

**ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ:**

**методичні рекомендації  
до виконання практичної роботи № 1**

**Дослідження перехідних функцій типових ланок**

Запоріжжя 2024



УДК 681.5 (072)  
Т30

Рекомендовано Науково-методичною радою  
ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
«МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»  
(протокол № 8 від 12.07.2024 р.)

Укладачі:

Ісаєв А. Б., старший викладач кафедри АВЕРС

Разживін О. В., канд. техн. наук, доц., доцент кафедри АВЕРС

Т30 Теорія автоматичного регулювання: методичні рекомендації до виконання практичної роботи № 1 Дослідження перехідних функцій типових ланок / уклад. А. Б. Ісаєв, О. В. Разживін. Запоріжжя : ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА», 2024. 36 с.

У методичних рекомендаціях наведено поради і методичні підходи до виконання практичного завдання № 1 з дисципліни «Теорія автоматичного регулювання», вимоги до оформлення, подання та оцінювання результатів виконання.

УДК 681.5 (072)

© ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА», 2024



## ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ .....	4
2 ЗАВДАННЯ ТА ХІД ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ .....	7
3 ВИМОГИ ДО ЗМІСТУ ТА ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ .....	8
4 КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ .....	9
5 ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ .....	9
6 ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	10
Додаток А Диференційні рівняння типових ланок .....	11
Додаток Б Передавальні функції типових ланок.....	12
Додаток В Перехідні функції типових ланок.....	13
Додаток Г Диференційні рівняння типових ланок у різницевій формі. 14	
Додаток Д Вивід операторним методом перехідної функції інерційної ланки 1-го порядку (аперіодичної) .....	16
Додаток Ж Приклад розрахунку в Excel перехідної функції інерційної ланки 1-го ступеню (аперіодична).....	17
Додаток К Приклад розрахунку в Excel перехідної функції інерційної ланки 2-го ступеню (аперіодичної).....	19
Додаток Л Приклад розрахунку в Excel перехідної функції інерційної ланки 2-го ступеню (гранично-аперіодичної) .....	21
Додаток М Приклад розрахунку в Excel перехідної функції інерційної ланки 2-го ступеню (коливальної) .....	23
Додаток Н Приклад розрахунку в Excel перехідної функції інерційної ланки 2-го ступеню (консервативної).....	25
Додаток П Приклад розрахунку в Excel перехідної функції ідеальної інтегруючої ланки.....	27
Додаток Р Приклад розрахунку в Excel перехідної функції реальної інтегруючої ланки.....	29
Додаток С Приклад розрахунку в Excel перехідної функції реальної диференціюючої ланки .....	31
Додаток Т Варіанти завдань .....	33



## ВСТУП

Будь-які елементи систем управління, об'єкти управління, регулятори, вимірювальні прилади і вся система автоматичного управління можуть бути математично описані за допомогою стандартних ланок.

Метою даної лабораторної роботи є отримання і засвоєння знань про існуючі типові ланки, їх особливості і, в першу чергу, про перехідні функції.

Завданням лабораторної роботи є вивчення властивостей типових ланок, їх часових характеристик та їх математичного опису. Освоїти прийоми дослідження перехідних функцій ланок за допомогою комп'ютера.

## 1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Перед виконанням лабораторних робіт необхідно ознайомитися з властивостями окремих типових ланок. Для цього використовуйте конспекти лекцій, навчальну літературу та ці методичні рекомендації.

У літературі наводяться різні переліки типових ланок. Їх кількість може варіюватися від 5 до 17 і більше. У даній лабораторній роботі ми обмежимося розглядом таких ланок, як:

- безінерційна (пропорційна);
- інерційна 1-го порядку (аперіодична);
- інерційна 2-го ступеню (аперіодична);
- інерційна 2-го ступеню (гранично-аперіодична);
- інерційна 2-го ступеню (коливальна);
- інерційні 2-го порядку (консервативна);
- ідеальна інтегруюча;
- реальна інтегруюча;
- ідеальна диференціююча;
- реальна диференціююча.

Якщо говорити про елементарні ланки, то можна обмежитися трьома ланками: пропорційною, ідеальною інтегруючою та ідеальною диференціюючою. Вони відображають основні математичні залежності і динаміку фізичних процесів в природі і техніці. Інші типові ланки можуть бути виведені з елементарних в результаті різних комбінацій їх послідовних, паралельних і зустрічно-паралельних з'єднань. Загалом і пропорційна ланка також може бути отримана, з'єднавши послідовно ідеальні інтегруючі та ідеальні диференціюючої ланки. Це ілюстрація того факту, що в природі немає нічого статичного, і що стаціонарний стан насправді є станом динамічної рівноваги.

Всі розглянуті ланки можна описати узагальненим лінійним диференціальним рівнянням з постійними коефіцієнтами другого ступеню виду:

$$a_2 x''_{\text{вх}}(\tau) + a_1 x'_{\text{вх}}(\tau) + a_0 x_{\text{вх}}(\tau) = b_1 x'_{\text{вх}}(\tau) + b_0 x_{\text{вх}}(\tau) \quad (1.1)$$

У таблиці 1.1 наведені значення коефіцієнтів рівняння (1.1) для різних ланок. У додатку А наведені диференціальні рівняння для кожної типової ланки. Диференціальні рівняння інтегруючих ланок отримані в результаті інтегрування рівняння (1.1).

Таблиця 1.1 – Значення коефіцієнтів в диференціальних рівняннях типових одиниць

№	Назва ланки	a2	a1	a0	b1	b0	Примітка
1	Безінерційна (пропорційна)	0	0	1	0	К	
2	Інерційна 1-го порядку (аперіодична)	0	T	1	0	К	
3	Інерційна 2-го ступеню (аперіодична)	$T_2^2$	$T_1$	1	0	К	$T_1 > 2T_2$
4	Інерційна 2-го ступеню (гранично-аперіодична)	$T_2^2$	$T_1$	1	0	К	$T_1 = 2T_2$
5	Інерційна 2-го ступеню (коливальна)	$T_2^2$	$T_1$	1	0	К	$T_1 < 2T_2$
6	Інерційні 2-го порядку (консервативна)	$T_2^2$	0	1	0	К	
7	Ідеальна інтегруюча	0	1	0	0	К'	
8	Реальна інтегруюча	T	1	0	0	К'	
9	Ідеальна диференціююча	0	0	1	К	0	
10	Реальна диференціююча	0	T	1	К	0	

Передавальна функція ланки – це залежність між вихідним і вхідним значеннями, записана в операторній формі.

З (1.1) можна отримати узагальнений вираз для передавальної функції типових ланок. Для цього рівняння (1.1) записується в операторній формі:

$$\begin{aligned}
 a_2 x_{\text{вих}}(p)^2 + a_1 x_{\text{вих}}(p)p + a_0 x_{\text{вих}}(p) &= b_1 x_{\text{вх}}(p)p + b_0 x_{\text{вх}}(p) \\
 x_{\text{вих}}(p)(a_2 p^2 + a_1 p + a_0) &= x_{\text{вх}}(p)(b_1 p + b_0)
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

Звідти отримаємо передавальну функцію:

$$W(p) = \frac{x_{\text{вих}}(p)}{x_{\text{вх}}(p)} = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}
 \tag{1.3}$$

У додатку Б показані передавальні функції для кожної типової ланки.

Перехідна функція ланки показує реакцію ланки на одиничний вхідний вплив за умови, що ланка раніше перебував у сталому стані.

Для отримання перехідної функції ланки  $h(\tau)$  на вхід ланки необхідно подати одиничну функцію (функцію Хевісайда), рисунок 1.1:

$$x_{\text{вх}}(\tau) = 1(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau < 0 \\ 1, & \text{если } \tau \geq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

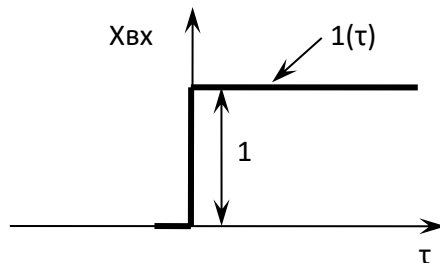


Рисунок 1.1 – Одинична функція

Рівняння перехідної функції може бути отримано аналітично в результаті розв'язку диференційного рівняння (1.1) з урахуванням коефіцієнтів таблиці 1.1 для конкретної ланки при вхідному впливі (1.4) та нульових початкових умовах. Рівняння перехідних функцій для кожної типової ланки наведені в додатку В.

Також перехідна функція може бути отримана аналітично операторним методом з передавальної функції (1.3). Одинична функція в операторній формі виглядатиме так:

$$x_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{p} \quad (1.5)$$

Запишемо рівняння (1.3) наступним чином:

$$x_{\text{вих}}(p) = W(p) \cdot x_{\text{вх}}(p) \quad (1.6)$$

Підставляючи (1.5) в (1.6), отримаємо:

$$x_{\text{вих}}(p) = \frac{W(p)}{p} = h(p) \quad (1.7)$$

Далі виконуємо зворотне перетворення Лапласа і отримуємо рівняння перехідної функції:

$$h(\tau) = L^{-1}\{h(p)\} = L^{-1}\{x_{\text{вих}}(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} \quad (1.8)$$

У додатку Д наведено приклад виведення операторним методом перехідної функції інерційної ланки 1-го порядку (аперіодичної).

Графік перехідної функції може бути отриманий і чисельним методом. Для цього диференційне рівняння потрібно записати в різницевій формі. У цьому випадку похідні записуються як відношення кінцевих різниць. Наприклад, похідна першого порядку для моменту часу  $\tau_i$  представляється у вигляді:

$$x'_{\text{вих}}(\tau_i) = \frac{x_{\text{вих}}(\tau_{i+1}) - x_{\text{вих}}(\tau_i)}{\Delta\tau} \quad (1.9)$$

А похідна другого порядку записується і переводиться в вигляд:

$$\begin{aligned} x''_{\text{вих}}(\tau_i) &= \frac{x'_{\text{вих}}(\tau_{i+1}) - x'_{\text{вих}}(\tau_i)}{\Delta\tau} = \\ &= \frac{\frac{x_{\text{вих}}(\tau_{i+2}) - x_{\text{вих}}(\tau_{i+1})}{\Delta\tau} - \frac{x_{\text{вих}}(\tau_{i+1}) - x_{\text{вих}}(\tau_i)}{\Delta\tau}}{\Delta\tau} = \\ &= \frac{x_{\text{вих}}(\tau_{i+2}) - 2x_{\text{вих}}(\tau_{i+1}) + x_{\text{вих}}(\tau_i)}{(\Delta\tau)^2} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Похідні виду (1.9) і (1.10) треба підставити у початкове диференційне рівняння. Потім отримане рівняння перетворюється для вираження вихідного значення з найбільшим індексом часу  $\tau$ . Наприклад  $x_{\text{вих}}(\tau_{i+1})$  або  $x_{\text{вих}}(\tau_{i+2})$ . У додатку Д наведені диференційні рівняння ланок, записані в різницевій формі, після перетворення. Там також наведені початкові умови для вихідного значення, що передуює часу  $\tau_{i+1}$  або  $\tau_{i+2}$ .


Обчислення рівняння слід виконувати з невеликим кроком у часі ( $\leq 1$  секунду). Вхідне значення має бути представлено у вигляді одного стрибка. У нульовий момент часу вхідне значення має дорівнювати нулю. Всі наступні значення вхідної величини приймаються рівними одиниці. У додатках Ж-С наведено приклади побудови перехідних характеристик типових ланок.

## 2 ЗАВДАННЯ ТА ХІД ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

**Завдання 1.** Ознайомитися з диференційними рівняннями і передавальними функціями, наведеними в додатках А, Б. Вивчити і запам'ятати їх. Спробувати самостійно вивести рівняння передавальних функцій на основі диференційних рівнянь.

**Завдання 2.** Ознайомитися з диференціальними рівняннями в різницевій формі, наведеними в додатку Г. Вивчити і запам'ятати їх. Спробувати самостійно вивести ці рівняння з диференціальних рівнянь.

**Завдання 3.** Ознайомитися з рівняннями перехідних функцій, наведеними в додатку В. Вивчити і запам'ятати їх. Спробувати самостійно вивести ці рівняння з передавальних функцій, як показано в додатку Е.



Завдання 4. За вказівкою викладача обрати варіант завдання з додатка Т. Для двох ланок обчислити та побудувати графіки перехідних функцій на основі виразів з додатка В. Самостійну перевірку правильності обчислень і побудов можна виконати, використовуючи в якості орієнтира додатки Ж-С. Для цього потрібно вставити в свої формули розрахунку вихідні дані з додатків і порівняти результати розрахунків і графіків з витягами, наведеними в додатках.

Завдання 5. Для цих же ланок обчислити і побудувати графіки перехідних функцій на основі різницевого рівнянь з додатка Г. Вхідне значення моделюється стрибком одиниці, як описано в теоретичній частині на сторінці 8. Самостійну перевірку правильності розрахунків і побудов можна виконати, використовуючи в якості орієнтира додатки Ж-С. Для цього потрібно вставити в свої формули розрахунку вихідні дані з додатків і порівняти результати розрахунків і графіків з витягами, наведеними в додатках.

Задokumentувати результати лабораторної роботи у вигляді окремого звіту відповідно до вимог.

### **3 ВИМОГИ ДО ЗМІСТУ ТА ОФОРМЛЕННЯ ЗВІТУ**

Оформлення звіту з лабораторної роботи повинно відповідати вимогам, що діють на кафедрі. Звіт складається на одній стороні аркушів формату А4 і повинен включати в себе наступні елементи:

1. Титульна сторінка.
2. Тема лабораторної роботи.
3. Мета лабораторії.

4. Для завдань 4 і 5 надати короткий опис суті виконаних обчислень, використаних формул розрахунку, таблиць з результатами обчислень або витягів з них, графіків.

5. Для кожної розрахункової таблиці наведіть один приклад розрахунку, в якому показано, за якими формулами були проведені обчислення, які числа куди вставлені і які результати отримані.

Кожна формула повинна бути складена відповідно до вимог оформлення і мати номер формули, на яку посилається текст, пояснення використуваних символів і розмірність величин, якщо такі є.

Кожна таблиця повинна бути оформлена відповідно до вимог оформлення і мати номер таблиці, зазначений у тексті, і назву таблиці.

Кожен рисунок повинен бути складений відповідно до вимог оформлення і мати номер рисунка, про який йдеться в тексті, підпис і позначення осей.

## 4 КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ


Таблиця 4.1 – Критерії оцінювання

Кількість балів	Критерій оцінювання
8	Здобувач(ка) працював(ла) на практичних заняттях, приймав(ла) активну участь у виконанні завдання, виконав(ла) завдання курсу в повному обсязі та завантажив(ла) звіт в Moodle згідно з семестровим графіком (до наступного заняття)
7-6	Здобувач(ка) працював(ла) на практичних заняттях, виконав(ла) завдання курсу в повному обсязі та завантажив(ла) звіт згідно з семестровим графіком (до наступного заняття)
6-5	Здобувач(ка) не працював(ла) на практичних заняттях, повністю виконав(ла) завдання курсу в повному обсязі та завантажив(ла) звіт в Moodle пізніше терміну вказаного у семестровому графіку
5-1	Здобувач(ка) не працював(ла) на практичних заняттях, виконав(ла) завдання курсу частково та завантажив(ла) звіт в Moodle пізніше терміну вказаного у семестровому графіку
0	Здобувач(ка) був(ла) відсутня на практичних заняттях та не завантажив(ла) звіт в Moodle

## 5 ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

У цьому розділі перераховані основні типові питання, за допомогою яких студент може перевірити рівень знань. Список не є вичерпним, але він охоплює всі основні аспекти знань, які необхідно освоїти під час виконання роботи. При захисті роботи питання можуть задаватися в спрощеному або зміненому вигляді, питання можуть бути об'єднані між собою або конкретизовані для певної ланки.

1. Що таке ланка?
2. Які особливості та властивості має ланка?
3. Назвіть три основні типи елементарних ланок.
4. Назвіть інерційні (статичні) ланки.
5. Назвіть інтегруючі ланки.
6. Назвіть диференційні ланки.
7. Що показує диференційне рівняння ланки?
8. Яке диференціальне рівняння використовується для опису кожної ланки?
9. Що таке передавальна функція?

- 
10. Як отримати передавальну функцію з диференційного рівняння?
  11. Вивести передавальну функцію з диференційного рівняння для кожної ланки.
  12. Яка передавальна функція має кожна ланка?
  13. Що таке перехідна функція?
  14. Який вхідний вплив використовується для отримання перехідної функції?
  15. Яка математична формула використовується для опису цього впливу?
  16. Який графік має цей вплив?
  17. Що таке функція Хевісайда?
  18. Як одиничний стрибок описується в операторній формі?
  19. Що таке зворотне перетворення Лапласа?
  20. Як отримати перехідну функцію за допомогою зворотного перетворення Лапласа?
  21. Як побудувати графік перехідної функції?
  22. Як записати 1-ю похідну у вигляді різниці?
  23. Як записати 2-гу похідну у вигляді різниці?
  24. Як отримати диференційне рівняння в різницевої формі?
  25. Вивести диференційне рівняння в різницевої формі для кожної ланки.
  26. Як отримати графік перехідної функції за допомогою диференційного рівняння в різницевої формі?
  27. Побудувати графік перехідної функції для кожної ланки.
  28. Як формується вхідний вплив при обчисленнях на комп'ютері?
  29. Що таке крива прискорення?
  30. Який вхідний вплив використовується для отримання кривої прискорення?

## **6 ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування : підручник. 2-ге вид. Київ : Либідь, 2007. 656 с.
2. Теорія автоматичного управління : консп. лекц. у 2 ч. / уклад. Г. М. Худолей. Суми : Сумський державний університет, 2016. Ч. 1 : Аналіз лінійних систем автоматичного управління. 179 с.
3. Лістровий С. В., Мірошник М. А., Клименко Л. А. Теорія автоматичного керування, штучний інтелект і автоматизація процесу прийняття рішення : навч. посібник. Харків : УкрДУЗТ, 2019. 120 с.
4. Методи сучасної теорії управління : підручник / А. П. Ладанюк та ін. Київ : Видавництво Ліра-К, 2019. 368 с.

## Диференційні рівняння типових ланок

Таблиця А.1 – Диференційні рівняння

№	Назва ланки	Диференційне рівняння
1	Безінерційна (пропорційна)	$x_{\text{вблх}}(\tau) = Kx_{\text{вх}}(\tau)$
2	Інерційна 1-го порядку (аперіодична)	$Tx'_{\text{вблх}}(\tau) + x_{\text{вблх}}(\tau) = Kx_{\text{вх}}(\tau)$
3	Інерційна 2-го ступеню (аперіодична) $T_1 > 2T_2$	$T_2^2 x''_{\text{вблх}}(\tau) + T_1 x'_{\text{вблх}}(\tau) + x_{\text{вблх}}(\tau) = Kx_{\text{вх}}(\tau)$
4	Інерційна 2-го ступеню (гранично-аперіодична) $T_1 = 2T_2$	$T_2^2 x''_{\text{вблх}}(\tau) + T_1 x'_{\text{вблх}}(\tau) + x_{\text{вблх}}(\tau) = Kx_{\text{вх}}(\tau)$ или $T^2 x''_{\text{вблх}}(\tau) + 2Tx'_{\text{вблх}}(\tau) + x_{\text{вблх}}(\tau) = Kx_{\text{вх}}(\tau)$ где $T = T_2$ ; $T_1 = 2T$
5	Інерційна 2-го ступеню (коливальна) $T_1 < 2T_2$ ; $0 < \xi < 1$	$T_2^2 x''_{\text{вблх}}(\tau) + T_1 x'_{\text{вблх}}(\tau) + x_{\text{вблх}}(\tau) = Kx_{\text{вх}}(\tau)$ или $T^2 x''_{\text{вблх}}(\tau) + 2\xi T x'_{\text{вблх}}(\tau) + x_{\text{вблх}}(\tau) = Kx_{\text{вх}}(\tau)$ где $T = T_2$ ; $\xi = \frac{T_1}{2T_2}$
6	Інерційні 2-го порядку (консервативна) $T_1 = 0$ ; $\xi = 0$	$T_2^2 x''_{\text{вблх}}(\tau) + x_{\text{вблх}}(\tau) = Kx_{\text{вх}}(\tau)$ или $T^2 x''_{\text{вблх}}(\tau) + x_{\text{вблх}}(\tau) = Kx_{\text{вх}}(\tau)$ где $T = T_2$
7	Ідеальна інтегруюча	$x_{\text{вблх}}(\tau) = K' \int x_{\text{вх}}(\tau)$ или $x'_{\text{вблх}}(\tau) = K' x_{\text{вх}}(\tau)$
8	Реальна інтегруюча	$Tx'_{\text{вблх}}(\tau) + x_{\text{вблх}}(\tau) = K' \int x_{\text{вх}}(\tau)$ или $Tx''_{\text{вблх}}(\tau) + x'_{\text{вблх}}(\tau) = K' x_{\text{вх}}(\tau)$
9	Ідеальна диференціююча	$x_{\text{вблх}}(\tau) = Kx'_{\text{вх}}(\tau)$
10	Реальна диференціююча	$Tx'_{\text{вблх}}(\tau) + x_{\text{вблх}}(\tau) = Kx'_{\text{вх}}(\tau)$

## Передавальні функції типових ланок

Таблиця Б.1 – Передавальні функції

№	Назва ланки	Передавальна функція
1	Безінерційна (пропорційна)	$W(p) = K$
2	Інерційна 1-го порядку (аперіодична)	$W(p) = \frac{K}{T p + 1}$
3	Інерційна 2-го ступеню (аперіодична) $T_1 > 2T_2$	$W(p) = \frac{K}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$ <p>или <math>W(p) = \frac{K}{(T_3 p + 1) \cdot (T_4 p + 1)}</math></p> <p>где <math>T_{3,4} = \frac{T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2}</math></p>
4	Інерційна 2-го ступеню (гранично-аперіодична) $T_1 = 2T_2$	$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2T p + 1}$ <p>или <math>W(p) = \frac{K}{(T p + 1)^2}</math></p>
5	Інерційна 2-го ступеню (коливальна) $T_1 < 2T_2; 0 < \xi < 1$	$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}$ $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega; \quad \alpha = \frac{\xi}{T}; \quad \omega = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}$ <p>где <math>\alpha</math> – коефіцієнт затухання;</p> <p><math>\omega</math> – угловая частота затухающих колебаний</p>
6	Інерційні 2-го порядку (консервативна) $T_1 = 0; \xi = 0$	$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 1}$ $p_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{1}{T^2}} = \pm j\omega; \quad \omega = \frac{1}{T}$
7	Ідеальна інтегруюча	$W(p) = \frac{K'}{p}$
8	Реальна інтегруюча	$W(p) = \frac{K'}{(T p + 1)p}$
9	Ідеальна диференціуюча	$W(p) = K p$
10	Реальна диференціуюча	$W(p) = \frac{K p}{T p + 1}$

## Перехідні функції типових ланок

Таблиця В.1 – Перехідні функції

№	Назва ланки	Перехідна функція
1	Безінерційна (пропорційна)	$h(\tau) = K1(\tau)$
2	Інерційна 1-го порядку (аперіодична)	$h(\tau) = K\left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}}\right)$
3	Інерційна 2-го ступеню (аперіодична)	$h(\tau) = K\left(1 - \frac{1}{T_3 - T_4}\left(T_3 \cdot e^{-\frac{\tau}{T_3}} - T_4 \cdot e^{-\frac{\tau}{T_4}}\right)\right)$
4	Інерційна 2-го ступеню (гранично-аперіодична)	$h(\tau) = K\left(1 - \left(1 + \frac{\tau}{T}\right)e^{-\frac{\tau}{T}}\right)$
5	Інерційна 2-го ступеню (коливальна)	$h(\tau) = K\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}e^{-\alpha\tau} \sin(\omega\tau + \psi)\right)$ де $\psi = \arctg \frac{\omega}{\alpha} = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$
6	Інерційні 2-го порядку (консервативна)	$h(\tau) = K(1 - \cos(\omega\tau))$
7	Ідеальна інтегруюча	$h(\tau) = K'\tau$
8	Реальна інтегруюча	$h(\tau) = K'\left(\tau - T\left(1 - e^{-\frac{\tau}{T}}\right)\right)$
9	Ідеальна диференціююча	$h(\tau) = K\delta(\tau)$
10	Реальна диференціююча	$h(\tau) = \frac{K}{T}1(\tau)e^{-\frac{\tau}{T}}$

## Диференційні рівняння типових ланок у різницевій формі

Таблиця Г.1 – Диференційні рівняння в різницевій формі

№	Назва ланки	Диференційне рівняння в різницевій формі
1	Безінерційна (пропорційна)	$x_{\text{вих}}(\tau) = Kx_{\text{вх}}(\tau)$
2	Інерційна 1-го порядку (аперіодична)	$x_{\text{вих}}(\tau_{i+1}) = x_{\text{вих}}(\tau_i) + \frac{\Delta\tau}{T}(Kx_{\text{вх}}(\tau_i) - x_{\text{вих}}(\tau_i))$ $i = 0, n; \quad x_{\text{вих}}(\tau_0) = 0$
3	Інерційна 2-го ступеню (аперіодична)	$x_{\text{вих}}(\tau_{i+2}) = 2x_{\text{вих}}(\tau_{i+1}) - x_{\text{вих}}(\tau_i) + \frac{(\Delta\tau)^2}{T^2} \left( Kx_{\text{вх}}(\tau_i) - T_1 \frac{x_{\text{вих}}(\tau_{i+1}) - x_{\text{вих}}(\tau_i)}{\Delta\tau} - x_{\text{вих}}(\tau_i) \right)$ $i = 0, n; \quad x_{\text{вих}}(\tau_1) = 0; \quad x_{\text{вих}}(\tau_0) = 0$
4	Інерційна 2-го ступеню (гранично-аперіодична)	$x_{\text{вих}}(\tau_{i+2}) = 2x_{\text{вих}}(\tau_{i+1}) - x_{\text{вих}}(\tau_i) + \frac{(\Delta\tau)^2}{T^2} \left( Kx_{\text{вх}}(\tau_i) - T_1 \frac{x_{\text{вих}}(\tau_{i+1}) - x_{\text{вих}}(\tau_i)}{\Delta\tau} - x_{\text{вих}}(\tau_i) \right)$ $i = 0, n; \quad x_{\text{вих}}(\tau_1) = 0; \quad x_{\text{вих}}(\tau_0) = 0$
5	Інерційна 2-го ступеню (коливальна)	$x_{\text{вих}}(\tau_{i+2}) = 2x_{\text{вих}}(\tau_{i+1}) - x_{\text{вих}}(\tau_i) + \frac{(\Delta\tau)^2}{T^2} \left( Kx_{\text{вх}}(\tau_i) - T_1 \frac{x_{\text{вих}}(\tau_{i+1}) - x_{\text{вих}}(\tau_i)}{\Delta\tau} - x_{\text{вих}}(\tau_i) \right)$ $i = 0, n; \quad x_{\text{вих}}(\tau_1) = 0; \quad x_{\text{вих}}(\tau_0) = 0$
6	Інерційні 2-го порядку (консервативна)	$x_{\text{вих}}(\tau_{i+2}) = 2x_{\text{вих}}(\tau_{i+1}) - x_{\text{вих}}(\tau_i) + \frac{(\Delta\tau)^2}{T^2} (Kx_{\text{вх}}(\tau_i) - x_{\text{вих}}(\tau_i))$ $i = 0, n; \quad x_{\text{вих}}(\tau_1) = 0; \quad x_{\text{вих}}(\tau_0) = 0$
7	Ідеальна інтегруюча	$x_{\text{вих}}(\tau_{i+1}) = x_{\text{вих}}(\tau_i) + K'x_{\text{вх}}(\tau_i)\Delta\tau$ $i = 0, n; \quad x_{\text{вих}}(\tau_0) = 0$
8	Реальна інтегруюча	$x_{\text{вих}}(\tau_{i+2}) = 2x_{\text{вих}}(\tau_{i+1}) - x_{\text{вих}}(\tau_i) + \frac{(\Delta\tau)^2}{T} \left( K'x_{\text{вх}}(\tau_i) - \frac{x_{\text{вих}}(\tau_{i+1}) - x_{\text{вих}}(\tau_i)}{\Delta\tau} \right)$ $i = 0, n; \quad x_{\text{вих}}(\tau_1) = 0; \quad x_{\text{вих}}(\tau_0) = 0$

№	Назва ланки	Диференційне рівняння в різницевій формі
9	Ідеальна диференціююча	$x_{\text{вих}}(\tau_i) = K' \frac{x_{\text{вх}}(\tau_{i+1}) - x_{\text{вх}}(\tau_i)}{\Delta \tau}$ $i = 0, n$
10	Реальна диференціююча	$x_{\text{вих}}(\tau_{i+1}) = x_{\text{вих}}(\tau_i) + \frac{\Delta \tau}{T} \left( K \frac{x_{\text{вх}}(\tau_{i+1}) - x_{\text{вх}}(\tau_i)}{\Delta \tau} - x_{\text{вих}}(\tau_i) \right)$ $i = 0, n; \quad x_{\text{вих}}(\tau_0) = 0$

**Вивід операторним методом перехідної функції  
інерційної ланки 1-го порядку (аперіодичної)**

$$\begin{aligned}
 h(\tau) &= L^{-1}\{h(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{W(p)}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{K}{p(Tp+1)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{K}{T}}{p\left(p+\frac{1}{T}\right)}\right\} = \\
 &= L^{-1}\left\{\frac{K}{T}\left(\frac{1}{p\left(p+\frac{1}{T}\right)}\right)\right\} = L^{-1}\left\{\frac{K}{T}\left(\frac{T}{p}-\frac{T}{p+\frac{1}{T}}\right)\right\} = \\
 &= L^{-1}\left\{K\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\frac{1}{T}}\right)\right\} = KL^{-1}\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\frac{1}{T}}\right\} = \\
 &= K\left(1(\tau)-e^{-\frac{\tau}{T}}\right) = K\left(1-e^{-\frac{\tau}{T}}\right)
 \end{aligned}$$

Рисунок Д.1 – Вивід операторним методом перехідної функції інерційної ланки 1-го порядку (аперіодичної)



**Приклад розрахунку в Excel перехідної функції  
инерційної ланки 1-го ступеню (аперіодична)**

Таблиця Ж.1 – Розрахункова таблиця

Інерційна 1-го ступеню (аперіодична)

$K = 3$

$T = 20$

$\Delta\tau = 1$

t	Хвх	Чисельно	Теоретично
		ХвихЧ	ХвихТ
0	0	0,000	0,000
1	1	0,000	0,146
2	1	0,150	0,285
3	1	0,293	0,418
4	1	0,428	0,544
5	1	0,556	0,664
6	1	0,679	0,778
7	1	0,795	0,886
8	1	0,905	0,989
9	1	1,010	1,087
10	1	1,109	1,180
11	1	1,204	1,269
12	1	1,294	1,354
13	1	1,379	1,434

14	1	1,460	1,510
15	1	1,537	1,583
16	1	1,610	1,652
17	1	1,680	1,718
18	1	1,746	1,780
19	1	1,808	1,840
20	1	1,868	1,896
21	1	1,925	1,950
22	1	1,978	2,001

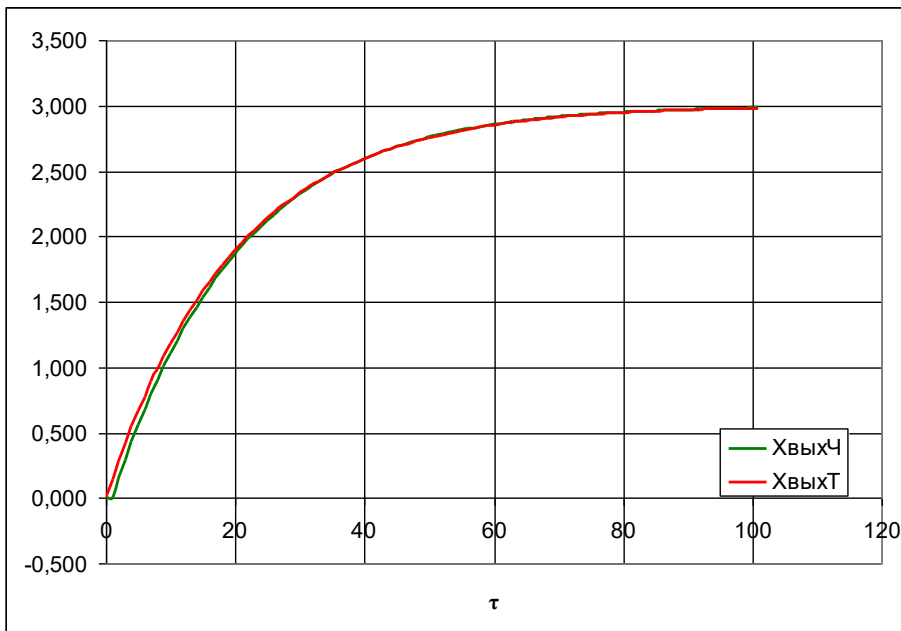


Рисунок Ж.1 – Графік перехідної функції інерційної ланки 1-го ступеню (апериодичної)

**Приклад розрахунку в Excel перехідної функції  
інерційної ланки 2-го ступеню (аперіодичної)**

Таблиця К.1 – Розрахункова таблиця

Інерційна 2-го ступеню (аперіодична)

$$K = 3$$

$$T1 = 20 \quad T3 = 17,14$$

$$T2 = 7 \quad T4 = 2,86$$

$$\Delta t = 1$$

t	Хвх	Чисельно	Теоретично
		ХвихЧ	ХвихТ
0	0	0,000	0,000
1	1	0,000	0,027
2	1	0,000	0,094
3	1	0,061	0,188
4	1	0,159	0,297
5	1	0,276	0,415
6	1	0,404	0,537
7	1	0,535	0,659
8	1	0,666	0,779
9	1	0,793	0,896
10	1	0,916	1,009
11	1	1,034	1,118
12	1	1,147	1,221

13	1	1,253	1,320
14	1	1,354	1,414
15	1	1,449	1,502
16	1	1,540	1,587
17	1	1,624	1,666
18	1	1,705	1,741
19	1	1,780	1,812
20	1	1,851	1,879
21	1	1,918	1,943

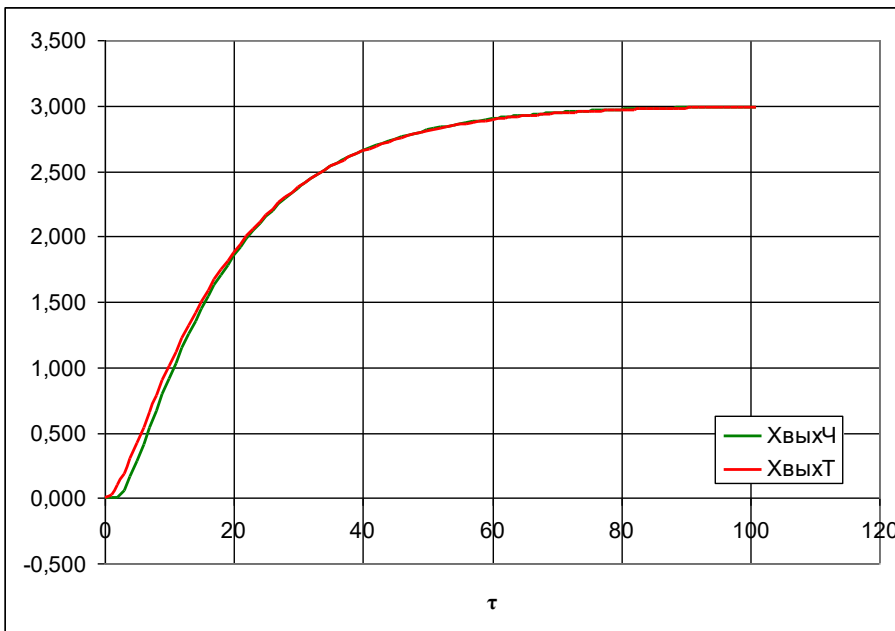


Рисунок К.1 – Графік перехідної функції інерційної ланки 2-го ступеню (апериодичної)



**Приклад розрахунку в Excel перехідної функції  
інерційної ланки 2-го ступеню (гранично-аперіодичної)**

Таблиця Л.1 – Розрахункова таблиця

Інерційна 2-го ступеню (гранично-аперіодична)

$$K = 3$$

$$T_1 = 20 \quad T_3 = 10$$

$$T_2 = 10 \quad T_4 = 10$$

$$\Delta t = 1$$

t	Хвх	Чисельно	Теоретично
		ХвихЧ	ХвихТ
0	0	0,000	0,000
1	1	0,000	0,014
2	1	0,000	0,053
3	1	0,030	0,111
4	1	0,084	0,185
5	1	0,157	0,271
6	1	0,244	0,366
7	1	0,343	0,467
8	1	0,449	0,574
9	1	0,561	0,683
10	1	0,675	0,793
11	1	0,792	0,903
12	1	0,908	1,012

13	1	1,023	1,120
14	1	1,136	1,225
15	1	1,246	1,327
16	1	1,353	1,425
17	1	1,456	1,520
18	1	1,555	1,611
19	1	1,649	1,699
20	1	1,739	1,782
21	1	1,825	1,861

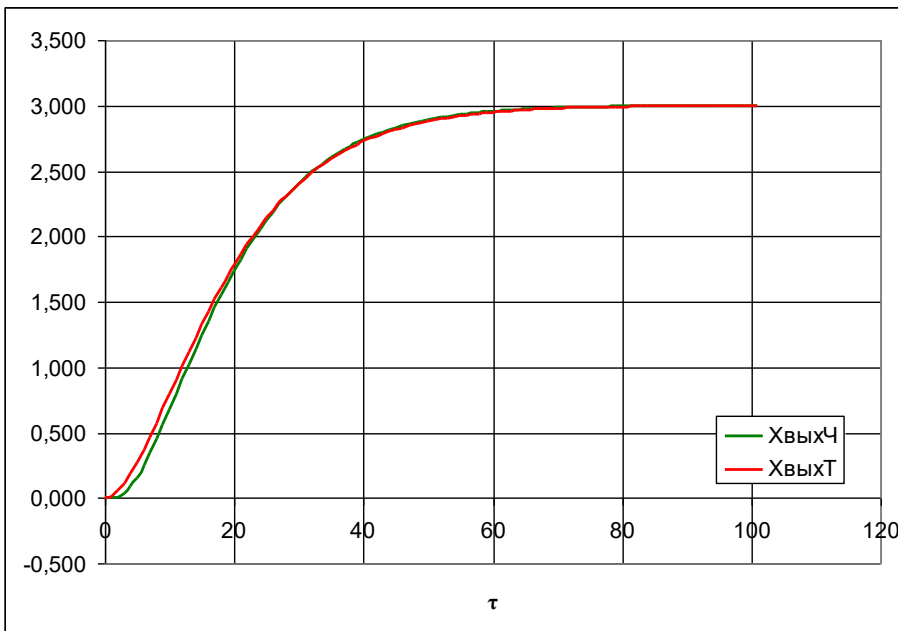


Рисунок Л.1 – Графік перехідної функції інерційної ланки 2-го ступеню (гранично-апериодичної)

**Приклад розрахунку в Excel перехідної функції  
інерційної ланки 2-го ступеню (коливальної)**

Таблиця М.1 – Розрахункова таблиця

Інерційна 2-го ступеню (коливальна)

K= 3	T= 25
T1= 20	$\xi= 0,40000$
T2= 25	$\alpha= 0,01600$
$\Delta t= 1$	$\omega= 0,03666$
	$\psi= 1,159279$

t	Хвх	Чисельно	Теоретично
		ХвихЧ	ХвихТ
0	0	0,000	0,000
1	1	0,000	0,002
2	1	0,000	0,009
3	1	0,005	0,021
4	1	0,014	0,037
5	1	0,028	0,057
6	1	0,046	0,081
7	1	0,069	0,109
8	1	0,095	0,140
9	1	0,126	0,175
10	1	0,160	0,214
11	1	0,197	0,255

12	1	0,238	0,300
13	1	0,282	0,347
14	1	0,329	0,397
15	1	0,379	0,450
16	1	0,431	0,505
17	1	0,486	0,562
18	1	0,544	0,621
19	1	0,603	0,682
20	1	0,665	0,745

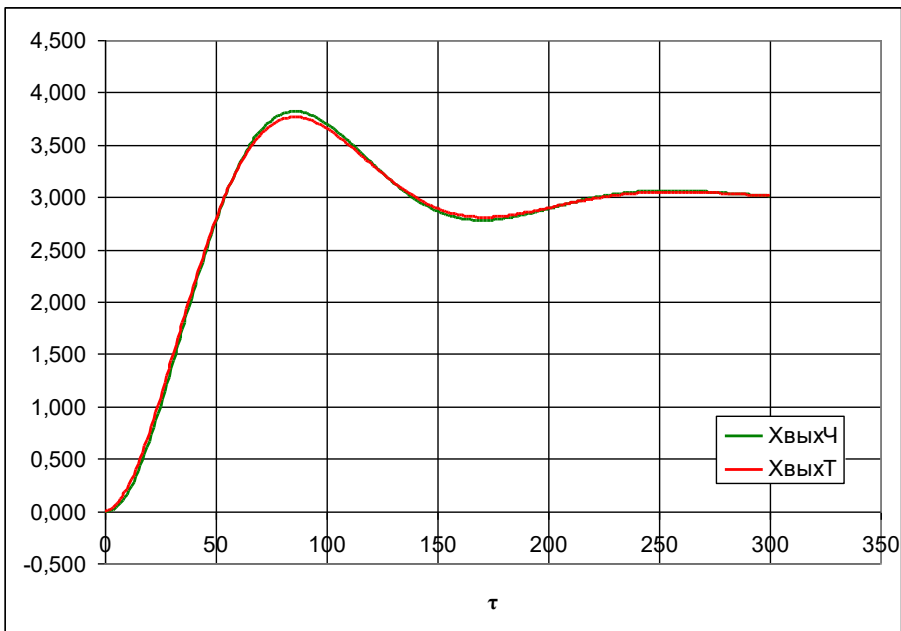


Рисунок М.1 – Графік перехідної функції інерційної ланки 2-го ступеню (коливальної)

**Приклад розрахунку в Excel перехідної функції  
інерційної ланки 2-го ступеню (консервативної)**

Таблиця Н.1 – Розрахункова таблиця

Інерційна 2-го ступеню (консервативна)

$K=$ 3	$T=$ 10
$T1=$ 0	$\xi=$ 0,00000
$T2=$ 10	$\alpha=$ 0,00000
$\Delta t=$ 0,05	$\omega=$ 0,10000

$t$	Чисельно		Теоретично
	Хвх	ХвихЧ	ХвихТ
0	0	0,000	0,000
0,05	1	0,000	0,000
0,1	1	0,000	0,000
0,15	1	0,000	0,000
0,2	1	0,000	0,001
0,25	1	0,000	0,001
0,3	1	0,001	0,001
0,35	1	0,001	0,002
0,4	1	0,002	0,002
0,45	1	0,002	0,003
0,5	1	0,003	0,004
0,55	1	0,003	0,005
0,6	1	0,004	0,005

0,65	1	0,005	0,006
0,7	1	0,006	0,007
0,75	1	0,007	0,008
0,8	1	0,008	0,010
0,85	1	0,009	0,011
0,9	1	0,010	0,012
0,95	1	0,011	0,014
1	1	0,013	0,015
1,05	1	0,014	0,017

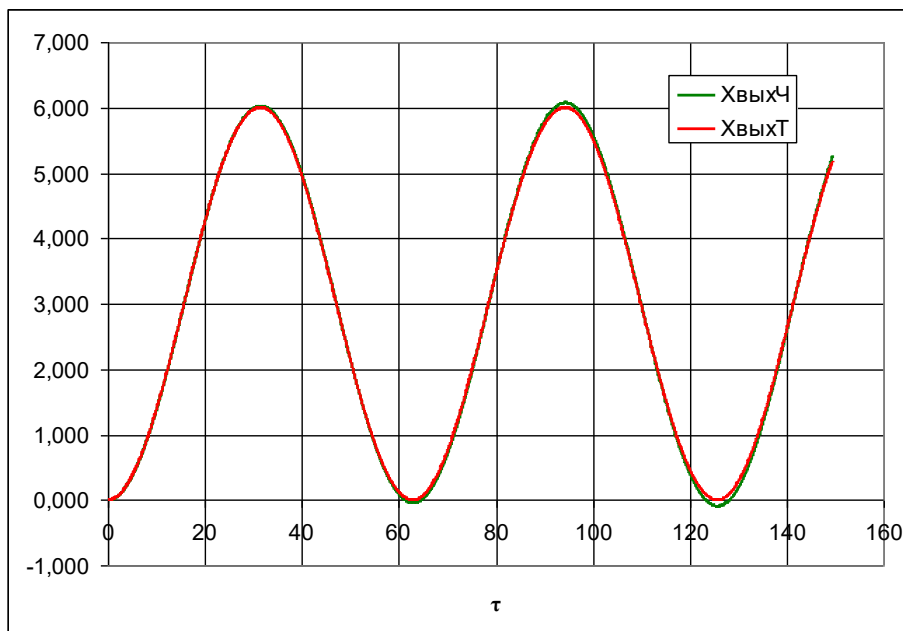


Рисунок Н.1 – Графік перехідної функції інерційної ланки 2-го ступеню (консервативної)



Приклад розрахунку в Excel перехідної функції  
ідеальної інтегруючої ланки

Таблиця П.1 – Розрахункова таблиця

Ідеальна інтегруюча

$$K = 3$$

$$\Delta t = 1$$

t	Чисельно		Теорети- чно
	X <sub>вх</sub>	X <sub>вихЧ</sub>	X <sub>вихТ</sub>
0	0	0,000	0,000
1	1	0,000	3,000
2	1	3,000	6,000
3	1	6,000	9,000
4	1	9,000	12,000
5	1	12,000	15,000
6	1	15,000	18,000
7	1	18,000	21,000
8	1	21,000	24,000
9	1	24,000	27,000
10	1	27,000	30,000
11	1	30,000	33,000
12	1	33,000	36,000
13	1	36,000	39,000
14	1	39,000	42,000

15	1	42,000	45,000
16	1	45,000	48,000
17	1	48,000	51,000
18	1	51,000	54,000
19	1	54,000	57,000
20	1	57,000	60,000
21	1	60,000	63,000
22	1	63,000	66,000
23	1	66,000	69,000

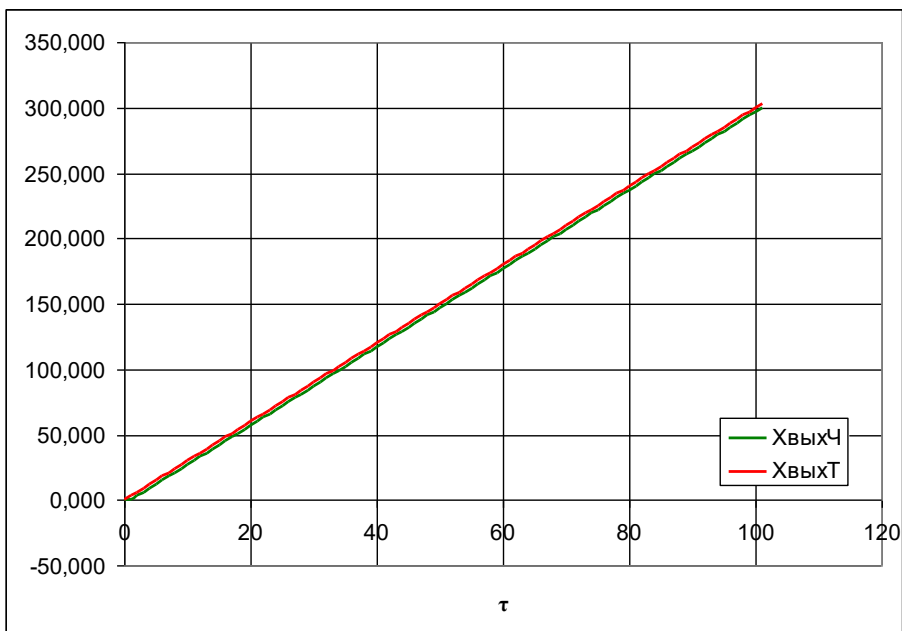


Рисунок П.1 – Графік перехідної функції ідеальної інтегруючої ланки



Приклад розрахунку в Excel перехідної функції  
реальної інтегруючої ланки

Таблиця Р.1 – Розрахункова таблиця

Реальна інтегруюча

K= 3

T= 20

 $\Delta t = 1$ 

t	Чисельно		Теорети- чно
	X <sub>вх</sub>	X <sub>вихЧ</sub>	X <sub>вихТ</sub>
0	0	0,000	0,000
1	1	0,000	0,074
2	1	0,000	0,290
3	1	0,150	0,642
4	1	0,443	1,124
5	1	0,870	1,728
6	1	1,427	2,449
7	1	2,106	3,281
8	1	2,900	4,219
9	1	3,805	5,258
10	1	4,815	6,392
11	1	5,924	7,617
12	1	7,128	8,929
13	1	8,422	10,323

14	1	9,801	11,795
15	1	11,260	13,342
16	1	12,797	14,960
17	1	14,408	16,645
18	1	16,087	18,394
19	1	17,833	20,204
20	1	19,641	22,073
21	1	21,509	23,996
22	1	23,434	25,972

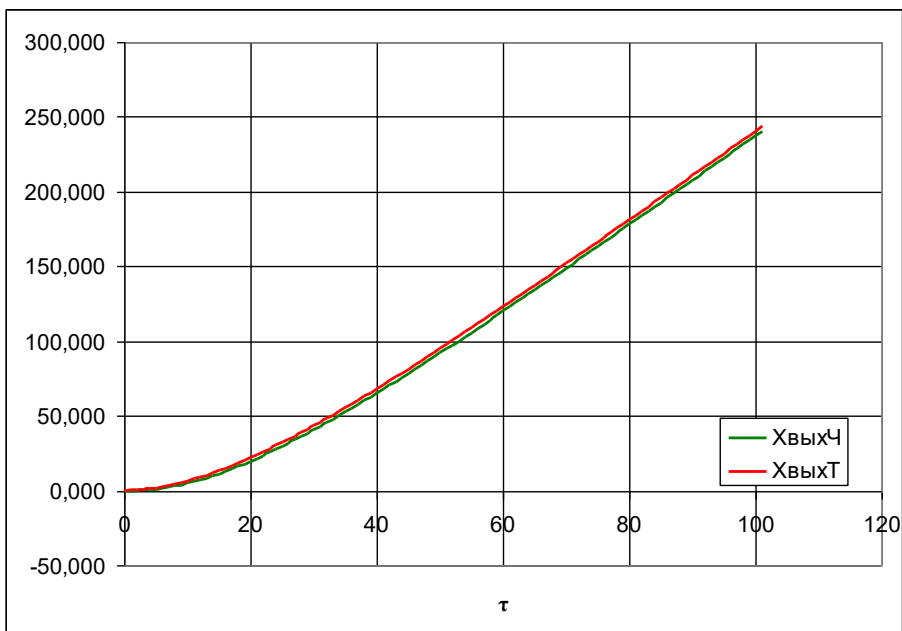


Рисунок Р.1 – Графік перехідної функції реальної інтегруючої ланки



Приклад розрахунку в Ехсел перехідної функції  
реальної диференціюючої ланки

Таблиця С.1 – Розрахункова таблиця

Реальна диференцію-  
юча

$$K = 40$$

$$T = 5$$

$$\Delta t = 0,2$$

t	Чисельно		Теорети- чно
	X <sub>вх</sub>	X <sub>вихЧ</sub>	X <sub>вихТ</sub>
0	0	0,000	8,000
0,2	1	8,000	7,686
0,4	1	7,680	7,385
0,6	1	7,373	7,095
0,8	1	7,078	6,817
1	1	6,795	6,550
1,2	1	6,523	6,293
1,4	1	6,262	6,046
1,6	1	6,012	5,809
1,8	1	5,771	5,581
2	1	5,540	5,363
2,2	1	5,319	5,152
2,4	1	5,106	4,950
2,6	1	4,902	4,756

2,8	1	4,706	4,570
3	1	4,517	4,390
3,2	1	4,337	4,218
3,4	1	4,163	4,053
3,6	1	3,997	3,894
3,8	1	3,837	3,741
4	1	3,683	3,595
4,2	1	3,536	3,454
4,4	1	3,395	3,318

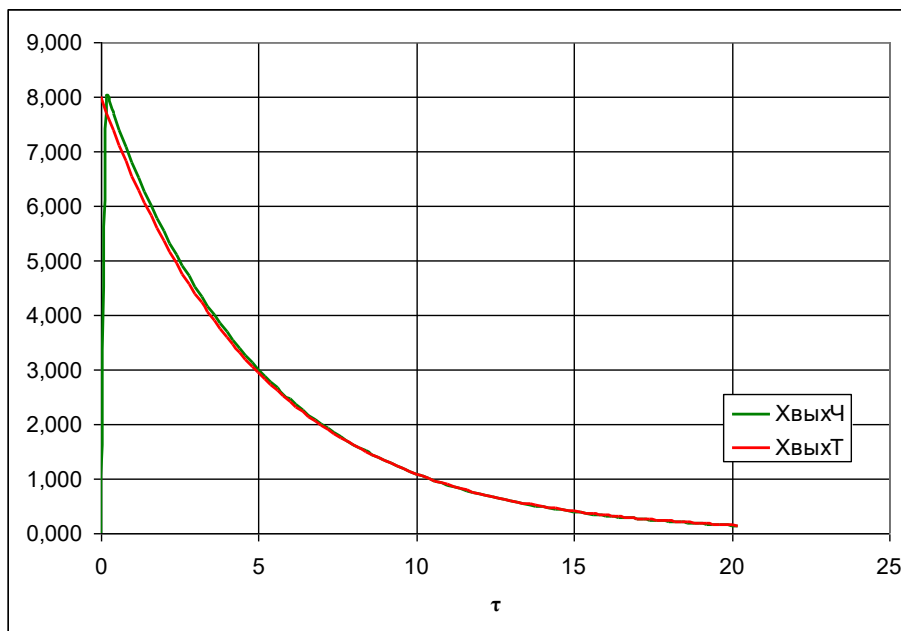


Рисунок С.1 – Графік перехідної функції реальної диференціюючої ланки

## Варіанти завдань

Таблиця Т.1 – Варіанти завдань

№ вар	Назви ланок
1	інерційна 1-го ступеню (аперіодична) інерційна 2-го ступеню (аперіодична)
2	інерційна 1-го ступеню (аперіодична) інерційна 2-го ступеню (гранично-аперіодична)
3	інерційна 1-го ступеню (аперіодична) інерційна 2-го ступеню (коливальне)
4	інерційна 1-го ступеню (аперіодична) інерційна 2-го ступеню (консервативна)
5	ідеальна інтегруюча інерційна 2-го ступеню (аперіодична)
6	ідеальна інтегруюча інерційна 2-го ступеню (гранично-аперіодична)
7	ідеальна інтегруюча інерційна 2-го ступеню (коливальне)
8	ідеальна інтегруюча інерційна 2-го ступеню (консервативна)
9	реальна інтегруюча інерційна 2-го ступеню (аперіодична)
10	реальна інтегруюча інерційна 2-го ступеню (гранично-аперіодична)
11	реальна інтегруюча інерційна 2-го ступеню (коливальне)
12	реальна інтегруюча інерційна 2-го ступеню (консервативна)
13	реальна диференціююча інерційна 2-го ступеню (аперіодична)
14	реальна диференціююча інерційна 2-го ступеню (гранично-аперіодична)
15	реальна диференціююча інерційна 2-го ступеню (коливальне)
16	реальна диференціююча інерційна 2-го ступеню (консервативна)
17	інерційна 1-го ступеню (аперіодична) інерційна 2-го ступеню (аперіодична)
18	інерційна 1-го ступеню (аперіодична) інерційна 2-го ступеню (гранично-аперіодична)
19	інерційна 1-го ступеню (аперіодична) інерційна 2-го ступеню (коливальне)

№ вар	Назви ланок
20	інерційна 1-го ступеню (аперіодична) інерційна 2-го ступеню (консервативна)
21	ідеальна інтегруюча інерційна 2-го ступеню (аперіодична)
22	ідеальна інтегруюча інерційна 2-го ступеню (гранично-аперіодична)
23	ідеальна інтегруюча інерційна 2-го ступеню (коливальне)
24	ідеальна інтегруюча інерційна 2-го ступеню (консервативна)
25	реальна інтегруюча інерційна 2-го ступеню (аперіодична)
26	реальна інтегруюча інерційна 2-го ступеню (гранично-аперіодична)
27	реальна інтегруюча інерційна 2-го ступеню (коливальне)
28	реальна інтегруюча інерційна 2-го ступеню (консервативна)
29	реальна диференціююча інерційна 2-го ступеню (аперіодична)
30	реальна диференціююча інерційна 2-го ступеню (гранично-аперіодична)
31	реальна диференціююча інерційна 2-го ступеню (коливальне)
32	реальна диференціююча інерційна 2-го ступеню (консервативна)



Навчально-методичне видання

Ісаєв Андрій Борисович  
Разживін Олексій Валерійович

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО РЕГУЛЮВАННЯ:

методичні рекомендації  
до виконання практичної роботи № 1

Дослідження перехідних функцій типових ланок

Самостійне електронне мережеве видання

Публікується в авторській редакції