

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

до виконання індивідуальних завдань
з основ дискретної математики, векторної та
лінійної алгебри, диференціального числення
функції однієї та багатьох змінних

Запоріжжя 2024



УДК 519.6:311.2(072)
М54

Рекомендовано Науково-методичною радою
ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»
(протокол № 1 від 27.09.2024 р.)

Укладачі

Грудкіна Н.С., д-р техн. наук, доцент,
Кайдан Н.В., канд. фіз-мат. наук, доцент.

М54 Методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань з основ дискретної математики, векторної та лінійної алгебри, диференціального числення функції однієї та багатьох змінних (для студентів комп'ютерних та економічних спеціальностей усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти) / уклад.: Н. С. Грудкіна, Н. В. Кайдан. Запоріжжя : ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА». 2024. 41 с.

Методичні вказівки містять відомості щодо формування кейсу задач та критеріїв оцінювання індивідуальних завдань та приклади їх розв'язання з наведенням основних формул, етапів розв'язання та геометричної ілюстрації в обсязі, необхідному для виконання індивідуальних завдань за матеріалом з основ дискретної математики, векторної та лінійної алгебри, диференціального числення функції однієї та багатьох змінних. Матеріал навчального посібника має на меті підвищити якість виконання роботи, виробити навички розв'язання задач прикладного спрямування, в тому числі з використанням табличного процесора MS Excel та системи комп'ютерної математики Maple. Рекомендовано для студентів комп'ютерних та економічних спеціальностей усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти.

УДК 519.6:311.2(072)

© ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА», 2024



ЗМІСТ

ВСТУП	4
1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ	5
1.1 Відомості щодо формування кейсу задач та критеріїв оцінювання індивідуальних завдань	5
1.2 Кейс задач індивідуальних завдань	6
2 РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТУ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ	17
2.1 Приклад розв'язання завдання 1	17
2.2 Приклад розв'язання завдання 2	18
2.3 Приклад розв'язання завдання 3	19
2.4 Приклад розв'язання завдання 4	19
2.5 Приклад розв'язання завдання 5	22
2.6 Приклад розв'язання завдання 6	22
2.7 Приклад розв'язання завдання 7	26
2.8 Приклад розв'язання завдання 8	27
2.9 Приклад розв'язання завдання 9	28
2.10 Приклад розв'язання завдання 10	29
2.11 Приклад розв'язання завдання 11	29
2.12 Приклад розв'язання завдання 12	30
2.13 Приклад розв'язання завдання 13	33
2.14 Приклад розв'язання завдання 14	36
2.15 Приклад розв'язання завдання 15	37
ЛІТЕРАТУРА	39



ВСТУП

Освітні компоненти «Математика для комп'ютерних наук та програмування», «Вища та дискретна математика» є базовими курсами, які належать до циклу математичної, природничо-наукової підготовки та присвячені формуванню у студентів комп'ютерних та економічних спеціальностей здатності застосовувати основні теоретичні знання та методи при розв'язування математично формалізованих задач, аналізу і моделювання пристроїв, процесів і явищ, пошуків оптимальних рішень, що є необхідним підґрунтям вирішення складних спеціалізованих задач та практичних проблем під час професійної діяльності. Особливістю побудови даних курсів є фокус на прикладну направленість математичної підготовки із використанням комп'ютерно-інформаційних технологій та пакетів математичних прикладних програм для глибокого розуміння та критичного осмислення теорій, принципів, методів і понять у сфері професійної діяльності.

В рамках освоєння дисциплін «Математика для комп'ютерних наук та програмування» та «Вища та дискретна математика» студентам пропонується виконати індивідуальні завдання з основ дискретної математики, векторної та лінійної алгебри, диференціального числення функції однієї та багатьох змінних, в тому числі до розв'язування прикладних задач за темами відповідних змістовних модулів. Представлені методичні рекомендації містять відомості щодо формування кейсу задач та критеріїв оцінювання індивідуальних завдань та приклади їх розв'язання з наведенням основних формул, етапів розв'язання та геометричної ілюстрації в обсязі, необхідному для виконання індивідуальних завдань, в тому числі з використанням табличного процесора MS Excel та системи комп'ютерної математики Maple.



1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1.1 Відомості щодо формування кейсу задач та критеріїв оцінювання індивідуальних завдань

Під час виконання індивідуальних завдань кожен студент отримає однаковий за кількістю та змістовністю кейс задач згідно варіанту, який визначається його порядковим номером в списку академічної групи та пропонується викладачем в рамках відповідного освітнього компонента та змістовного модуля. Заохочується використання табличного процесора MS Excel та системи комп'ютерної математики Maple, в тому числі під час розв'язання задач прикладного спрямування як у вигляді інструменту спрощення розрахунків чи побудови графіків, так і для створення модуля автоматизованого розрахунку формалізованої задачі.

Індивідуальні завдання виконуються самостійно у зручний для студента час в межах терміну подачі роботи, передбачених у розділі «Розподіл балів за контрольними точками та графік їх виконання» та розміщується у відповідному розділі на платформі Moodle. Розв'язання завантажується у вигляді файлу з розширенням .docx або .pdf, або .jpg, або .png, або .txt (за наявності розробленого розрахункового модуля у MS Excel та/або у системі комп'ютерної математики Maple у форматах .xls, .xlsx, .mw завантажується додатково).

Максимальна кількість балів вказується за кожне окреме завдання та визначається в залежності від обґрунтування ходу розв'язання, рівня формалізації задачі, правильності отриманого розв'язку та аналізу результату, необхідності геометричної інтерпретації та/або побажання використовувати можливості MS Excel та/або системи комп'ютерної математики Maple.

Використання штучного інтелекту (ШІ) не забороняється, оскільки пропозиції відомих застосунків ШІ суттєво залежать від обміркованої постановки питання і уточнюючих питань; однак в разі, якщо відповідь, отримана з використанням ШІ, містить суттєві похибки або не є комплексною, або не відповідає за усталеним оформленням, термінологією, або іншим вимогам до завдання, то оцінка за виконання знижується.

Перевірка індивідуального завдання виконується протягом тижня після завершення терміну подачі роботи. За бажанням студента при наявності похибок або виконання індивідуального завдання не в повному обсязі допускається доопрацювання до передостаннього тижня навчання.

1.2 Кейс задач індивідуальних завдань

Завдання 1. Нехай $U = \{1, \dots, 10\}$ – універсальна множина, $A = \{1, 3, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 9\}$, $C = \{2, 5, 6, 8\}$, $D = \{1, 3, 7, 9, 10\}$. Визначити, з яких елементів складається задана множина F :

1. $F = ((A \cup B) - \bar{D}) \cap (A - \bar{C})$.
2. $F = (A - \bar{B}) \cap (D \cup \bar{C})$.
3. $F = (\overline{(A \cup C)} \cup \overline{(A \cup B)}) - D$.
4. $F = (D \oplus B) \cup (\bar{A} \cap \bar{C})$.
5. $F = ((\bar{A} \cup C) \cap (B - \bar{C})) \cap \bar{D}$.
6. $F = (\bar{B} - A) \cap (D \cup \bar{C})$.
7. $F = ((\bar{B} - C) - (D \cup \bar{C})) \cap A$.
8. $F = ((B \oplus D) - \bar{A}) \cup \overline{(B \cup C)}$.
9. $F = ((B - C) \cap (D \cup C)) \cap A$.
10. $F = ((B \cap D) - \bar{A}) \cup \overline{(B \cup C)}$.
11. $F = ((A \oplus B) - \bar{D}) \cap (A - \bar{C})$.
12. $F = (A \cup \bar{B}) - (D \cup \bar{C})$.
13. $F = (\overline{(A \cup C)} \cap \overline{(A \cup B)}) - D$.
14. $F = (D \oplus B) \cap (\bar{A} \cap \bar{C})$.
15. $F = ((\bar{A} \cup C) - (B - \bar{C})) \cap \bar{D}$.
16. $F = (\bar{B} - A) \cap (D - \bar{C})$.
17. $F = ((\bar{B} - C) \cup (D \cup \bar{C})) \cap A$.
18. $F = ((B \oplus D) \cap \bar{A}) \cup \overline{(B \cup C)}$.
19. $F = ((B - C) \cap (D \oplus C)) \cap A$.
20. $F = ((B \cap D) - \bar{A}) \cup \overline{(B - C)}$.

Завдання 2. Нехай задано множини $M = \{a, b, c, d\}$,

$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $K = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ та відношення між M та N :

$f_1 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 3), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (d, 3)\}$;

$f_2 = \{(b, 3), (b, 4), (c, 1), (c, 4), (d, 1), (d, 4), (d, 5)\}$;

$f_3 = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (c, 5), (d, 1), (d, 2), (d, 5)\}$,

а також відношення між N та K :

$g_1 = \{(1, \beta), (1, \gamma), (2, \alpha), (2, \gamma), (3, \alpha), (5, \alpha), (5, \beta)\}$;

$g_2 = \{(1, \alpha), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \beta), (4, \alpha), (4, \gamma)\}$;

$g_3 = \{(1, \beta), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \beta), (4, \beta), (4, \gamma), (5, \beta)\}$.

Визначити відношення:

1. $f_1 \circ (g_2 \circ g_1^{-1})$.
2. $f_1 \circ (g_1 \circ g_3^{-1})$.
3. $f_3 \circ (g_1 \circ g_3^{-1})$.
4. $f_3 \circ (g_3 \circ g_1^{-1})$.

$$5. f_2 \circ (g_2 \circ g_3^{-1}).$$

$$7. f_2 \circ (g_3 \circ g_2^{-1}).$$

$$9. f_2 \circ (g_2 \circ g_1^{-1}).$$

$$11. f_3 \circ (g_1 \circ g_2^{-1}).$$

$$13. f_2 \circ (g_1 \circ g_3^{-1}).$$

$$15. f_3 \circ (g_1 \circ g_2^{-1}).$$

$$17. f_2 \circ (g_2 \circ g_1^{-1}).$$

$$19. f_2 \circ (g_1 \circ g_3^{-1}).$$

$$6. f_1 \circ (g_3 \circ g_2^{-1}).$$

$$8. f_2 \circ (g_2 \circ g_1^{-1}).$$

$$10. f_3 \circ (g_1 \circ g_3^{-1}).$$

$$12. f_2 \circ (g_3 \circ g_1^{-1}).$$

$$14. f_1 \circ (g_3 \circ g_1^{-1}).$$

$$16. f_2 \circ (g_2 \circ g_3^{-1}).$$

$$18. f_1 \circ (g_2 \circ g_3^{-1}).$$

$$20. f_3 \circ (g_3 \circ g_2^{-1}).$$

Завдання 3. Побудувати ДНФ та КНФ формули користуючись рівносильностями алгебри висловлень:

$$1. (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow \bar{C})$$

$$3. (AB \Rightarrow C) \Rightarrow (\bar{B} \Rightarrow C)$$

$$5. (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow AC$$

$$7. ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow \bar{B}$$

$$9. (AB \Leftrightarrow \bar{B} \vee C) \Rightarrow \bar{A}$$

$$11. (A \Rightarrow B\bar{C}) \Leftrightarrow (\bar{A} \vee B)$$

$$13. ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow \bar{B}$$

$$15. (A \Leftrightarrow B) \Rightarrow AC$$

$$17. (AB \Rightarrow \bar{C}) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow C)$$

$$19. (AC \Leftrightarrow \bar{B} \vee A)(A \vee C)$$

$$2. (\bar{A} \Rightarrow B)C \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$$

$$4. \overline{(A \Leftrightarrow B)}(AC \vee \bar{B})$$

$$6. (AB \Rightarrow \bar{C}) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow C)$$

$$8. ((A \Rightarrow \bar{C}) \Leftrightarrow \bar{B}) \Rightarrow \bar{A}C$$

$$10. (AC \Leftrightarrow \bar{B} \vee A)(A \vee C)$$

$$12. \overline{(A \Rightarrow \bar{C})} \Leftrightarrow (B \Rightarrow A)$$

$$14. \overline{(A \Leftrightarrow B)}(AC \vee \bar{B})$$

$$16. ((A \Rightarrow \bar{C}) \Leftrightarrow \bar{B}) \Rightarrow \bar{A}C$$

$$18. ((A \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow \bar{B}$$

$$20. (A \Rightarrow B\bar{C}) \Leftrightarrow (\bar{A} \vee B)$$

Завдання 4. У зваженому графі $G = (V, E)$, множина вершин $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, а множина ребер E задана матрицею ваг. За допомогою алгоритму Дейкстри побудувати остове дерево найкоротших шляхів із вершини 1 до всіх інших вершин графа G та знайти найкоротші відстані:



1.

$$E = \begin{pmatrix} - & 12 & 12 & - & 10 & 13 & - & 5 & 14 & 14 & 16 & 7 \\ 12 & - & 2 & 6 & 2 & 3 & 3 & 7 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 12 & 2 & - & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 1 & 6 & 5 & - \\ - & 6 & 4 & - & 2 & 5 & 4 & 2 & 3 & 8 & - & 1 \\ 10 & 2 & 3 & 2 & - & 4 & 2 & 5 & - & 6 & - & 1 \\ 13 & 3 & 2 & 5 & 4 & - & 2 & 8 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ - & 3 & 1 & 4 & 2 & 2 & - & 8 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 7 & 2 & 5 & 8 & 8 & - & 8 & 10 & 10 & 5 \\ 14 & 2 & 1 & 3 & - & 2 & 3 & 8 & - & 4 & 5 & 6 \\ 14 & 3 & 6 & 8 & 6 & 3 & 5 & 10 & 4 & - & 1 & 7 \\ 16 & 4 & 5 & - & - & 2 & 5 & 10 & 5 & 1 & - & 7 \\ 7 & 4 & - & 1 & 1 & 5 & 2 & 5 & 6 & 7 & 7 & - \end{pmatrix}$$

2.

$$E = \begin{pmatrix} - & 10 & 12 & 5 & 12 & - & 14 & - & 7 & 15 & 15 & 13 \\ 10 & - & 1 & 6 & 2 & 3 & - & 8 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 12 & 1 & - & 5 & 3 & 5 & 2 & 9 & 1 & 2 & - & 3 \\ 5 & 6 & 5 & - & - & 8 & 6 & 10 & 5 & 7 & 8 & 8 \\ 12 & 2 & 3 & - & - & 4 & 2 & 7 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ - & 3 & 5 & 8 & 4 & - & 2 & 5 & 5 & 3 & 3 & 1 \\ 14 & - & 2 & 6 & 2 & 2 & - & - & 5 & 1 & 2 & 4 \\ - & 8 & 9 & 10 & 7 & 5 & - & - & 8 & 6 & 7 & 3 \\ 7 & 1 & 1 & 5 & 2 & 5 & 5 & 8 & - & 4 & 6 & 5 \\ 15 & 4 & 2 & 7 & 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & - & 1 & 3 \\ 15 & 2 & - & 8 & 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 1 & - & 2 \\ 13 & 4 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 & 3 & 5 & 3 & 2 & - \end{pmatrix}$$

3.

$$E = \begin{pmatrix} - & 17 & 13 & 12 & 11 & - & 12 & 17 & 8 & 15 & - & 13 \\ 17 & - & 8 & 7 & 5 & 2 & 6 & 1 & 10 & 2 & 1 & 6 \\ 13 & 8 & - & 4 & 3 & - & 3 & 7 & 1 & 5 & 8 & 5 \\ 12 & 7 & 4 & - & 4 & 9 & 1 & 7 & 2 & 5 & 7 & 2 \\ 11 & 5 & 3 & 4 & - & 8 & 3 & - & 5 & 4 & 6 & 2 \\ - & 2 & - & 9 & 8 & - & 8 & 3 & - & 6 & 3 & 7 \\ 12 & 6 & 3 & 1 & 3 & 8 & - & 7 & 2 & 4 & 7 & 3 \\ 17 & 1 & 7 & 7 & - & 3 & 7 & - & 8 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 10 & 1 & 2 & 5 & - & 2 & 8 & - & 6 & - & 5 \\ 15 & 2 & 5 & 5 & 4 & 6 & 4 & 2 & 6 & - & 4 & 1 \\ - & 1 & 8 & 7 & 6 & 3 & 7 & 3 & - & 4 & - & 6 \\ 13 & 6 & 5 & 2 & 2 & 7 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & - \end{pmatrix}$$

4.

$$E = \begin{pmatrix} - & 13 & 12 & - & 13 & 8 & 12 & 7 & 9 & - & 10 & 14 \\ 13 & - & 5 & 5 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 & - \\ 12 & 5 & - & 7 & 4 & - & 4 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ - & 5 & 7 & - & 4 & 7 & 5 & 7 & 5 & 1 & 6 & 2 \\ 13 & 1 & 4 & 4 & - & 5 & 2 & - & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 8 & 3 & - & 7 & 5 & - & 4 & 2 & 3 & 6 & 4 & 3 \\ 12 & 1 & 4 & 5 & 2 & 4 & - & 3 & 3 & 5 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 1 & 7 & - & 2 & 3 & - & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 9 & 2 & 3 & 5 & 4 & 3 & 3 & 4 & - & 5 & 1 & 4 \\ - & 5 & 6 & 1 & 2 & 6 & 5 & 7 & 5 & - & - & 4 \\ 10 & 4 & 4 & 6 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & - & - & 5 \\ 14 & - & 5 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & - \end{pmatrix}$$

5.

$$E = \begin{pmatrix} - & 13 & 14 & 13 & 9 & 14 & 13 & - & 10 & 14 & 7 & 14 \\ 13 & - & 1 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 5 & 5 & 6 & 3 \\ 14 & 1 & - & 3 & 3 & 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 4 & 4 \\ 13 & 1 & 3 & - & 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & - & 4 & 3 \\ 9 & 4 & 3 & 2 & - & - & 4 & 3 & 2 & 7 & 3 & 6 \\ 14 & 3 & 2 & 2 & - & - & 2 & 1 & 5 & 5 & 6 & 3 \\ 13 & 1 & 1 & 3 & 4 & 2 & - & 3 & 3 & 5 & 6 & - \\ - & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 & - & 6 & - & 7 & 2 \\ 10 & 5 & 5 & 2 & 2 & 5 & 3 & 6 & - & 8 & 1 & 6 \\ 14 & 5 & 4 & - & 7 & 5 & 5 & - & 8 & - & - & 2 \\ 7 & 6 & 4 & 4 & 3 & 6 & 6 & 7 & 1 & - & - & 8 \\ 14 & 3 & 4 & 3 & 6 & 3 & - & 2 & 6 & 2 & 8 & - \end{pmatrix}$$

6.

$$E = \begin{pmatrix} - & 14 & 12 & 12 & 14 & - & 8 & 12 & 15 & 8 & 14 & - \\ 14 & - & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ 12 & 3 & - & 5 & 1 & 7 & 3 & 2 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 12 & 1 & 5 & - & 5 & 4 & 6 & 4 & - & 5 & 2 & 1 \\ 14 & 5 & 1 & 5 & - & 6 & 3 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ - & 4 & 7 & 4 & 6 & - & - & 6 & 3 & 7 & 5 & 2 \\ 8 & 6 & 3 & 6 & 3 & - & - & 2 & 7 & 1 & 5 & 5 \\ 12 & 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 2 & - & 4 & - & 3 & 4 \\ 15 & 2 & 6 & - & 5 & 3 & 7 & 4 & - & 5 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 1 & 5 & 4 & 7 & 1 & - & 5 & - & 5 & 5 \\ 14 & 3 & 2 & 2 & 3 & 5 & 5 & 3 & 4 & 5 & - & - \\ - & 1 & 5 & 1 & 2 & 2 & 5 & 4 & 3 & 5 & - & - \end{pmatrix}$$

7.

$$E = \begin{pmatrix} - & - & 12 & 10 & 6 & 11 & 10 & 7 & - & 8 & 12 & 11 \\ - & - & 1 & 6 & 6 & 4 & 5 & - & 3 & 6 & 4 & 3 \\ 12 & 1 & - & 5 & - & 4 & 6 & 6 & 3 & 6 & 4 & 4 \\ 10 & 6 & 5 & - & 4 & 3 & 1 & 2 & - & 1 & - & 3 \\ 6 & 6 & - & 4 & - & - & 3 & 2 & 7 & 1 & 6 & 5 \\ 11 & 4 & 4 & 3 & - & - & 3 & 2 & 2 & - & 1 & 3 \\ 10 & 5 & 6 & 1 & 3 & 3 & - & - & 5 & 1 & - & 4 \\ 7 & - & 6 & 2 & 2 & 2 & - & - & 6 & 1 & 5 & 4 \\ - & 3 & 3 & - & 7 & 2 & 5 & 6 & - & 5 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & 6 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 5 & - & - & 3 \\ 12 & 4 & 4 & - & 6 & 1 & - & 5 & 3 & - & - & 1 \\ 11 & 3 & 4 & 3 & 5 & 3 & 4 & 4 & 2 & 3 & 1 & - \end{pmatrix}$$

8.

$$E = \begin{pmatrix} - & 9 & 9 & 6 & 12 & - & 13 & 11 & - & 10 & 11 & 7 \\ 9 & - & 2 & 1 & 5 & 3 & - & 2 & 4 & - & 3 & 1 \\ 9 & 2 & - & 4 & - & 3 & 4 & - & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 4 & - & 5 & - & 6 & 4 & 4 & 4 & 3 & - \\ 12 & 5 & - & 5 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & - & 5 \\ - & 3 & 3 & - & 1 & - & 1 & 3 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 13 & - & 4 & 6 & 1 & 1 & - & 4 & 1 & 1 & 2 & - \\ 11 & 2 & - & 4 & 1 & 3 & 4 & - & 3 & 1 & - & 4 \\ - & 4 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & 3 & - & - & 2 & 4 \\ 10 & - & 2 & 4 & 3 & 3 & 1 & 1 & - & - & 1 & 2 \\ 11 & 3 & 3 & 3 & - & 4 & 2 & - & 2 & 1 & - & 3 \\ 7 & 1 & 1 & - & 5 & 5 & - & 4 & 4 & 2 & 3 & - \end{pmatrix}$$



9.

$$E = \begin{pmatrix} - & 12 & 12 & - & 10 & 13 & - & 5 & 14 & 14 & 16 & 7 \\ 12 & - & 2 & 6 & 2 & 3 & 3 & 7 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 12 & 2 & - & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 1 & 6 & 5 & - \\ - & 6 & 4 & - & 2 & 5 & 4 & 2 & 3 & 8 & - & 1 \\ 10 & 2 & 3 & 2 & - & 4 & 2 & 5 & - & 6 & - & 1 \\ 13 & 3 & 2 & 5 & 4 & - & 2 & 8 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ - & 3 & 1 & 4 & 2 & 2 & - & 8 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 7 & 2 & 5 & 8 & 8 & - & 8 & 10 & 10 & 5 \\ 14 & 2 & 1 & 3 & - & 2 & 3 & 8 & - & 4 & 5 & 6 \\ 14 & 3 & 6 & 8 & 6 & 3 & 5 & 10 & 4 & - & 1 & 7 \\ 16 & 4 & 5 & - & - & 2 & 5 & 10 & 5 & 1 & - & 7 \\ 7 & 4 & - & 1 & 1 & 5 & 2 & 5 & 6 & 7 & 7 & - \end{pmatrix}$$

10.

$$E = \begin{pmatrix} - & 10 & 12 & 5 & 12 & - & 14 & - & 7 & 15 & 15 & 13 \\ 10 & - & 1 & 6 & 2 & 3 & - & 8 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 12 & 1 & - & 5 & 3 & 5 & 2 & 9 & 1 & 2 & - & 3 \\ 5 & 6 & 5 & - & - & 8 & 6 & 10 & 5 & 7 & 8 & 8 \\ 12 & 2 & 3 & - & - & 4 & 2 & 7 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ - & 3 & 5 & 8 & 4 & - & 2 & 5 & 5 & 3 & 3 & 1 \\ 14 & - & 2 & 6 & 2 & 2 & - & - & 5 & 1 & 2 & 4 \\ - & 8 & 9 & 10 & 7 & 5 & - & - & 8 & 6 & 7 & 3 \\ 7 & 1 & 1 & 5 & 2 & 5 & 5 & 8 & - & 4 & 6 & 5 \\ 15 & 4 & 2 & 7 & 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & - & 1 & 3 \\ 15 & 2 & - & 8 & 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 1 & - & 2 \\ 13 & 4 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 & 3 & 5 & 3 & 2 & - \end{pmatrix}$$

11.

$$E = \begin{pmatrix} - & 13 & 12 & - & 13 & 8 & 12 & 7 & 9 & - & 10 & 14 \\ 13 & - & 5 & 5 & 1 & 3 & 1 & 3 & 2 & 5 & 4 & - \\ 12 & 5 & - & 7 & 4 & - & 4 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ - & 5 & 7 & - & 4 & 7 & 5 & 7 & 5 & 1 & 6 & 2 \\ 13 & 1 & 4 & 4 & - & 5 & 2 & - & 4 & 2 & 4 & 1 \\ 8 & 3 & - & 7 & 5 & - & 4 & 2 & 3 & 6 & 4 & 3 \\ 12 & 1 & 4 & 5 & 2 & 4 & - & 3 & 3 & 5 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 1 & 7 & - & 2 & 3 & - & 4 & 7 & 2 & 5 \\ 9 & 2 & 3 & 5 & 4 & 3 & 3 & 4 & - & 5 & 1 & 4 \\ - & 5 & 6 & 1 & 2 & 6 & 5 & 7 & 5 & - & - & 4 \\ 10 & 4 & 4 & 6 & 4 & 4 & 3 & 2 & 1 & - & - & 5 \\ 14 & - & 5 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 & - \end{pmatrix}$$

12.

$$E = \begin{pmatrix} - & 9 & 9 & 6 & 12 & - & 13 & 11 & - & 10 & 11 & 7 \\ 9 & - & 2 & 1 & 5 & 3 & - & 2 & 4 & - & 3 & 1 \\ 9 & 2 & - & 4 & - & 3 & 4 & - & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 4 & - & 5 & - & 6 & 4 & 4 & 4 & 3 & - \\ 12 & 5 & - & 5 & - & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & - & 5 \\ - & 3 & 3 & - & 1 & - & 1 & 3 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 13 & - & 4 & 6 & 1 & 1 & - & 4 & 1 & 1 & 2 & - \\ 11 & 2 & - & 4 & 1 & 3 & 4 & - & 3 & 1 & - & 4 \\ - & 4 & 4 & 4 & 1 & 1 & 1 & 3 & - & - & 2 & 4 \\ 10 & - & 2 & 4 & 3 & 3 & 1 & 1 & - & - & 1 & 2 \\ 11 & 3 & 3 & 3 & - & 4 & 2 & - & 2 & 1 & - & 3 \\ 7 & 1 & 1 & - & 5 & 5 & - & 4 & 4 & 2 & 3 & - \end{pmatrix}$$

13.

$$E = \begin{pmatrix} - & 13 & 14 & 13 & 9 & 14 & 13 & - & 10 & 14 & 7 & 14 \\ 13 & - & 1 & 1 & 4 & 3 & 1 & 2 & 5 & 5 & 6 & 3 \\ 14 & 1 & - & 3 & 3 & 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 4 & 4 \\ 13 & 1 & 3 & - & 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & - & 4 & 3 \\ 9 & 4 & 3 & 2 & - & - & 4 & 3 & 2 & 7 & 3 & 6 \\ 14 & 3 & 2 & 2 & - & - & 2 & 1 & 5 & 5 & 6 & 3 \\ 13 & 1 & 1 & 3 & 4 & 2 & - & 3 & 3 & 5 & 6 & - \\ - & 2 & 3 & 4 & 3 & 1 & 3 & - & 6 & - & 7 & 2 \\ 10 & 5 & 5 & 2 & 2 & 5 & 3 & 6 & - & 8 & 1 & 6 \\ 14 & 5 & 4 & - & 7 & 5 & 5 & - & 8 & - & - & 2 \\ 7 & 6 & 4 & 4 & 3 & 6 & 6 & 7 & 1 & - & - & 8 \\ 14 & 3 & 4 & 3 & 6 & 3 & - & 2 & 6 & 2 & 8 & - \end{pmatrix}$$

14.

$$E = \begin{pmatrix} - & 14 & 12 & 12 & 14 & - & 8 & 12 & 15 & 8 & 14 & - \\ 14 & - & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ 12 & 3 & - & 5 & 1 & 7 & 3 & 2 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 12 & 1 & 5 & - & 5 & 4 & 6 & 4 & - & 5 & 2 & 1 \\ 14 & 5 & 1 & 5 & - & 6 & 3 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ - & 4 & 7 & 4 & 6 & - & - & 6 & 3 & 7 & 5 & 2 \\ 8 & 6 & 3 & 6 & 3 & - & - & 2 & 7 & 1 & 5 & 5 \\ 12 & 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 2 & - & 4 & - & 3 & 4 \\ 15 & 2 & 6 & - & 5 & 3 & 7 & 4 & - & 5 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 1 & 5 & 4 & 7 & 1 & - & 5 & - & 5 & 5 \\ 14 & 3 & 2 & 2 & 3 & 5 & 5 & 3 & 4 & 5 & - & - \\ - & 1 & 5 & 1 & 2 & 2 & 5 & 4 & 3 & 5 & - & - \end{pmatrix}$$

15.

$$E = \begin{pmatrix} - & 17 & 13 & 12 & 11 & - & 12 & 17 & 8 & 15 & - & 13 \\ 17 & - & 8 & 7 & 5 & 2 & 6 & 1 & 10 & 2 & 1 & 6 \\ 13 & 8 & - & 4 & 3 & - & 3 & 7 & 1 & 5 & 8 & 5 \\ 12 & 7 & 4 & - & 4 & 9 & 1 & 7 & 2 & 5 & 7 & 2 \\ 11 & 5 & 3 & 4 & - & 8 & 3 & - & 5 & 4 & 6 & 2 \\ - & 2 & - & 9 & 8 & - & 8 & 3 & - & 6 & 3 & 7 \\ 12 & 6 & 3 & 1 & 3 & 8 & - & 7 & 2 & 4 & 7 & 3 \\ 17 & 1 & 7 & 7 & - & 3 & 7 & - & 8 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 10 & 1 & 2 & 5 & - & 2 & 8 & - & 6 & - & 5 \\ 15 & 2 & 5 & 5 & 4 & 6 & 4 & 2 & 6 & - & 4 & 1 \\ - & 1 & 8 & 7 & 6 & 3 & 7 & 3 & - & 4 & - & 6 \\ 13 & 6 & 5 & 2 & 2 & 7 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 & - \end{pmatrix}$$

16.

$$E = \begin{pmatrix} - & - & 12 & 10 & 6 & 11 & 10 & 7 & - & 8 & 12 & 11 \\ - & - & 1 & 6 & 6 & 4 & 5 & - & 3 & 6 & 4 & 3 \\ 12 & 1 & - & 5 & - & 4 & 6 & 6 & 3 & 6 & 4 & 4 \\ 10 & 6 & 5 & - & 4 & 3 & 1 & 2 & - & 1 & - & 3 \\ 6 & 6 & - & 4 & - & - & 3 & 2 & 7 & 1 & 6 & 5 \\ 11 & 4 & 4 & 3 & - & - & 3 & 2 & 2 & - & 1 & 3 \\ 10 & 5 & 6 & 1 & 3 & 3 & - & - & 5 & 1 & - & 4 \\ 7 & - & 6 & 2 & 2 & 2 & - & - & 6 & 1 & 5 & 4 \\ - & 3 & 3 & - & 7 & 2 & 5 & 6 & - & 5 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & 6 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 5 & - & - & 3 \\ 12 & 4 & 4 & - & 6 & 1 & - & 5 & 3 & - & - & 1 \\ 11 & 3 & 4 & 3 & 5 & 3 & 4 & 4 & 2 & 3 & 1 & - \end{pmatrix}$$



17.

$$E = \begin{pmatrix} - & 10 & 12 & 5 & 12 & - & 14 & - & 7 & 15 & 15 & 13 \\ 10 & - & 1 & 6 & 2 & 3 & - & 8 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 12 & 1 & - & 5 & 3 & 5 & 2 & 9 & 1 & 2 & - & 3 \\ 5 & 6 & 5 & - & - & 8 & 6 & 10 & 5 & 7 & 8 & 8 \\ 12 & 2 & 3 & - & - & 4 & 2 & 7 & 2 & 2 & 4 & 5 \\ - & 3 & 5 & 8 & 4 & - & 2 & 5 & 5 & 3 & 3 & 1 \\ 14 & - & 2 & 6 & 2 & 2 & - & - & 5 & 1 & 2 & 4 \\ - & 8 & 9 & 10 & 7 & 5 & - & - & 8 & 6 & 7 & 3 \\ 7 & 1 & 1 & 5 & 2 & 5 & 5 & 8 & - & 4 & 6 & 5 \\ 15 & 4 & 2 & 7 & 2 & 3 & 1 & 6 & 4 & - & 1 & 3 \\ 15 & 2 & - & 8 & 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 1 & - & 2 \\ 13 & 4 & 3 & 8 & 5 & 1 & 4 & 3 & 5 & 3 & 2 & - \end{pmatrix}$$

18.

$$E = \begin{pmatrix} - & 14 & 12 & 12 & 14 & - & 8 & 12 & 15 & 8 & 14 & - \\ 14 & - & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 3 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ 12 & 3 & - & 5 & 1 & 7 & 3 & 2 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 12 & 1 & 5 & - & 5 & 4 & 6 & 4 & - & 5 & 2 & 1 \\ 14 & 5 & 1 & 5 & - & 6 & 3 & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ - & 4 & 7 & 4 & 6 & - & - & 6 & 3 & 7 & 5 & 2 \\ 8 & 6 & 3 & 6 & 3 & - & - & 2 & 7 & 1 & 5 & 5 \\ 12 & 3 & 2 & 4 & 1 & 6 & 2 & - & 4 & - & 3 & 4 \\ 15 & 2 & 6 & - & 5 & 3 & 7 & 4 & - & 5 & 4 & 3 \\ 8 & 5 & 1 & 5 & 4 & 7 & 1 & - & 5 & - & 5 & 5 \\ 14 & 3 & 2 & 2 & 3 & 5 & 5 & 3 & 4 & 5 & - & - \\ - & 1 & 5 & 1 & 2 & 2 & 5 & 4 & 3 & 5 & - & - \end{pmatrix}$$

19.

$$E = \begin{pmatrix} - & 12 & 12 & - & 10 & 13 & - & 5 & 14 & 14 & 16 & 7 \\ 12 & - & 2 & 6 & 2 & 3 & 3 & 7 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 12 & 2 & - & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 1 & 6 & 5 & - \\ - & 6 & 4 & - & 2 & 5 & 4 & 2 & 3 & 8 & - & 1 \\ 10 & 2 & 3 & 2 & - & 4 & 2 & 5 & - & 6 & - & 1 \\ 13 & 3 & 2 & 5 & 4 & - & 2 & 8 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ - & 3 & 1 & 4 & 2 & 2 & - & 8 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 7 & 2 & 5 & 8 & 8 & - & 8 & 10 & 10 & 5 \\ 14 & 2 & 1 & 3 & - & 2 & 3 & 8 & - & 4 & 5 & 6 \\ 14 & 3 & 6 & 8 & 6 & 3 & 5 & 10 & 4 & - & 1 & 7 \\ 16 & 4 & 5 & - & - & 2 & 5 & 10 & 5 & 1 & - & 7 \\ 7 & 4 & - & 1 & 1 & 5 & 2 & 5 & 6 & 7 & 7 & - \end{pmatrix}$$

20.

$$E = \begin{pmatrix} - & - & 12 & 10 & 6 & 11 & 10 & 7 & - & 8 & 12 & 11 \\ - & - & 1 & 6 & 6 & 4 & 5 & - & 3 & 6 & 4 & 3 \\ 12 & 1 & - & 5 & - & 4 & 6 & 6 & 3 & 6 & 4 & 4 \\ 10 & 6 & 5 & - & 4 & 3 & 1 & 2 & - & 1 & - & 3 \\ 6 & 6 & - & 4 & - & - & 3 & 2 & 7 & 1 & 6 & 5 \\ 11 & 4 & 4 & 3 & - & - & 3 & 2 & 2 & - & 1 & 3 \\ 10 & 5 & 6 & 1 & 3 & 3 & - & - & 5 & 1 & - & 4 \\ 7 & - & 6 & 2 & 2 & 2 & - & - & 6 & 1 & 5 & 4 \\ - & 3 & 3 & - & 7 & 2 & 5 & 6 & - & 5 & 3 & 2 \\ 8 & 6 & 6 & 1 & 1 & - & 1 & 1 & 5 & - & - & 3 \\ 12 & 4 & 4 & - & 6 & 1 & - & 5 & 3 & - & - & 1 \\ 11 & 3 & 4 & 3 & 5 & 3 & 4 & 4 & 2 & 3 & 1 & - \end{pmatrix}$$

Завдання 5. Обчисли середній член розкладу:

1. $(3x + 5y)^8$.

2. $(2x + 4y)^6$.

3. $(x + 3y)^{12}$.

4. $(6x + y)^8$.

5. $(3x + 2y)^4$.

6. $(x + 4y)^{10}$.

7. $(3x + 3y)^6$.

8. $(2x + 2y)^6$.

9. $(5x + y)^{10}$.

10. $(4x + 2y)^4$.

11. $(x + 3y)^8$.

12. $(x + 6y)^{10}$.

13. $(3x + 3y)^6$.

14. $(2x + 6y)^6$.

15. $(5x + y)^8$.

16. $(6x + 4y)^8$.

17. $(x + 5y)^6$.

18. $(x + y)^{10}$.

19. $(3x + 5y)^4$.

20. $(4x + 2y)^6$.

Завдання 6. Мале підприємство випускає три види продукції, використовуючи сировину типів A_1 , A_2 та A_3 . Норми витрат сировини за видами продукції та обсяги запасів сировини наведені в таблиці 1. Визначити обсяг випуску продукції кожного виду за умови повного використання наявних запасів сировини.

Таблиця 1. Обсяги та норми витрат сировини

Типи сировини	Норми витрат сировини за видами продукції, ваг.од. / вир.			Запаси сировини, ваг.од.
	1	2	3	
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
A_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3

Таблиця 2. Дані за варіантами для завдання 6

№	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3
1	3	4	5	1	3	5	2	2	7	134	103	126
2	5	3	1	7	2	1	1	9	10	95	104	229
3	7	2	3	4	4	3	1	8	9	128	120	206
4	2	7	6	5	5	4	1	1	12	169	153	165
5	3	1	10	1	9	12	5	6	7	161	253	200
6	10	0	7	1	8	9	5	4	1	184	206	106
7	4	4	13	0	5	11	1	7	8	240	187	183
8	0	7	5	3	6	10	6	5	0	137	216	115
9	1	9	10	7	7	8	0	1	13	229	243	167
10	6	6	1	0	10	3	1	5	4	138	146	113
11	2	2	7	3	4	5	5	1	3	126	134	103
12	1	9	10	5	3	1	7	2	1	229	95	104
13	4	4	3	1	8	9	7	2	3	120	206	128
14	5	5	4	2	7	6	1	1	12	153	169	165
15	1	9	12	3	1	10	5	6	7	253	161	200
16	1	8	9	10	0	7	5	4	1	206	184	106
17	0	5	11	4	4	13	1	7	8	187	240	183
18	3	6	10	6	5	0	0	7	5	216	115	137
19	7	7	8	1	9	10	0	1	13	243	229	167
20	1	5	4	6	6	1	0	10	3	113	138	146

Завдання 7. Нехай сила F є рівнодійної трьох сил:

$$\vec{F}_1 = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{F}_2 = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}, \quad \vec{F}_3 = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}.$$

Знайти роботу сили F , під дією якої матеріальна точка прямолінійно перемістилася з точки $A(-1; 2; 3)$ до точки $B(x_B; y_B; z_B)$.

Таблиця 3. Дані за варіантами для завдання 7

№	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z	c_x	c_y	c_z	x_B	y_B	z_B
1	7	0	-1	2	3	0	1	2	-3	4	1	-1
2	6	-1	0	2	-3	1	0	-3	-3	7	-1	-2
3	0	2	-1	-1	3	-4	4	0	5	3	5	-4
4	2	1	0	5	5	-5	0	0	-1	0	2	1



№	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z	c_x	c_y	c_z	x_B	y_B	z_B
5	4	3	1	0	0	-1	5	-2	4	9	3	2
6	9	1	-1	2	3	0	1	2	-4	4	1	-7
7	6	-1	0	2	-3	1	0	-3	-3	7	-1	-2
8	0	2	-1	-1	5	-4	5	0	5	4	5	-4
9	2	-1	0	5	5	-6	0	0	-1	0	2	-1
10	4	1	1	0	0	-4	5	-2	4	6	2	2
11	8	0	-2	1	3	0	1	2	-4	4	0	-1
12	6	-2	0	0	-3	1	0	-3	-5	-7	1	-2
13	0	3	-1	-1	3	-4	5	0	5	1	5	-4
14	5	1	0	7	7	-7	0	1	-1	0	2	1
15	1	3	1	0	2	-1	5	-2	4	-1	3	1
16	10	1	-1	2	3	0	1	2	-4	7	1	-7
17	16	-1	0	2	-3	1	0	-3	-3	4	-1	-2
18	0	5	-1	-1	5	-4	5	0	5	7	5	-4
19	12	-1	0	5	5	-6	0	0	-1	0	2	-1
20	14	1	1	0	0	-4	5	-2	4	3	2	2

Завдання 8. У просторі задано трикутник з вершинами у точках $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$. Знайти довжину сторони АВ, кут при вершині А та площу трикутника АВС.

Таблиця 4. Дані за варіантами для завдання 8

№	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z	c_x	c_y	c_z
1	-1	0	1	-5	0	4	-5	3	1
2	0	-1	0	-4	-1	3	-4	2	0
3	1	-1	-1	-3	-1	2	-3	2	-1
4	2	2	2	-2	2	5	-2	5	2
5	0	1	-1	-4	1	2	-4	4	-1
6	-1	-1	2	-5	-1	5	-5	2	2
7	-1	0	-1	-5	0	2	-5	3	-1
8	-2	-1	-1	-6	-1	2	-6	2	-1
9	-1	-2	-2	-5	-2	1	-5	1	-2
10	3	2	-1	-1	2	2	-1	5	-1
11	-1	3	1	-5	3	4	-5	6	1
12	0	-1	3	-4	-1	6	-4	2	3
13	3	-1	-1	-1	-1	2	-1	2	-1
14	2	2	3	-2	2	6	-2	5	3
15	5	1	-1	1	1	2	1	4	-1
16	-1	-1	3	-5	-1	6	-5	2	3
17	-1	0	0	-5	0	3	-5	3	0
18	-2	-1	4	-6	-1	7	-6	2	4
19	4	-2	-2	0	-2	1	0	1	-2
20	3	2	0	-1	2	3	-1	5	0

Завдання 9. У просторі трикутна піраміда $SABC$ задана своїми вершинами $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$, $S(x_S; y_S; z_S)$. Обчислити площу грані ABC , об'єм піраміди $SABC$ та довжину висоти AH , проведеної до грані ABC .

Таблиця 5. Дані за варіантами для завдання 9

№	a_x	a_y	a_z	b_x	b_y	b_z	c_x	c_y	c_z	s_x	s_y	s_z
1	7	0	-1	2	3	0	1	2	-3	4	1	-1
2	6	-1	0	2	-3	1	0	-3	-3	7	-1	-2
3	0	2	-1	-1	3	-4	4	0	5	3	5	-4
4	2	1	0	5	5	-5	0	0	-1	0	2	1
5	4	3	1	0	0	-1	5	-2	4	9	3	2
6	9	1	-1	2	3	0	1	2	-4	4	1	-7
7	6	-1	0	2	-3	1	0	-3	-3	7	-1	-2
8	0	2	-1	-1	5	-4	5	0	5	4	5	-4
9	2	-1	0	5	5	-6	0	0	-1	0	2	-1
10	4	1	1	0	0	-4	5	-2	4	6	2	2
11	8	0	-2	1	3	0	1	2	-4	4	0	-1
12	6	-2	0	0	-3	1	0	-3	-5	-7	1	-2
13	0	3	-1	-1	3	-4	5	0	5	1	5	-4
14	5	1	0	7	7	-7	0	1	-1	0	2	1
15	1	3	1	0	2	-1	5	-2	4	-1	3	1
16	10	1	-1	2	3	0	1	2	-4	7	1	-7
17	16	-1	0	2	-3	1	0	-3	-3	4	-1	-2
18	0	5	-1	-1	5	-4	5	0	5	7	5	-4
19	12	-1	0	5	5	-6	0	0	-1	0	2	-1
20	14	1	1	0	0	-4	5	-2	4	3	2	2

Завдання 10. Витрати фірми визначаються наступною функцією:

$$K(x) = \frac{k}{10}x^2 + \frac{k}{5}x + (k + 15),$$

де k – номер варіанту.

Визначити граничні витрати фірми, що відповідають обсягу виробництва у $(k + 20)$ одиниць.

Завдання 11. Знайти швидкість та прискорення деякої матеріальної точки через t_1 с після початку прямолінійного руху, що описується законом $S = S(t)$.

Таблиця 6. Дані за варіантами для завдання 11

№	$S = S(t)$	t_1	№	$S = S(t)$	t_1
1	$S(t) = 0,05\sqrt[3]{3t^4 + 24t}$	1	11	$S(t) = \frac{\ln(t + e - 1)}{120t^2}$	1
2	$S(t) = 0,025(t + 2)e^{4-t}$	4	12	$S(t) = 0,0125(3 + t)5^{3-t}$	3
3	$S(t) = 0,02(t + 2)\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	2	13	$S(t) = 0,015\sqrt{3t^4 + t^3}$	1
4	$S(t) = \frac{0,01}{\sqrt[3]{3t^2 + 3t + 4}}$	4	14	$S(t) = 0,005(t + 2)e^{6-t}$	6
5	$S(t) = \frac{\ln(t + e - 2)}{60t^2}$	2	15	$S(t) = 0,2t\cos\left(\frac{\pi}{6}(t - 1)\right)$	1
6	$S(t) = 0,025(t + 2)2^{3-t}$	3	16	$S(t) = \frac{0,01}{\sqrt[4]{15t^2 + 1}}$	1
7	$S(t) = 0,015\sqrt[4]{4t^5 + 12}$	1	17	$S(t) = \frac{\ln(2t + e - 2)}{30t}$	1
8	$S(t) = 0,003(2t + 1)e^{5-t}$	5	18	$S(t) = 0,025(t + 3)2^{3-t}$	3
9	$S(t) = 0,001(t + 2)\sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$	6	19	$S(t) = 0,1t\cos\left(\frac{\pi}{3}(t - 2)\right)$	2
10	$S(t) = \frac{0,015}{\sqrt[5]{t^5 + 211}}$	2	20	$S(t) = 0,02(t + 1)\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	2

Завдання 12. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = y(x)$ в точці з абсцисою x_0 . Зробити креслення кривої, дотичної та нормалі на одному рисунку.

Таблиця 7. Дані за варіантами для завдання 12

№	$y = y(x)$	x_0	№	$y = y(x)$	x_0
1	$y(x) = 1 - 4x - 2x^2$	1	11	$y(x) = 3x^2 - 6x - 2$	-1
2	$y(x) = 12x - 3x^2$	2	12	$y(x) = 5x^2 - 15x$	-2
3	$y(x) = -1 + 8x - 2x^2$	3	13	$y(x) = 8 + 0,5x^2 - x$	5
4	$y(x) = 12x - 3x^2$	2	11	$y(x) = 0,5x^2 - 1,5x$	-1
5	$y(x) = 0,4x + 0,2x^2$	-4	15	$y(x) = 0,25x^2 + 0,5x$	1
6	$y(x) = 1 + 0,2x - 0,1x^2$	0	16	$y(x) = 1 + 0,5x^2 - x$	-1
7	$y(x) = -1 + 0,8x - 0,2x^2$	-1	17	$y(x) = 2x^2 - 1,6x$	1



№	$y = y(x)$	x_0	№	$y = y(x)$	x_0
8	$y(x) = 1,2x - 0,3x^2$	-5	18	$y(x) = 0,6x - 0,3x^2$	0
9	$y(x) = 12 + x - 0,1x^2$	0	19	$y(x) = 8x + 8x^2 - 1$	2
10	$y(x) = -0,8x + 0,2x^2$	2	20	$y(x) = 0,5 - 0,25x^2$	-2

Завдання 13. Статистичним шляхом встановлено, що обсяг продукції, виробленої на певній виробничій лінії (ум. од.) протягом шестигодинного робочого дня визначається функцією

$$u(t) = -\frac{k}{5}t^3 + 2,1kt^2 + 0,2kt,$$

де k – номер варіанту.

Знайти:

1) продуктивність праці, швидкість і темп її зміни через 3 години після початку роботи;

2) у який момент часу продуктивність праці буде найбільшою. Результат пояснити аналітично і графічно. Зробити економічний аналіз результатів.

Завдання 14. Температура поверхні заготовки розподілена за законом $T = T(x, y)$. Визначити напрямок найбільшого зростання температури поверхні заготовки в точці $M(x_M; y_M)$ та максимальну швидкість її зростання.

Таблиця 8. Дані за варіантами для завдання 14

№	$T = T(x, y)$	$M(x_M; y_M)$
1	$T(x, y) = 3 \ln(2x + 3y) - 3xy^2 + 2y + 2$	$M(-1; 1)$
2	$T(x, y) = 4e^{2x-4y} + 5x^3y + 12x + 2$	$M(2; 1)$
3	$T(x, y) = 5 \sin(2x + 6y) - xy^5 + 2x^2y - 1$	$M(-3; 1)$
4	$T(x, y) = 2\cos(3y - x) + 4x^2y + 2x$	$M(3; 1)$
5	$T(x, y) = 7\arctg(x + 2y) + 7x^4y - x + 5$	$M(2; -1)$
6	$T(x, y) = \frac{2}{(3x - y)^2} + 7xy^3 - x^2y - 7$	$M(1; 2)$
7	$T(x, y) = 4\sqrt{3x + 2y} + 3x^2y + 7y^2$	$M(1; -1)$
8	$T(x, y) = 5^{6x-4y} + 2x^4y - y + 2$	$M(2; 3)$
9	$T(x, y) = 2 \ln(4x + 3y) + 4xy^4 + 12y - 2$	$M(1; -1)$
10	$T(x, y) = 8e^{2x+6y} + x^3y + 12x - 5$	$M(3; -1)$

№	$T = T(x, y)$	$M(x_M; y_M)$
11	$T(x, y) = 4\sin(6y - x) - xy^5 + 3x^2y - 1$	$M(6; 1)$
12	$T(x, y) = 3\cos(3y - 2x) + 3x^2y - x$	$M(3; 2)$
13	$T(x, y) = \arctg(x + 2y) + 7x^4y - x + 5$	$M(2; -1)$
14	$T(x, y) = \frac{2}{(3x - y)^2} + 7xy^3 - x^2y - 7$	$M(1; 2)$
15	$T(x, y) = \sqrt{3x + 2y} + 3x^2y + 7y^2$	$M(1; -1)$
16	$T(x, y) = 5^{6x-4y} + 2x^4y - y + 2$	$M(2; 3)$
17	$T(x, y) = 7e^{x+6y} + (x - 5)^3y + x - 5$	$M(6; -1)$
18	$T(x, y) = 9\sin(6y - 3x) + 3xy^5 - x^2y - 1$	$M(2; 1)$
19	$T(x, y) = 5\cos(3y - 6x) + x^4y - 2x$	$M(1; 2)$
20	$T(x, y) = 6\arctg(x + 2y) + x^2y - 2x + 5$	$M(2; -1)$

Завдання 15. Мале підприємство виготовляє два види канцелярських товарів у кількості x і y відповідно. Загальні щомісячні витрати C (тис. грн.) виробництва задані функцією

$$C(x, y) = 400k - 9kx - 6ky + 0,9kx^2 + 0,3ky^2,$$

де k – номер варіанту.

Визначити кількість x (тис. од.) і y (тис.од.) канцелярських товарів, яку потрібно виготовляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

2 РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТУ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ 1

2.1. Приклад розв'язання завдання 1.

Завдання 1. Нехай $U = \{1, \dots, 10\}$ – універсальна множина, $A = \{1, 3, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 9\}$, $C = \{2, 5, 6, 8\}$, $E = \{1, 3, 7, 9, 10\}$. Визначити, з яких елементів складається задана множина F :

$$F = ((A \cup B) - \bar{E}) \cap (A \oplus \bar{C}).$$

Розв'язання:

Теоретико-множинні операції можна проілюструвати діаграмою Вєнна (рис.1).

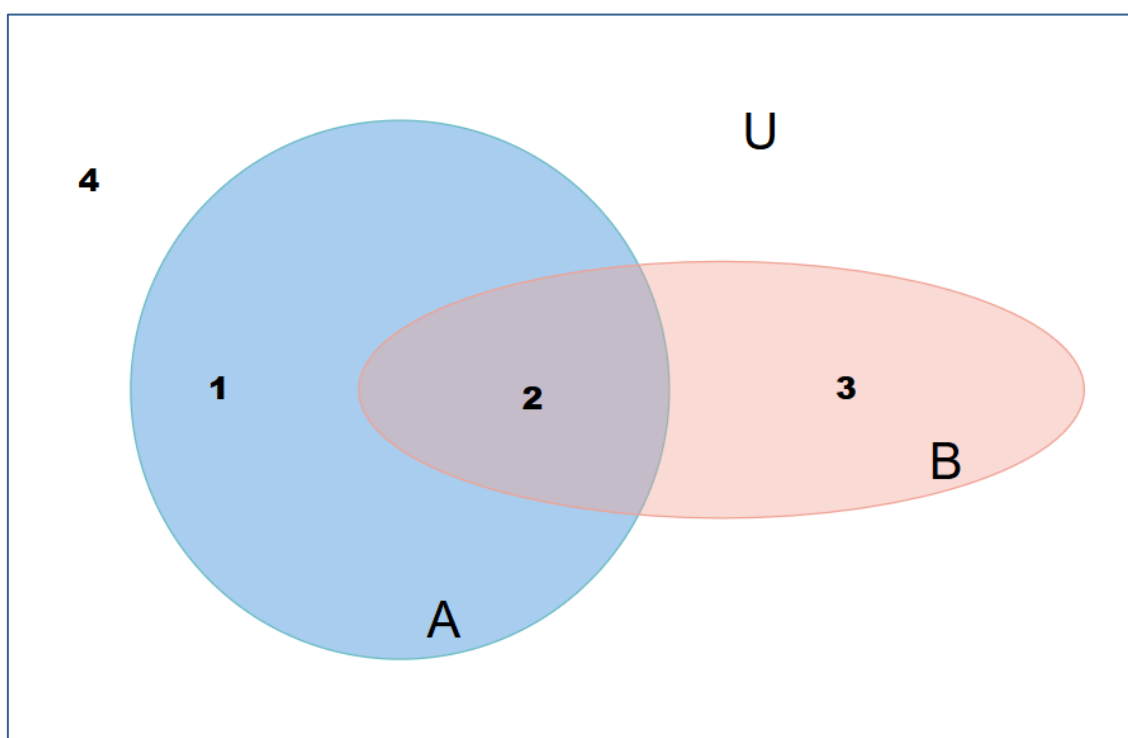


Рис. 1. Діаграма Вєнна.

На цій діаграмі множини A і B – це множини точок кола та еліпса відповідно. Тоді $A \cup B$ складається з точок областей 1, 2, 3; $A \cap B$ – точки області 2; $A - B$ – точки області 1, а $B - A$ – точки області 3; \bar{A} – точки областей 3 та 4, а \bar{B} складається з точок областей 1 та 4; $A \oplus B$ складається з точок областей 1 та 3.

В алгебрі множин визначено такий пріоритет операцій:

1. \bar{A} .
2. $A \cap B$.
3. $A \cup B$.
4. $A - B$.
5. $A \oplus B$.

Таким чином, розглядаючи у формулі $F = ((A \cup B) - \bar{E}) \cap (A \oplus \bar{C})$



окремі дії, отримуємо:

$$\begin{aligned} (1) &= A \cup B = \{1,2,3,5,6,8,9\} \\ (2) &= \bar{E} = \{2,4,5,6,8\} \\ (3) &= (A \cup B) - \bar{E} = \{1,3,9\} \\ (4) &= \bar{C} = \{1,3,4,7,9,10\} \\ (5) &= A \oplus \bar{C} = \{4,6,7,8,9,10\} \\ (6) &= F = ((A \cup B) - \bar{E}) \cap (A \oplus \bar{C}) = \{9\} \end{aligned}$$

Приклад розв'язання завдання 1 з використанням можливостей Maple.

Приклад

Нехай $U = \{1, \dots, 10\}$ – універсальна множина, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 3, 6, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 9\}$, $C = \{2, 5, 6, 8\}$, $E = \{1, 3, 7, 9, 10\}$.
Визначити, з яких елементів складається задана множина F :

$$F = ((A \cup B) - \bar{E}) \cap (A \oplus \bar{C})$$

Розв'язання:

restart;

$$\begin{aligned} U &:= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}; A := \{1, 3, 6, 8\}; B := \{1, 2, 3, 5, 9\}; C := \{2, 5, 6, 8\}; E := \{1, 3, 7, 9, 10\}; \\ U &:= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \\ A &:= \{1, 3, 6, 8\} \\ B &:= \{1, 2, 3, 5, 9\} \\ C &:= \{2, 5, 6, 8\} \\ E &:= \{1, 3, 7, 9, 10\} \end{aligned}$$

$$(1) = A \cup B;$$

$$1 = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$$

$$(2) = U \setminus E;$$

$$1 = \{1, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$$

$$2 = \{2, 4, 5, 6, 8\}$$

$$(3) = (A \cup B) \setminus (U \setminus E);$$

$$3 = \{1, 3, 9\}$$

$$(4) = U \setminus C;$$

$$4 = \{1, 3, 4, 7, 9, 10\}$$

$$(5) = ((A \cup B) \setminus (U \setminus E)) \cap (A \oplus C);$$

$$5 = \{4, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$(6) = (((A \cup B) \setminus (U \setminus E)) \cap ((A \cup B) \setminus (U \setminus E))) \cap ((A \cup B) \setminus (U \setminus E));$$

$$6 = \{9\}$$

$$F := (6);$$

Рис. 2. Розв'язання завдання 1 з використанням можливостей СКМ Maple

2.2. Приклад розв'язання завдання 2.

Завдання 2. Нехай на множинах $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6,7\}$ та $C = \{8,9\}$ задані відношення $R_1 \subseteq A \times B$ та $R_2 \subseteq B \times C$:

$$R_1 = \{(1,5), (1,7), (2,4), (2,7), (3,6)\},$$

$$R_2 = \{(4,8), (5,9), (7,9)\}.$$

Знайти композицію $R_1 \circ R_2$ у вигляді списку та матриці.

Розв'язання:

Композиція двох відношень R_1 та R_2 у вигляді списку буде мати вигляд: $R_1 \circ R_2 = \{(1,9), (2,8), (2,9)\}$.

У матричному вигляді композиція $R_1 \circ R_2$ утворюється таким чином:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.3. Приклад розв'язання завдання 3.

Завдання 3. Побудувати ДНФ та КНФ формули користуючись рівносильностями алгебри висловлень:

$$(A \Leftrightarrow B)(A \Rightarrow C \vee \bar{B})$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} (A \Leftrightarrow B)(A \Rightarrow C \vee \bar{B}) &= (A \Rightarrow B)(B \Rightarrow A)(\bar{A} \vee C \vee \bar{B}) = \\ &= (\bar{A} \vee B)(\bar{B} \vee A)(\bar{A} \vee \bar{B} \vee C) = (\bar{A}\bar{B} \vee AB)(\bar{A} \vee \bar{B} \vee C) = \\ &= \bar{A}\bar{B} \vee \bar{A}\bar{B}C \vee ABC - \text{ДНФ.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A \Leftrightarrow B)(A \Rightarrow C \vee \bar{B}) &= (A \Rightarrow B)(B \Rightarrow A)(\bar{A} \vee C \vee \bar{B}) = \\ &= (\bar{A} \vee B)(\bar{B} \vee A)(\bar{A} \vee C \vee \bar{B}) - \text{КНФ.} \end{aligned}$$

2.4. Приклад розв'язання завдання 4.

Завдання 4. Зважений граф $G = (V, E)$, у якого $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ задано матрицею ваг:

$$E = \begin{pmatrix} - & 2 & 5 & 3 & - & 7 & - & 6 & 8 \\ 2 & - & 2 & 4 & 2 & 4 & 6 & - & 5 \\ 5 & 2 & - & - & 1 & 3 & 1 & 3 & - \\ 3 & 4 & - & - & - & 2 & 3 & 2 & 5 \\ - & 2 & 1 & - & - & 3 & - & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 3 & 2 & 3 & - & - & 1 & 1 \\ - & 6 & 1 & 3 & - & - & - & 3 & 4 \\ 6 & - & 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & - & 2 \\ 8 & 5 & - & 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & - \end{pmatrix}$$

За допомогою алгоритму Дейкстри знайти для цього графа найкоротші відстані та шляхи від вершини 1 до усіх інших вершин.

Розв'язання:

Спочатку всі вершини є непоміченими, відстань до вершини 1 дорівнює 0, до всіх інших вершин відстані дорівнюють $+\infty$, а шляхи є порожніми.

Крок 1. Знаходимо непомічену вершину v з найменшою відстанню та помічаємо цю вершину.

Крок 2. Перераховуємо відстані до усіх інших непомічених вершин v' за формулою $d(v') = \min\{d(v'); d(v) + \text{вага}(v, v')\}$. Якщо при перерахуванні відстань до вершини v' змінилась, тобто її нова відстань дорівнює сумі відстані до вершини v та ваги ребра (v, v') , то також змінюється шлях до вершини v' : $p(v') = p(v) + "v"$ (під знаком +



розуміємо дописування до шляху $p(v)$ вершини v). Після перерахування повертаємося до кроку 1.

Алгоритм закінчує свою роботу у випадку, коли всі вершини є поміченими, тобто крок 1 виконати неможливо.

Хід виконання алгоритму Дейкстри зручно ілюструвати у вигляді таблиці, в якій для кожної вершини відмічаємо її поточну відстань та шлях до неї. Окремо будемо також позначати номер поточної поміченої вершини. Для більш економного запису у таблиці не будемо вказувати відстань (0) і шлях до вершини 1 та початкову відстань до усіх інших вершин ($+\infty$). При перерахуванні відстаней за кроком 2 алгоритму Дейкстри в таблицю будемо вносити зміни лише у випадку покращення відстані. Після завершення виконання алгоритму найкоротші відстані та шляхи для кожної вершини у відповідній колонці будуть записані останніми. Знайдені найкоротші шляхи доцільно зобразити у вигляді дерева. Хід виконання алгоритму Дейкстри відобразимо у таблиці 7.

Таблиця 9. Ілюстрація виконання алгоритму Дейкстри для графа з прикладу 4

2	3	4	5	6	7	8	9
2	5 4	3	4	7 6 5	8 6 5	6 5	8 7 6
1,2	1,3 1,2,3	1,4	1,2,5	1,6 1,2,6 1,4,6	1,2,7 1,4,7 1,2,3,7	1,8 1,4,8	1,9 1,2,9 1,4,6,9

При виконанні алгоритму Дейкстри поточними були вершини у такому порядку: 2, 4, 3, 5, 6, 7, 8, 9.

Таким чином, найкоротша відстань до вершини 2 дорівнює 2, $d(3) = 4$, $d(4) = 3$, $d(5) = 4$, $d(6) = 5$, $d(7) = 5$, $d(8) = 5$, $d(9) = 6$.

Найкоротшим до вершини 2 є шлях 1,2; $p(3) = 1,2,3$; $p(4) = 1,4$; $p(5) = 1,2,5$; $p(6) = 1,4,6$; $p(7) = 1,2,3,7$; $p(8) = 1,4,8$; $p(9) = 1,4,6,9$.

Відповідь: На рисунку 3 зобразимо найкоротші шляхи у вигляді дерева.

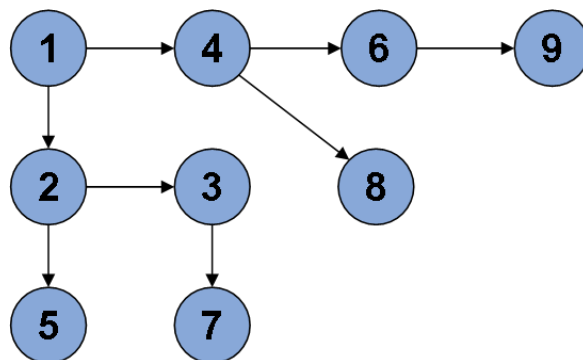


Рис. 3. Найкоротші шляхи (від вершини 1) для графа з завдання 4.



Приклад розв'язання завдання 4 з використанням можливостей Maple.

Приклад: У зваженому графі, за допомогою алгоритму Дейкстри знайти найкоротший шлях із вершини 1 до вершини 12

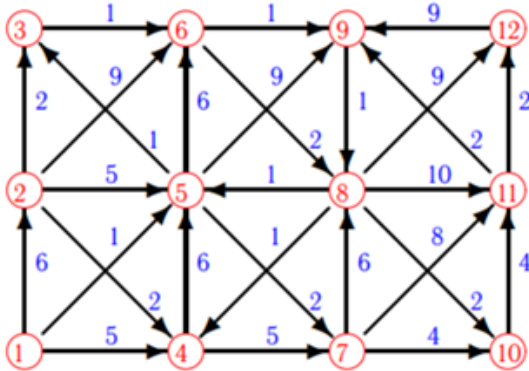


Рис. 4. Умова завдання 4.

Розв'язання:

`restart : with(networks) :`

`new(G) : n := 12 :`

`addvertex({Si = 1..n}, G); #`Вершини заданого графа`

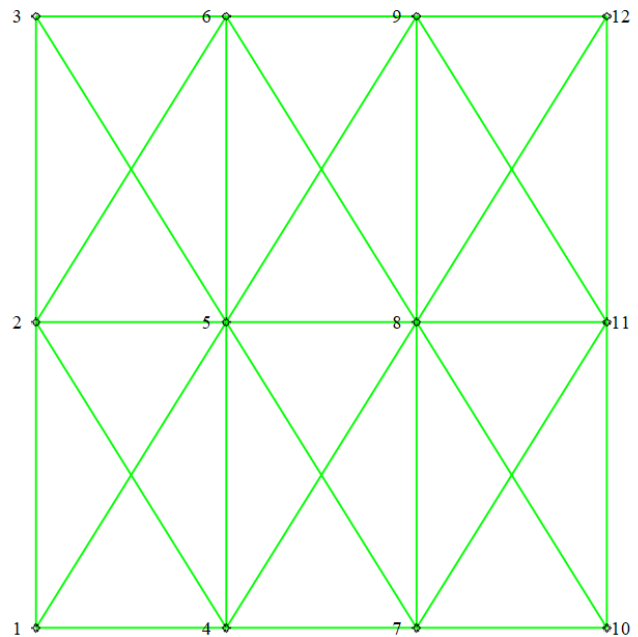
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

Вводимо ребра та вагу кожного ребра:

`addedge([[1,2], [1,4], [1,5], [2,3], [2,4], [2,5], [2,6], [3,6], [4,5], [4,7], [5,3], [5,6], [5,7], [5,9], [6,8], [6,9], [7,8], [7,10], [7,11], [8,4], [8,5],`

`[8,10], [8,11], [8,12], [9,8], [10,11], [11,9], [11,12], [12,9]], weights = [6, 5, 1, 2, 2, 5, 9, 1, 6, 5, 1, 6, 2, 9, 2, 1, 6, 4, 8, 1, 1, 2, 10, 9, 1, 4, 2, 2, 9], G) :`

`draw(Linear([1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 9], [10, 11, 12]), G);`

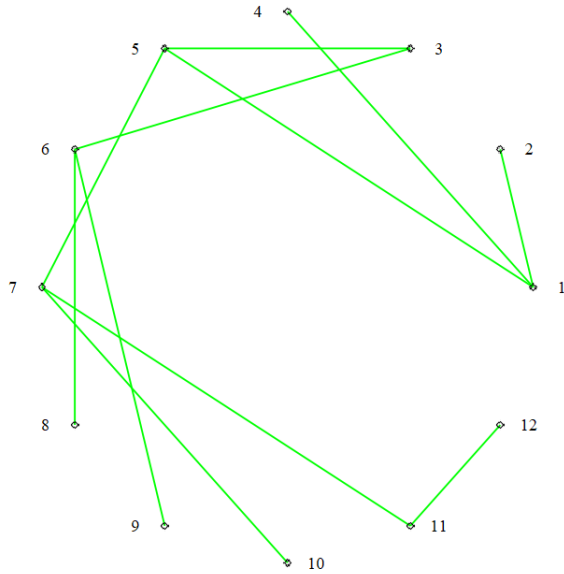




`T := shortpathtree(G, 1) ; #` Дерево мінімальних шляхів
W := vweight(T) ; #` Таблиця ваги (відстані)`

`W := table(sparse, [1 = 0, 2 = 6, 3 = 2, 4 = 5, 5 = 1, 6 = 3, 7 = 3, 9 = 4, 8 = 5, 11 = 11, 10 = 7, 12 = 13])`

`draw(T) ; #` Рисунок дерева`



`MinPath := W[12] ; #` Відповідь. Мінімальний шлях 1 - 12`

`MinPath := 13`

`allpairs(G)[1, 12] ; #` Перевірка (інша команда для розв'язку задачі)`

`13`

Рис. 5. Розв'язання завдання 4 з використанням можливостей СКМ Maple

2.5 Приклад розв'язання завдання 5.

Завдання 5. Обчисли середній член розкладу $(2x + y)^6$.

Розв'язання:

У розкладі $(2x + y)^6$ сім членів, отже, середній член цього розкладу буде четвертим.

Тоді

$$T_4 = T_{3+1} = C_6^3 \cdot (2x)^{6-3} \cdot y^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 8x^3y^3 = 160x^3y^3$$

Відповідь: $160x^3y^3$.

2.6 Приклад розв'язання завдання 6.

Завдання 6. Мале підприємство випускає три види продукції, використовуючи сировину типів A_1 , A_2 та A_3 . Норми витрат сировини за видами продукції та обсяги запасів сировини наведені в таблиці 8. Визначити обсяг випуску продукції кожного виду за умови повного використання наявних запасів сировини.

Таблиця 8. Характеристики виробництва

Типи сировини	Норми витрат сировини за видами продукції, ваг.од. / вир.			Запаси сировини, ваг.од.
	1	2	3	
A_1	4	3	4	34
A_2	4	2	3	26
A_3	3	2	3	24

Розв'язання:

Запишемо математичну модель задачі.

Позначимо x_1, x_2, x_3 – кількість одиниць продукції виду 1, 2, 3 відповідно, які необхідно виготовити для повного використання обсягу запасів сировини. Одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) з трьома невідомими:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 34, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 26, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

а) Розв'яжемо СЛАР за правилом Крамера. Обчислимо головний визначник системи розкладанням за першим рядком:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (6 - 6) - 3 \cdot (12 - 9) + 4 \cdot (8 - 6) = 4 \cdot 0 - 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = -1.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок.

Обчислимо допоміжні визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, утворюючи їх з головного визначника шляхом заміни відповідно першого, другого та третього стовпця стовпцем вільних елементів. Обчислення побудованих допоміжних визначників проводимо розкладанням за першим рядком:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 34 & 3 & 4 \\ 26 & 2 & 3 \\ 24 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 34 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 26 & 3 \\ 24 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 26 & 2 \\ 24 & 2 \end{vmatrix} = 34 \cdot (6 - 6) - 3 \cdot (78 - 72) + 4 \cdot (52 - 48) = 34 \cdot 0 - 3 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = -2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 34 & 4 \\ 4 & 26 & 3 \\ 3 & 24 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 26 & 3 \\ 24 & 3 \end{vmatrix} - 34 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 26 \\ 3 & 24 \end{vmatrix} = 4 \cdot (78 - 72) - 34 \cdot (12 - 9) + 4 \cdot (96 - 78) = 4 \cdot 6 - 34 \cdot 3 + 4 \cdot 18 = -6,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 34 \\ 4 & 2 & 26 \\ 3 & 2 & 24 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 26 \\ 2 & 24 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 26 \\ 3 & 24 \end{vmatrix} + 34 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (48 - 52) - 3 \cdot (96 - 78) + 34 \cdot (8 - 6) = 4 \cdot (-4) - 3 \cdot 18 + 34 \cdot 2 = -2.$$

Знаходимо корені СЛАР за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{-1} = 6; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Отже, шуканий розв'язок має вигляд:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 2.$$

б) Розв'яжемо СЛАР матричним методом.

Утворимо матрицю норм витрат сировини: $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

матрицю об'єму випуску продукції кожного виду $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

та матрицю запасів сировини $B = \begin{pmatrix} 34 \\ 26 \\ 24 \end{pmatrix}$.

Запишемо математичну модель задачі у вигляді відповідного матричного рівняння:

$$AX = B.$$

З пункту а) попередніх обчислень, маємо ненульовий головний визначник СЛАР ($\Delta = -1$), тобто СЛАР має єдиний розв'язок і можна використовувати матричний метод розв'язання.

Розв'язок матричного рівняння шукатимемо за формулою:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot B,$$

де Δ – визначник матриці A , A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) матриці A .

Обчислимо алгебраїчні доповнення до кожного елемента матриці A :

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Утворимо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Звідси стовпець невідомих елементів знаходимо з обчислень:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -4 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 34 \\ 26 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 34 + 1 \cdot 26 - 1 \cdot 24 \\ 3 \cdot 34 + 0 \cdot 26 - 4 \cdot 24 \\ -2 \cdot 34 - 1 \cdot 26 + 4 \cdot 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, шуканий розв'язок СЛАР має вигляд:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 2.$$

в) Розв'яжемо СЛАР методом Гауса. Запишемо розширену матрицю системи і виконаємо елементарні перетворення над рядками цієї матриці:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & | & 34 \\ 4 & 2 & 3 & | & 26 \\ 3 & 2 & 3 & | & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{[1]-[3]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 10 \\ 4 & 2 & 3 & | & 26 \\ 3 & 2 & 3 & | & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2]+[1] \cdot (-4)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 10 \\ 0 & -2 & -1 & | & -14 \\ 3 & 2 & 3 & | & 24 \end{pmatrix} \xrightarrow{[3]+[1] \cdot (-3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 10 \\ 0 & -2 & -1 & | & -14 \\ 0 & -1 & 0 & | & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{[2] \cdot (-1); [3] \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 10 \\ 0 & 2 & 1 & | & 14 \\ 0 & 1 & 0 & | & 6 \end{pmatrix}.$$

З розширеної матриці повернемося до СЛАР:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10; \\ 2x_2 + x_3 = 14; \\ x_2 = 6. \end{cases}$$

Далі, за оберненим ходом методу Гауса послідовно, піднімаючись в СЛАР знизу догори знаходимо розв'язок:

$$\begin{aligned} x_2 &= 6, \\ 2x_2 + x_3 &= 14, \\ x_3 &= 14 - 2x_2 = 14 - 2 \cdot 6 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 10, \\ x_1 &= 10 - x_2 + x_3 = 10 - 6 - 2 = 2. \end{aligned}$$

Тобто, шуканий розв'язок СЛАР має вигляд:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 2.$$

Відповідь: наявні запаси сировини забезпечують виготовлення 2 одиниць продукції 1-го виду, 6 одиниць продукції 2-го виду та 2 одиниці продукції 3-го виду.

Приклад розв'язання завдання 6 з використанням можливостей MS Excel.

Розв'язання запропоноване для випадку використання матричного методу. Умова задачі та розв'язання наведено на рис. 6.

Приклад. Мале підприємство випускає три види продукції, використовуючи сировину типів А1, А2 та А3. Норми витрат сировини за видами продукції та обсяги запасів сировини наведені в таблиці 7. Визначити обсяг випуску продукції кожного виду за умови повного використання наявних запасів сировини.

Типи сировини	Норми витрат сировини за видами продукції, ваг. од./ вир.			Запаси сировини, ваг.од.
	1	2	3	
А1	4	3	4	34
А2	4	2	3	26
А3	3	2	3	24

	x1	x2	x3		
Розв'язання					
A=	4	3	4	- матриця норм витрат сировини	
	4	2	3		
	3	2	3		
X=	x ₁			-об'єм випуску продукції кожного виду	
	x ₂				
	x ₃				
B=				34	- запаси сировини
				26	
				24	

Математична модель визначається матричним рівнянням: AX=B.

det A= -1 - маємо єдиний розв'язок вигляду: X=A⁻¹B

A ⁻¹ =	0	1	-1	X=	2
	3	0	-4		6
	-2	-1	4		2

Відповідь: задані запаси сировини забезпечать виготовлення

2	одиниць продукції 1-го виду
6	одиниць продукції 2-го виду
2	одиниць продукції 3-го виду

Рис. 6. Розв'язання завдання 6 з використанням можливостей MS Excel

2.7 Приклад розв'язання завдання 7

Завдання 7. Знайти роботу рівнодійної трьох сил: $\vec{F}_1 = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{F}_2 = \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{F}_3 = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$, під дією якої матеріальна точка перемістилася прямолінійно з точки A(1;-2;0) до точки B(-2;0;5).

Розв'язання:

Робота, яку виконує сила \vec{F} при переміщенні матеріальної точки з точки А до точки В, визначається за формулою

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

Знайдемо \vec{F} – рівнодійну сил \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3 , де

$$\vec{F}_1 = (1; -2; 1), \quad \vec{F}_2 = (0; 1; -1), \quad \vec{F}_3 = (2; 2; 5),$$

та отримаємо:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (1; -2; 1) + (0; 1; -1) + (2; 2; 5) = (3; 1; 5).$$

Знайдемо вектор переміщення:

$$\vec{s} = \vec{AB} = (-2 - 1; 0 + 2; 5 - 0) = (-3; 2; 5).$$

Тоді отримаємо:

$$A = 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 5 = 18 \text{ (од. роботи)}.$$

Відповідь: 18 одиниць роботи.

2.8 Приклад розв'язання завдання 8

Завдання 8. У просторі задано трикутник з вершинами у точках $A(-1; -1; -1)$, $B(-5; -1; 2)$, $C(-5; 2; -1)$. Знайти довжину сторони AB , кут при вершині A та площу трикутника ABC .

Розв'язання:

а) Знайдемо координати та довжину вектора \vec{AB} :

$$\vec{AB} = (-5 - (-1); -1 - (-1); 2 - (-1)) = (-4; 0; 3),$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

б) Кут при вершині A обчислимо за формулою:

$$\cos \angle A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}.$$

Знаходимо:

$$\vec{AC} = (-5 - (-1); 2 - (-1); -1 - (-1)) = (-4; 3; 0),$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\cos \angle A = \frac{-4 \cdot (-4) + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 0}{5 \cdot 5} = \frac{16}{25},$$

$$\angle A = \arccos \frac{16}{25}.$$

в) Формула для обчислення площі трикутника ABC має вид

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

Обчислюємо:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 9)\vec{i} - (0 - (-12))\vec{j} + (-12 - 0)\vec{k} = \\ &= -9\vec{i} - 12\vec{j} - 12\vec{k}, \end{aligned}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-9)^2 + (-12)^2 + (-12)^2} = \frac{\sqrt{369}}{2} = \frac{3\sqrt{41}}{2} \text{ (кв. од.)}.$$

Відповідь: $|\overrightarrow{AB}| = 5$, $\angle A = \arccos \frac{16}{25}$, $S_{\Delta ABC} = \frac{3\sqrt{41}}{2}$.

2.9 Приклад розв'язання завдання 9

Завдання 9. У просторі трикутна піраміда $SABC$ задана своїми вершинами $A(1; -1; 2)$, $B(5; 4; 5)$, $C(5; 3; 4)$, $S(4; 0; -3)$. Обчислити площу грані ABC , об'єм піраміди $SABC$ та довжину висоти AH , проведеної до грані ABC .

Розв'язання:

Утворимо вектори $\overrightarrow{AB} = (4; 5; 3)$, $\overrightarrow{AC} = (4; 4; 2)$ і $\overrightarrow{AS} = (3; 1; 1)$.

Знаходимо площу грані ABC , побудованої на векторах \overrightarrow{AB} і \overrightarrow{AC} а за формулою:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

Обчислимо

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$$

і отримаємо:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (кв. од.)}.$$

Об'єм трикутної піраміди знаходимо за формулою:

$$V = \frac{1}{6} V_{\text{пар}} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS}|.$$

Знайдемо мішаний добуток трьох векторів, що визначають піраміду:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 16 + 12 + 30 - 36 - 6 - 20 = -6.$$

Таким чином, об'єм трикутної піраміди $SABC$ дорівнює

$$V = \frac{1}{6} |-6| = 1 \text{ (куб. од.)}.$$

Для об'єму піраміди можна використати формулу:

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot h,$$

де h – довжина висоти, проведеної до грані ABC , отже маємо:

$$h = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}}$$

або

$$h = \frac{3 \cdot 1}{3} = 1 \text{ (лін. од.)}.$$

Відповідь: $S_{\Delta ABC} = 3$ кв. од., $V = 1$ куб. од., $h = 1$ лін. од.

2.10 Приклад розв'язання завдання 10

Завдання 10. Витрати фірми визначаються наступною функцією:

$$K(x) = 3x^2 + 8x + 28.$$

Визначити граничні витрати фірми, що відповідають обсягу виробництва у 40 одиниць.

Розв'язання:

Граничні витрати фірми визначаємо за формулою:

$$K_{\text{гран}} = K'(x).$$

Знаходимо:

$$K_{\text{гран}} = (3x^2 + 8x + 28)' = 6x + 8.$$

Граничні витрати фірми, що відповідають обсягу виробництва у 40 одиниць, становлять:

$$K_{\text{гран}}(40) = 6 \cdot 40 + 8 = 248 \text{ (ум. од.)}.$$

Відповідь: $K_{\text{гран}}(40) = 248$ ум. од.

2.11 Приклад розв'язання завдання 11

Завдання 11. Знайти швидкість та прискорення деякої матеріальної точки через 2 с після початку прямолінійного руху, що описується законом:

$$S(t) = -\frac{2t^3}{3} + 5t^2 + t + 1,$$

де шлях вимірюється в м.

Розв'язання:

Знаходимо швидкість:

$$\begin{aligned} v(t) = S'(t) &= \left(-\frac{2t^3}{3} + 5t^2 + t + 1 \right)' = -\frac{2}{3} \cdot 3t^2 + 5 \cdot 2t + 1 + 0 = \\ &= -2t^2 + 10t + 1. \end{aligned}$$

Обчислимо швидкість через дві секунди після початку руху:

$$v(2) = -2 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 + 1 = -8 + 20 + 1 = 13 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right).$$

Знаходимо прискорення:

$$a(t) = v'(t) = S''(t) = (-2t^2 + 10t + 1)' =$$

$$= -2 \cdot 2t + 10 + 0 = -4t + 10.$$

Обчислимо прискорення через дві секунди після початку руху

$$a(2) = -4 \cdot 2 + 10 = 2 \left(\frac{\text{М}}{\text{с}^2} \right).$$

Відповідь: $v(2) = 13 \frac{\text{М}}{\text{с}}$; $a(2) = 2 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}$.

Приклад розв'язання завдання 11 з використанням можливостей СКМ Maple.

Розв'язання запропоноване для випадку використання СКМ Maple.

Умова задачі та розв'язання наведено на рис. 6. виконано для більш складної функції, що описує прямолінійний рух деякої матеріальної точки.

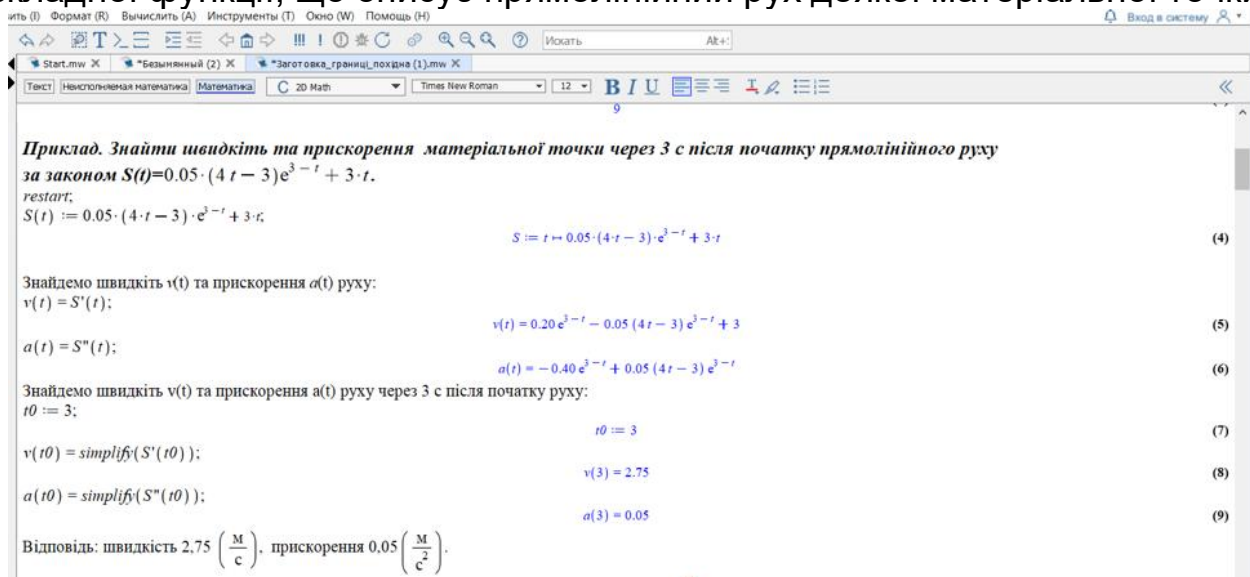


Рис. 7. Розв'язання завдання 11 з використанням можливостей СКМ Maple

2.12 Приклад розв'язання завдання 12

Завдання 12. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y(x) = 4x - x^2 - 2$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$. Зробити креслення кривої, дотичної та нормалі на одному рисунку.

Розв'язання:

Рівняння дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 має вид:

$$D: \quad y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0).$$

Рівняння нормалі до графіка функції в точці з абсцисою x_0 має вид:

$$N: \quad y(x) = y(x_0) - \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Знаходимо:

$$y(x_0) = y(1) = 4 \cdot 1 - 1^2 - 2 = 1,$$

$$y'(x) = (4x - x^2 - 2)' = 4 - 2x,$$

$$y'(x_0) = y'(1) = 4 - 2 \cdot 1 = 2.$$

Маємо:

$D: y = 1 + 2 \cdot (x - 1)$; або остаточно $y = 2x - 1$ – рівняння дотичної,

$N: y = 1 - \frac{1}{2}(x - 1)$; або остаточно $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ – рівняння нормалі.

Для побудови визначимо наступне.

Дотична – пряма, яка проходить через точки $P(1;1)$, $A(0;-1)$.

Нормаль – пряма, що проходить через точки $P(1;1)$, $B(0; \frac{3}{2})$.

$y(x) = 4x - x^2 - 2 \Rightarrow y(x) = -x^2 + 4x - 2$ – парабола ($a = -1 < 0$, $b=4$), її гілки напрямлені донизу.

Знаходимо координати вершини:

$$x_c = -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-1)} = 2; \quad y_c = y(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 2 = 2.$$

Отже, маємо вершину у точці $C(2;2)$. Зробимо креслення (рис. 8).

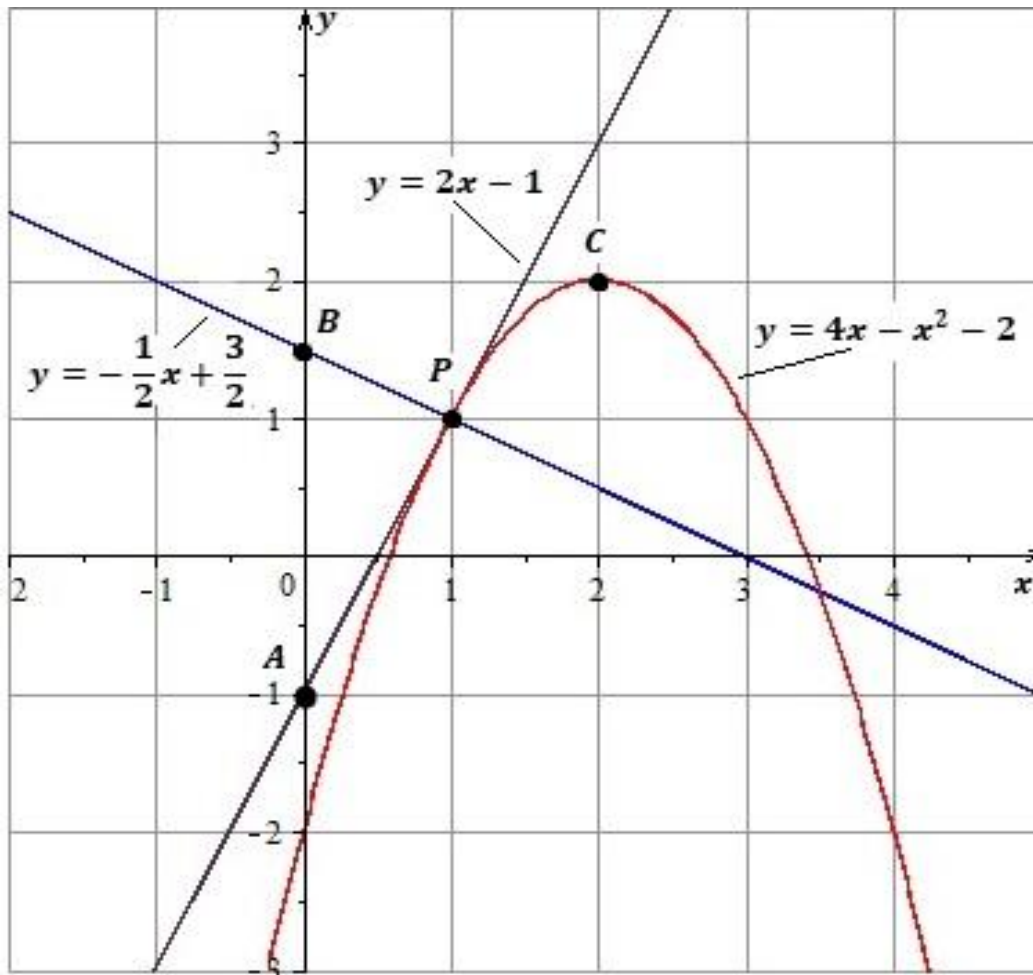


Рис.8. Креслення кривої, дотичної та нормалі до графіка функції

Відповідь: $y = 2x - 1$ – дотична, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ – нормаль.

Приклад розв'язання завдання 12 з використанням можливостей СКМ Maple.

Розв'язання запропоноване для випадку використання СКМ Maple. Умова задачі та розв'язання наведено на рис. 9.

Приклад. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $f(x)=2x^2 - 6x$ в точці з абсцисою $x_0 = -1$.

Запишемо в загальному вигляді рівняння квадратичної функції.

```
restart;
a := 2 : b := -6 : c := 0 : x0 := -1;
y = a · x2 + b · x + c; y(x) := a · x2 + b · x + c;
```

Знайдемо значення функції в точці $x_0 = -1$:

```
y(x0);
```

Знайдемо похідну та значення похідної функції в точці $x_0 = -1$:

```
y'(x);
```

Запишемо рівняння дотичної до графіка функції в точці $x_0 = -1$:

```
yt := y(x0) + y'(x0) · (x - x0);
```

Запишемо рівняння нормалі до графіка функції в точці $x_0 = -1$:

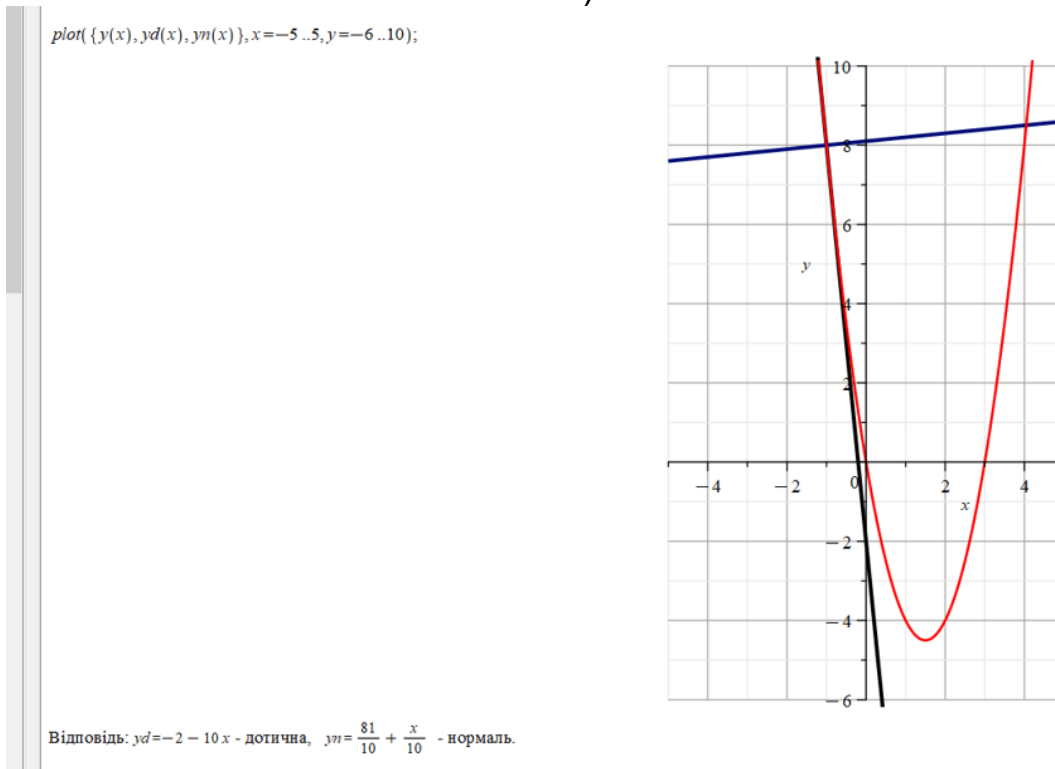
```
yn := y(x0) - 1/y'(x0) · (x - x0);
```

Знайдемо координати вершини параболі, гілки якої напрямнені вгору ($a=2>0$!)

```
xc := -b/2/a; yc := y(xc);
```

Тобто отримали вершину - точку $C(\frac{3}{2}; -\frac{9}{2})$. Побудуємо графік функції.

a)



б)

Рис. 9. Розв'язання завдання 12 з використанням можливостей СКМ Maple

2.13 Приклад розв'язання завдання 13

Завдання 13. Статистичним шляхом встановлено, що обсяг продукції, виробленої на певній виробничій лінії (ум. од.) протягом шестигодинного робочого дня визначається функцією

$$u(t) = -\frac{20}{3}t^3 + 60t^2 + 140t + 300, \text{ де } t - \text{ час у годинах } (0 \leq t \leq 6).$$

Знайти:

1) продуктивність праці, швидкість і темп її зміни через 3 години після початку роботи;

2) у який момент часу продуктивність праці буде найбільшою. Результат пояснити аналітично і графічно. Зробити економічний аналіз результатів.

Розв'язання:

1) Продуктивність праці $z(t)$ на певній виробничій лінії обчислюємо за формулою:

$$z(t) = u'(t).$$

Тому отримаємо:

$$z(t) = \left(-\frac{20}{3}t^3 + 60t^2 + 140t + 300\right)' = -20t^2 + 120t + 140.$$

Знаходимо продуктивність праці через три години після початку роботи на виробничій лінії:

$$z(3) = -20 \cdot 3^2 + 120 \cdot 3 + 140 = 320.$$

Швидкість зміни продуктивності знаходимо як першу похідну від продуктивності праці $z(t)$:

$$z'(t) = (-20t^2 + 120t + 140)' = -40t + 120.$$

Швидкість зміни продуктивності через три години після початку роботи дорівнює:

$$z'(3) = -40 \cdot 3 + 120 = 0.$$

Обчислюємо темп зміни продуктивності:

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-40t + 120}{-20t^2 + 120t + 140}.$$

Обчислюємо значення темпу зміни продуктивності через три години після початку роботи:

$$\frac{z'(3)}{z(3)} = \frac{-40 \cdot 3 + 120}{-20 \cdot 3^2 + 120 \cdot 3 + 140} = \frac{0}{320} = 0.$$

2) Враховуючи, що графіком функції продуктивності праці є парабола, гілки якої спрямовані донизу, то найбільше значення цієї функції досягається саме у вершині параболи. Для побудови графіка продуктивності праці знайдемо координати вершини параболи:

$$t_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-120}{2 \cdot (-20)} = 3,$$

звідки

$$z(t_0) = z(3) = -20 \cdot 3^2 + 120 \cdot 3 + 140 = 320.$$

Вершина параболи знаходиться в точці $M(3;320)$.

Додатково для побудови графіка функції продуктивності знайдемо точки перетину з віссю абсцис:

$$-20t^2 + 120t + 140 = 0,$$

$$-t^2 + 6t + 7 = 0,$$

$$D = 36 - 4 \cdot (-1) \cdot 4 = 64,$$

$$t_1 = \frac{-6 - 8}{-2} = 7, \quad t_2 = \frac{-6 + 8}{-2} = -1.$$

Для знаходження перетину з віссю Oz підставимо $t=0$ в $z(t)$:

$$z(0) = -20 \cdot 0^2 + 120 \cdot 0 + 140 = 140.$$

Будуємо графік продуктивності праці (рис. 10).

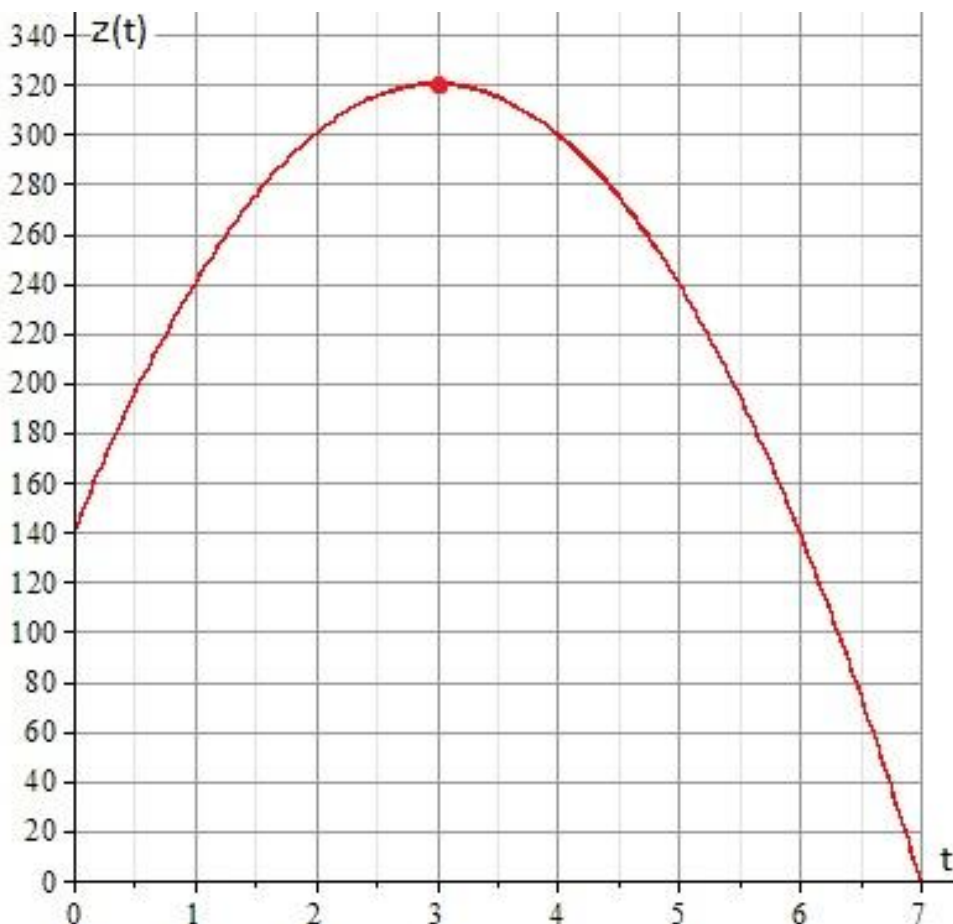


Рис. 10. Графік функції продуктивності праці

Сформулюємо наступні економічні висновки:

- 1) перші 3 години продуктивність праці $z(t)$ зростає (збільшується) (графік функції $z(t)$ зростає, а темп є додатною величиною);
- 2) через 3 години після початку роботи продуктивність праці набуває свого найбільшого значення у 320 од./год. (що відповідає вершині параболи на графіку функції $z(t)$);
- 3) починаючи з 3 години та до кінця робочого дня продуктивність праці спадає (графік функції $z(t)$ спадає, а темп є від'ємною величиною).

Відповідь: $z(3) = 320$ – продуктивність праці, $z'(3) = 0$ – швидкість зміни продуктивності, $\frac{z'(3)}{z(3)} = 0$ – темп зміни продуктивності; $t = 3$.

Приклад розв'язання завдання 13 з використанням можливостей СКМ Maple.

Розв'язання запропоноване для випадку використання СКМ Maple. Умова задачі та розв'язання наведено на рис. 11-12.

Приклад. Статистичним шляхом встановлено, що обсяг продукції, виробленої на певній виробничій лінії (ум.од.) протягом шестигодинного робочого дня визначається функцією

$$U(t) = -\frac{40}{3}t^3 + 120t^2 + 280t, \text{ де } t - \text{ час у годинах } 0 \leq t \leq 6.$$

*Знайти : 1. Продуктивність праці, швидкість та темп її зміни через 2 години після початку робочого дня;
2. У який момент продуктивність праці буде максимальною.
Надати геометричну та економічну інтерпретацію отриманих результатів.*

restart;

1. Знаходимо продуктивність праці $Z(t)=U'(t)$ та її значення через 2 години після початку роботи :

$$U(t) := -\frac{40}{3}t^3 + 120t^2 + 280t$$

$$U := t \mapsto -\frac{40}{3}t^3 + 120t^2 + 280t$$

$$Z(t) = U'(t);$$

$$-40t^2 + 240t + 280 = -40t^2 + 240t + 280$$

$$t0 := 2 : Z(t0) = U'(t0);$$

$$600 = 600$$

Знаходимо швидкість продуктивності праці $P(t)=Z'(t)=U''(t)$ та темп $T(t)=Z'(t)/Z(t)$ та їх значення через 3 години після початку роботи :

$$Z(t) := U'(t);$$

$$P(t) = Z'(t);$$

$$P(t) = -80t + 240$$

$$T(t) = \frac{Z'(t)}{Z(t)};$$

$$T(t) = \frac{-80t + 240}{-40t^2 + 240t + 280}$$

$$P(t0) = Z'(t0);$$

$$P(2) = 80$$

$$T(t0) = \frac{Z'(t0)}{Z(t0)};$$

$$T(2) = \frac{2}{15}$$

Рис. 11. Розв'язання пункту 1) завдання 13 у СКМ Maple

2. Побудуємо графік продуктивності та знайдемо момент часу, коли вона є максимальною
`plot(Z(t), t=0..6);`



`maximize(Z(t), t=0..6, location);`

640, {{t=3}, 640}}

Отже, отримаємо наступні економічні висновки:

- 1) перші 3 години продуктивність праці $Z(t)$ зростає (збільшується) (графік зростає та темп є додатною величиною),
- 2) через 3 години після початку роботи продуктивність праці є найбільшою і становить 640 од/год (вершина параболі на графіку функції $Z(t)$),
- 3) після 3 годин та до кінця робочого дня продуктивність спадає (графік спадає та темп є від'ємною величиною).

Рис. 12. Розв'язання пункту 2) та висновки завдання 13 у СКМ Maple

2.14 Приклад розв'язання завдання 14

Завдання 14. Температура поверхні заготовки розподілена за законом $T(x, y) = x^3 + 2xy + 3y^2 + 3$. Визначити напрям найбільшого зростання температури поверхні заготовки в точці $M(1;2)$ та максимальну швидкість її зростання.

Розв'язання:

Вектор градієнту $\overrightarrow{grad} T(M)$ визначає напрям, за яким відбувається найбільше зростання температури поверхні заготовки:

$$\overrightarrow{grad} T(M) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}(M); \frac{\partial T}{\partial y}(M) \right).$$

Знаходимо частинні похідні функції температури заготовки $T(x, y)$:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = T'_x = (x^3 + 2xy + 3y^2 + 3)'_x = 3x^2 + 1 \cdot 2y + 0 + 0 = 3x^2 + 2y,$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = T'_y = (x^3 + 2xy + 3y^2 + 3)'_y = 0 + 1 \cdot 2x + 3 \cdot 2y + 0 = 2x + 6y.$$

Знаходимо значення частинних похідних в точці $M(1;2)$:

$$\frac{\partial T}{\partial x}(1;2) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2 = 7,$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(1;2) = 2 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 14.$$

Таким чином, отримаємо напрям найбільшого зростання

температури поверхні заготовки:

$$\overrightarrow{\text{grad } T}(1; 2) = (7; 14).$$

Максимальна швидкість зростання температури поверхні заготовки дорівнює модулю вектора $\overrightarrow{\text{grad } T}(M)$:

$$v_{\max} = |\overrightarrow{\text{grad } T}(1; 2)| = \sqrt{7^2 + 14^2} = \sqrt{245} = 7\sqrt{5}.$$

Відповідь: $\overrightarrow{\text{grad } T}(1; 2) = (7; 14), v_{\max} = 7\sqrt{5}$.

2.15 Приклад розв'язання завдання 15

Завдання 15. Мале підприємство виготовляє два види канцелярських товарів у кількості x і y відповідно. Загальні щомісячні витрати C (тис. грн.) виробництва задані функцією

$$C(x, y) = 250 - 4x - 7y + 0,2x^2 + 0,1y^2.$$

Визначити кількість x (тис. од.) і y (тис. од.) канцелярських товарів, яку потрібно виготовляти, щоб загальні витрати підприємства були мінімальними.

Розв'язання:

Згідно умови завдання необхідно дослідити функції витрат на наявність екстремумів. Знаходимо критичні (стаціонарні) точки:

$$C'_x(x, y) = (250 - 4x - 7y + 0,2x^2 + 0,1y^2)'_x = -4 + 0,4x,$$

$$C'_y(x, y) = (250 - 4x - 7y + 0,2x^2 + 0,1y^2)'_y = -7 + 0,2y,$$

$$\begin{cases} C'_x = 0, \\ C'_y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -4 + 0,4x = 0, \\ -7 + 0,2y = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 10, \\ y = 35. \end{cases}$$

Маємо $M(10;35)$ – критичну (стаціонарну) точку.

Перевіримо виконання достатніх умов існування екстремуму для критичної (стаціонарної) точки $M(10;35)$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку та їх значення в критичній (стаціонарній) точці $M(10;35)$:

$$C''_{xx}(x, y) = (-4 + 0,4x)'_x = 0,4;$$

$$A = C''_{xx}(10; 35) = 0,4;$$

$$C''_{xy}(x, y) = (-4 + 0,4x)'_y = 0;$$

$$B = C''_{xy}(10; 35) = 0;$$

$$C''_{yy}(x, y) = (-7 + 0,2y)'_y = 0,2;$$

$$C = C''_{yy}(10; 35) = 0,2.$$



Маємо:

$$\Delta(M) = \begin{vmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0,2 \end{vmatrix} = 0,08.$$

Отримали $\Delta(M) > 0$, отже в точці $M(10;35)$ функція витрат $C(x, y)$ має екстремум.

Оскільки $A=0,4>0$, то в точці $M(10;35)$ функція $C(x, y)$ має локальний мінімум.

Обчислимо мінімальні витрати малого підприємства при виготовленні 10 тис.од. першого виду та 35 тис.од. другого видів канцелярських товарів:

$$C_{min} = C(10; 35) = 250 - 4 \cdot 10 - 7 \cdot 35 + 0,2 \cdot 10^2 + 0,1 \cdot 35^2 = 250 - 40 - 245 + 20 + 122,5 = 107,5 \text{ (тис. грн.)}.$$

Відповідь: $x = 10$ (тис. од.), $y = 35$ (тис. од.), $C_{min} = 107,5$ (тис. грн.).

ЛІТЕРАТУРА

1. Kaidan N. The use of MAPLE CMS in the course of studying the discipline «higher and discrete mathematics» by students of economic specialties. *Міжнародна науково-технічна конференція «MININGMETALTECH 2023 – Гірничо-металургійний комплекс: інтеграція бізнесу, технологій та освіти»* 29–30 листопада 2023 року, 2023, С. 243-245.
2. Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Г. Комп'ютерна дискретна математика : підручник. Харків : «Компанія СМІТ», 2004. 480 с.
3. Вища математика. Елементи лінійної алгебри. Практикум : навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей / уклад. М. В. Савчук. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 39 с. URL: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/41841>.
4. Грудкіна Н. С., Самойленко Д. О., Міняйло Д. О. Використання системи комп'ютерної математики MAPLE для розв'язання задач інженерної математики з автоматизованим розрахунком. *Наукові відкриття та фундаментальні наукові дослідження: світовий досвід* : матеріали III Міжнародної наукової конференції, м. Вінниця, 24 листопада, 2023 р. Вінниця, 2023. С. 402-403.
5. Грудкіна Н. С., Колесников С. О., Старов Д. В., Чехута О. В. Впровадження ІКТ під час викладання математичних дисциплін здобувачам технічних, економічних та ІТ-спеціальностей. *Сучасні інформаційні технології, засоби автоматизації та електропривод* : матеріали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції, 18–20 квітня 2024 р. Краматорськ – Тернопіль, 2024. С. 204-206.
6. Задерей П. В., Лагода О. А., Нестеренко О. Б., Харитоновна М. О. Інтегральне числення : навч. посіб. Київ : КНУТД, 2021. 216. URL: https://er.knutd.edu.ua/bitstream/123456789/19923/1/Integral_NP_2021.pdf.
7. Інженерна математика та статистика : методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань із застосування векторної та лінійної алгебри, диференціального та інтегрального числення, диференціальних рівнянь до розв'язування прикладних задач (для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти) / уклад. Н. С. Грудкіна. Запоріжжя : ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА». 2024. 26 с.
8. Ічанська Н. В., Лозицький Д. Ю. Використання математичного апарату та ІКТ для розв'язання прикладних задач. *Науковий вісник Ужгородського університету*. Серія «Математика і інформатика». 2023. Т. 43. Вип. 2. С. 119-129. DOI:10.24144/2616-7700.2023.43(2).
9. Кайдан Н. В., Тураненко Х. О. Використання систем комп'ютерної математики при розв'язанні завдань теорії графів. *Збірник*



наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. 2017. № 7. С. 129-135.

10. Михалевич В. М. Використання систем комп'ютерної математики у процесі навчання студентів ВНЗ : монографія. Вінниця : ВНТУ, 2016. 279 с.

11. Пасічник Я. А. Вища математика : підручник. Острог : Вид-во НаУОА, 2021. 432 с. URL: <https://lib.oa.edu.ua/files/funds/vudavnutstvo/1-5,425-430,432.pdf>.

12. Скуратовський Р. В. Вища математика з прикладами і задачами : підручник. Київ : Національна академія управління, 2021. 232 с. URL: <https://nam.kyiv.ua/files/publications/matematika-2021.pdf>.

13. Liengme B. V. Maple: A Primer. Morgan & Claypool Publishers, 2019. 171 p. DOI: <https://doi.org/10.1088/2053-2571/ab0bb3>.

14. Maple : веб-сайт. URL: <https://www.maplesoft.com/products/Maple/> (дата звернення: 15.09.24).



Навчально-методичне видання

Грудкіна Наталія Сергіївна
Кайдан Наталія Володимирівна

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
до виконання індивідуальних завдань
з основ дискретної математики, векторної та лінійної
алгебри, диференціального числення функції однієї та
багатьох змінних

Самостійне електронне мережеве видання

Публікується в авторській редакції