ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ:

методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань

Запоріжжя 2025

metinvest polytechnic

УДК 519.8:004.9(072)
М54

Рекомендовано Науково-методичною радою
ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»
(протокол № 8 від 27.06.2025 р.)

Укладач
Кайдан Н.В., канд. фіз-мат. наук, доцент.

М54 Методи дослідження операцій: методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань / уклад. Н. В. Кайдан. Запоріжжя : ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА». 2025. 44 с

У методичних рекомендаціях подано інформацію щодо кейсу задач та системи оцінювання індивідуального завдання. Посібник містить приклади розв'язання з поясненням ключових формул, послідовності дій та візуального подання результатів у такому обсязі, що забезпечує успішне виконання завдання. Матеріали спрямовані на покращення якості виконання роботи, розвиток умінь розв'язувати прикладні задачі, зокрема з використанням програмного забезпечення Maple та табличного процесора Excel. Видання рекомендовано для здобувачів освіти комп'ютерних спеціальностей усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня.

УДК 519.8:004.9(072)

ЗМІСТ

ВСТУП

Освітній компонент «Методи дослідження операцій» є невід’ємною частиною математичної та природничо-наукової підготовки здобувачів освіти комп’ютерних спеціальностей. Курс орієнтований на формування вмінь застосовувати математичні моделі та аналітичні методи для розв’язання задач оптимізації, прийняття рішень, аналізу систем та процесів у різних сферах діяльності. Особлива увага приділяється формалізації прикладних задач, побудові моделей, вибору відповідних методів та інтерпретації результатів. Практична цінність курсу полягає в опануванні навичок оптимального планування, управління ресурсами, аналізу ефективності систем і побудови рішень в умовах обмежень.

Курс має прикладну спрямованість і передбачає активне використання комп’ютерних технологій, математичних пакетів (зокрема, Maple) та табличних редакторів (таких як Excel), що дозволяє здобувачам освіти не лише глибше зрозуміти сутність математичних методів, а й ефективно реалізовувати їх на практиці. Протягом вивчення дисципліни здобувачі освіти виконують індивідуальні завдання, що охоплюють основні напрями методів дослідження операцій. Методичні рекомендації містять опис вимог до оформлення, критерії оцінювання, типові приклади, алгоритми розв’язання, а також графічні інтерпретації результатів. Вони забезпечують методичну підтримку для успішного виконання завдань та сприяють розвитку навичок системного мислення, аналізу даних, побудови моделей і обґрунтованого прийняття рішень.

ВИМОГИ ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Під час виконання індивідуального завдання кожному здобувачу освіти надається набір задач, обсяг і складність яких є однаковими для всіх і відповідають варіанту, визначеному його порядковим номером у списку академгрупи. Варіант затверджується викладачем у межах відповідного освітнього компонента та змістового модуля. Для виконання першого індивідуального завдання рекомендується застосовувати систему комп’ютерної математики Maple – як для полегшення обчислень і побудови графіків, так і для створення автоматизованих модулів розрахунку прикладних задач. Друге завдання передбачає використання табличного процесора Excel.

Завдання виконується самостійно в зручний для здобувача освіти час, із дотриманням дедлайнів, зазначених у розділі «Розподіл балів за контрольними точками та графік їх виконання». Результати розв’язання подаються у платформу Moodle у форматі .docx, .pdf, .jpg, .png або .txt. У випадку використання Maple, додатково подається файл з розширенням .mw., а у випадку використання табличного процесора Excel подається файл з розширенням .xlsx.

Оцінка роботи базується на таких критеріях: логічність і обґрунтованість розв’язання, правильність побудови моделі, точність результатів, якість їх аналізу та наявність графічної інтерпретації. Використання інструментів штучного інтелекту дозволяється, але результат має відповідати вимогам до якості, мови, термінології й структури. Невідповідність цим критеріям може призвести до зниження оцінки.

Перевірка виконаного завдання триває до одного тижня після завершення строку подачі. У разі наявності недоліків здобувач освіти має право внести виправлення до передостаннього тижня семестру.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 1. «РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ»

Теоретичні відомості

Симплекс-метод – це метод послідовного переходу від одного базисного розв’язку (вершини багатогранника розв’язків) системи обмежень задачі лінійного програмування до іншого базисного розв’язку доти, поки цільова функція не набуде оптимального значення (максимуму або мінімуму).

Симплекс-метод є універсальним методом, який дозволяє розв’язувати будь-яку задачу лінійного програмування, тоді як графічний метод придатний лише для систем обмежень із двома змінними.

Симплекс-метод був запропонований американським математиком Р. Данцігом у 1947 році й відтоді широко використовується для розв’язання задач лінійного програмування з тисячами змінних і обмежень у промисловості.

Будь-яке невід’ємне розв’язання системи обмежень називається допустимим розв’язанням.

Нехай задана система з m обмежень і n змінними ($m < n$).

Допустимим базисним розв’язанням називається розв’язання, що містить m невід’ємних основних (базисних) змінних і $n - m$ неосновних (вільних) змінних.

У базисному розв’язанні неосновні змінні дорівнюють нулю, тоді як основні змінні, як правило, відмінні від нуля, тобто є додатними числами.

Будь-які m змінних у системі m лінійних рівнянь із n змінними називаються основними, якщо визначник, складений із коефіцієнтів при цих змінних, є відмінним від нуля. У такому разі інші $n - m$ змінних називаються неосновними (або вільними).

Алгоритм симплекс-методу

Крок 1. Привести задачу лінійного програмування до канонічної форми.

Для цього потрібно перенести вільні члени в праві частини (якщо серед них є від'ємні, відповідне рівняння або нерівність слід помножити на −1) та ввести додаткові змінні в кожне обмеження (зі знаком «плюс», якщо в початковій нерівності знак «менше або дорівнює», і зі знаком «мінус», якщо «більше або дорівнює»).

Крок 2. Якщо в отриманій системі є m рівнянь, то m змінних прийняти за основні, виразити основні змінні через неосновні і знайти відповідний базисний розв'язок. Якщо знайдений базисний розв'язок є допустимим, перейти до нього.

Крок 3. Виразити цільову функцію через неосновні змінні допустимого базисного розв'язку.

Якщо шукаємо максимум (мінімум) лінійної форми і в її виразі немає неосновних змінних із від'ємними (позитивними) коефіцієнтами, критерій оптимальності виконано, і отримане базисне розв'язання є оптимальним — розв'язання завершено.

Якщо при пошуку максимуму (мінімуму) в виразі цільової функції є неосновні змінні з від'ємними (позитивними) коефіцієнтами, потрібно перейти до нового базисного розв'язання.

Крок 4. Серед неосновних змінних, що входять у лінійну форму з від'ємними (додатніми) коефіцієнтами, обирають ту, яка має найбільший (за модулем) коефіцієнт, і переводять її в основні змінні. Перейти до кроку 2.

Важливі умови

- Якщо допустиме базисне розв'язання дає оптимум лінійної форми (критерій оптимальності виконано), але у виразі лінійної форми через неосновні змінні відсутня хоча б одна з них, тоді отримане оптимальне розв'язання не єдине.
- Якщо у виразі лінійної форми присутня неосновна змінна з від'ємним коефіцієнтом у разі максимізації (або з додатним коефіцієнтом

у разі мінімізації), і ця змінна у всіх рівняннях системи обмежень на поточному кроці також має від'ємні коефіцієнти або взагалі не входить, тоді лінійна форма не обмежена за даної системи обмежень. У цьому випадку її максимальне (або мінімальне) значення записується наступним чином: $F_{max} = +\infty \quad (F_{min} = -\infty)$

Кейс задач індивідуального завдання 1

Умова: Виробниче підприємство «Метінвест» планує випускати два види сталевої продукції: гарячекатану сталь та холоднокатану сталь. Для виготовлення цієї продукції використовуються три типи ресурсів: робоча сила, сировина (руди та доменні матеріали) та прокатне обладнання. Загальний обсяг ресурсів у розрахунку на один виробничий тиждень, витрати кожного ресурсу на одиницю відповідного виду продукції та продажна ціна одиниці продукції наведені у таблиці. Необхідно визначити, скільки тон кожного виду сталі слід виробити з наявних ресурсів, щоб загальна виручка підприємства від реалізації продукції була максимальною. Передбачається, що попит на обидва види продукції є необмеженим.

Розв'язати поставлену задачу лінійного програмування та здійснити економіко-математичний аналіз отриманих результатів. Для цього необхідно:

Завдання 1. Побудувати математичну модель задачі у вигляді цільової функції та системи обмежень. (2 бали)

Завдання 2. Використати симплекс-метод із використанням симплекс-таблиць для знаходження оптимального рішення. (10 балів)

Завдання 3. Використати симплекс-метод із використанням алгебраїчних перетворень для знаходження оптимального рішення. (5 балів)

Завдання 4. Розв’язати задачу лінійного програмування за допомогою Maple. (3 бали)

Варіанти:

1.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
3066	14	6
1044	9	2
371	7	1
Ціна 1 од.	10	4

2.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
1533	7	3
2088	18	4
371	7	1
Ціна 1 од.	10	4

3.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
1533	7	3
1044	9	2
742	14	2
Ціна 1 од.	10	4

4.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
4599	21	9
1044	9	2
371	7	1
Ціна 1 од.	10	4

5.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
1533	7	3
3132	27	6
371	7	1
Ціна 1 од.	10	4

6.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
1533	7	3
1044	9	2
1113	21	3
Ціна 1 од.	10	4

7.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
6132	28	12
1044	9	2
371	7	1
Ціна 1 од.	10	4

8.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
1533	7	3
4176	36	8
371	7	1
Ціна 1 од.	10	4

9.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
1533	7	3
1044	9	2
1484	28	4
Ціна 1 од.	10	4

10.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
7665	35	15
1044	9	2
371	7	1
Ціна 1 од.	10	4

11.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
3066	14	6
1044	9	2
371	7	1
Ціна 1 од.	10	4

12.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
1533	7	3
2088	18	4
371	7	1
Ціна 1 од.	10	4

13.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
1533	7	3
1044	9	2
742	14	2
Ціна 1 од.	10	4

14.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
4599	21	9
1044	9	2
371	7	1
Ціна 1 од.	10	4

15.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
1533	7	3
3132	27	6
371	7	1
Ціна 1 од.	10	4

16.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
1533	7	3
1044	9	2
1113	21	3
Ціна 1 од.	10	4

17.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
6132	28	12
1044	9	2
371	7	1
Ціна 1 од.	10	4

18.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
1533	7	3
4176	36	8
371	7	1
Ціна 1 од.	10	4

19.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
1533	7	3
1044	9	2
1484	28	4
Ціна 1 од.	10	4

20.

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
7665	35	15
1044	9	2
371	7	1
Ціна 1 од.	10	4

Приклад розв’язання індивідуального завдання 1

Завдання 1. Побудувати математичну модель задачі у вигляді цільової функції та системи обмежень. (2 бали)

Обсяг ресурсів	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції	
	$П_1$	$П_2$
-2	1	-2
-4	-1	-1
2	1	-1
6	0	1
Ціна 1 од.	1	2

Розв’язання.

Побудуємо математичну модель цієї задачі:

Цільовою функцією задачі є загальний прибуток від реалізації готової продукції

$$F = x_1 + 2x_2$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Завдання 2. Використати симплекс-метод із використанням симплекс-таблиць для знаходження оптимального рішення. (10 балів)

Симплекс-таблиці є дуже наочними. Існує кілька варіантів правил роботи із симплекс-таблицями. Ми розглянемо правило, яке найчастіше називають правилом ведучого стовпця і ведучого рядка.

Знайти максимум функції

$$F = x_1 + 2x_2$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Розв'язання.

Вводимо додаткові невід'ємні змінні x_3, x_4, x_5, x_6 і зводимо дану систему нерівностей до еквівалентної їй системи рівнянь.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ x_2 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1,2, \dots ,6)$$

Це було зроблено з дотриманням такого правила: якщо в початковому обмеженні стоїть знак «менше або дорівнює», то додаткову змінну потрібно додавати, а якщо «більше або дорівнює» – то додаткову змінну потрібно віднімати.

Введені додаткові змінні приймаємо за основні (базисні). Тоді x_1 і x_2 – неосновні (вільні) змінні.

Виразивши основні (базисні) змінні через неосновні (вільні), отримаємо

$$\begin{cases} x_3 = -2 - (x_1 - 2x_2) \\ x_4 = -4 - (-x_1 - x_2) \\ x_5 = 2 - (x_1 - x_2) \\ x_6 = 6 - (x_2) \end{cases}$$

Цільову функцію також виразимо через неосновні (вільні) змінні.

$F = 0 - (-x_1 - 2x_2)$ або запишемо $F - x_1 - 2x_2 = 0$

Із коефіцієнтів при змінних (невідомих) побудуємо першу симплекс-таблицю 1.1.

Таблиця 1.1

Таблиця 1								
Базисні невідомі	Вільні члени b_i	Вільні невідомі						Допоміжні коефіцієнти $\dfrac{b_i}{\text{ведучий стовпчик}}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_3	-2	1	-2	1	0	0	0	$\frac{-2}{-2} = 1$
x_4	-4	-1	-1	0	1	0	0	$\frac{-4}{-1} = 4$
x_5	2	1	-1	0	0	1	0	$\frac{2}{-1} = \infty$
x_6	6	0	1	0	0	0	1	$\frac{6}{1} = 6$
F	0	-1	-2	0	0	0	0	

Останній рядок таблиці, у якому записано цільову функцію та коефіцієнти при вільних змінних, будемо називати індексним рядком.

Отримане розв’язання не є оптимальним, оскільки в індексному рядку коефіцієнти при вільних змінних від’ємні. Тобто оптимальним буде таке розв’язання, в якому коефіцієнти при вільних змінних в індексному рядку будуть більші або рівні нулю.

Для переходу до наступної таблиці знайдемо найбільше (за модулем) з чисел | -1 | і | -2 |. Це число 2. Отже, ведучий стовпець — це стовпець, у якому записано x_2.

Для визначення ведучого рядка знаходимо мінімум відношень вільних членів до елементів ведучого стовпця. *При цьому, якщо у* *чисельнику додатне число, а у знаменнику від'ємне – таке відношення вважається рівним нескінченності.*

Отже,

$$\min\{1,4,\infty,6\} = 1$$

Тому ведучий рядок – той, у якому записано x_3.

Ведучим елементом, таким чином, є -2.

Складаємо другу симплекс-таблицю.

Новий базисний елемент x_2 вписуємо у перший рядок, а у стовпець, де стояло x_2, вписуємо значення змінної x_3.

Заповнюємо перший рядок. Для цього всі числа, що стоять у ведучому рядку таблиці 1.1, ділимо на ведучий елемент (-2) і записуємо у відповідний рядок таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

Таблиця 2								
Базисні невідомі	Вільні члени b_i	Вільні невідомі						Допоміжні коефіцієнти $\frac{b_i}{\text{ведучий стовпчик}}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	1	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$1:\left(-\frac{1}{2}\right) = \infty$
x_4	-3	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$-3:\left(-\frac{3}{2}\right) = 2$
x_5	3	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$3:\frac{1}{2} = 6$
x_6	5	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$5:\frac{1}{2} = 10$
F	2	-2	0	-1	0	0	0	

Для отримання інших рядків таблиці 1.2 скористаємось методом прямокутника.

Наприклад, для отримання вільного члена другого рядка таблиці 1.2 від числа таблиці 1.1, а саме від (-4) віднімаємо добуток (-2)*(-1) та ділимо на ведучий елемент (-2). Отримуємо −3.

	x_1	x_2
-2	1	-2
-4	-1	-1

Рисунок 1.1. - Метод прямокутника

Так само заповнюється і індексний рядок.

Отримане таким чином розв'язання знову не є оптимальним, оскільки в індексному рядку коефіцієнти при вільних змінних залишилися від’ємними.

Для переходу до наступної симплекс-таблиці знайдемо найбільше (за модулем) із чисел |−2| і |−1|, тобто модуль коефіцієнтів в індексному рядку. Це число 2. Отже, ведучий стовпець – це стовпець, у якому записано x_1.

Для пошуку ведучого рядка знайдемо мінімум відношень вільних членів до елементів ведучого стовпця. Отримуємо:

$$\min\{\infty, 2,6,10\} = 2$$

Отже, ведучий рядок – це рядок, у якому записано x_4, а ведучим елементом є $-\frac{3}{2}$.

Складаємо третю симплекс-таблицю 1.3.

Таблиця 1.3

Таблиця 3									
Базисні невідомі	Вільні члени b_i	Вільні невідомі						Допоміжні коефіцієнти $\frac{b_i}{\text{ведучий стовпчик}}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$2:\left(-\frac{1}{3}\right)=\infty$
x_1	2	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	$2:\left(-\frac{2}{3}\right)=\infty$
x_5	2	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$2:\frac{1}{3}=6$
x_6	4	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$4:\frac{1}{3}=12$
F	6	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	0	

Отримане розв'язання знову не є оптимальним, оскільки коефіцієнти при вільних невідомих в індексному рядку знову є від'ємними.

Для переходу до четвертої симплекс-таблиці знайдемо найбільше з чисел $|-\frac{4}{3}|$ і $|-\frac{1}{3}|$. Це число $\frac{4}{3}$.

Отже, ведучий стовпець — це стовпець, у якому записано x_4.

Для пошуку ведучого рядка знайдемо мінімум модулів відношень вільних членів до елементів ведучого стовпця:

$$\min\{\infty, \infty, 6, 12\} = 6$$

Отже, ведучий рядок — той, у якому записано x_5, а ведучим елементом є $\frac{1}{3}$.

Складаємо четверту симплекс-таблицю 1.4.

Таблиця 1.4

Таблиця 4									
Базисні невідомі	Вільні члени b_i	Вільні невідомі						Допоміжні коефіцієнти $\frac{b_i}{\text{ведучий стовпчик}}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	4	0	1	-1	0	1	0	$4:(-1)=\infty$
x_1	6	1	0	-1	0	2	0	$6:(-1)=\infty$
x_4	6	0	0	-2	1	3	0	$6:(-2)=\infty$
x_6	2	0	0	1	0	-1	1	$2:1=2$
F	14	0	0	-3	0	4	0	

Отримане розв'язання також не є оптимальним, але воно вже краще за попередні, оскільки один із коефіцієнтів при вільних змінних в індексному рядку є невід’ємним. Для покращення плану переходимо до наступної симплекс-таблиці.

Для переведення чергової змінної з вільних до базисних вибираємо ведучий стовпець — той, у якому записано x_3.

$$\min\{\infty,\infty,\infty,2\}=2$$

Отже, ключовий рядок – той, у якому записано x_6, а ведучим елементом є 1.

Складаємо п’яту симплекс-таблицю 1.5.

Таблиця 1.5

Таблиця 5									
Базисні невідомі	Вільні члени b_i	Вільні невідомі						Допоміжні коефіцієнти $\frac{b_i}{\text{ведучий стовпчик}}$
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$\boldsymbol{x_2}$	**6**	0	1	0	0	0	1	
$\boldsymbol{x_1}$	**8**	1	0	0	0	1	1	
x_4	10	0	0	0	1	1	2	
x_3	2	0	0	1	0	-1	1	
$\boldsymbol{F}$	**20**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**3**	

Бачимо, що отримано оптимальне розв’язання, оскільки коефіцієнти при вільних невідомих в індексному рядку невід’ємні.

Відповідь:

$$x_1 = 8, \qquad x_2 = 6, \qquad F_{max} = 8 + 2 * 6 = 20$$

Завдання 3. Використати симплекс-метод із використанням алгебраїчних перетворень для знаходження оптимального рішення. (5 балів)

Розв'яжемо той самий приклад, використовуючи алгебраїчні перетворення.

Слід зазначити, що при розв'язанні цієї різновидності симплекс-методу краще не записувати цільову функцію у вигляді

$F = 0 - (-x_1 - 2x_2)$, оскільки при цьому легко заплутатися у знаках. Однак у цьому випадку пункт алгоритму, який визначає критерій оптимальності, буде модифікований наступним чином:

Якщо шукаємо максимум (мінімум) лінійної форми і у її виразі немає неосновних змінних із додатними (від'ємними) коефіцієнтами, то критерій оптимальності виконано, і отримане базисне рішення є оптимальним – розв'язання завершено. Якщо ж при пошуку максимуму (мінімуму) у виразі лінійної форми є одна або декілька неосновних змінних із додатними (від'ємними) коефіцієнтами, потрібно перейти до нового базисного рішення.

Знайти максимум функції

$$F = x_1 + 2x_2$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Розв'язання.

Крок 1. Вводимо додаткові невід'ємні змінні x_3, x_4, x_5, x_6 і зводимо дану систему нерівностей до еквівалентної їй системи рівнянь.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2 \\ x_2 + x_6 = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \; (j = 1,2,\dots,6)$$

Введені додаткові змінні приймаємо за основні, оскільки в цьому випадку базисне розв'язання системи легко знаходиться. Тоді x_1 і x_2 – неосновні змінні.

Виразивши основні змінні через неосновні, отримаємо

$$\begin{cases} x_3 = -2 - x_1 + 2x_2 \\ x_4 = -4 + x_1 + x_2 \\ x_5 = 2 - x_1 + x_2 \\ x_6 = 6 - x_2 \end{cases}$$

Отже, цьому розбиттю змінних на основні й неосновні відповідає базисне розв'язання (0;0;−2;−4;2;6), яке є недопустимим (дві змінні від'ємні), а тому не є оптимальним. Від цього базисного розв'язання переходимо до покращеного.

Щоб визначити, яку змінну потрібно перевести з неосновних до основних, розглянемо будь-яке з двох рівнянь останньої системи з від'ємними вільними членами, наприклад друге. Воно показує, що в основні змінні можна перевести x_1 і x_2, оскільки в цьому рівнянні вони мають додатні коефіцієнти (тобто при їх збільшенні, а це відбудеться при переведенні, змінна x_4 збільшиться).

Спробуємо перевести в основні змінну x_1. Щоб встановити, яку змінну потрібно перевести з основних у неосновні, знайдемо абсолютну величину найменшого відношення вільних членів системи до коефіцієнтів при x_1. Маємо

$x_1 = min(\infty; \frac{4}{1}; \frac{2}{1}; \infty) = 2.$

Це отримано з третього рівняння і показує, що в неосновні потрібно перевести змінну x_5, яка в початковому базисному рішенні має додатне значення. Отже, отримане базисне рішення, як і початкове, містить дві від'ємні компоненти, тобто при переході до такого базисного рішення покращення не відбудеться.

Якщо ж перевести в основні змінну x_2, то найменше відношення вільних членів до коефіцієнтів при x_2 дорівнює:

$$x_2 = min\,(\frac{2}{2}; \frac{4}{1}; \infty; \frac{6}{1}) = 1.$$

Це отримано з першого рівняння, де вільний член від'ємний. Отже, перевівши x_2 в основні, а x_3 – у неосновні змінні, ми отримаємо базисне рішення, в якому кількість від'ємних компонентів зменшиться на одну в порівнянні з початковим. Тому зупиняємось на цій можливості: переводимо x_2 в основні, а x_3 – у неосновні змінні. У наведеній вище системі рівнянь виділеним буде перше рівняння.

Крок II.

Основні змінні: x_2, x_4, x_5, x_6; неосновні змінні: x_1, x_3.

Виразивши нові основні змінні через нові неосновні, починаючи з виділеного на кроці I рівняння, у результаті отримаємо:

$$\begin{cases} x_2 = 1 + 0{,}5x_1 + 0{,}5x_3 \\ x_4 = -3 + 1{,}5x_1 + 0{,}5x_3 \\ x_5 = 3 - 0{,}5x_1 + 0{,}5x_3 \\ x_6 = 5 - 0{,}5x_1 - 0{,}5x_3 \end{cases}$$

Отже, маємо нове базисне рішення (0;1;0;−3;3;5), яке також є недопустимим, а тому не є оптимальним. Але в ньому, як і передбачалося, лише одна змінна є від'ємною (а саме x_4).

Від отриманого базисного рішення необхідно перейти до іншого. Розглянемо рівняння з від'ємним вільним членом, тобто друге рівняння. Воно показує, що в основні змінні можна перевести x_1 і x_3. Переводимо в основні змінні x_1. Знаходимо найменше з абсолютних величин відношень вільних членів системи до коефіцієнтів при x_1

$$x_1 = min(\infty; \frac{3}{1{,}5}; \frac{3}{0{,}5}; \frac{5}{0{,}5}) = 2.$$

Отже, у неосновні потрібно перевести x_4.

Оскільки найменше відношення отримано з другого рівняння, його виділяємо. У новому базисному розв'язанні вже не буде від'ємних компонентів, тобто воно є допустимим.

В особливих випадках розв'язання завершується на кроці ІІ: це, наприклад, випадки, коли максимум цільової функції – нескінченність або коли система не має жодного розв'язання.

Крок ІІІ.

Основні змінні: x_1, x_2, x_5, x_6; неосновні змінні: x_3, x_4.

Виразивши основні змінні через неосновні, отримаємо

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \\ x_2 = 2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \\ x_5 = 2 + \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \\ x_6 = 4 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 \end{cases}$$

Нове базисне рішення має вигляд (2;2;0;0;2;4). Чи є воно оптимальним, можна визначити, якщо виразити лінійну форму через неосновні змінні розглядуваного базисного рішення. Зробивши це, отримаємо: $F = 6 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{4}{3}x_4$

Оскільки ми шукаємо максимум лінійної форми, а знайшли лише одне допустиме рішення, продовжуємо перебір.

Переводимо в основні змінні x_4, що має більший додатний коефіцієнт.

Знаходимо:

$x_4 = min(\infty, \infty, \frac{2}{\frac{1}{3}}; \frac{4}{\frac{1}{3}}) = 6.$

Найменше відношення отримано з третього рівняння системи, тому його виділяємо. Це показує, що при $x_4 = 6$ змінна $x_5 = 0$, і тому вона перейде до числа неосновних змінних.

В окремих випадках розв'язання завершується на кроці III: це ситуація, коли оптимальне розв'язання – не єдине.

Крок IV.

Основні змінні: x_1, x_2, x_4, x_6; неосновні змінні: x_3,x_5. Виразивши основні змінні через неосновні, отримаємо

$$\begin{cases} x_1 = 6 + x_3 - 2x_5 \\ x_2 = 4 + x_3 - x_5 \\ x_4 = 6 + 2x_3 - 3x_5 \\ x_6 = 2 - x_3 + x_5 \end{cases}$$

Лінійна форма, виражена через ті ж самі неосновні змінні, має вигляд $F = 14 + 3x_3 - 4x_4$.

Продовжуємо перебір для пошуку максимуму.

Збільшення лінійної форми можливе при переході до нового базисного рішення, в якому змінна x_3 є основною.

Знаходимо $x_3 = min(\infty, \infty, \infty, \frac{2}{1}) = 2$.

Найменше відношення отримано з четвертого рівняння системи, і це показує, що при $x_3 = 2$, а змінна $x_6 = 0$ і переходить до числа неосновних змінних.

Крок V.

Основні змінні: x_1, x_2, x_3, x_4; неосновні змінні: x_5, x_6.

Виразивши основні змінні через неосновні, отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = 8 - x_5 - x_6 \\ x_2 = 6 - x_6 \\ x_3 = 2 + x_5 - x_6 \\ x_4 = 10 - x_5 - 2x_6 \end{cases}$$

Лінійна форма, виражена через неосновні змінні нового базисного рішення, має вигляд:

$F = 20 - x_5 - 3x_6.$

Критерій оптимальності для випадку максимізації лінійної форми виконано. Отже, базисне рішення (8;6;2;10;0;0) є оптимальним, а максимум лінійної форми $F_{max} = 20$.

Відповідь:

$$x_1 = 8, \qquad x_2 = 6, \qquad F_{max} = 20$$

Завдання 4. Розв’язати задачу лінійного програмування за допомогою Maple. (3 бали)

Розв’язання задач лінійного програмування графічним методом у Maple полягає в тому, що кожне обмеження системи подається у вигляді прямої на координатній площині. Для побудови області допустимих рішень у Maple використовують команду *inequal*, яка дозволяє візуалізувати множину точок, що задовольняють усі задані нерівності. Цільову функцію відображають у вигляді прямої певного рівня, яку будують за допомогою команди *implicitplot*. Для пошуку оптимального розв’язання пряму цільової функції паралельно пересувають до тієї межі допустимої області, де вона має останній спільний дотик. Точку перетину або дотику визначають аналітично, розв'язуючи відповідну систему рівнянь за допомогою команди *solve*. Після знаходження координат оптимальної точки її підставляють у вираз цільової функції для обчислення максимального або мінімального значення. Графічний метод в Maple дозволяє швидко візуалізувати умови задачі й зрозуміти розташування допустимої області, що особливо зручно для задач із двома змінними.

Знайти максимум функції

$$F = x_1 + 2x_2$$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Розв'язання.

В першій частині програми обчислимо максимум функції за допомогою наступних команд:

Optimization – підключаємо пакет для розв'язання задач оптимізації (максимізація/мінімізація функцій за умовами).

Plots – підключаємо пакет для побудови графіків (ліній, областей, кривих тощо).

Завдання цільової функції, яку потрібно максимізувати.

Збереження функції у змінну *Objective* для подальшого використання.

Задаємо шість обмежень

Команда *Maximize* шукає максимум функції *Objective* серед допустимих розв'язків, які задовольняють *Constraints*.

Вказано змінні $[x1, x2]$, які оптимізуються.

Результат зберігається у змінній *Solution*.

У результаті ми отримаємо пару (оптимальні значення змінних) і саме значення максимального F.

```
with(Optimization) :
with(plots) :

# Визначаємо цільову функцію
Objective := x1 + 2*x2 :

 # Визначаємо обмеження
Constraints := [
  -x1 + 2*x2 ≥ 2,
  x1 + x2 ≥ 4,
  x1 - x2 ≤ 2,
  x2 ≤ 6,
  x1 ≥ 0,
  x2 ≥ 0
 ]:

# Розв'язуємо задачу
Solution := Maximize(Objective, Constraints, variables = [x1, x2]);
                                        Solution := [20., [x1 = 8., x2 = 6.]]
```

Рисунок 1.2. - Знаходимо максимум функції за допомогою Maple

В другій частині програми побудуємо область допустимих розв’язків за допомогою наступних команд:

Implicitplot будує графіки кожного рівняння на площині $(x1, x2)$, для зручності кожна пряма має різний колір.

Команда *plots[inequal]* будує всю допустиму область, де виконуються всі обмеження.

Optionsfeasible зафарбовує допустиму зону у жовтий колір для наочності.

```
with(plots) :

# Визначення обмежень як рівнянь
constraint1 := −x1 + 2*x2 = 2 :
constraint2 := x1 + x2 = 4 :
constraint3 := x1 − x2 = 2 :
constraint4 := x2 = 6 :

# Побудова кожної прямої з різними кольорами
line1 := implicitplot(constraint1, x1 = −5 ..10, x2 = −10 ..10, color = red) :
line2 := implicitplot(constraint2, x1 = −5 ..10, x2 = −10 ..10, color = blue) :
line3 := implicitplot(constraint3, x1 = −5 ..10, x2 = −10 ..10, color = green) :
line4 := implicitplot(constraint4, x1 = −5 ..10, x2 = −10 ..10, color = magenta) :

# Побудова області допустимих рішень
ineqPlot := plots[inequal](
  {
   −x1 + 2*x2 ≥ 2,
   x1 + x2 ≥ 4,
   x1 − x2 ≤ 2,
   x2 ≤ 6,
   x1 ≥ 0,
    x2 ≥ 0
  },
  x1 = −5 ..10, x2 = −10 ..10,
  optionsfeasible = [color = yellow]
 ) :

# Об'єднання графіків
display(ineqPlot, line1, line2, line3, line4, title = "Область допустимих рішень з кольоровими лініями");
```

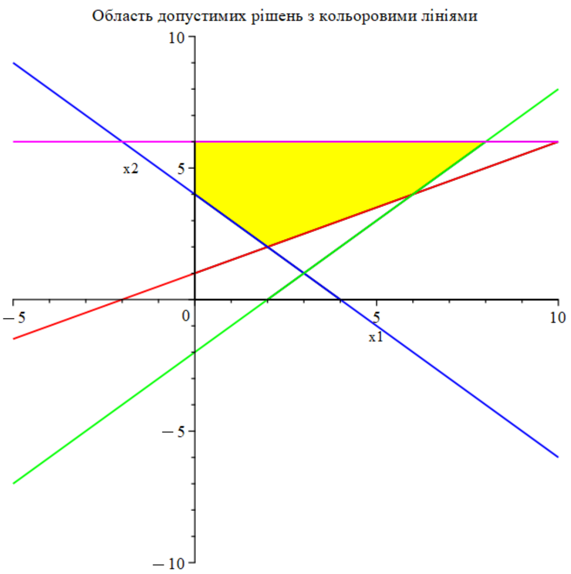


Рисунок 1.3. - Знаходимо область допустимих розв’язків за допомогою Maple

Відповідь:

$$x_1 = 8, \qquad x_2 = 6, \qquad F_{max} = 20$$

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ 2. «РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ ЗАСОБАМИ ТАБЛИЧНОГО ПРОЦЕСОРА EXCEL»

Теоретичні відомості

Транспортна задача є однією з фундаментальних задач лінійного програмування, що широко використовується для оптимізації логістичних процесів у різних галузях, зокрема в економіці, промисловості, енергетиці та управлінні ланцюгами постачання. Вона передбачає розподіл певного обсягу ресурсу (наприклад, товарів, сировини, енергії) між кількома постачальниками (джерелами) та споживачами таким чином, щоб задовольнити попит у кожному пункті призначення і при цьому мінімізувати загальні витрати на перевезення.

Кожен маршрут між постачальником і споживачем характеризується вартістю перевезення одиниці продукції, і саме ця вартість враховується в цільовій функції задачі. Основою математичної моделі є система рівнянь балансу, яка гарантує, що сумарна кількість відправлених товарів не перевищує доступних запасів, а також що кожен споживач отримає необхідну кількість ресурсів.

У випадку, коли загальний обсяг пропозиції дорівнює загальному попиту, задача вважається закритою. Якщо ці величини не збігаються, вводиться умовний фіктивний постачальник або споживач з нульовою вартістю перевезення, що дозволяє зберегти математичну узгодженість системи.

Розв’язання транспортної задачі зазвичай починається з побудови базисного (опорного) плану, який задовольняє усі обмеження, але не обов’язково є оптимальним. Далі за допомогою методу потенціалів або аналогічних методів здійснюється перевірка оптимальності отриманого плану і, за необхідності, виконується ітераційне його покращення.

Завдяки чіткій математичній структурі та можливості наочного графічного подання у вигляді таблиці або графа, транспортна задача є зручною для використання як у практичних застосуваннях, так і в навчальному процесі. Вона формує у здобувачів освіти уявлення про процес оптимізації, навички побудови моделей і прийняття обґрунтованих управлінських рішень на основі формалізованих даних.

Кейс задач індивідуального завдання 2

Завдання 1.

На дві бази, А1 і А2, надійшов однорідний вантаж у кількості *a1,* т на базу А1 і *a2,* т на базу А2. Отриманий вантаж потрібно перевезти у три пункти: *b1,* т у пункт В1, *b2,* т у пункт В2, *b3,* т у пункт В3. Відстані між пунктами відправлення і пунктами призначення зазначені в матриці R. Скласти план перевезень із мінімальними витратами. Вартість одного тонно-кілометра прийняти за одиницю.

1. Розв'язати задачу при заданих запасах і потребах.

2. Збільшити запаси на 10 %. Додаткову кількість запасів довільно розподілити між пунктами А1 і А2. Потреби залишаються без змін. Розв'язати задачу з новими умовами. Індивідуальні дані наведені в таблиці.

Завдання для аналітика:

У ході виконання завдання необхідно подати умову задачі у вигляді таблиці, здійснити її формалізацію, визначити економічний зміст цільової функції та системи обмежень, розв'язати задачу за допомогою спеціалізованого програмного забезпечення, провести аналіз отриманих результатів і представити розв'язок у таблиці для перевірки виконання обмежень, а також зробити економічний висновок. Звіт повинен містити мету роботи, умову задачі, її формалізацію, скріни процесу розв'язання та аналіз отриманого оптимального плану.

Варіанти індивідуальних завдань:

Варіант	*a1*	*a2*	*b1*	*b2*	*b3*	*R*
1	200	150	190	100	60	12, 15, 21, 14, 8, 15
2	150	200	140	100	110	8, 20, 7, 4, 14, 12
3	150	150	100	100	100	20, 3, 9, 14, 10, 12
4	250	250	150	170	180	13, 7, 16, 20, 9, 6
5	220	200	150	100	170	20, 17, 13, 6, 10, 9
6	200	230	190	100	140	12, 5, 16, 14, 10, 8
7	200	300	140	150	210	6, 11, 10, 17, 6, 4
8	200	250	190	150	110	6, 1, 7, 13, 4, 9
9	150	250	180	120	100	14, 6, 4, 17, 10, 9
10	250	200	180	100	170	12, 8, 21, 13, 4, 15
11	200	280	180	170	130	12, 21, 10, 13, 15, 13
12	200	200	170	120	110	28, 12, 7, 15, 14, 12
13	210	220	130	140	160	7, 3, 9, 34, 10, 12
14	150	180	110	120	100	34, 10, 12, 6, 5, 14
15	160	280	180	120	140	6, 13, 14, 25, 14, 7
16	260	240	170	160	170	4, 7, 8, 15, 11, 21
17	250	270	150	170	200	9, 16, 10, 12, 18, 12
18	250	200	175	125	150	5, 13, 18, 6, 10, 15
19	250	200	140	160	150	9, 15, 35, 15, 35, 12
20	230	250	180	170	130	13, 9, 5, 14, 5, 12

Приклад розв’язання замкнутої транспортної задачі

Нехай кількість пунктів відправлення і кількість пунктів призначення дорівнюють 2 (n = 2, m = 2). Запаси, потреби й вартість перевезень зазначені в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення			
		B_1		B_2	
A_1	100	x_{11}	4	x_{12}	2
A_2	150	x_{12}	3	x_{22}	6
Потреби		120		130	

Нехай x_{ij} – кількість вантажу, перевезеного з пункту A_i до пункту B_j . Перевіримо відповідність запасів і потреб:

$$100 + 150 = 250 = 120 + 130 = 250.$$

Задача замкнута. Цільова функція F дорівнює вартості всіх перевезень:

$$F = 4x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + 6x_{22} \quad (\min).$$

Система обмежень визначається такими умовами:

а) кількість вантажів, що вивозяться, дорівнює запасам:

$$x_{11} + x_{12} = 100,$$
$$x_{21} + x_{22} = 150;$$

б) кількість ввезених вантажів дорівнює потребам:

$$x_{11} + x_{21} = 120,$$
$$x_{12} + x_{22} = 130,$$

в) кількість вантажів, що вивозяться, не може бути від'ємною:

$$x_{11} \geq 0\ ;\ x_{12} \geq 0,\ x_{21} \geq 0;\ \ x_{22} \geq 0.$$

Отримали формалізовану задачу:

$$F = 4x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + 6x_{22}\ \ (\min).$$
$$x_{11} + x_{12} = 100,$$
$$x_{21} + x_{22} = 150,$$
$$x_{11} + x_{21} = 120,$$
$$x_{12} + x_{22} = 130,$$
$$x_{11} \geq 0,\ \ x_{12} \geq 0,\ \ x_{21} \geq 0,\ \ x_{22} \geq 0.$$

Приклад розв’язання замкнутої транспортної задачі в MS Excel

Нехай кількість пунктів відправлення і кількість пунктів призначення дорівнюють 2 (n = 2, m = 2). Запаси, потреби й вартість перевезень зазначені в таблиці 2.1.

Розв’язання задачі представлено на рис. 2.1–2.4.

N35 f_x

	A	B	C	D	E
1	*Розв’язання замкнутої транспортної задачі*				
2	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення		
3			B_1	B_2	
4	A_1	100	4	2	
5	A_2	150	3	6	
6	Потреби		120	130	
7					
8		*Результати*			
9	Вартість перевезень:	0			
10					
11	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення		
12			B_1	B_2	
13	A_1	0			
14	A_2	0			
15	Потреби		0	0	
16					
17					

Рисунок 2.1. - Робочий лист Excel з вихідними даними

	A	B	C	D
1	*Розв’язання замкнутої т*			
2	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
3			B_1	B_2
4	A_1	100	4	2
5	A_2	150	3	6
6	Потреби		120	130
7				
8		*Результати*		
9	Вартість перевезень:	=СУММПРОИЗВ(C4:D5;C13:D14)		
10				
11	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
12			B_1	B_2
13	A_1	=СУММ(C13:D13)		
14	A_2	=СУММ(C14:D14)		
15	Потреби		=СУММ(C13:C14)	=СУММ(D13:D14)
16				
17				

Рисунок 2.2. - Робочий лист Excel з формулами

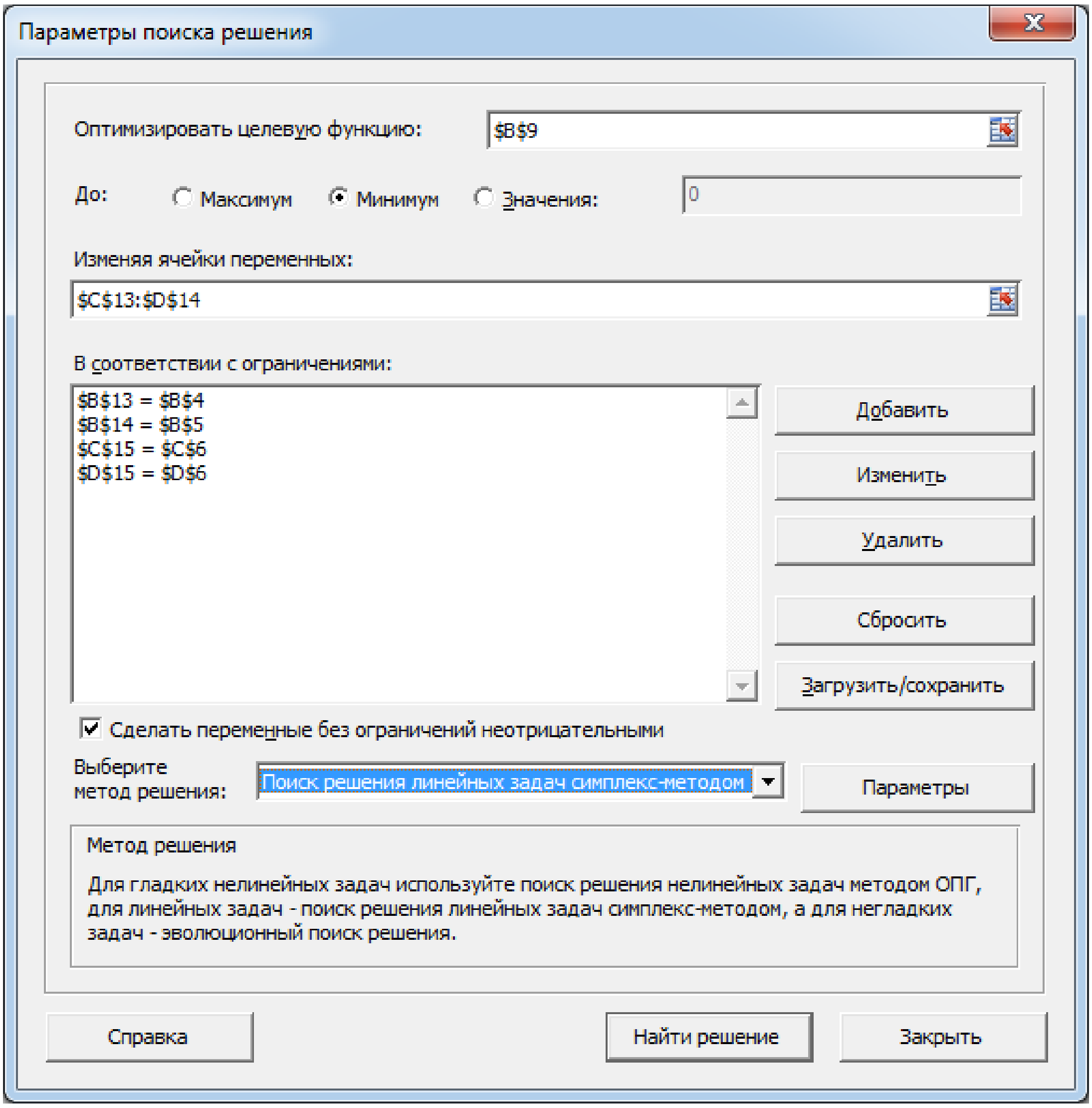


Рисунок 2.3. - Вікно «Пошук розв'язку»

	A	B	C	D
1	*Розв'язання замкнутої транспортної задачі*			
2	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
3			B_1	B_2
4	A_1	100	4	2
5	A_2	150	3	6
6	Потреби		120	130
7				
8		*Результати*		
9	Вартість перевезень:	740		
10				
11	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
12			B_1	B_2
13	A_1	100	0	100
14	A_2	150	120	30
15	Потреби		120	130
16				

Рисунок 2.4. - Робочий лист Excel з результатом

Розв’язавши задачу за допомогою Excel, отримали:

$$x_{11} = 0; \ \ x_{12} = 100; \ \ x_{21} = 120; \ \ x_{22} = 30; \ \ F = 740.$$

Мінімальна вартість перевезення вантажу – 740 гр. од. Переміщення вантажу від постачальників до споживачів оформимо у вигляді таблиці 2.2 розподілу.

Таблиця 2.2

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
		B_1	B_2
A_1	100	0	100
A_2	150	120	30
Потреби		120	130

З таблиці видно, що всі потреби задоволені і всі запаси вивезені.

Приклад розв’язання відкритої транспортної задачі

Нехай кількість пунктів відправлення і кількість пунктів призначення дорівнюють 2 (n = 2, m = 2). Запаси, потреби й вартість перевезень зазначені в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення			
		B_1		B_2	
A_1	120	x_{11}	4	x_{12}	2
A_2	180	x_{12}	3	x_{22}	6
Потреби		120		130	

Нехай x_{ij} – кількість вантажу, перевезеного з пункту A_i до пункту B_j . Перевіримо відповідність запасів і потреб:

$$(120 + 180 = 300) > (120 + 130 = 250).$$

Задача відкрита.

Цільова функція F дорівнює вартості всіх перевезень:

$$F = 4x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + 6x_{22} \quad (\min).$$

Система обмежень визначається наступними умовами:

а) кількість вантажів, що вивозяться, не більше запасів:

$$x_{11} + x_{12} \leq 120,$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 180;$$

б) кількість ввезених вантажів дорівнює потребам:

$$x_{11} + x_{21} = 120,$$
$$x_{12} + x_{22} = 130;$$

в) кількість вантажів, що вивозяться, не може бути від’ємною:

$$x_{11} \geq 0;\ \ x_{12} \geq 0,\ \ x_{21} \geq 0;\ \ x_{22} \geq 0.$$

Одержали формалізовану задачу:

$$F = 4x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + 6x_{22}\ \ (\min).$$
$$x_{11} + x_{12} \leq 120,$$
$$x_{21} + x_{22} \leq 180,$$
$$x_{11} + x_{21} = 120,$$
$$x_{12} + x_{22} = 130,$$
$$x_{11} \geq 0,\ \ x_{12} \geq 0,\ \ x_{21} \geq 0,\ \ x_{22} \geq 0.$$

Приклад розв’язання відкритої транспортної задачі в MS Excel

Нехай кількість пунктів відправлення і кількість пунктів призначення дорівнюють 2 ($n = 2$, $m = 2$). Запаси, потреби й вартість перевезень зазначені в таблиці 2.3.

Розв’язання задачі представлене на рис. 2.5 – 2.8.

	A	B	C	D
1	*Розв’язання відкритої транспортної задачі*			
2	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
3			B_1	B_2
4	A_1	120	4	2
5	A_2	180	3	6
6	Потреби		120	130
7				
8		*Результати*		
9	Вартість перевезень:	0		
10				
11	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
12			B_1	B_2
13	A_1	0		
14	A_2	0		
15	Потреби		0	0
16				

Рисунок 2.5 - Робочий лист Excel з вихідними даними

	A	B	C	D
1	*Розв’язання відкритої транс*			
2	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
3			B_1	B_2
4	A_1	120	4	2
5	A_2	180	3	6
6	Потреби		120	130
7				
8		*Результати*		
9	Вартість перевезень:	=СУММПРОИЗВ(C4:D5;C13:D14)		
10				
11	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
12			B_1	B_2
13	A_1	=СУММ(C13:D13)		
14	A_2	=СУММ(C14:D14)		
15	Потреби		=СУММ(C13:C14)	=СУММ(D13:D14)
16				
17				

Рисунок 2.6 - Робочий лист Excel з формулами

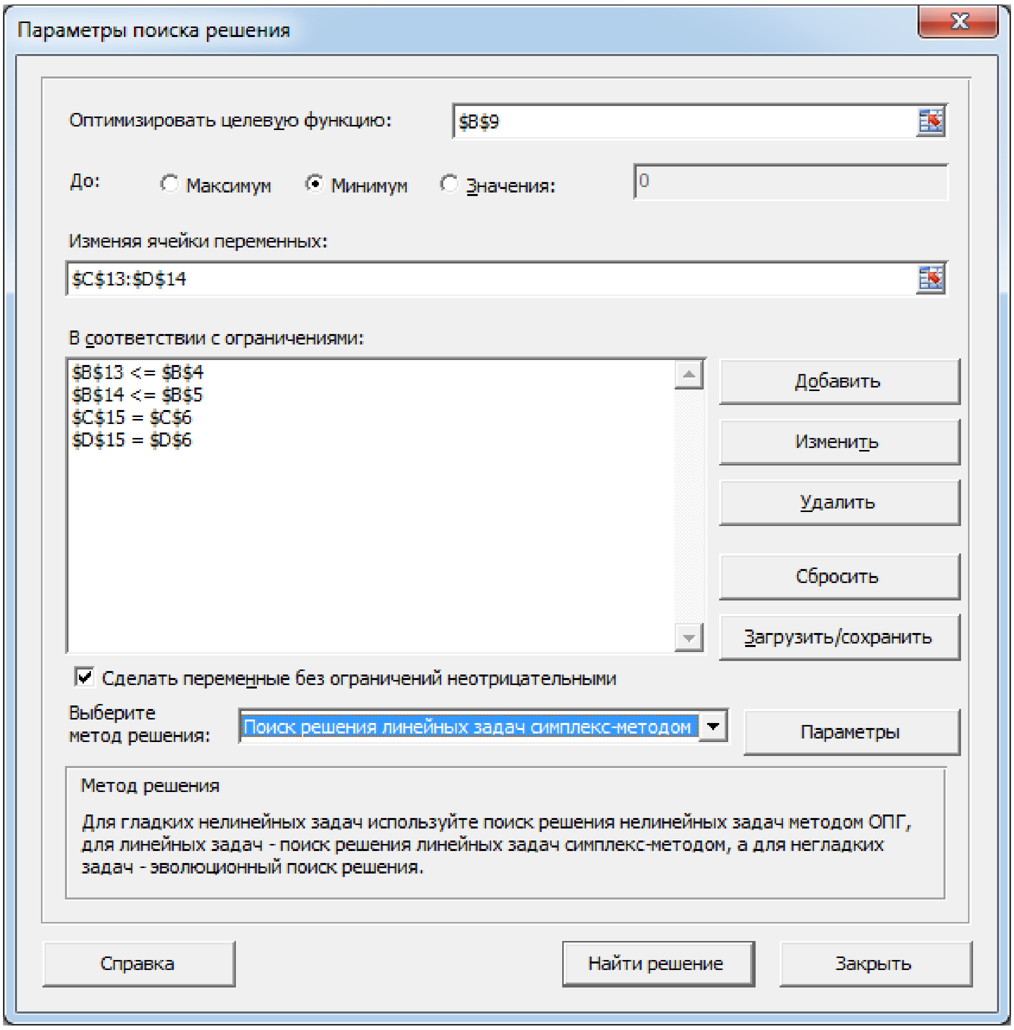
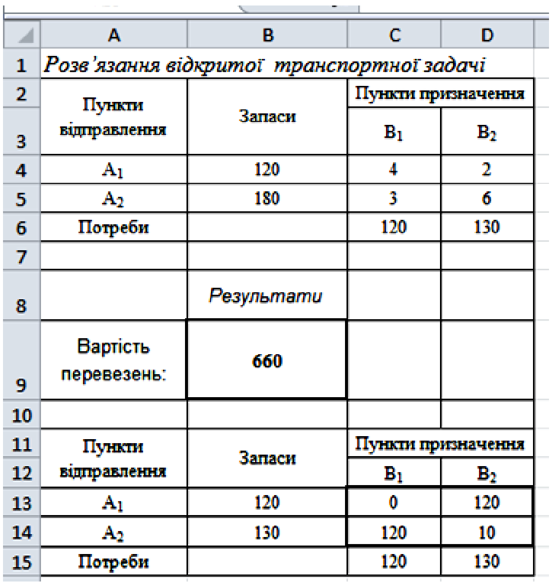


Рисунок 2.7 - Вікно «Пошук розв'язку»



	A	B	C	D
1	*Розв'язання відкритої транспортної задачі*			
2	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
3			B_1	B_2
4	A_1	120	4	2
5	A_2	180	3	6
6	Потреби		120	130
7				
8		*Результати*		
9	Вартість перевезень:	**660**		
10				
11	Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення	
12			B_1	B_2
13	A_1	120	0	120
14	A_2	130	120	10
15	Потреби		120	130

Рисунок 2.8 - Робочий лист Excel з результатом

Розв'язавши задачу за допомогою Excel, одержали: $x_{11} = 0$; $x_{12} = 120$; $x_{21} = 120$; $x_{22} = 10$; $F = 660$.

Мінімальна вартість перевезення вантажу – 660 гр. од. Переміщення вантажу від постачальників до споживачів оформимо у вигляді таблиці розподілу (табл. 2.4).

З таблиці 2.4 видно, що всі потреби задовільнено.

Таблиця 2.4

Пункти відправлення	Запаси	Пункти призначення		Залишок
		B_1	B_2	
A_1	120	0	120	0
A_2	180	120	10	50
Потреби		120	130	

Зауваження. При однакових потребах і тарифах на перевезення вартість перевезення для відкритої задачі менше, ніж для замкнутої (660 < 740). Це пояснюється тим, що при надлишку запасів з'являється можливість маневру, тобто вантаж можна вивозити переважно з тих пунктів, де більш низькі тарифи.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Kaidan N. V., Fedorenko E. H., Velychko V. Ye., Soloviev V. N., Bondarenko O. V. The Support of the Process of Training Pre-service Mathematics Teachers by Means of Cloud Services. *Cloud Technologies in Education (CTE 2020)* : proceedings of the 8th Workshop, Kryvyi Rih, Ukraine, December 17, 2020. Kryvyi Rih, 2020. P. 318-322. Access mode: http://ceur-ws.org/Vol-2879/paper17.pdf

2. Maple : веб-сайт. URL: https://www.maplesoft.com/products/Maple/ (дата звернення: 20.06.2025).

3. Катренко А. В. Дослідження операцій : підручник. 3-тє вид., стер. Львів : «Магнолія – 2006», 2024. 350 с.

4. Кузьмичов А. І. Оптимізаційні методи і моделі. Моделювання засобами MS Excel : навчальний посібник. Київ : Видавництвово Ліра-К, 2017. 215 с

5. Математичні методи дослідження операцій : підручник / Є. А. Лавров та ін. Суми : Сумський державний університет, 2017. 212 с.

6. Малярець Л. М. Дослідження операцій та методи оптимізації : практикум : у 2-х ч. Частина 1. Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2017. 169 с.

7. Руська Р. В. Конспект лекцій з навчальної дисципліни «Дослідження операцій». Тернопіль : ЗУНУ, 2022. 123 с

Навчально-методичне видання

Кайдан Наталія Володимирівна

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ:

методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань

Самостійне електронне мережеве видання

Публікується в авторській редакції