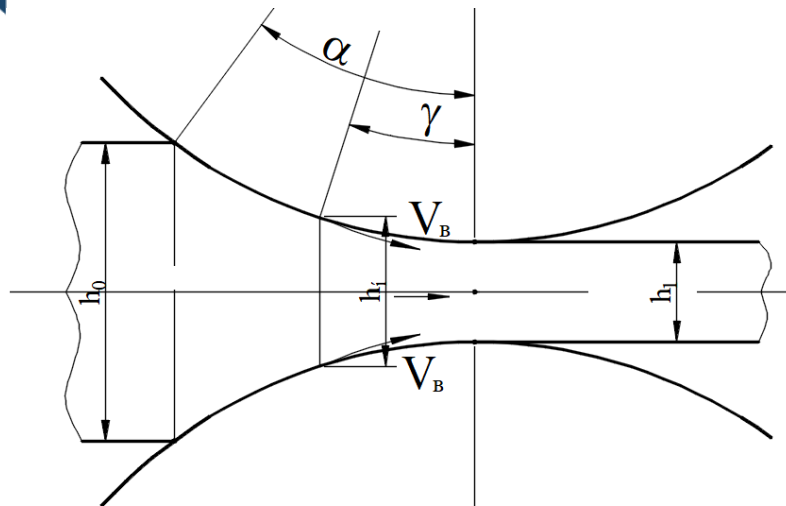


Рисунок 7.3 – Розрахункова схема для визначення випередження

$$h_H V_B \cos \gamma = h_1 V_1$$

або

$$\frac{V_1}{V_B} = \frac{h_H \cos \gamma}{h_1};$$

$$S = \frac{h_H \cos \gamma}{h_1} - 1,$$

Тому що

$$h_H = h_1 + 2R(1 - \cos \gamma),$$

то

$$S = \frac{h_1 + 2R(1 - \cos \gamma)}{h_1} \cos \gamma - 1;$$

$$1 - \cos \gamma = 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2};$$

$$S = \frac{h_1 + 2R 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{h_1} \cos \gamma - 1 =$$

$$= \cos \gamma - 1 + \frac{2R \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{h_1} \cos \gamma =$$

$$= -(1 - \cos \gamma) + \frac{2R \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{h_1} \cos \gamma =$$

$$= 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \left( \frac{2R}{h_1} \cos \gamma - 1 \right).$$

$$\cos \gamma \approx 1; \quad \sin^2 \frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma^2}{4}.$$

Отримуємо формулу Екелунда

$$S = 2 \frac{\gamma^2}{4} \left( \frac{2R}{h_1} - 1 \right);$$

$$S = \gamma^2 \left( \frac{R}{h_1} - 0,5 \right).$$

При прокатуванні тонких смуг  $R \gg h_1$ , тому величиною 0,5 можна знехтувати. Отримаємо:

$$S = \frac{R}{h_1} \gamma^2.$$

Це рівняння відомого як формула Дрездена.

Питання визначення випередження пов'язані з визначенням нейтрального кута.

1 Спосіб Целікова

У нейтральному перерізі питомий тиск у зоні випередження та відставання рівні між собою (рисунок 7.4):

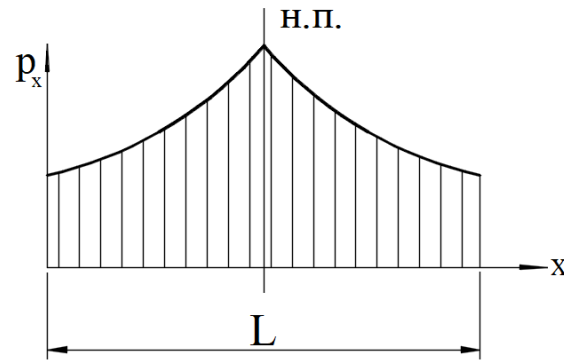


Рисунок 7.4 – Розрахункова схема для визначення нейтрального кута при прокатці

$$p_{x_{\text{випередження}}} = p_{x_{\text{відставання}}};$$

$$\sin \gamma = \frac{h_1}{\sqrt{R\Delta h}} \left( \frac{h_H}{l_H} - 1 \right) \approx \gamma;$$

$$\frac{h_H}{l_H} = \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + (\delta_0\delta - 1)(\delta_1\delta + 1)\left(\frac{h_0}{h_1}\right)^\delta}}{\xi_1\delta + 1} \right]^{\frac{1}{\delta}}.$$

## 2 Метод Фінка (рисунок 7.5)

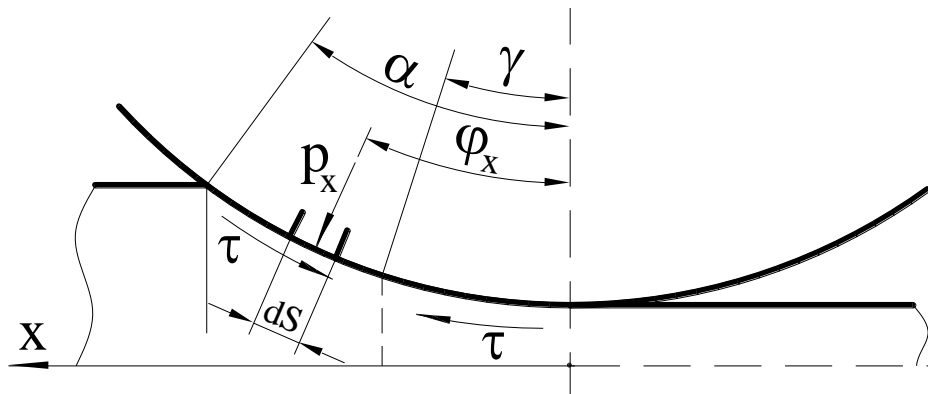


Рисунок 7.5 – Розрахункова схема до методу Фінка

Сумарне зусилля від сил, що діють на контактній поверхні забезпечує умову рівноваги смуги, що прокочується:

$$\Sigma X = 0; \quad dS = R d\varphi;$$

$$\int_0^{\alpha} P_x R d\varphi \sin \varphi + \int_0^{\gamma} \tau R d\varphi \cos \varphi - \int_0^{\alpha} \tau R d\varphi \cos \varphi = 0.$$

При вирішенні цього рівняння припускають, що питомий тиск за довжиною дуги захвату розподіляється рівномірно (рисунок 7.6).

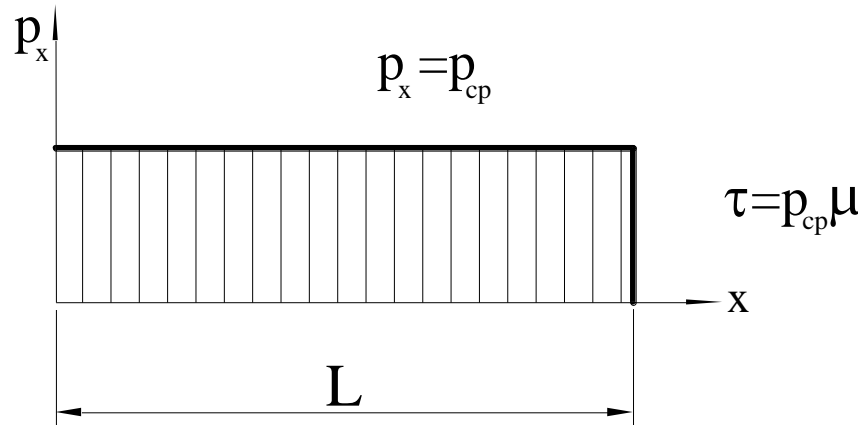


Рисунок 7.6 – Рівномірний розподіл питомого тиску за довжини осередку деформації (припущення методу)

$$\tau = p_{cp} \mu;$$

$$- p_{cp} R \cos \varphi \Big|_0^{\alpha} + p_{cp} \mu R \sin \varphi \Big|_0^{\gamma} - p_{cp} \mu R \sin \varphi \Big|_{\gamma}^{\alpha} = 0;$$

$$- \cos \alpha + 1 + \mu \sin \gamma - \mu \sin \alpha + \mu \sin \gamma = 0;$$

$$2\mu \sin \gamma = \mu \sin \alpha + \cos \alpha - 1;$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{2} + \frac{\cos \alpha - 1}{2\mu};$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{2} - \frac{1 - \cos \alpha}{2\mu}.$$

Для прокатки при малих значеннях коефіцієнта тертя  $\mu = 0,15 \dots 0,2$ . Ця формула дає хороші результати, а для прокатки товстих смуг, коли  $\frac{1}{h_{cp}} < 2$  ця формула дає великі похибки.



Зі зростанням кута захвату та  $\frac{1}{h}$  випередження зростає. Переднє на-  
тяжіння збільшує, а заднє – зменшує випередження.

Для безперервних клітей прокатного стану визначають константу  
для визначення необхідної швидкості обертання валків згідно закону ста-  
лості секундних об'ємів (рисунок 7.7):

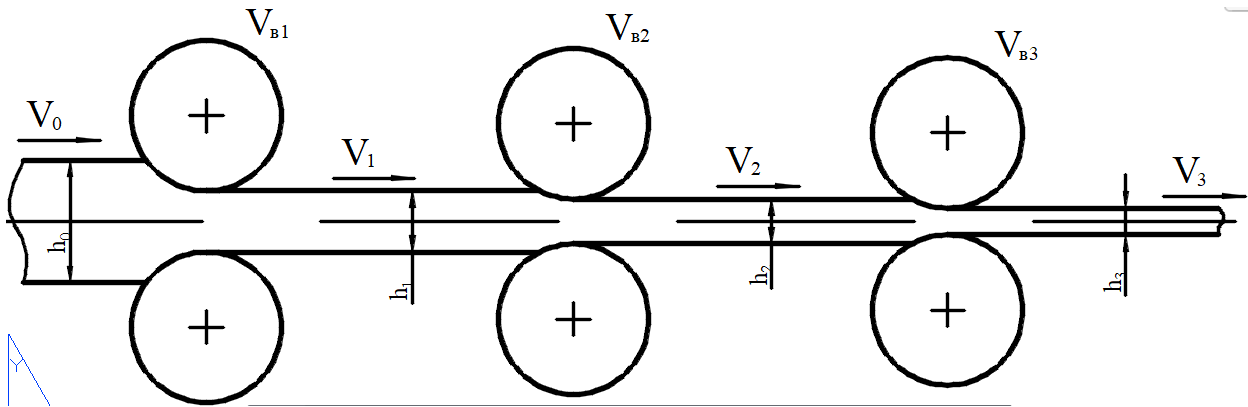


Рисунок 7.7 – Розрахункова схема для визначення випередження в  
безперервній групі клітей

$$C = V_0 F_0 = V_1 F_1 = V_2 F_2 = \dots = V_n F_n;$$

$$C = V_1 F_1 = V_{B1} F_1 (1 + S_1) = V_{B1} (1 + S_1) h_1 v_1;$$

$$V_{B1} = \frac{C}{h_1 v_1 (1 + S_1)}; \quad V_{B2} = \frac{C}{h_2 v_2 (1 + S_2)},$$

де  $C$  – постійна секундних об'ємів для налаштування.

## 7.2 Поширення при прокатці та фактори, що його визначають

Процес прокатки у випадку є об'ємною деформацією (метал тече у  
трьох напрямках). Ширина смуги при виході з валків  $v_1$  зазвичай завжди  
дещо більша за початкову ширину  $b_0$ , різниця їх дорівнює величині розши-  
рення

$$\Delta b = b_1 - b_0.$$

Поширення в загальному випадку є негативним явищем (знижує за-  
гальну витяжку, в кромках смуги виникають напруження розтягування). У  
той же час розширення використовують для кращого заповнення калібрів  
при прокатці фасонних профілів.

Зважаючи на закон найменшого опору, можна сказати, що в напрямку ширини деформується не весь об'єм металу в осередку деформації, а лише його частина, що розташована біля бічних країв смуги (рисунок 7.8).

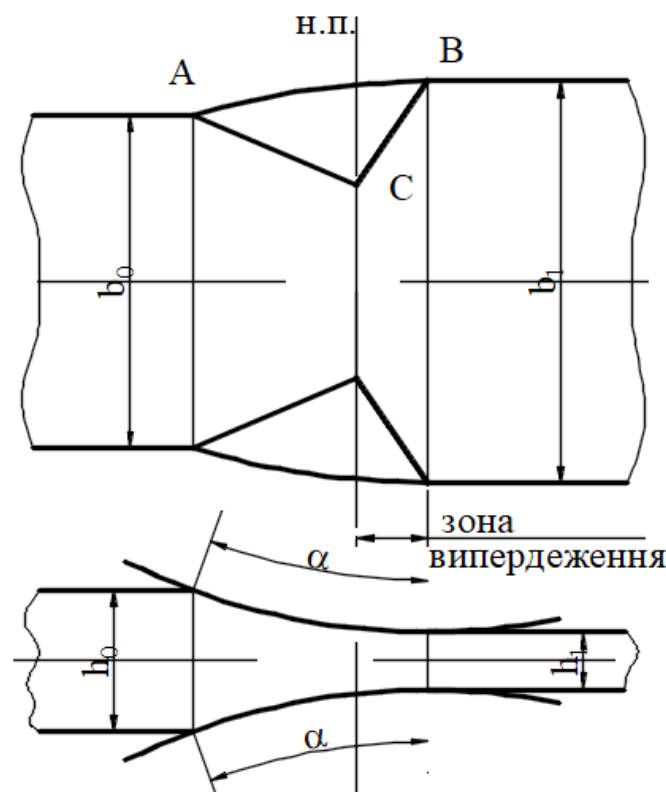


Рисунок 7.8 – Розрахункова схема для визначення розширення металу при прокатці

Зона, де метал деформується у трьох напрямках (ABC), називається зоною прагнення розширенню.

Залежно від об'єму цієї зони знаходиться величина розширення. Протяжність цієї зони, її межі визначаються умовами прокатки, до яких слід віднести, насамперед, ширину смуги, обтиснення, умову тертя, ковзання  $\frac{l}{h_{cp}}$ ,  $\frac{b_0}{l}$ , діаметр валків.

Теоретично питання визначення розширення найповніше було отримано Целіковим. Розглянувши умову рівноваги елементарних об'ємів у зоні прагнення до розширення в поздовжньому та поперечному напрямку, ним була отримана залежність, що дозволяє визначити розширення

$$\Delta b = 2C_b C_\sigma \left( \sqrt{R\Delta h} - \frac{\Delta h}{2\mu} \right) \left[ \left( \frac{h_1}{\Delta h} \right)^2 \ln \frac{h_0}{h_1} - \frac{h_1}{\Delta h} + \frac{1}{2} \right],$$

де  $C_b$  і  $C_\sigma$  - коефіцієнти, що враховують вплив ширини та натягнення смуги (рисунок 7.9).

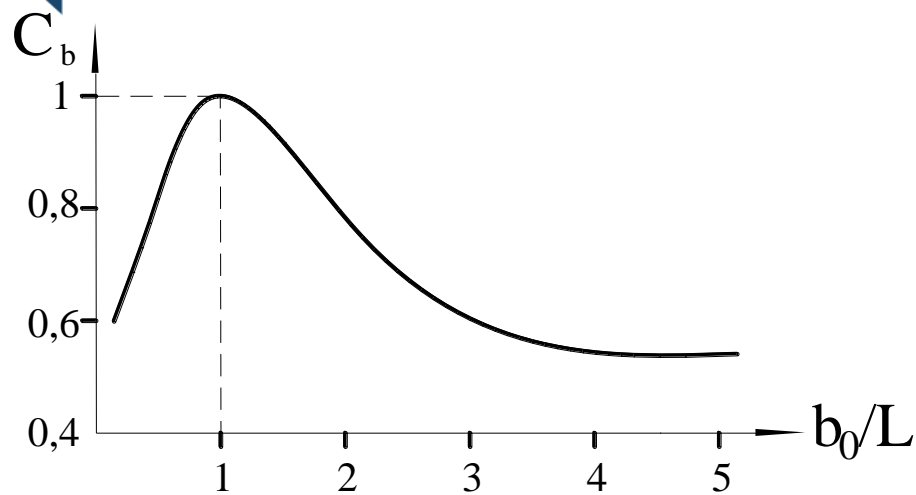


Рисунок 7.9 – Розподіл коефіцієнту впливу ширини смуги на розширення прокату від параметру  $b_0/L$

При  $\frac{b_0}{l} \geq 5$  ширини не має жодного впливу (експоненційна крива).

Максимальне значення розширення має місце при  $\frac{b_0}{l} = 1$  (рисунок 7.10). Це пов'язано з тим, що зона прагнення розширення проникає на всю ширину смуги. У цьому випадку, якщо ширина смуги, що прокатується, стає більше довжини дуги захвату, то тоді починають вступати в дію поздовжні напруження розтягування, що виникають по кромках смуги. Ці напруження знижують розширення доти, доки не перестануть зростати (до  $\frac{b_0}{l} = 5$ ).

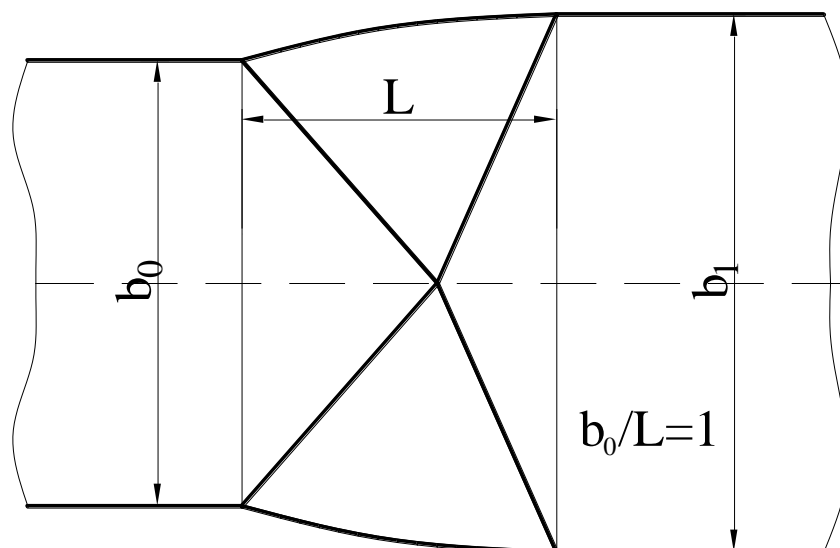


Рисунок 7.10 – Поля зон розширення металу

Слід зазначити, що уширення в основному відбувається в зоні відставання, а величина його залежить від довжини зони випередження.

На величину розширення впливає задній натяг. Зі зростанням заднього натягу розширення зменшується. Передній натяг має слабкий вплив на уширення, оскільки уширення в основному відбувається в зоні відставання.

Приклавши задній натяг, ми вирівнюємо швидкості периферійних шарів із серединними (рисунок 7.11).

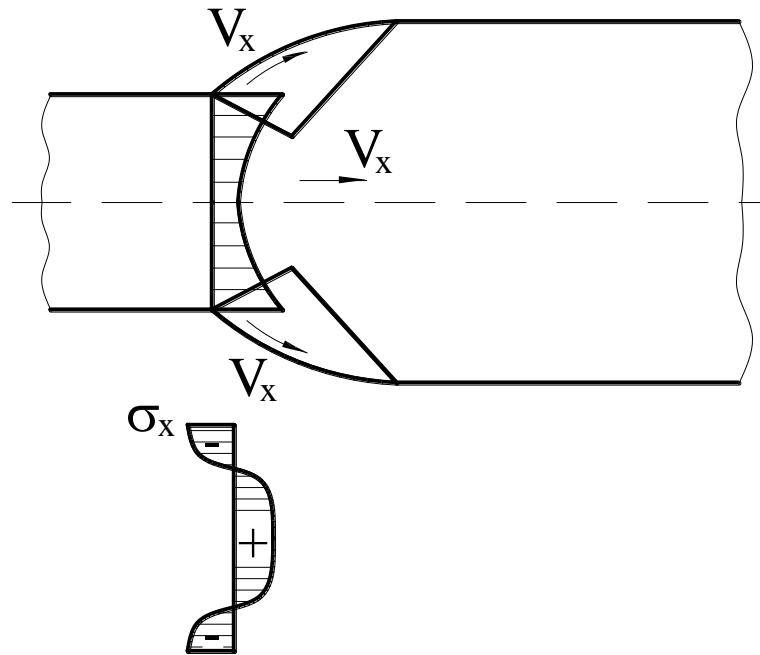


Рисунок 7.11 – Вплив заднього натягіння на розширення металу

На уширення дуже впливають зовнішні зони. За наявності обох зон уширення зменшується. Це пояснюється тим, що зовнішні зони вирівнюють швидкості центральних та периферійних шарів (рисунок 7.12).

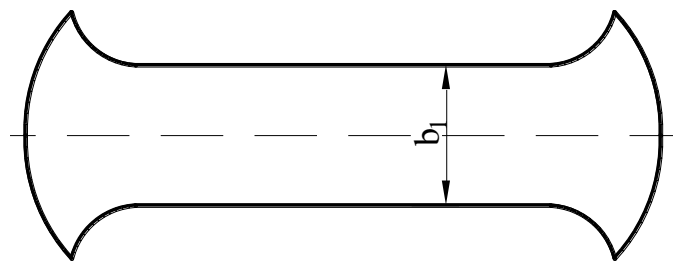


Рисунок 7.12- Вплив зовнішніх зон на розширення металу

Формулу Целікова з метою оцінки уширення нині можна визнати найточнішою і найсучаснішою. Крім цієї формули, виведеної теоретично, існує велика кількість інших, переважно емпіричних, отриманих з грубими припущеннями.



1. Розширення пропорційно не всій довжині дуги захвату, а лише зоні випередження

$$\Delta b = 1,15 \frac{\Delta h}{2h_0} \left( \sqrt{R\Delta h} - \frac{\Delta h}{2\mu} \right) - \text{формула Бахтінова.}$$

2. Поширення пропорційне довжині дуги захвату та обтисканню

$$\Delta b = C_{\Pi} \frac{\Delta h}{h_1} \sqrt{R\Delta h} - \text{формула Петрова,}$$

де С – постійний коефіцієнт.



## Література

1. Ніколаєв В. О., Мазур В. Л. Технологія виробництва сортового та листового прокату : підручник. Частина ІІю Запоріжжя : ЗДІА, 2000. 220 с.
2. Грибков Е. П. Основи автоматизованого проектування технологічного обладнання. Лабораторний практикум : посібник. Краматорськ : ДДМА, 2021. 67 с.
3. Zhao J., Jiang Z. Rolling of Advanced High Strength Steels: Theory, Simulation and Practice. Taylor & Francis, 2021. 644 p.
4. Ginzburg V. B. Metallurgical Design of Flat Rolled Steels. Taylor & Francis, 2019. 726 p.
5. Mazur V. L., Nogovitsyn O. V. Theory and Technology of Sheet Rolling. Numerical Analysis and Applications. CRC Press, 2020. 494 p.
6. Gupta N. K. Steel Rolling: Principle, Process & Application. CRC Press, 2021. 526 p.
7. Cavaliere P. Clean Ironmaking and Steelmaking Processes. Efficient Technologies for Greenhouse Emissions Abatement. Springer, 2019. 596 p.



*Навчально-методичне видання*

**Едуард Петрович Грибков  
Володимир Валентинович Кухар**

**ТЕОРІЯ ПРОКАТКИ:  
методичні рекомендації до вивчення розділу «Основи теорії  
обробки металів тиском» з дисципліни «Прокатне виробництво у  
чорній металургії» за освітньо-професійною програмою першого  
(бакалаврського) рівня «Металургія чорних металів»  
спеціальності 136 Металургія**

Самостійне електронне мережеве видання

Публікується в авторській редакції