ВИБІР МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОПЕРЕДАЧІ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ПРОЦЕСІВ В МЕТАЛУРГІЙНІЙ ПРОМИСЛОВОСТІ

Студентка гр. 136-22-1 І.В. Нефьодова
Керівники – ст. викладач[1] С.О. Мірошниченко,
канд. техн. наук, доцент[1] В.В. Біляєва
Кафедра природничо-наукових та загально-інженерних дисциплін
ТОВ «ТУ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА», м. Запоріжжя, Україна

Розробка математичних моделей процесів теплопередачі, які визначають хід більшості технологічних операцій в металургії, є важливою складовою проєктування систем автоматизованого керування та оптимізації роботи сучасного металургійного виробництва. Точність моделювання цих процесів безпосередньо впливає на ефективність вказаних систем та їх відповідність експлуатаційним вимогам. При цьому вибір відповідної моделі теплопровідності має ґрунтуватися на раціональному балансі між точністю отримуваних результатів та обчислювальними витратами.

Зазвичай для інженерних задач моделювання використовують одно- та/або двовимірні моделі теплопровідності. Одновимірна модель теплопровідності базується на припущенні, що температурне поле змінюється лише вздовж однієї просторової координати. Математично вона описується рівнянням:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + q_v, \qquad (1.1)$$

де ρ – густина матеріалу, c_p – питома теплоємність, T – температура, t – час, λ – коефіцієнт теплопровідності, x – просторова координата, q_υ – об'ємна густина джерела тепла [1].

Двовимірна модель теплопровідності враховує зміну температури у двох просторових координатах і описується рівнянням:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + q_v, \qquad (1.2)$$

де λ_x та λ_y – коефіцієнти теплопровідності в напрямках x та y відповідно [2].

Для стаціонарних задач, коли температурне поле не змінюється з часом, рівняння (1.1, 1.2) спрощуються до наступної форми:

для одновимірного випадку:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + q_v = 0, \qquad (1.3)$$

для одновимірного випадку:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + q_v = 0. \qquad (1.4)$$

Для розв'язання рівнянь теплопровідності можуть бути застосовані різні чисельні методи, але найбільшого поширення набули методи скінченних різниць, скінченних елементів та граничних елементів. В таблиці 1 наведено порівняння обчислювальної складності [3] цих методів для одновимірної та двовимірної моделей.

Таблиця 1. Порівняння обчислювальної складності (O(g(N))) чисельних методів

Метод	**Модель**	
	Одновимірна	**Двовимірна**
Метод скінченних різниць	O(n)	O(n^2)
Метод скінченних елементів	O(n)	O(n^2)
Метод граничних елементів	O(1)	O(n^3)

де n — кількість вузлів дискретизації в одному напрямку.

При використанні методу скінченних різниць для одновимірної стаціонарної задачі дискретизація приводить до системи лінійних рівнянь [4]:

$$\frac{\lambda_{i+1/2}}{\Delta x^2}(T_{i+1} - T_i) - \frac{\lambda_{i-1/2}}{\Delta x^2}(T_i - T_{i-1}) + q_{vi} = 0 \qquad (1.5)$$

Для двовимірної моделі аналогічна система має вигляд [5]:

$$\frac{\lambda_{x,i+1/2,j}}{\Delta x^2}\left(T_{i+1,j} - T_{i,j}\right) - \frac{\lambda_{x,i-1/2,j}}{\Delta x^2}\left(T_{i,j} - T_{i-1,j}\right) + \qquad (1.6)$$

$$+\frac{\lambda_{y,i,j+1/2}}{\Delta y^2}\left(T_{i,j+1} - T_{i,j}\right) - \frac{\lambda_{y,i,j-1/2}}{\Delta y^2}\left(T_{i,j} - T_{i,j-1}\right) + q_{vi,j} = 0$$

Проведено порівняльний аналіз одновимірної та двовимірної моделей теплопровідності за кількома ключовими параметрами [6], результати якого наведено в таблиці 2.

Таблиця 2. Порівняння одновимірної та двовимірної моделей теплопровідності

Параметр	**Модель**	
	Одновимірна	**Двовимірна**
Точність моделювання для тіл зі співвідношенням розмірів > 10:1	висока	надмірна
Точність моделювання для тіл зі співвідношенням розмірів < 10:1	недостатня	висока
Обчислювальні витрати	низькі	від середніх до високих

Параметр	Модель	
	Одновимірна	Двовимірна
Складність задання граничних умов	низька	середня
Можливість моделювання анізотропних матеріалів	обмежена	широка
Час розрахунку (відносний)	1	10-100

Аналізуючи результати порівняння можна зробити висновок, що одновимірна модель є ефективною для систем з вираженою одновимірною геометрією, таких як стержні, труби з тонкими стінками, та теплоізоляційні шари. Математично це відповідає випадкам, коли градієнт температури в одному напрямку значно перевищує градієнти в інших напрямках, що можна виразити як:

$$\left|\frac{\partial T}{\partial x}\right| \gg \left|\frac{\partial T}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial T}{\partial z}\right| \tag{1.7}$$

Двовимірна модель є необхідною для систем з вираженою двовимірною геометрією, таких як пластини, оребрені поверхні, та поперечні перерізи протяжних конструкцій. Особливо важливо застосовувати двовимірну модель у випадках наявності теплових містків, концентраторів теплового потоку, а також при складній конфігурації граничних умов.

Експериментальні дослідження [7-9] показують, що похибка одновимірної моделі порівняно з двовимірною для об'єктів зі співвідношенням розмірів менше 5:1 може перевищувати 15%, що є неприйнятним для багатьох інженерних задач.

Дослідження ефективності обчислень показало, що час розрахунку для двовимірної моделі зростає квадратично відносно кількості вузлів дискретизації в одному напрямку, тоді як для одновимірної моделі зростання є лінійним. Це означає, що при однаковій щільності сітки дискретизації двовимірна модель потребує значно більших обчислювальних ресурсів.

При проведенні параметричних досліджень або оптимізації, що вимагають багаторазових розрахунків із різними вхідними параметрами, оптимальним підходом є використання одновимірної моделі на етапі попереднього аналізу з подальшим уточненням результатів за допомогою двовимірної моделі для найбільш перспективних варіантів.

Для нестаціонарних задач різниця в обчислювальних витратах стає ще більш значущою, оскільки розрахунок необхідно проводити для кожного кроку за часом. Відношення часу обчислень може бути оцінено як:

$$\frac{t_{2D}}{t_{1D}} \approx \frac{n_y \cdot \alpha_{2D}}{\alpha_{1D}} \tag{1.8}$$

де n_y — кількість вузлів дискретизації в напрямку y, а α_{2D} та α_{1D} — коефіцієнти, що характеризують ефективність алгоритму розв'язання систем лінійних рівнянь для двовимірної та одновимірної моделей відповідно.

На основі проведеного аналізу можна сформулювати наступні практичні рекомендації щодо вибору моделі теплопровідності.

Одновимірну модель доцільно застосовувати для попередніх оціночних розрахунків на етапі концептуального проєктування та при проведенні параметричних досліджень, що вимагають багаторазових розрахунків; для систем зі співвідношення характерних розмірів більше 10:1 та для випадків, коли граничні умови не змінюються вздовж неосновних координат; а також при моделюванні процесів теплопередачі в композитних шаруватих структурах з переважним напрямком теплового потоку перпендикулярно до шарів.

Двовимірну модель слід використовувати у випадках, коли характерні геометричні розміри систем є порівнянними у двох напрямках та при наявності неоднорідних граничних умов; у випадках значної анізотропії теплофізичних властивостей матеріалів; при моделюванні теплових містків та концентраторів теплового потоку; а також у задачах оптимізації форми конструкції для мінімізації теплових втрат

Висновки:

1. Проведений порівняльний аналіз одновимірної та двовимірної моделей теплопровідності показав, що вибір моделі має ґрунтуватися на балансі між точністю результатів та обчислювальними витратами з урахуванням геометричних особливостей досліджуваного об'єкта та характеру теплових процесів.

2. Одновимірна модель забезпечує достатню точність для об'єктів з вираженою одновимірною геометрією при суттєво менших обчислювальних витратах, що робить її ефективною для попередніх та параметричних досліджень. Двовимірна модель є необхідною для точного моделювання об'єктів зі складною геометрією та неоднорідними граничними умовами, проте потребує значно більших обчислювальних ресурсів.

3. Раціональний підхід до моделювання процесів теплопередачі полягає у комбінуванні обох моделей: використання одновимірної моделі на етапі попереднього аналізу з подальшим уточненням результатів за допомогою двовимірної моделі для найбільш критичних або складних ділянок конструкції.

4. Подальші дослідження мають бути спрямовані на розробку адаптивних алгоритмів, які автоматично обирають оптимальну модель для різних ділянок досліджуваного об'єкта, а також на вдосконалення методів скорочення обчислювальних витрат при використанні двовимірної моделі.

Посилання

1. Poirier D. R., Geiger G. H. Transport Phenomena in Materials Processing. Cham : Springer International Publishing, 2016. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-48090-9 (date of access: 09.03.2025).

2. Özişik M. N. Finite Difference Methods in Heat Transfer. CRC Press, 2017. URL: https://doi.org/10.1201/9781315168784 (date of access: 01.03.2025).
3. Hopcroft J. E., Ullman J. D., Motwani R. Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation (3rd Edition). 3rd ed. Addison Wesley, 2006. 535 p.
4. LeVeque R. J. Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: Steady-state and time-dependent problems. Philadelphia , PA : Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007. 341 p.
5. Patankar S. V. Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. CRC Press, 2018. URL: https://doi.org/10.1201/9781482234213 (date of access: 11.03.2025).
6. Computational Fluid Dynamics / ed. by J. F. Wendt. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2009. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-85056-4 (date of access: 02.03.2025).
7. Two-dimensional numerical study of a heat and mass exchanger for a dew-point evaporative cooler / Y. Liu et al. Energy. 2019. Vol. 168. P. 975–988. URL: https://doi.org/10.1016/j.energy.2018.11.135 (date of access: 15.02.2025).
8. ISO 6946:2017. Building components and building elements — Thermal resistance and thermal transmittance — Calculation methods
9. Pakari A., Ghani S. Comparison of 1D and 3D heat and mass transfer models of a counter flow dew point evaporative cooling system: Numerical and experimental study. *International Journal of Refrigeration*. 2019. Vol. 99. P. 114–125. URL: https://doi.org/10.1016/j.ijrefrig.2019.01.013 (date of access: 10.02.2025)

DIE VORTEILE DER KOMBINATION VON ROBOTIK UND KÜNSTLICHER INTELLIGENZ

Magisterstudentin O.R. Osadcha
Betreuerin — M. L. Smyrnowa
Ukrainische Staatliche Universität für Wissenschaft und Technologien
Stadt Dnipro, Ukraine

Robotik ist ein modernes Wissenschaftsgebiet, das Ingenieurwesen, Programmierung und künstliche Intelligenz vereint. Damit können Sie Roboter erstellen, die eine Vielzahl von Aufgaben ausführen können, für die bisher die Anwesenheit von Menschen erforderlich war. Dank der Robotik haben Arbeitnehmer die Möglichkeit, ihr Potenzial effizienter zu nutzen und werden von gefährlichen oder monotonen Arbeiten befreit. [1]

Die Roboterautomatisierung ist seit langem ein Eckpfeiler der modernen Fertigung. Sie vereinfacht wiederkehrende Aufgaben, erhöht die Genauigkeit und ergänzt die menschliche Arbeitskraft. Durch die jüngsten Fortschritte in der