

О.А. Костіков, Ю.С. Холодняк
П.І. Сагайда, О.С. Касьянюк

АЛГОРИТМИ АВТОМАТИЗОВАНИХ РОЗРАХУНКІВ ПЛОСКИХ СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ ФЕРМ



Навчальний посібник

ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА”»

**О. А. КОСТІКОВ, Ю. С. ХОЛОДНЯК,
П. І. САГАЙДА, О. С. КАСЬЯНЮК**

**АЛГОРИТМИ
АВТОМАТИЗОВАНИХ РОЗРАХУНКІВ
ПЛОСКИХ СТАТИЧНО
ВИЗНАЧУВАНИХ ФЕРМ**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Одеса • 2026 • Олді+

УДК 624.042:004.421(075.8)

К72

Рецензенти:

І. І. Скрипнік – академік НАН України, доктор фізико-математичних наук, директор Інституту прикладної математики і механіки НАН України;

В. М. Корчинський – доктор технічних наук, професор, професор кафедри телекомунікаційних систем та мереж Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара;

І. Г. Сахно – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри гірничої справи ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА”»

Рекомендовано до друку рішенням Вченої ради
ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА”»
(протокол № 8 від 29 травня 2026 року)

Костіков О. А.

К72 Алгоритми автоматизованих розрахунків плоских статично визначуваних ферм : навч. посіб. / О. А. Костіков, Ю. С. Холодник, П. І. Сагайда, О. С. Касьянюк. – Одеса : Олді+, 2026. – 120 с.

ISBN 978-617-8559-98-4

Навчальний посібник містить теоретичні основи та алгоритми комп'ютерних програм розрахунків на міцність і жорсткість плоских статично визначуваних ферм, а також тестові приклади цих розрахунків.

Для студентів гірничих, механічних та комп'ютерних спеціальностей.

УДК 624.042:004.421(075.8)

© О. А. Костіков, Ю. С. Холодник,
П. І. Сагайда, О. С. Касьянюк, 2026

ISBN 978-617-8559-98-4

© ТОВ «ТУ “МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА”», 2026

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ	5
1	
ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РОЗРАХУНКІВ ФЕРМ	7
2	
АЛГОРИТМИ АВТОМАТИЗОВАНИХ РОЗРАХУНКІВ ФЕРМ	
З СТАЦІОНАРНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ	12
2.1 Введення вихідних даних.	12
2.2 Побудова розрахункової схеми.	13
2.3 Визначення зусиль у стрижнях ферми.	15
2.4 Розрахунки стрижнів на міцність та стійкість.	17
2.5 Особливості розрахунків двокутикових стрижнів.	17
2.6 Тестові приклади.	20
3	
АЛГОРИТМИ АВТОМАТИЗОВАНИХ РОЗРАХУНКІВ ФЕРМ	
З РУХОМИМ НАВАНТАЖЕННЯМ	26
3.1 Введення вихідних даних.	28
3.2 Побудова розрахункової схеми.	28
3.3 Розрахунки особливих стрижнів ферми.	29
3.3.1 Випадок додатної поздовжньої сили.	29
3.3.2 Випадок від'ємної поздовжньої сили.	38
3.4 Розрахунки звичайних стрижнів ферми.	41
3.5 Тестові приклади.	42
4	
АЛГОРИТМИ АВТОМАТИЗОВАНИХ РОЗРАХУНКІВ ФЕРМ	
З ЦИКЛІЧНО ЗМІНЮВАНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ	54
4.1 Двовимірна модель вимушених коливань.	54
4.2 Послідовність та методи розрахунків.	60
4.2.1 Попередні розрахунки.	60
4.2.2 Основні розрахунки.	61
4.3 Введення вихідних даних.	63
4.4 Тестові приклади.	64
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	80

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А.	Основні параметри стрижневих профілів.	81
ДОДАТОК Б.	Коефіцієнти μ та φ для стиснутих стрижнів.	93
ДОДАТОК В.	Розрахунки на стійкість стиснутих стрижнів ферм.	95
ДОДАТОК Г.	Опорні реакції та зусилля в стрижнях ферм з рухомим навантаженням.	110
ДОДАТОК Д.	Закони руху центрів мас рухомих ланок механізму (Приклад 7).	111
ДОДАТОК Е.	Графіки зусиль у стрижнях коливної ферми. (Приклад 7, крок 1).	113

АНОТАЦІЯ

В умовах бурхливого технічного прогресу особливого значення набуває підготовка в закладах вищої освіти (ЗВО) високоосвічених фахівців, які мають комплекс необхідних теоретичних знань і практичних навичок для створення різноманітних зразків нової техніки.

Важливу роль у цьому відіграє вдосконалення методик викладання базових дисциплін інженерної підготовки з широким використанням комп'ютерних технологій.

Одними з основних у курсі опору матеріалів, що закладає фундамент інженерних розрахунків, є питання міцності, жорсткості та стійкості стрижневих конструкцій – балок, рам, ферм.

Ця розробка є частиною робіт з переведення силових розрахунків зазначених конструкцій на комп'ютерні технології і стосується ферм, що використовуються як у будівництві (мости, дахи різних споруд тощо), так і в машинобудуванні (підйомно-транспортне обладнання та ін.).

Силовий розрахунок ферми, що проектується, зазвичай обмежується визначенням умов забезпечення її міцності. Рідше він доповнюється перевіркою стиснутих стрижнів ферми на стійкість.

Виконання зазначених розрахунків «вручну» вимагає відповідної кваліфікації виконавців і чималих витрат часу, особливо у випадках, коли розрахунки виконують люди, які не є професіоналами в цій сфері.

«Потужні» пакети комп'ютерних програм, що застосовуються в проєктних організаціях будівельної індустрії, для студентського середовища, як і для інженерів виробничої сфери, є малодоступними через їхню складність і чималу вартість.

Для зазначених груп користувачів потрібні спрощені та менш витратні програмні засоби.

Метою даного посібника є створення алгоритмів для спрощених комп'ютерних програм силових розрахунків плоских статично визначуваних ферм з гарячекатаних



кутиків – рівнополичних (за ДСТУ 2251:2018) та нерівнополичних (за ДСТУ 8769:2018), що виготовляються із вуглецевих сталей звичайної якості (за ДСТУ 4484:2005).

Цей посібник призначений для студентів технічних ЗВО, які навчаються за спеціальністю «Комп'ютерні науки» та освоюють прийоми програмування, а також для їх викладачів, що формують тематику відповідних курсових та дипломних робіт. Воно може стати корисним і програмістам виробничої сфери.

ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ РОЗРАХУНКІВ ФЕРМ

Базові відомості про ферми та методи їх силового розрахунку містяться в підручниках з теоретичної механіки та опору матеріалів [1–4 та ін.].

Фермами називають стрижневі конструкції, в яких зазвичай прямі стрижні з'єднуються між собою за допомогою шарнірів і утворюють у місцях з'єднання так звані вузли. У силових розрахунках стрижні ферм зазвичай вважаються невагомими.

Навантаження ферм можуть бути стаціонарними, рухомими або циклічно змінюваними.

Під стаціонарними навантаженнями розуміються сили постійної величини та постійного спрямування, які статично прикладені у вузлах.

Рухомі навантаження діють, зокрема, на ферми транспортних споруд і підйомних кранів.

Навантаження, які циклічно змінюються, зазвичай створюються роботою обладнання, що встановлено на фермі (плунжерних насосів, кривошипних пресів та ін.).

Вузли ферми часто позначають літерами, а стрижні нумерують. Слід зазначити, що такий підхід не є вдалим, оскільки кількість вузлів ферми може перевищувати кількість букв у алфавіті, який використовується.

До плоских відносять ферми, у яких всі стрижні, зовнішні навантаження та опорні реакції лежать в одній площині.

Статично визначуваними називають ферми, у яких опорні реакції та зусилля у стрижнях можуть бути визначені лише за допомогою рівнянь статичної рівноваги. Ці ферми мають дві шарнірні опори – нерухому та рухому.

Реакція нерухомої опори у загальному випадку має довільний, заздалегідь невідомий напрям і тому її для зручності



розкладають на дві взаємно перпендикулярні складові – вертикальну і горизонтальну, які в подальших розрахунках вважаються незалежними реакціями.

У рухомої опори реакція завжди перпендикулярна до напрямку можливого переміщення опори і тому її на складові не розкладають.

Отже, кожна з плоских статично визначуваних ферм, що розглядаються далі, має три невідомих реакції: дві – у нерухомої опори і одну – у рухомої.

Силкові розрахунки зазначених ферм зазвичай починаються з визначення їхніх опорних реакцій.

Ці реакції визначаються шляхом розв’язання системи рівнянь статичної рівноваги ферми як твердого тіла, що перебуває під дією плоскої довільної системи сил.

Зазначені рівняння можуть бути різними, проте найбільш простим для їх розв’язання є варіант використання рівняння алгебраїчних моментів зовнішніх навантажень відносно нерухомої опори та рівнянь їх проєкцій на осі декартової системи координат у площині ферми. У такому разі з першого рівняння визначається реакція рухомої опори, а з двох інших – реакції нерухомої опори.

Після знаходження опорних реакцій визначаються зусилля у стрижнях ферми. При цьому вважається, що ці стрижні є невагомими і працюють на просте розтягання або стискання, при якому в них діють лише поздовжні сили N , які вважаються додатними при розтяганні і від’ємними при стисканні. Нормальні напруження σ , котрі викликаються цими силами, мають однакові з ними знаки (плюс або мінус).

Найчастіше зусилля у стрижнях ферм визначаються за допомогою так званого методу вирізання вузлів.

Сутність цього методу полягає в розв’язанні рівнянь статичної рівноваги кожного з вузлів ферми як твердого тіла, що перебуває під дією плоскої системи збіжних сил. Оскільки таких рівнянь завжди два (це – рівняння проєкцій сил, діючих на вузол, на осі декартової системи координат у площині ферми), розрахункові починають з того вузла, у якому збігаються не більше двох невідомих зусиль.



Процедури «ручного» визначення опорних реакцій та зусиль у стрижнях ферм проілюстровані низкою опублікованих прикладів [5; 6 та ін.].

Кінцевим етапом силового розрахунку ферми зазвичай є підбір необхідних з точки зору міцності розмірів профілю, що використовується для її виготовлення (у нашому випадку – сталевих гарячекатаних кутиків). Цей підбір здійснюється на основі умови міцності при розтяганні – стисканні (формула 1).

$$|\sigma| = \frac{|N|}{F} \leq [\sigma], \quad (1)$$

де $|\sigma|$ – модуль нормального напруження в стрижні;

$|N|$ – модуль поздовжньої сили в стрижні;

F – площа поперечного перерізу стрижня (додаток А);

$[\sigma]$ – допустиме нормальне напруження для матеріалу стрижня при розтяганні-стисканні.

При розрахунку на міцність спочатку з умови (формула 1) визначається мінімальна площа поперечного перерізу найбільш навантаженого із стрижнів ферми, тобто стрижня з максимальним за модулем зусиллям – $|N|_{\max}$ (формула 2).

$$F_{\min} = \frac{|N|_{\max}}{[\sigma]}. \quad (2)$$

Після цього відшукується найближче (не менше, ніж $F_{\min}$) значення F у відповідному розмірному ряду додатка А, яке й приймається для найбільш навантаженого стрижня ферми як таке, що забезпечує його міцність ($F \equiv F_{str}$).

Далі, враховуючи існуючу практику виготовлення всіх стрижнів ферми з однакового профілю, прийняте значення F_{str} а разом з ним і відповідні розміри профілю, поширюються на решту стрижнів.

На цьому зазвичай силовий розрахунок ферми і закінчується. Однак, як відомо, стиснуті стрижні ферми, які задовольняють умову міцності (формула 1), можуть виходити з ладу внаслідок втрати ними стійкості (поздовжнього згину). Тому розрахунок ферми на міцність повинен бути доповненим розрахунком на стійкість її стиснутих стрижнів.



У «ручному» варіанті такого розрахунку враховується, що найбільш небезпечним з погляду поздовжнього згину є той стрижень, у якого найбільшими є одночасно і довжина, і модуль стискаючого зусилля. Якщо такий стрижень є, то саме його і вибирають для розрахунку на стійкість. В іншому випадку беруть до уваги стрижні, у яких є максимальними або довжина, або модуль зусилля, що їх стискає. Можливий також варіант залучення до розрахунку на стійкість інших потенційно небезпечних стрижнів [5].

У комп'ютерному варіанті розрахунку на стійкість підлягають усі стиснуті стрижні ферми.

Умова стійкості стиснутого стрижня представлена формулою 3:

$$|\sigma| \leq |\sigma|_{str} \quad (3)$$

де

$$|\sigma| = \frac{|N|}{F}; \quad (4)$$

$$|\sigma|_{str} = \varphi \times |\sigma|, \quad (5)$$

$|\sigma|$ – модуль стискаючого напруження у стрижні;

$|\sigma|_{str}$ – допустиме напруження на стійкість для матеріалу стрижня;

$|N|$ – модуль стискаючого зусилля в стрижні;

$\varphi \leq 1$ – коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження що залежить від матеріалу стрижня і його гнучкості (формула 6).

$$\lambda = \frac{\mu \times \ell}{i_{\min}}, \quad (6)$$

μ – коефіцієнт, який враховує спосіб кріплення кінців стрижня;

ℓ – довжина стрижня;

$i_{\min}$ – мінімальний радіус інерції поперечного перерізу стрижня.

Значення коефіцієнтів φ та μ містяться у додатку Б, а величини $i_{\min}$ – у додатку А.

Слід зазначити, що в ідеалізованому варіанті кріплення стрижнів ферми (шарніри у вузлах) $\mu=1$ (рис. Б.1).



Вузли ж реальних ферм зазвичай виконані у вигляді платівок (так званих косинок) з приєднаними до них зварюванням або заклепками кінців стрижнів, а для цього випадку згідно зі згаданим рисунком $\mu=0,5$.

Очевидно, що розумніше буде прийняти в розрахунок $\mu=1$, тому що тоді гнучкість λ , а разом з нею і необхідна площа перерізу стрижня F будуть більшими, тобто надійнішими, ніж при $\mu=0,5$.

За наявності в фермі одного небезпечного стрижня його розрахунок на стійкість починається зі значення $F=F_{str}$. Якщо умова стійкості (формула 3) стосовно вказаного значення F виконується, то це значення є остаточним та приймається для всіх стрижнів ферми ($F=F_{str}=F_{stb}=F_{end}$).

При негативному результаті розрахунок триває з покроковим збільшенням значення F доти, як воно виявиться достатнім з погляду стійкості ($F=F_{stb}$). У цьому випадку для всіх стрижнів ферми остаточно приймається останнє зі значень F , що успішно пройшли перевірку на стійкість ($F=F_{stb}=F_{end}$).

За наявності у фермі кількох потенційно небезпечних стрижнів аналогічному розрахунку на стійкість підлягає кожен із них. У цьому випадку для всіх стрижнів ферми остаточно приймається найбільше із значень F , що забезпечили виконання умови (формула 3) стрижнями, підданими перевірці на стійкість ($F = F_{stb}^{\max} = F_{end}$).

У всіх розглянутих випадках потрібні розміри профілю встановлюються за відповідними таблицями сортаменту (додаток А), виходячи з прийнятих значень F_{end} .

АЛГОРИТМИ АВТОМАТИЗОВАНИХ РОЗРАХУНКІВ ФЕРМ З СТАЦІОНАРНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Автоматизовані розрахунки виконуються за допомогою комп'ютера. Користувач у них тільки вводить вихідні дані, а всі графічні побудови та обчислення виконує комп'ютер.

Основними етапами таких розрахунків є:

- введення вихідних даних;
- побудова розрахункової схеми;
- визначення зусиль у стрижнях ферми;
- розрахунок стрижнів на міцність;
- розрахунок стрижнів на стійкість.

2.1 Введення вихідних даних

Вихідні дані для розрахунку включають номери і відповідні координати всіх вузлів ферми в системі координат $u-z$ (де вісь u – вертикальна, спрямована зверху вниз, а вісь z – горизонтальна, спрямована зліва направо), модулі зовнішніх вертикальних (P) і горизонтальних (Q) навантажень у кожному з вузлів. Вводяться номери вузлів оточення, тобто. вузлів, безпосередньо пов'язаних з кожним із вузлів ферми за допомогою стрижнів (табл. 1, див. с. 13).

Номер 1 надається шарніру нерухомої опори, номер 2 – шарніру рухомої, інші вузли нумеруються довільно. Початок координат поєднується з вузлом 1.

Зовнішні навантаження та опорні реакції ферми вважаються додатними, якщо вони спрямовані так само, як і відповідні осі координат, а від'ємними – коли вони мають протилежні напрямки.



Таблиця 1 – Форма введення вузлів та навантажень ферми

Номер вузла, (i)	Координати вузла, м		Зовнішні навантаження вузла, кН		Номери вузлів оточення
	y	z	P	Q	
1					
...					
n					

Характеристики стрижнів ферми запроваджуються відповідно до таблиці 2.

Таблиця 2 – Форма введення стрижнів ферми

Марка сталі	Варіанти кутиків		Варіанти стрижнів	
	A1	A2	B1	B2
Див. табл. А.3	±	±	±	±

Позначення: A1 – кутики рівнополичні; A2 – кутики нерівнополичні; B1 – стрижні однокутикові; B2 – стрижні двокутикові; так: «+»; ні: «-».

Зображення опор ферми з прийнятою системою координат представлені на рисунках 1 та 2, які вводяться в розрахункову програму як заготовки для наступних графічних побудов.

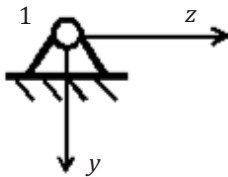


Рисунок 1

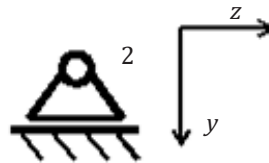


Рисунок 2

2.2 Побудова розрахункової схеми

Після введення вихідних даних комп'ютер автоматично зображує розрахункову схему ферми.

Спочатку він, використовуючи заготовки опор (рис. 1-2), за заданими координатами вузлів зображує шарніри, нумерує їх



і з'єднує прямими лініями (стрижнями) з відповідними вузлами оточення (табл. 1).

У вузлах ферми зображуються задані навантаження, опорні реакції та зусилля у стрижнях, проставляються відповідні позначення.

При цьому всі навантаження і опорні реакції завжди зображуються на схемі додатними, тобто паралельними відповідним осям координат і однаково з ними спрямованими.

Зусилля в стрижнях зображуються на схемі додатними і такими, що виходять з вузлів і спрямовані вздовж стрижнів (розділ 1).

Позначення сил P та Q повинні мати індекси у вигляді номерів вузлів, до яких вони прикладені.

Зусилля у стрижнях повинні позначатися літерами N з двома індексами, розділеними тире: перший – це номер вузла, до якого зусилля прикладене, другий – номер вузла, до якого зусилля спрямоване.

Стрижні на розрахунковій схемі не нумеруються. У обчисленнях їх довжини позначаються літерами ℓ з двома індексами (через тире) у вигляді номерів вузлів, котрих стрижень з'єднує, причому перший з них – менший, а другий – більший.

У необхідних випадках стрижням можна надавати назви у вигляді індексів їх довжин. Так, наприклад, стрижень, що з'єднує довільні вузли i та k , можна називати як $i-k$, маючи на увазі, що $i < k$.

Довжина зазначеного стрижня розраховується через координати його крайніх точок i та k (формула 7).

$$\ell_{i-k} = \sqrt{(y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}. \quad (7)$$

Зображення розрахункової схеми виводиться на екран комп'ютера для контролю користувачем правильності побудов і внесення до них необхідних коректив.

2.3 Визначення зусиль у стрижнях ферми

На основі розрахункової схеми для кожного з вузлів ферми складаються по 2 рівняння (формула 8) статичної рівноваги (розділ 1).

$$\begin{cases} \sum P_y = 0 ; \\ \sum P_z = 0 . \end{cases} \quad (8)$$

Кількість рівнянь (формула 8) становить $2n$, де n – число вузлів у фермі.

У цих рівняннях враховуються всі сили, що прикладені у вузлах: задані навантаження, опорні реакції та зусилля у стрижнях.

Для складання зазначених рівнянь необхідно попередньо визначити косинуси кутів нахилу всіх зазначених сил до осей u та z .

Ці косинуси (які звуться напрямними косинусами) визначаються формулою 9.

$$\begin{cases} \cos(N_{i-k} \wedge y) = \pm |y_k - y_i| : \ell_{i-k} ; \\ \cos(N_{i-k} \wedge z) = \pm |z_k - z_i| : \ell_{i-k} . \end{cases} \quad (9)$$

Знак плюс у формулах 9 ставиться у випадку, коли кут між напрямком зусилля та додатним напрямком осі гострий, а мінус – коли він тупий. Якщо ж цей кут прямий, напрямний косинус дорівнює нулю.

Зовнішні навантаження і опорні реакції завжди паралельні одній з осей координат і перпендикулярні іншій, тому їх напрямні косинуси можуть мати значення $+1$, -1 або 0 .

Проекції довільного зусилля N_{i-k} на осі координат визначаються за наступними формулами 10.

$$\begin{cases} N_{i-k}^y = |N_{i-k}| \times \cos(N_{i-k} \wedge y) ; \\ N_{i-k}^z = |N_{i-k}| \times \cos(N_{i-k} \wedge z) . \end{cases} \quad (10)$$

Проекції на осі координат зовнішніх навантажень та опорних реакцій ферми визначаються аналогічними формулами.

При визначенні опорних реакцій та зусиль у стрижнях ферми до розгорнутих рівнянь (формула 5) рівноваги вузлів додаються рівняння зв'язків (формула 11).

$$N_{i-k} = N_{k-i}$$

або

$$N_{i-k} - N_{k-i} = 0. \quad (11)$$

Кількість рівнянь (формула 11) дорівнює числу стрижнів у фермі (m).

Рівняння з формули 8 та з формули 11 поєднуються в одну велику систему (назвемо її об'єднаною). Число рівнянь у цій системі (u) визначається за формулою 12.

$$u = 2 \times n + m. \quad (12)$$

Зазначимо, що у фермах, які розглядаються нами (тобто в фермах без «зайвих» в'язей), значення n і m пов'язані між собою залежністю, що випливає із загальної формули для числа ступенів вільності шарнірно-стрижневих конструкцій [6].

$$m = 2 \times n - 3. \quad (13)$$

Звідси остаточно:

$$u = 4 \times n - 3. \quad (14)$$

При розв'язання об'єднаної системи рівнянь знаходяться зусилля у всіх стрижнях ферми разом з реакціями її опор.

Для перевірки правильності отриманих результатів необхідно скласти рівняння статичної рівноваги для ферми в цілому, зокрема, рівняння моментів щодо нерухомої опори (вузла 1) та рівняння проєкцій на осі координат (формули 15).

$$\begin{cases} \sum m_1 = -R_2 \times z_2 - \sum_{i=1}^n P_i \times z_i + \sum_{i=1}^n Q_i \times y_i = 0; \\ \sum P_y = R_1^y + R_2 + \sum_{i=1}^n P_i = 0; \\ \sum P_z = R_1^z + \sum_{i=1}^n Q_i = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Розрахунок вважається вірним, якщо рівняння (формула 15) при підстановці в них знайдених значень опорних реакцій перетворюються на тотожність типу $0 \equiv 0$.



2.4 Розрахунки стрижнів на міцність та стійкість

Після розв'язання об'єднаної системи рівнянь комп'ютер відтворює процедуру «ручного» розрахунку стрижнів ферми на міцність, яку викладено в розділі 1.

Після цього комп'ютером відтворюється «ручний» розрахунок на стійкість, котрий наведено у розділі 1, з тією лише відмінністю, що його процедуру проходять тут усі стислі стрижні ферми, без їх попереднього ранжирування за ступенем небезпеки з погляду поздовжнього згину.

2.5 Особливості розрахунків двокутикових стрижнів

У ферм, які розглядаються у цьому розділі, всі стрижні можуть складатися не тільки з одного кутика, але й із двох однакових кутиків.

При однокутиковому варіанті стрижня складно домогтися того, щоб його розтягнення або стискання було простим, а не позацентровим, коли, як відомо, у стрижні виникають додаткові напруження.

Застосування двокутикових (здвоєних) стрижнів дозволяє уникнути зазначеного негативного явища.

На рисунках 3 і 4 (див. с. 18) зображено досить простий варіант двокутикових стрижнів, у якому кутики, що утворюють стрижень, приварюються з двох боків до косинок, що розташовані у вузлах ферми.

Розрахунки на міцність та стійкість у двокутикових стрижнів практично такі ж, як і у стрижнів однокутикових. Відмінності полягають лише в позначеннях площ та мінімальних радіусів інерції поперечних перерізів стрижнів.

У однокутикових стрижнів ці позначення – стандартні, тоді як у двокутикових зазначені параметри позначаються такими ж символами, але з додаванням зірочки.

Стосовно здвоєних рівнополічних кутиків формули для обчислення зазначених параметрами з формул 16.

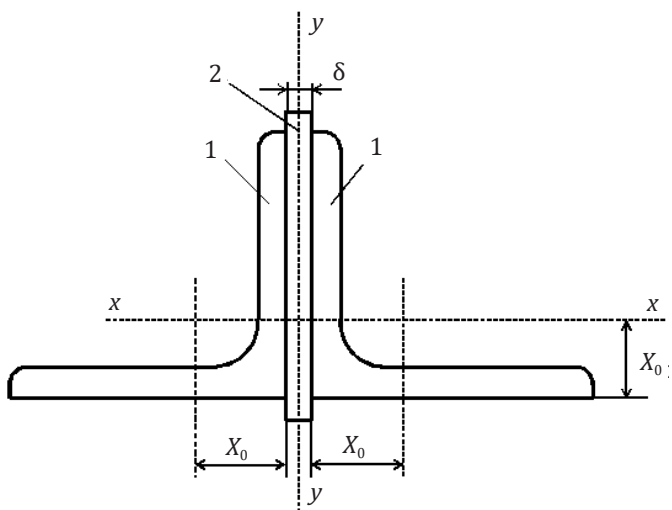


Рисунок 3

1 – кутики рівнополичні; 2 – косинка

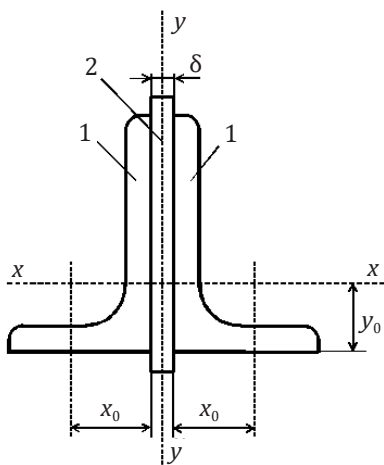


Рисунок 4

1 – кутики нерівнополичні; 2 – косинка

$$\begin{cases} F^* = 2 \times F; & J_{\min}^* = J_x^* = 2 \times J_x; \\ i_{\min}^* = \sqrt{\frac{J_{\min}^*}{F^*}} = \sqrt{\frac{2 \times J_x}{2 \times F}} = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = i_x. \end{cases} \quad (16)$$

У здвоєних нерівнополичних кутиків, як показують розрахунки, $J_y^* < J_x^*$. Тому для них обчислення зазначених параметрами з формул 17.

$$\begin{cases} F^* = 2 \times F; & J_{\min}^* = J_y^* = 2 \times \left[J_y + F \times \left(x_0 + \frac{\delta}{2} \right)^2 \right]; \\ i_{\min}^* = \sqrt{\frac{J_{\min}^*}{F^*}} = \dots = \sqrt{\frac{J_y}{F} + \left(x_0 + \frac{\delta}{2} \right)^2}. \end{cases} \quad (17)$$

Літерою δ у формулах 17 та на рисунках 3 та 4 позначена товщина косинки.

Слід мати на увазі, що значення δ залежить від товщини полиць здвоєних кутиків, яка наперед не відома. Тому це значення не може бути наперед заданим.

Враховуючи цю обставину, а також те, що елементи металоконструкцій, які зварюються між собою, зазвичай незначно відрізняються за товщиною один від одного, будемо вважати товщину косинки такою ж, як і товщина полиць кутиків, що утворюють двокутиковий стрижень (формула 18).

$$\delta = t. \quad (18)$$

З урахуванням формули 18 вирази (формула 17) набувають остаточного вигляду, який представлено формулою 19.

$$\begin{cases} F^* = 2 \times F; & J_{\min}^* = J_y^* = 2 \times \left[J_y + F \times \left(x_0 + \frac{t}{2} \right)^2 \right]; \\ i_{\min}^* = \sqrt{\frac{J_{\min}^*}{F^*}} = \dots = \sqrt{\frac{J_y}{F} + \left(x_0 + \frac{t}{2} \right)^2}. \end{cases} \quad (19)$$

2.6 Тестові приклади

Приклад 1. Для ферми (рис. 5, табл. 3, 4) виконати розрахунки на міцність та стійкість.

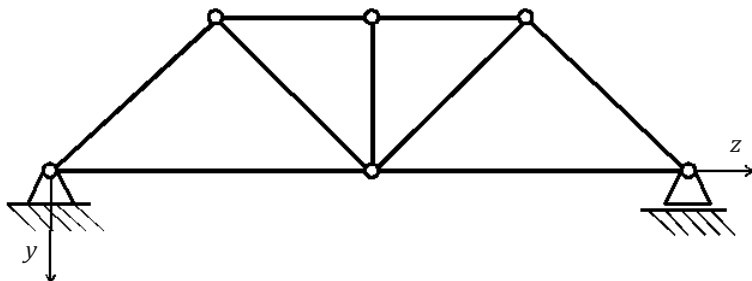


Рисунок 5

Таблиця 3 – Введення вузлів та навантажень ферми до прикладів 1–4

Номер вузла (i)	Координати вузла, м		Зовнішні навантаження вузла, кН		Номери вузлів оточення
	y	z	P	Q	
1	0	0	0	0	5; 6
2	0	4	0	0	3; 5
3	-1	3	0	0	2; 4; 5
4	-1	2	50	5	3; 5; 6
5	0	2	0	0	1; 2; 3; 4; 6
6	-1	1	0	0	1; 4; 5

Таблиця 4 – Введення стрижнів ферми до прикладу 1

Марка сталі	Варіанти кутиків		Варіанти стрижнів	
	A1	A2	B1	B2
СтЗсп	+	-	+	-

Рішення

1. Будуємо розрахункову схему ферми (рис. 6).

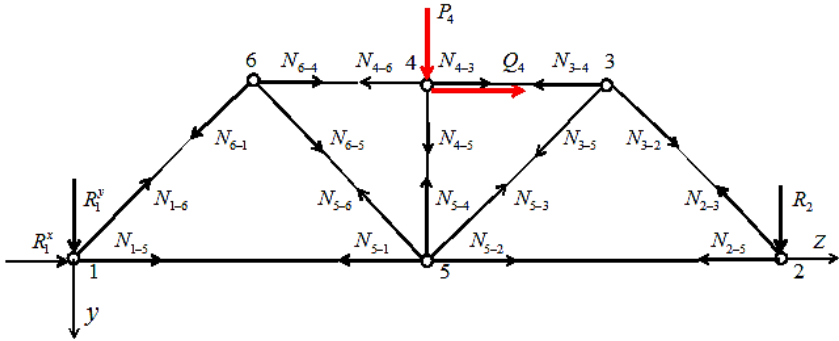


Рисунок 6

2. Складаємо у відповідності до залежностей (формули 7-9) рівняння рівноваги вузлів заданої ферми (рис. 6).

Вузол 1:

$$\begin{cases} R_1^y - 0,707 \times N_{1-6} = 0; \\ R_1^x + N_{1-5} + 0,707 \times N_{1-6} = 0. \end{cases}$$

Вузол 2:

$$\begin{cases} R_2 - 0,707 \times N_{2-3} = 0; \\ -0,707 \times N_{2-3} - N_{2-5} = 0. \end{cases}$$

Вузол 3:

$$\begin{cases} 0,707 \times N_{3-2} + 0,707 \times N_{3-5} = 0; \\ 0,707 \times N_{3-2} - N_{3-4} - 0,707 \times N_{3-5} = 0. \end{cases}$$

Вузол 4:

$$\begin{cases} P_4 + N_{4-5} = 0; \\ Q_4 + N_{4-3} - N_{4-6} = 0. \end{cases}$$

Вузол 5:

$$\begin{cases} -0,707 \times N_{5-3} - N_{5-4} - 0,707 \times N_{5-6} = 0; \\ N_{5-2} + 0,707 \times N_{5-3} - 0,707 \times N_{5-6} - N_{5-1} = 0. \end{cases}$$

Вузол 6:

$$\begin{cases} 0,707 \times N_{6-5} + 0,707 \times N_{6-1} = 0; \\ N_{6-4} + 0,707 \times N_{6-5} - 0,707 \times N_{6-1} = 0. \end{cases}$$

3. До системи рівнянь рівноваги додаємо систему рівнянь зв'язків зусиль у стрижнях:

$$\begin{cases} N_{1-5} = N_{5-1}; N_{1-6} = N_{6-1}; N_{2-3} = N_{3-2}; \\ N_{2-5} = N_{5-2}; N_{3-4} = N_{4-3}; N_{3-5} = N_{5-3}; \\ N_{4-5} = N_{5-4}; N_{4-6} = N_{6-4}; N_{5-6} = N_{6-5}. \end{cases}$$

Усього рівнянь в об'єднаній системі – 21, тобто рівно стільки, скільки у ній невідомих (18 зусиль у стрижнях та 3 опорні реакції).

4. Розв'язуємо об'єднану систему рівнянь за допомогою функції *solve* з модуля *numpy.linalg* мовою *Python* і знаходимо значення усіх невідомих.

Опорні реакції ферми мають такі значення:

$$R_1^z = -5,0 \text{ кН}; R_1^y = -23,75 \text{ кН}; R_2 = -26,25 \text{ кН}.$$

Значення зусиль у стрижнях наведені в таблиці 5.

Таблиця 5 – Зусилля у стрижнях ферми

Позначення стрижнів	Довжини стрижнів, м	Зусилля у стрижнях, кН
1-6	1,414	-33,588
1-5	2	28,75
2-3	1,414	-37,123
2-5	2	26,25
3-4	1	-52,5
3-5	1,414	37,123
4-5	1	-50
4-6	1	-47,5
5-6	1,414	33,588

Довжини стрижнів у таблиці 5 розраховані за формулою 7.

5. Перевірочна підстановка до рівнянь (формула 15) знайдених значень опорних реакцій дає наступні результати:



$$\begin{cases} \sum m_1 = -R_2 \times z_2 - P_4 \times z_4 + Q_4 \times y_4 = 26,25 \times 4 - 50 \times 2 + 5 \times (-1) = 0; \\ \sum P_y = R_1^y + R_2 + P_4 = -23,75 - 26,25 + 50 = 0; \\ \sum P_z = R_1^z + Q_4 = -5 + 5 = 0. \end{cases}$$

Як бачимо, реакції ферми та зусилля у її стрижнях (табл. 5) знайдені вірно.

6. Визначаємо мінімальну площу поперечного перерізу стрижнів ферми, що задовольняє умову міцності (формула 1).

З таблиці 5 випливає, що найбільше за модулем зусилля діє у стрижні 3–4 і становить: $N_{\max} = 52,5$ кН.

Допустиме напруження для заданого матеріалу стрижнів (сталь Ст3сп) вибираємо з таблиці А.3: $[\sigma] = 163$ МПа.

За формулою 2 знаходимо:

$$F_{\min} = \frac{N_{\max}}{[\sigma]} = \frac{15 \times 10^3}{163} = 92 \text{ мм}^2 = 0,92 \text{ см}^2.$$

7. За знайденим значенням $F_{\min}$ з таблиці А.1 вибираємо найближчий кутик $35 \times 35 \times 5$, у якого $F = 3,28 \text{ см}^2$ та $i_{\min} = i_{y0} = 0,68$ см.

Вказане значення F приймаємо для усіх стрижнів ферми як таке, що забезпечує їхню міцність (тобто $F_{\min} = F_{str}$).

8. Виконуємо розрахунок стиснутих стрижнів на стійкість.

Оскільки цей розрахунок виконується «вручну», а не в комп'ютерному варіанті, йому підлягають тільки стрижні 2–3 і 3–4, оскільки у першого з них максимальною є довжина, а у другого – максимальним є модуль стискаючого зусилля. Інші стислі стрижні явно менш небезпечні з погляду поздовжнього згину.

Відповідно до запропонованого алгоритму, розрахунок на стійкість проводиться покроково з поступовим збільшенням значення F до одночасного виконання умови стійкості (формула 3) обома зазначеними стрижнями.

Послідовність та результати цього розрахунку представлені в таблиці В.1.

За результатами розрахунку остаточно приймається для усіх стрижнів ферми кутик $63 \times 63 \times 4$ ($F_{end} = 4,96 \text{ см}^2$).

Приклад 2. Для ферми (рис. 5, табл. 3, 6) виконати розрахунки на міцність та стійкість.

Таблиця 6 – Введення стрижнів ферми до прикладу 2

Марка сталі	Варіанти кутиків		Варіанти стрижнів	
	A1	A2	Б1	Б2
Ст3сп	–	+	+	–

Рішення

Пункти 1–5 прикладу 1 повторюються.

6. За значенням $F_{\min}=3,221 \text{ см}^2$ вибираємо із таблиці А.2 найближчий кутик $56 \times 36 \times 4$, у якого $F=3,58 \text{ см}^2$ і $i_{\min}=i_u=0,78 \text{ см}$.

7. Виконуємо розрахунок стиснутих стрижнів на стійкість.

Розрахунок проводиться покроково. Йому підлягають, як і у прикладі 1, лише стрижні 2–3 і 3–4.

Послідовність та результати розрахунку представлені в таблиці В.2.

За результатами розрахунку остаточно приймається для усіх стрижнів ферми кутик $75 \times 50 \times 5$ ($F_{\text{end}}=6,11 \text{ см}^2$).

Приклад 3. Для ферми (рис. 5, табл. 3, 7) виконати розрахунки на міцність та стійкість.

Таблиця 7 – Введення стрижнів ферми до прикладу 3

Марка сталі	Варіанти кутиків		Варіанти стрижнів	
	A1	A2	Б1	Б2
Ст3сп	+	–	–	+

Рішення

Пункти 1–5 прикладу 1 повторюються.

6. За половиною знайденого значення $F_{\min}$ ($1,6105 \text{ см}^2$) з таблиці А.1 вибираємо найближчі здвоєні кутики $28 \times 28 \times 3$, у яких $F=1,62 \text{ см}^2$ і $i_x=0,85 \text{ см}$, після чого за формулами 16 визначаємо відповідні значення зазначених параметрів для двокутикового перерізу:

$$F^*=2 \times F=2 \times 1,62=3,24 \text{ см}^2; i_{\min}^*=i_x=0,85 \text{ см}.$$

7. Виконуємо розрахунок стиснутих стрижнів на стійкість.



Розрахунок проводиться покроково. Йому підлягають, як і в прикладі 1, лише стрижні 2–3 і 3–4.

Послідовність та результати розрахунку представлена у таблиці В.3.

За результатами розрахунку остаточно приймаються для усіх стрижнів ферми здвоєні кутики $40 \times 40 \times 3$ ($F_{end} = 2,35 \text{ см}^2$).

Приклад 4. Для ферми (рис. 5, табл. 3, 8) виконати розрахунки на міцність та стійкість.

Таблиця 8 – Введення стрижнів ферми до прикладу 4

Марка сталі	Варіанти кутиків		Варіанти стрижнів	
	A1	A2	B1	B2
СтЗсп	–	+	–	+

Рішення

Пункти 1–5 прикладу 1 повторюються.

6. За половиною знайденого значення F_{min} ($1,6105 \text{ см}^2$) з таблиці А.2 вибираємо найближчі здвоєні кутики $40 \times 25 \times 3$, у яких $F = 1,89 \text{ см}^2$, $J_y = 0,93 \text{ см}^4$, $x_0 = 0,59 \text{ см}$, $t = 3 \text{ мм}$, та за формулами 19 визначаємо відповідні значення вказаних параметрів для двокутикового перерізу:

$$F^* = 2 \times F = 2 \times 1,89 = 3,78 \text{ см}^2;$$

$$i_{min}^* = \sqrt{\frac{J_y}{F} + \left(x_0 + \frac{t}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{0,93}{1,89} + \left(0,59 + \frac{0,3}{2}\right)^2} = 1,02 \text{ см}.$$

7. Виконуємо розрахунок стиснутих стрижнів на стійкість.

Розрахунок проводиться покроково. Йому підлягають, як і в прикладі 1, лише стрижні 2–3 і 3–4.

Послідовність та результати розрахунку представлені у таблиці В.4.

За результатами розрахунку остаточно приймаються для усіх стрижнів ферми здвоєні кутики $50 \times 32 \times 3$ ($F_{end} = 2,42 \text{ см}^2$).

АЛГОРИТМИ АВТОМАТИЗОВАНИХ РОЗРАХУНКІВ ФЕРМ З РУХОМИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Рухомому навантаженню піддаються ферми мостового типу, які мають два горизонтальні яруси – верхній і нижній [6; 7]. Ферма, яка була розглянутою у попередньому розділі (рис. 5), якраз і відноситься до цього типу. У неї стрижні 4–6 та 3–4 утворюють верхній ярус, а стрижні 1–5 та 2–5 відносяться до нижнього ярусу.

У реальних мостів (як транспортних, так і підйомно-транспортних) таких ферм дві. Вони розташовані паралельно одна до одної і скріплені між собою додатковими конструктивними елементами, по яким і рухається певний вантаж (транспортний засіб, устаткування, яке транспортується, та ін.). Рухоме навантаження на кожную із зазначених ферм дорівнює половині ваги вантажу, що переміщується.

Позначимо це навантаження як P_m (від слова *mobile* – рухомий), а координату її поточного становища як $z(P_m)$ (рис. 7–8, див. с. 27).

Ярус, уздовж якого рухається зазначена сила, назовемо активним. Відповідно, інший рівень ферми будемо називати пасивним.

У рами, наведеної на рисунку 7, нижній ярус – активний, а верхній – пасивний. У рами ж, представленої на рисунку 8, навпаки, нижній ярус – пасивний, а верхній – активний.

Етапи розрахунку ферм цього типу переважно такі самі, як і у разі ферм зі стаціонарним навантаженням (розділ 2). Наявні відмінності стосуються лише стрижнів активного ярусу (назовемо їх особливими).

Особливі стрижні на відміну від інших стрижнів ферми, котрі далі іменуються звичайними, перебувають в умовах центрального розтягання – стискання у поєднанні з поперечним згином, викликаним силою P_m [3; 4].



Зрозуміло, що для особливих стрижнів потрібні інші методи розрахунку, відмінні від тих, що викладені у розділі 2 і є прийнятними тільки для звичайних стрижнів ферми.

До сказаного слід додати, що однокутикові особливі стрижні внаслідок несиметричності їх поперечних перерізів щодо вертикальної та горизонтальної осей координат (додаток А) будуть згинатися силою P_m одночасно у двох відповідних напрямках (явище косого згину), збільшуючи тим самим робочі напруження та необхідні розміри профілю.

Зазначеного недоліку позбавлені двокутикові особливі стрижні (рис. 3–4) і тому тільки вони розглядаються в цьому розділі.

Для звичайних стрижнів ферм з рухомим навантаженням прийнятні як однокутикові, так і двокутикові варіанти.

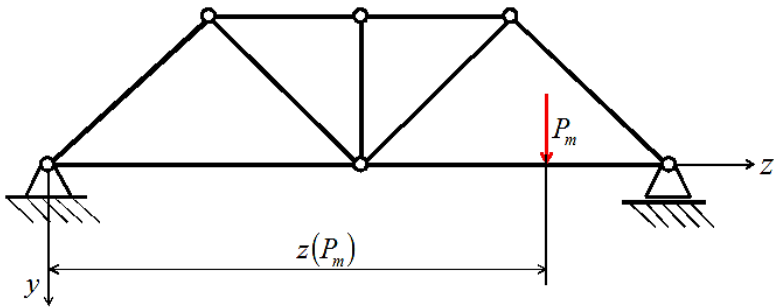


Рисунок 7

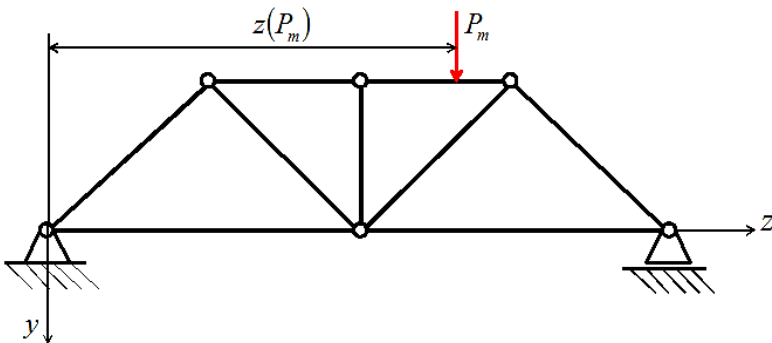


Рисунок 8



3.1 Введення вихідних даних

Для реалізації розрахунку до комп'ютера вводяться дані таблиць 9–11.

Таблиця 9 – Форма введення вузлів ферми

Номери вузлів, (i)	Координати вузлів, м		Номери вузлів оточення
	y	z	
1			
...			
n			

Таблиця 10 – Форма введення стрижнів ферми

Категорія стрижнів	Номери стрижнів	Марка сталі	Варіанти кутиків		Варіанти стрижнів	
			A1	A2	Б1	Б2
Особлива			±	±	±	±
Звичайна			±	±	±	±

Таблиця 11 – Форма введення рухомої сили

Активний ярус	Модуль сили P_m , кН	Межі зміни $z(P_m)$, м	
		ліва	права
Верхній			
Нижній			

Деталі введення – такі самі, як і в разі ферм зі стаціонарним навантаженням (розділ 2).

3.2 Побудова розрахункової схеми

При побудові розрахункової схеми виконуються такі самі дії, що і у разі ферм зі стаціонарним навантаженням (розділ 2).

3.3 Розрахунки особливих стрижнів ферми

Ці розрахунки представлені у двох варіантах, які принципово відрізняються один від одного знаком поздовжньої сили, що діє в стрижні. Перший відноситься до випадку, коли поздовжня сила додатна, другий – до випадку, коли вона від’ємна.

До основи обох варіантів покладена методика поздовжньо – поперечного згину [3; 4], котра доповнена врахуванням поперечних сил Q , які є сумірними з поздовжньою силою N та рухомим навантаженням P_m і тому помітно впливають на міцність стрижня.

3.3.1 Випадок додатної поздовжньої сили

На рисунку 9 наведено розрахункову схему для даного випадку.

На схемі показаний особливий стрижень $i-k$ разом із навантаженнями P_m та N_{i-k} , а також опорними реакціями R_i та R_k , модулі яких у зображеному положенні (момент проходження силою P_m середини зазначеного стрижня) складають $R_i = R_k = 0,5 \times P_m$.

У зазначений момент, як відомо, переріз стрижня, що знаходиться під силою, є найбільш небезпечним з точки зору міцності [3; 4].

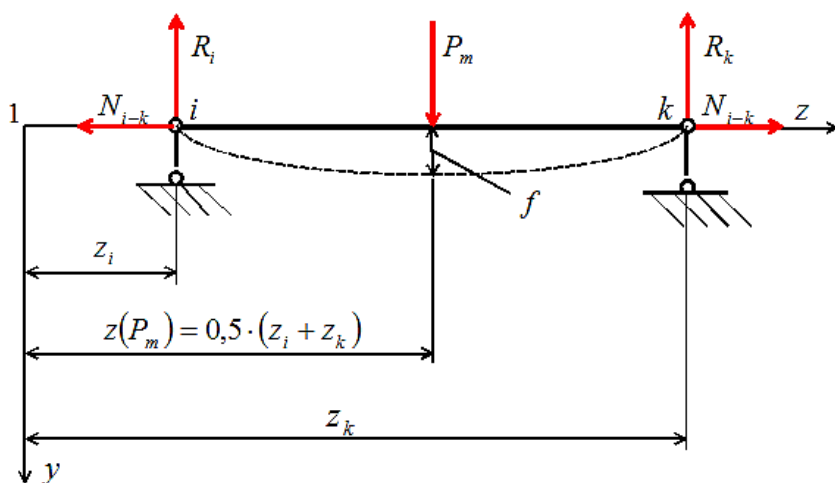


Рисунок 9



Пунктирною лінією на схемі показано вигнуту вісь стрижня, а буквою f позначено її максимальний прогин.

У цьому випадку розрахунок на міцність не доповнюється розрахунком на стійкість, оскільки стрижень, який розглядається, є розтягнутим.

Алгебраїчне значення (модуль та знак) поздовжньої сили N_{i-k} у стрижні, що розглядається, визначається шляхом розв'язання об'єднаної системи рівнянь, складених для ферми в цілому (розділ 2) з прикладеними в її вузлах i та k силами P_i і P_k , які дорівнюють за модулем реакціям стрижня ($P_i = P_k = 0,5 \times P_m$) та спрямовані в бік додатного напрямку осі u (вниз).

Нормальні напруження у стрижні викликаються згинальними моментами від дії сил P_m і N_{i-k} , а також безпосередньою дією сили N_{i-k} (тобто розтяганням).

Модулі зазначених згинальних моментів у небезпечному перерізі стрижня (під силою P_m) визначаються за наступними формулами.

Згинальний момент від дії сили P_m розраховується за формулою 20.

$$M_1 = \frac{1}{2} \times P_m \times \frac{1}{2} \ell_{i-k} = \frac{1}{2} \times P_m \times \frac{1}{2} \times (z_k - z_i) = \frac{1}{4} \times P_m \times (z_k - z_i), \quad (20)$$

де P_m – модуль рухомої сили;

ℓ_{i-k} – довжина стрижня.

Згинальний момент від дії сили N_{i-k} розраховується за формулою 21.

$$M_2 = N_{i-k} \times f, \quad (21)$$

де N_{i-k} – модуль поздовжньої сили;

f – прогин стрижня під силою P_m , викликаний дією сил P_m та N_{i-k} розраховується за формулою 22.

$$f = \frac{f_0}{1 + N_{i-k} / P_E}; \quad (22)$$

f_0 – прогин стрижня під силою P_m від дії тільки цієї сили P_m розраховується за формулою 23.



$$f_0 = \frac{P_m \times \ell_{i-k}^3}{48 \times E \times J_x^*}; \quad (23)$$

P_E – так звана сила Ейлера розраховується за формулою 24.

$$P_E = \frac{\pi^2 \times E \times J_x^*}{\ell_{i-k}^2}; \quad (24)$$

$E=2 \times 10^5$ МПа – модуль пружності першого роду для сталі;

J_x^* – момент інерції відносно осі x усього здвоєного перерізу стрижня (рис. 3, 4) розраховується за формулою 25.

$$J_x^* = 2 \times J_x; \quad (25)$$

J_x – момент інерції відносно осі x поперечного перерізу кожного з двох кутиків, що створюють стрижень (табл. А.1–А.2).

Модулі нормальних напружень від дії згинальних моментів M_1 і M_2 змінюються за законами з формул 26 та 27.

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{J_x^*} \times h = \frac{M_1}{2 \times J_x} \times h; \quad (26)$$

$$\sigma_2 = \frac{M_2}{J_x^*} \times h = \frac{M_2}{2 \times J_x} \times h, \quad (27)$$

де h – відстань від осі x до шару волокон, у якому визначаються зазначені напруження (рис. 10–11, див. с. 32).

Знаки кожного з цих напружень у шарах волокон, котрі лежать вище і нижче осі x , є протилежними (рис. 10–11).

Максимальні значення (величини) зазначених напружень розраховуються за формулами 28 та 29.

$$\sigma_1^{\max} = \frac{M_1}{W_x^*} = \frac{M_1}{2 \times W_x}; \quad (28)$$

$$\sigma_2^{\max} = \frac{M_2}{W_x^*} = \frac{M_2}{2 \times W_x}, \quad (29)$$

де M_1 і M_2 – модулі відповідних згинальних моментів;

W_x^* – момент опору відносно осі x усього здвоєного перерізу стрижня (формула 30).

$$W_x^* = 2 \times W_x; \quad (30)$$

W_x – момент опору відносно осі x поперечного перерізу кожного з двох кутиків, що створюють стрижень (табл. А.1–А.2).

Нормальні напруження σ_3 , які викликаються дією поздовжньої сили N_{i-k} , є постійними за висотою поперечного перерізу стрижня (рис. 10–11). Їхній знак співпадає зі знаком сили N_{i-k} , а модуль визначається за формулою 31.

$$\sigma_3 = \frac{N_{i-k}}{F^*} = \frac{N_{i-k}}{2 \times F}, \quad (31)$$

де N_{i-k} – модуль поздовжньої сили (як і у формулі 21);

F^* – площа усього здвоєного перерізу стрижня (формула 32).

$$F^* = 2 \times F, \quad (32)$$

де F – площа поперечного перерізу кожного з двох кутиків, що створюють стрижень (табл. А.1–А.2).

Напруження σ_1 у шарах волокон вище осі x є стискаючими (від’ємними), а нижче цієї осі – розтягаючими (додатними).

У даному випадку напруження σ_2 на всіх рівнях небезпечного перерізу протилежні за знаком напруженням σ_1 тому, що момент M_2 протидіє моменту M_1 у створенні прогину стрижня.

У шарах волокон вище осі x напруження σ_2 є розтягаючими (додатними), а нижче цієї осі – стискаючими (від’ємними).

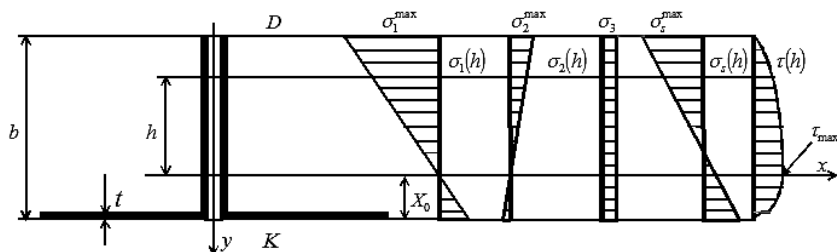


Рисунок 10

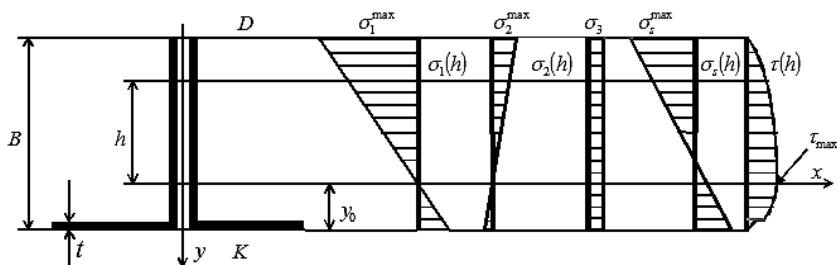


Рисунок 11



У цьому випадку напруження σ_3 на всіх рівнях небезпечного перерізу є додатними, як і сила N_{i-k} , котра їх створює.

Нормальні напруження у верхній частині небезпечного перерізу (тобто вище осі x) за модулем у цілому значно більші, ніж у нижній (рис. 10–11).

Зважаючи на це і враховуючи знаки σ_1 , σ_2 та σ_3 у верхній (більш навантаженій) частині небезпечного перерізу, маємо стосовно цієї частини такі вирази (формули 33 та 34) для поточних і максимальних значень сумарних нормальних напружень σ_s .

$$\sigma_s(h) = |-\sigma_1(h) + \sigma_2(h) + \sigma_3| = \frac{1}{2} \times \left| -\frac{M_1}{J_x} \times h + \frac{M_2}{J_x} \times h + \frac{N_{i-k}}{F} \right|; \quad (33)$$

$$\sigma_s^{\max} = |-\sigma_1^{\max} + \sigma_2^{\max} + \sigma_3| = \frac{1}{2} \times \left| -\frac{M_1}{W_x} + \frac{M_2}{W_x} + \frac{N_{i-k}}{F} \right|. \quad (34)$$

Слід зазначити, що максимальні значення цих напружень ($\sigma_s^{\max}$) мають місце на рівні D небезпечного перерізу (рис. 10–11), який максимально віддалений від осі x . На рівні K значення σ_s набагато менші (рис. 10–11).

Дотичні напруження τ зумовлені поперечною силою Q , що виникає від прямого згину стрижня силою P_m у площині $u-z$.

Поперечним силам і дотичним напруженням у силових розрахунках знаків зазвичай не надають.

Значення поперечної сили обчислюється за формулою 35.

$$Q = R_i = R_k = 0,5 \times P_m, \quad (35)$$

де P_m – модуль рухомої сили (як і у формулі 20).

Значення дотичних напружень змінюються за висотою небезпечного перерізу стрижня згідно з законом, який впливає з формули 36 (Журавського).

$$\tau(h) = \frac{Q \times S_x^{*trun}}{t^* \times J_x^*} = \frac{Q \times 2 \times S_x^{trun}}{2 \times t \times 2 \times J_x} = \frac{Q \times S_x^{trun}}{2 \times t \times J_x}, \quad (36)$$

де S_x^{*trun} – статичний момент відносно осі x так званої відсіченої частини усього небезпечного перерізу, тобто тієї його частини, котра лежить вище рівня h (рис. 10–11, формула 37).

$$S_x^{trun*} = 2 \times S_x^{trun}; \quad (37)$$

S_x^{trun} – статичний момент відносно осі x відсіченої частини перерізу кожного з двох кутиків, що створюють стрижень;

t^* – розрахункова ширина усієї відсіченої частини небезпечного перерізу (формула 38).

$$t^* = 2 \times t; \quad (38)$$

t – товщина полиць кожного з двох кутиків, що створюють стрижень (табл. А.1–А.2).

Значення S_x^{trun} дорівнює добутку площі відсіченої частини перерізу одного із здвоєних кутиків, що створюють стрижень, на відстань від центру ваги цієї частини до осі x .

Значення S_x^{trun} для рівнополичних кутиків обчислюються за формулою 39.

$$\begin{aligned} S_x^{trun} &= t \times (b - X_0 - h) \times \left[h + \frac{1}{2} \times (b - X_0 - h) \right] = \dots = \\ &= \frac{t}{2} \times \left[(b - X_0)^2 - h^2 \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Для нерівнополичних кутиків формула для обчислення значень S_x^{trun} має подібний вигляд (формула 40).

$$\begin{aligned} S_x^{trun} &= t \times (B - y_0 - h) \times \left[h + \frac{1}{2} \times (B - y_0 - h) \right] = \dots = \\ &= \frac{t}{2} \times \left[(B - y_0)^2 - h^2 \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Числові значення величин, задіяних у формулах (39) і (40), беруться з таблиць А.1 та А.2.

З урахуванням формул 35, 39 та 40 формула 36 для здвоєних рівнополичних кутиків набуває остаточного вигляду, який представлено формулою 41.

$$\tau(h) = \frac{Q \times S_x^{trun}}{2 \times t \times J_x} = \dots = \frac{P_m \times \left[(b - X_0)^2 - h^2 \right]}{8 \times J_x}. \quad (41)$$

Відповідно, для здвоєних нерівнополичних кутиків остаточна формула для $\tau(h)$ буде представлена формулою 42.

$$\tau(h) = \frac{Q \times S_x^{run}}{2 \times t \times J_x} = \dots = \frac{P_m \times [(B - y_0)^2 - h^2]}{8 \times J_x}. \quad (42)$$

Поклавши у формулах 41 і 42 $h=0$, отримуємо відповідні вирази для максимальних дотичних напружень, які представлені на формулах 43 та 44.

$$\tau_{\max} = \frac{P_m \times (b - X_0)^2}{8 \times J_x}; \quad (43)$$

$$\tau_{\max} = \frac{P_m \times (B - y_0)^2}{8 \times J_x}. \quad (44)$$

Стрижень, що розглядається, по суті є балкою. Тому він, як балка, підлягає повній перевірці міцності, котра включає перевірки за нормальними, дотичними і еквівалентними напруженнями.

Еквівалентне напруження – це умовна величина, що оцінює спільну дію нормальних та дотичних напружень у точках того чи іншого навантаженого тіла.

У цьому випадку поточні значення еквівалентних напружень у стрижні зі здвоєних рівнополочних кутиків на інтервалі $0 \leq h \leq b - X_0$ змінюються згідно законом, який представлено формулою 45.

$$\begin{aligned} \sigma_{eq}(h) &= \sqrt{[\sigma_s(h)]^2 + \alpha \times [\tau(h)]^2} = \\ &= \sqrt{\left\{ \frac{1}{2} \times \left| -\frac{M_1}{J_x} \times h + \frac{M_2}{J_x} \times h + \frac{N_{i-k}}{F} \right| \right\}^2 + \alpha \times \left\{ \frac{P_m}{8 \times J_x} \times [(b - X_0)^2 - h^2] \right\}^2} = (45) \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{\left| -\frac{M_1}{J_x} \times h + \frac{M_2}{J_x} \times h + \frac{N_{i-k}}{F} \right|^2 + \frac{\alpha}{16} \times \left\{ \frac{P_m}{J_x} \times [(b - X_0)^2 - h^2] \right\}^2}. \end{aligned}$$

Подібний вираз для стрижня зі здвоєних нерівнополочних кутиків на інтервалі $0 \leq h \leq B - y_0$ представлено формулою 46.

$$\begin{aligned} \sigma_{eq}(h) &= \dots = \frac{1}{2} \times \\ &\times \sqrt{\left| -\frac{M_1}{J_x} \times h + \frac{M_2}{J_x} \times h + \frac{N_{i-k}}{F} \right|^2 + \frac{\alpha}{16} \times \left\{ \frac{P_m}{J_x} \times [(B - y_0)^2 - h^2] \right\}^2}. \quad (46) \end{aligned}$$

Коефіцієнт α , що входить до формул 45 і 46, залежить від прийнятої в розрахунку теорії міцності.

За третьою теорією міцності (теорією максимальних дотичних напружень):

$$\alpha = 4. \quad (47)$$

За четвертою теорією міцності (теорією питомої потенційної енергії формозміни):

$$\alpha = 3. \quad (48)$$

У подальших розрахунках прийнята третя теорія міцності, як більш надійна [8–12].

Щоб встановити значення σ_{eq}^{max} , необхідно знайти максимум функції (формула 45 або 46) на інтервалі відповідно $0 \leq h \leq b - X_0$ або $0 \leq h \leq B - y_0$ будь-яким із існуючих числових методів.

Умова міцності стрижня, який розглядається, за нормальними напруженнями з урахуванням формули 34 має вигляд, який представлено формулою 49.

$$\sigma_s^{max} = \frac{1}{2} \times \left| -\frac{M_1}{W_q} + \frac{M_2}{W_q} + \frac{N_{i-k}}{F} \right| \leq [\sigma], \quad (49)$$

де $[\sigma]$ – допустиме нормальне напруження для матеріалу стрижня (табл. А.3).

Умова міцності стрижня за дотичними напруженнями залежно від виду здвоєних кутиків, що створюють стрижень, з урахуванням формул 43 і 44 має різновиди, які представлені на формулах 50 та 51.

$$\tau_{max} = \frac{P_m \times (b - X_0)^2}{8 \times J_x} \leq [\tau]; \quad (50)$$

$$\tau_{max} = \frac{P_m \times (B - y_0)^2}{8 \times J_x} \leq [\tau], \quad (51)$$

де $[\tau]$ – допустиме дотичне напруження для матеріалу стрижня за третьою теорією міцності (формула 52).

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{\alpha}} = \frac{[\sigma]}{\sqrt{4}} = \frac{[\sigma]}{2}. \quad (52)$$

Умова міцності за еквівалентними напруженнями залежно від виду здвоєних кутиків, які створюють стрижень,



з урахуванням формул 45 і 46 має різновиди, які представлені формулами 53 та 54.

$$\sigma_{eq}^{\max} = \max \left\langle \frac{1}{2} \times \sqrt{\left| -\frac{M_1}{J_x} \times h + \frac{M_2}{J_x} \times h + \frac{N_{i-k}}{F} \right|^2 + \frac{\alpha}{16} \times \left\{ \frac{P_m}{J_x} \times \left[(b - X_0)^2 - h^2 \right] \right\}^2} \right\rangle \leq [\sigma]; \quad (53)$$

$$\sigma_{eq}^{\max} = \max \left\langle \frac{1}{2} \times \sqrt{\left| -\frac{M_1}{J_x} \times h + \frac{M_2}{J_x} \times h + \frac{N_{i-k}}{F} \right|^2 + \frac{\alpha}{16} \times \left\{ \frac{P_m}{J_x} \times \left[(B - y_0)^2 - h^2 \right] \right\}^2} \right\rangle \leq [\sigma]. \quad (54)$$

Якщо у фермі декілька особливих стрижнів, котрі мають однакову довжину, розрахунку підлягає будь-який з них.

Якщо ж у особливих стрижнів довжини різні, розрахунок ведеться за тим стрижнем, котрий має найбільшу довжину.

Послідовність розрахунку наступна.

1. Шляхом розв'язання об'єднаної системи рівнянь (розділ 2), складених для ферми в цілому з прикладеними в її вузлах i та k силами $P_i = P_k = 0,5 \times P_m$, які спрямовані у бік додатного напрямку осі y (тобто вниз), визначаються модуль та знак поздовжньої сили N_{i-k} .

Якщо сила N_{i-k} виявиться додатною, розрахунок продовжується. У разі ж від'ємного значення N_{i-k} необхідно перейти до пункту 3.3.2.

2. За допомогою таблиці А.3 і формули 52 встановлюються значення допустимих нормальних та дотичних напружень для заданого матеріалу стрижня.

3. За формулою 20 визначається модуль згинального моменту M_1 .

4. З умови міцності (формула 49) без урахування в ньому другого та третього доданків обчислюється значення орієнтовного моменту опору поперечного перерізу кожного із здвоєних кутиків, що створюють стрижень (формула 55).

$$\tilde{W}_x \geq \frac{M_1}{2 \times [\sigma]}. \quad (55)$$

5. За значенням $\tilde{W}_x$ з таблиць А.1 або А.2 вибираються найближчі (не менші) розміри та відповідні параметри кожного із здвоєних кутиків – W_x, J_x, F, b (або B) та X_0 (або y_0), котрі необхідні для розрахунку стрижня на міцність.

6. За формулами 21–24 визначається модуль згинального моменту M_2 .

7. За формулою 34 встановлюється максимальне значення сумарних нормальних напружень у небезпечному перерізі стрижня.

8. За формулою 43 або 44 встановлюється значення максимальних дотичних напружень у небезпечному перерізі стрижня.

9. Будь-яким із існуючих числових методів встановлюється значення максимальних еквівалентних напружень у небезпечному перерізі стрижня як максимум функції 45 або 46 на інтервалі відповідно $0 \leq h \leq b - X_0$ або $0 \leq h \leq B - y_0$.

10. Перевіряється виконання умов міцності (формула 49, формула 50 або 51, формула 53 або 54).

При невиконанні хоча б однієї з цих умов пункти 5–10 повторюються стосовно наступного (більшого) значення W_x та інших розрахункових параметрів кожного із здвоєних кутиків, що створюють стрижень.

Кутики, які успішно пройшли перевірку на міцність, вважаються остаточно прийнятими, оскільки їхня перевірка на стійкість у цьому випадку ($N_{i-k} > 0$) не проводиться.

3.3.2 Випадок від'ємної поздовжньої сили

Розрахункова схема для цього випадку представлена на рисунку 12. Вона відрізняється від схеми, зображеної на рисунку 9, напрямком та знаком поздовжньої сили N_{i-k} , що тепер стає стискаючою.

З урахуванням цієї зміни формула 22 для визначення величини f отримує **новий** вигляд, який представлено формулою 56.

$$f = \frac{f_0}{1 - N_{i-k} / P_E}. \quad (56)$$

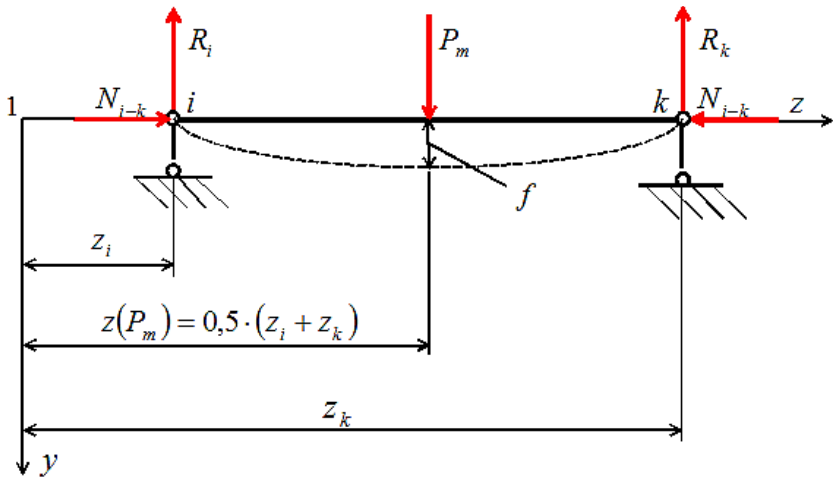


Рисунок 12

Аналіз показує, що в особливих стрижнях ферм мостового типу, про які йдеться в цьому розділі, модуль поздовжньої сили N_{i-k} завжди набагато менше сили Ейлера – P_E .

Це положення, зокрема, підтверджується даними прикладу 6, які дозволяють кількісно оцінити співвідношення сил N_{i-k} та P_E в моменти проходження рухомою силою середини особливих стрижнів.

У зазначеному прикладі модуль поздовжньої сили, що стискає особливі стрижні 3–4 і 4–6, становить 15 кН, тоді як сила Ейлера дорівнює 4456 кН, тобто перевищує поздовжню силу в 297 разів.

На підставі сказаного можна з великою часткою ймовірності вважати зазначені стрижні жорсткими, тобто такими, для яких розрахунок на міцність припустимо вести за допустимими напруженнями (а не за допустимими навантаженнями), не побоючись загрози руйнування стрижня при будь-якому випадковому збільшенні нормативного навантаження [3; 4].

Саме такий підхід і реалізується у випадку, що розглядається.

Почнемо зі знаків напружень, котрі діють у небезпечному перерізі довільного особливого стрижня $i-k$.

При зміні знака N_{i-k} знаки напружень σ_2 та σ_3 змінюються на протилежні.

Знак σ_3 змінюється з плюсу на мінус «автоматично», слідуючи за знаком N_{i-k} .

Знаки σ_2 змінюються внаслідок того, що згинальний момент M_2 стає таким, що сприяє моменту M_1 згинати стрижень.

У шарах волокон, розташованих вище осі x , напруження σ_2 стають від'ємними (стискаючими), а нижче цієї осі – додатними (розтягаючими). Їхні напрямки, котрі показані на рисунках 10 та 11, змінюються на протилежні.

Знаки σ_1 у даному випадку залишаються незмінними, тобто такими, як і нові знаки σ_2 .

У зв'язку з означеними змінами знаків формули 33 та 34 замінюються формулами 57 та 58.

$$\sigma_s(h) = |-\sigma_1(h) - \sigma_2(h) - \sigma_3| = \dots = \frac{1}{2} \times \left(\frac{M_1}{J_x} \times h + \frac{M_2}{J_x} \times h + \frac{N_{i-k}}{F} \right). \quad (57)$$

$$\sigma_s^{\max} = |-\sigma_1^{\max} - \sigma_2^{\max} - \sigma_3| = \dots = \frac{1}{2} \times \left(\frac{M_1}{W_x} + \frac{M_2}{W_x} + \frac{N_{i-k}}{F} \right). \quad (58)$$

Формули 45 та 46 замінюються формулами 59 та 60.

$$\sigma_{eq}(h) = \dots = \frac{1}{2} \times \sqrt{\left(\frac{M_1}{J_x} \times h + \frac{M_2}{J_x} \times h + \frac{N_{i-k}}{F} \right)^2 + \frac{\alpha}{16} \times \left\{ \frac{P_m}{J_x} \times [(b - X_0)^2 - h^2] \right\}^2}. \quad (59)$$

$$\sigma_{eq}(h) = \dots = \frac{1}{2} \times \sqrt{\left(\frac{M_1}{J_x} \times h + \frac{M_2}{J_x} \times h + \frac{N_{i-k}}{F} \right)^2 + \frac{\alpha}{16} \times \left\{ \frac{P_m}{J_x} \times [(B - y_0)^2 - h^2] \right\}^2}. \quad (60)$$

Формула 49 замінюється формулою 61.

$$\sigma_s^{\max} = \dots = \frac{1}{2} \times \left(\frac{M_1}{W_x} + \frac{M_2}{W_x} + \frac{N_{i-k}}{F} \right) \leq [\sigma]. \quad (61)$$

Формули 53 та 54 замінюються формулами 62 та 63.



$$\sigma_{eq}^{\max} = \dots = \max \left\langle \frac{1}{2} \times \sqrt{\left(\frac{M_1}{J_x} \times h + \frac{M_2}{J_x} \times h + \frac{N_{i-k}}{F} \right)^2 + \frac{\alpha}{16} \times \left\{ \frac{P_m}{J_x} \times [(b - X_0)^2 - h^2] \right\}^2} \right\rangle \leq [\sigma]. \quad (62)$$

$$\sigma_{eq}^{\max} = \dots = \max \left\langle \frac{1}{2} \times \sqrt{\left(\frac{M_1}{J_x} \times h + \frac{M_2}{J_x} \times h + \frac{N_{i-k}}{F} \right)^2 + \frac{\alpha}{16} \times \left\{ \frac{P_m}{J_x} \times [(B - y_0)^2 - h^2] \right\}^2} \right\rangle \leq [\sigma]. \quad (63)$$

Інші формули та дії пункту 3.3.1 залишаються у пункті 3.3.2 незмінними.

Після виконання розрахунку на міцність стрижні, стиснуті центрально прикладеною силою, традиційно підлягають розрахунку на стійкість.

Особливістю даного випадку є додатковий згин стиснутого стрижня поперечним навантаженням (силою P_m).

Слід зазначити, що питання про стійкість стиснутого стрижня з таким навантаженням у навчальній літературі зазвичай не розглядається, ймовірно, через складність його теоретичного аналізу.

Таким чином, залишається прийняти і в даному випадку традиційну методику розрахунку на стійкість, викладену в розділах 1 і 2, вважаючи її, однак, символічною, оскільки при співвідношенні сил N_{i-k} та P_E , обумовленому вище, небезпечним швидше буде поперечний згин, а не поздовжній.

3.4 Розрахунки звичайних стрижнів ферми

Звичайні стрижні ферм з рухомим навантаженням розраховуються на міцність та стійкість. Ці розрахунки принципово не відрізняються від таких, що розглянуті у розділі 2 стосовно ферм зі стаціонарним навантаженням (приклади 1–4). Існуючі відмінності стосуються лише стадії визначення зусиль у стрижнях.

У цьому випадку зазначена дія виконується відразу для усіх стрижнів ферми (особливих і звичайних), але не одноразово, а стосовно ряду фіксованих положень (FP) рухомої сили P_m .

До таких положень відносяться вузли активного ярусу, що лежать у межах ділянки руху, а також середини особливих стрижнів, які з'єднують ці вузли.

При проходженні рухомим навантаженням будь-якого із зазначених вузлів силове навантаження на нього спрямоване вниз і дорівнює модулю цього навантаження (P_m).

У момент проходження рухомим навантаженням середини того чи іншого особливого стрижня силові навантаження на кожен з його вузлів спрямовані вниз і дорівнюють половині модуля даного навантаження ($0,5 \times P_m$).

3.5 Тестові приклади

Приклад 5. Для ферми (рис. 7, табл. 12–14) виконати розрахунки на міцність та стійкість.

Таблиця 12 – Введення вузлів ферми до прикладів 5 та 6

Номери вузлів, (i)	Координати вузлів, м		Номери вузлів оточення
	y	z	
1	0	0	5; 6
2	0	4	3; 5
3	-1	3	2; 4; 5
4	-1	2	3; 5; 6
5	0	2	1; 2; 3; 4; 6
6	-1	1	1; 4; 5

Таблиця 13 – Введення рухомої сили до прикладу 5

Активний ярус	Модуль сили P_m , кН	Межі зміни $z(P_m)$, м	
		ліва	права
Верхній	–	–	–
Нижній	20	0	4

Таблиця 14 – Введення стрижнів ферми до прикладу 5

Категорія стрижнів	Номери стрижнів	Марка сталі	Варіанти кутиків		Варіанти стрижнів	
			A1	A2	B1	B2
Особлива	1-5, 2-5	СтЗГпс	+	-	-	+
Звичайна	1-6, 2-3, 3-4, 3-5, 4-5, 4-6, 5-6	СтЗГпс	+	-	+	-

Рішення

1. Будуємо розрахункову схему ферми (рис. 13).

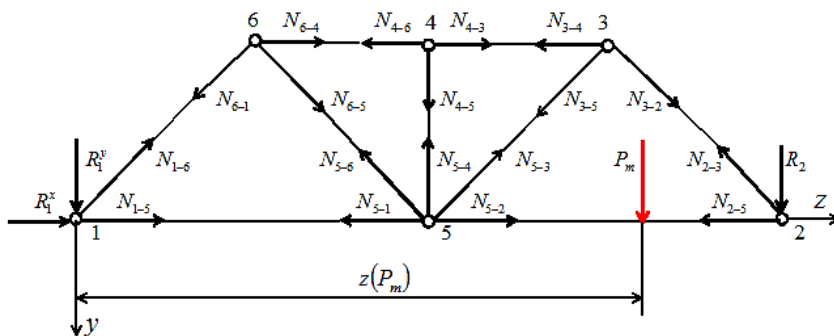


Рисунок 13

2. Визначаємо алгебраїчні значення зусиль у стрижнях ферми при різних фіксованих положеннях рухомої сили P_m .

Фіксовані положення та відповідні їм алгебраїчні значення навантажень вузлів наступні:

FP1: $z(P_m)=0$; $P_1=+20$ кН;

FP2: $z(P_m)=1$ м; $P_1=+10$ кН; $P_5=+10$ кН;

FP3: $z(P_m)=2$ м; $P_5=+20$ кН;

FP4: $z(P_m)=3$ м; $P_5=+10$ кН; $P_2=+10$ кН;

FP5: $z(P_m)=4$ м; $P_2=+20$ кН.

3. Для кожного із зазначених FP складається об'єднана система рівнянь (див. приклад 1). Ця система розв'язується



за допомогою функції *solve* з модуля *numpy.linalg* мовою *Python*. Рішення перевіряється з використанням рівнянь (формула 15).

Отримані результати представлені в таблиці Г.1.

У цій таблиці знаходимо алгебраїчні значення поздовжніх сил в особливих стрижнях 1–5 та 2–5. Далі використовуємо ті з них, які відносяться до *FP2* та *FP4*, у яких перерізи під силою P_m найбільш небезпечні з погляду міцності:

$$N_{1-5}=N_{2-5}=5 \text{ кН.}$$

4. Враховуючи те, що поздовжні сили у стрижнях 1–5 та 2–5 додатні, подальший розрахунок цих стрижнів ведемо за формулами пункту 3.3.1.

Оскільки зазначені стрижні мають однакову довжину $\ell_{1-5}=\ell_{2-5}=2 \text{ м}$ (табл. 5), розрахунок ведемо відносно будь-якого з них, наприклад, відносно стрижня 1–5.

Послідовність розрахунку наступна.

4.1. Використовуючи таблицю А.3 і формулу 52, знаходимо величини допустимих нормальних і дотичних напружень для заданого матеріалу стрижня (сталь Ст3Гпс):

$$\begin{aligned} [\sigma] &= 163 \text{ МПа,} \\ [\tau] &= \frac{[\sigma]}{2} = \frac{163}{2} = 81,5 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

4.2. За формулою 20 знаходимо модуль згинального моменту M_1 :

$$M_1 = \frac{1}{4} \times P_m \times \ell_{1-5} = \frac{1}{4} \times 20 \times 2 = 10 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

4.3. За формулою 55 обчислюємо значення орієнтовного моменту опору поперечного перерізу стрижня 1–5:

$$\tilde{W}_x \geq \frac{M_1}{2 \times [\sigma]} = \frac{10 \times 10^6}{2 \times 163} = 30\,675 \text{ мм}^3 = 30,675 \text{ см}^3.$$

4.4. За значенням $\tilde{W}_x = 30,675 \text{ см}^3$ з таблиці А.1 вибираємо здвоєні кутики $100 \times 100 \times 13$, у кожного з яких значення розрахункових параметрів наступні: $W_x = 31,67 \text{ см}^3$; $J_x = 223,23 \text{ см}^4$; $F = 24,55 \text{ см}^2$; $b = 100 \text{ мм}$; $X_0 = 2,95 \text{ см}$.

4.5. Модуль згинального моменту M_2 знаходимо, використовуючи формули 21–24:



$$f_0 = \frac{P_m \times \ell_{1-5}^3}{48 \times E \times J_x^*} = \frac{20 \times 10^3 \times (2 \times 10^3)^3}{48 \times 2 \times 10^5 \times 2 \times 223,23 \times 10^4} = 3,733 \text{ мм};$$

$$P_E = \frac{\pi^2 \times E \times J_x^*}{\ell_{1-5}^2} = \frac{\pi^2 \times 2 \times 10^5 \times 2 \times 223,23 \times 10^4}{(2 \times 10^3)^2} = 2203 \times 10^3 \text{ Н};$$

$$f = \frac{f_0}{1 + N_{1-5} / P_E} = \frac{3,733}{1 + 5 \times 10^3 / 2203 \times 10^3} = 3,725 \text{ мм};$$

$$M_2 = N_{1-5} \times f = 5 \times 10^3 \times 3,725 = 18,625 \times 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм} = 0,019 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4.6. Максимальне значення сумарних нормальних напружень у небезпечному перерізі стрижня 1–5 знаходимо за формулою 34:

$$\begin{aligned} \sigma_s^{\max} &= \frac{1}{2} \times \left| -\frac{M_1}{W_x} + \frac{M_2}{W_x} + \frac{N_{1-5}}{F} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \times \left| -\frac{10 \times 10^6}{31,67 \times 10^3} + \frac{0,019 \times 10^6}{31,67 \times 10^3} + \frac{5 \times 10^3}{24,55 \times 10^2} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \times |-315,756 + 0,600 + 2,037| = \frac{1}{2} \times |-313,119| = 156,560 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

4.7. Значення максимальних дотичних напружень у небезпечному перерізі зазначеного стрижня знаходимо за формулою 43:

$$\tau_{\max} = \frac{P_m \times (b - X_0)^2}{8 \times J_x} = \frac{20 \times 10^3 \times (100 - 2,95 \times 10)^2}{8 \times 223,23 \times 10^4} = 5,566 \text{ МПа}.$$

4.8. Значення максимальних еквівалентних напружень у небезпечному перерізі зазначеного стрижня знаходимо з графіка функції (формула 45), побудованого за допомогою бібліотеки *Python matplotlib* за даними цього прикладу.

Зазначений графік (рис. 14) не має максимуму на інтервалі $0 \leq h \leq b - X_0$ у строгому розумінні цього слова. Тому величину $\sigma_{eq}^{\max}$ слід сприймати як найбільше значення функції (формула 45) на вказаному інтервалі.

Це значення, згідно з графіком, має місце на найвищому рівні небезпечного перерізу, де $h = b - X_0$ (рис. 10, 11).

Підставивши такий вираз для h у формули 45 і 33, отримуємо:

$$\sigma_{eq}^{\max} = \sigma_s^{\max} = 156,560 \text{ МПа}.$$

4.9. Аналізуючи результати виконаного розрахунку, бачимо, що максимальні величини усіх зазначених напружень менші, ніж допустимі.

Таким чином, здвоєні кутики $100 \times 100 \times 13$ із сталі Ст3Гпс повністю відповідають умовам міцності (формули 49, 50 і 53) і є остаточно прийнятими для особливих стрижнів заданої ферми, оскільки їх розрахунок на стійкість у даному випадку ($N_{1-5} = N_{2-5} > 0$) не виконується.

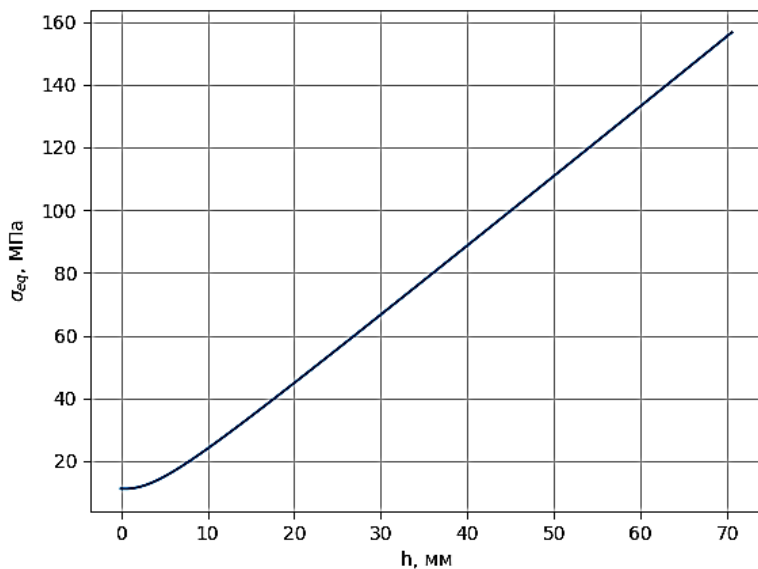


Рисунок 14

5. Вихідні дані для розрахунків на міцність звичайних стрижнів заданої ферми беремо з таблиць Г.1 та А.3.

Згідно з таблицею Г.1 найбільше за модулем зусилля в зазначених стрижнях становить $N_{kH_{max}}$.

Допустиме нормальне напруження для заданого матеріалу звичайних стрижнів (сталь Ст3Гпс) згідно з таблицею А.3 становить $[\sigma] = 163$ МПа.

5.1. За формулою 2 знаходимо мінімальну площу поперечного перерізу зазначених (однокутикових) стрижнів, достатню для забезпечення їхньої міцності:



$$F_{\min} = \frac{N_{\max}}{[\sigma]} = \frac{20 \times 10^3}{163} = 122,7 \text{ мм}^2 = 1,227 \text{ см}^2.$$

За значенням $F_{\min}$ з таблиці А.1 вибираємо найближчий кутик $25 \times 25 \times 3$, у якого $F = 1,43 \text{ см}^2$ та $i_{\min} = i_{(y_0)} = 0,49 \text{ см}$.

Такі параметри вибраного кутика є початковими у розрахунку звичайних стрижнів на стійкість.

5.2. Оскільки розрахунок на стійкість виконується «вручну», йому підлягають не усі стиснуті стрижні, а лише ті з них, які видаються найбільш небезпечними з погляду поздовжнього згину.

До таких, як і в прикладах 1–4, відносяться стрижні 2–3 (або 1–6), у яких максимальною є довжина (1,414 м), та 3–4 (або 4–6), у котрих є максимальним модуль стискаючого зусилля (20 кН).

Послідовність та результати зазначеного розрахунку наведені в таблиці В.5.

За результатами цього розрахунку остаточно приймається для усіх звичайних стрижнів ферми кутик $50 \times 50 \times 3$ ($F_{\text{end}} = 2,96 \text{ см}^2$).

Приклад 6. Для ферми (рис. 8, табл. 12, 15, 16) виконати розрахунки на міцність та стійкість.

Таблиця 15 – Введення стрижнів ферми до прикладу 6

Категорія стрижнів	Номери стрижнів	Марка сталі	Варіанти кутиків		Варіанти стрижнів	
			А1	А2	Б1	Б2
Особлива	3–4, 4–6	Ст3пс	–	+	–	+
Звичайна	1–5, 1–6, 2–3, 2–5, 3–5, 4–5, 5–6	Ст3пс	–	+	+	–

Таблиця 16 – Введення рухомої сили до прикладу 6

Активний ярус	Значення сили P_m , кН	Межі зміни $z(P_m)$, м	
		ліва	права
Верхній	20	1	3
Нижній	–	–	–

Рішення

1. Будуємо розрахункову схему ферми (рис. 15).
2. Визначаємо алгебраїчні значення зусиль у стрижнях ферми для різних фіксованих положень рухомої сили P_m .

Фіксовані положення та відповідні їм алгебраїчні значення навантажень вузлів ферми в даному прикладі наступні.

FP1: $z(P_m) = 1$ м; $P_6 = +20$ кН;

FP2: $z(P_m) = 1,5$ м; $P_6 = +10$ кН; $P_4 = +10$ кН;

FP3: $z(P_m) = 2$ м; $P_4 = +20$ кН;

FP4: $z(P_m) = 2,5$ м; $P_4 = +10$ кН; $P_3 = +10$ кН;

FP5: $z(P_m) = 3$ м; $P_3 = +20$ кН.

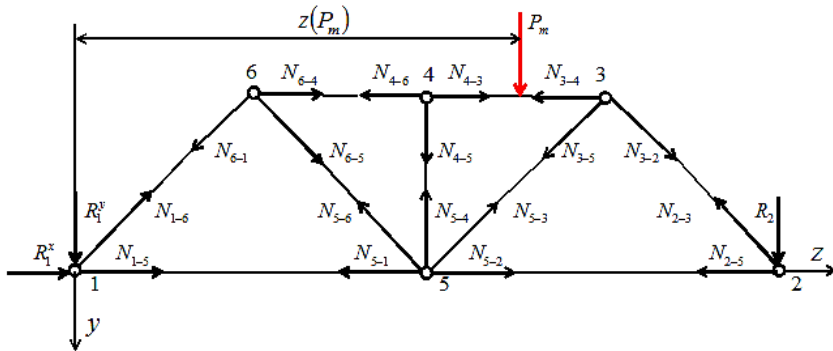


Рисунок 15

3. Для кожного із зазначених FP складаємо об'єднану систему рівнянь (приклад 1). Ця система розв'язується за допомогою функції `solve` з модуля `numpy.linalg` мовою `Python`. Рішення перевіряється з використанням рівнянь (формула 15).

Отримані результати представлені у таблиці Г.2.

У зазначеній таблиці знаходимо значення поздовжньої сили в особливих стрижнях 3–4 та 4–6. Далі використовуємо ті з них, які відносяться до $FP2$ та $FP4$, у яких перерізи під силою P_m найбільш небезпечні з погляду міцності:

$$N_{3-4} = N_{4-6} = -15 \text{ кН.}$$

4. Враховуючи те, що вказані значення поздовжньої сили в цьому прикладі від'ємні, розрахунок особливих стрижнів на міцність ведемо за формулами пункту 3.3.2.

Оскільки стрижні 3–4 та 4–6 мають однакову довжину $\ell_{3-4} = \ell_{4-6} = 1$ м (табл. 5), розрахунок ведемо відносно до будь-якого з них, наприклад, відносно до стрижня 3–4.

Послідовність розрахунку наступна.

4.1. Використовуючи таблицю А.3 і формулу 52, знаходимо величини допустимих нормальних і дотичних напружень для заданого матеріалу стрижня (сталь Ст3пс):

$$[\sigma] = 163 \text{ МПа},$$

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2} = \frac{163}{2} = 81,5 \text{ МПа}.$$

4.2. За формулою 20 знаходимо модуль згинального моменту M_1 :

$$M_1 = \frac{1}{4} \times P_m \times \ell_{3-4} = \frac{1}{4} \times 20 \times 1 = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4.3. За формулою 55 обчислюємо значення орієнтовного моменту опору поперечного перерізу стрижня 3–4:

$$\tilde{W}_x \geq \frac{M_1}{2 \times [\sigma]} = \frac{5 \times 10^6}{2 \times 163} = 15\,337 \text{ мм}^3 = 15,337 \text{ см}^3.$$

4.4. За значенням $\tilde{W}_x = 15,337 \text{ см}^3$ з таблиці А.2 вибираємо здвоєні кутики $100 \times 63 \times 7$, у кожного з яких величини розрахункових параметрів наступні: $W_x = 16,78 \text{ см}^3$; $J_x = 112,86 \text{ см}^4$; $F = 11,09 \text{ см}^2$; $B = 100 \text{ мм}$; $y_0 = 3,28 \text{ см}$.

4.5. Модуль згинального моменту M_2 знаходимо, використовуючи формули 21–24:

$$f_0 = \frac{P_m \times \ell_{3-4}^3}{48 \times E \times J_x^*} = \frac{20 \times 10^3 \times (1 \times 10^3)^3}{48 \times 2 \times 10^5 \times 2 \times 112,86 \times 10^4} = 0,923 \text{ мм};$$

$$P_E = \frac{\pi^2 \times E \times J_x^*}{\ell_{3-4}^2} = \frac{\pi^2 \times 2 \times 10^5 \times 2 \times 112,86 \times 10^4}{(1 \times 10^3)^2} = 4456 \times 10^3 \text{ Н};$$

$$f = \frac{f_0}{1 - N_{3-4} / P_E} = \frac{0,923}{1 - 15 \times 10^3 / 4456 \times 10^3} = 0,926 \text{ мм};$$

$$M_2 = N_{3-4} \times f = 15 \times 10^3 \times 0,926 = 13,89 \times 10^3 \text{ Н} \cdot \text{мм} = 0,014 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4.6. Максимальне значення сумарного нормального напруження в небезпечному перерізі стрижня 3–4 знаходимо за формулою 58:

$$\begin{aligned}\sigma_s^{\max} &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{M_1}{W_x} + \frac{M_2}{W_x} + \frac{N_{i-k}}{F} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{5 \times 10^6}{16,78 \times 10^3} + \frac{0,014 \times 10^6}{16,78 \times 10^3} + \frac{15 \times 10^3}{11,09 \times 10^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \times (297,974 + 0,834 + 13,526) = \frac{1}{2} \times 312,324 = 156,167 \text{ МПа.}\end{aligned}$$

4.7. Значення максимального дотичного напруження в небезпечному перерізі зазначеного стрижня знаходимо за формулою 44:

$$\tau_{\max} = \frac{P_m \times (B - y_0)^2}{8 \times J_x} = \frac{20 \times 10^3 \times (100 - 3,28 \times 10)^2}{8 \times 112,8 \times 10^4} = 10,003 \text{ МПа.}$$

4.8. Значення максимального еквівалентного напруження в небезпечному перерізі зазначеного стрижня знаходимо з графіка функції (формула 60), побудованого за допомогою бібліотеки *Python matplotlib* за даними цього прикладу (рис. 16, див. с. 51).

Зазначений графік є близьким за формою з графіком, зображеним на рисунку 14. Тому, зберігаючи підхід до визначення $\sigma_{eq}^{\max}$, реалізований у прикладі 5, цього разу отримуємо:

$$\sigma_{eq}^{\max} = \sigma_s^{\max} = 156,167 \text{ МПа.}$$

4.9. Аналізуючи результати виконаного розрахунку, бачимо, що максимальні значення усіх зазначених напружень менші, ніж допустимі.

Таким чином, здвоєні кутики $100 \times 63 \times 7$ із сталі Ст3пс повністю відповідають умовам міцності (формули 49, 51 та 54) і є попередньо прийнятими для особливих стрижнів ферми. Вони ж є початковими у розрахунку цих стрижнів на стійкість.

5. Перевіряємо особливі стрижні на стійкість.

Перевірці підлягає будь-який з особливих стрижнів, оскільки вони мають однакову довжину ($\ell_{3-4} = \ell_{4-6} = 1 \text{ м}$) і однаковий модуль стискаючої сили ($N_{3-4} = N_{4-6} = 15 \text{ кН}$).

5.1. У таблиці А.2 додатково знаходимо для кожного із здвоєних кутиків $100 \times 63 \times 7$:

$$J_y = 34,99 \text{ см}^4; x_0 = 1,46 \text{ см}; t = 7 \text{ мм}.$$

5.2. За формулою 19 обчислюємо мінімальний радіус інерції поперечного перерізу стрижня:

$$i_{\min}^* = \sqrt{\frac{J_y}{F} + \left(x_0 + \frac{t}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{34,99}{11,09} + \left(1,46 + \frac{0,7}{2}\right)^2} = 2,536 \text{ см}.$$

5.3. За формулою 6 обчислюємо гнучкість стрижня:

$$\lambda = \frac{\mu \times \ell_{3-4}}{i_{\min}^*} = \frac{1 \times 1 \times 10^2}{2,536} = 39,432 \approx 39.$$

5.4. За таблицею Б.1, використовуючи метод лінійної інтерполяції, знаходимо значення коефіцієнта зменшення основного допустимого напруження:

$$\varphi = 0,922.$$

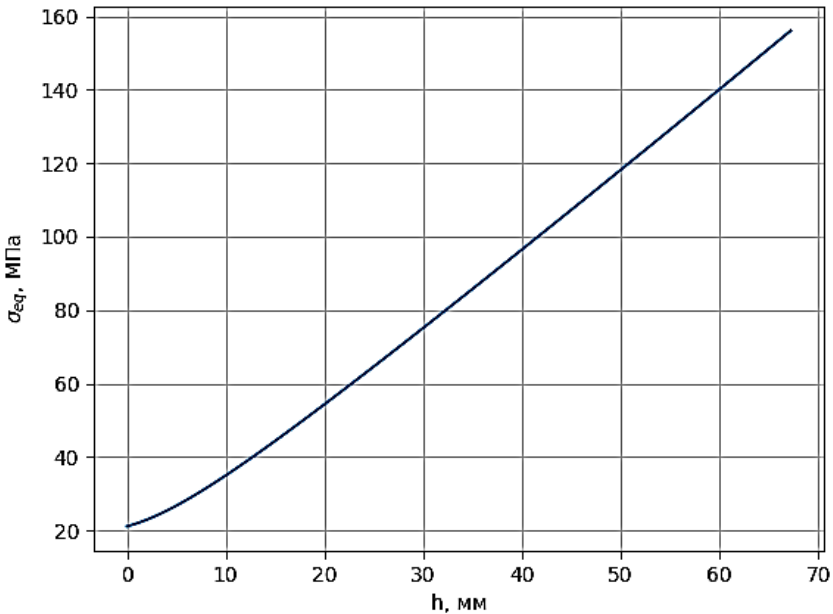


Рисунок 16



5.5. За формулою 4 визначаємо модуль стискаючих напружень у стрижні:

$$\sigma = \frac{|N_{3-4}|}{F^*} = \frac{15 \times 10^3}{22,18 \times 10^{-2}} = 6,763 \text{ МПа.}$$

5.6. За формулою 5 знаходимо значення напруження, що допускається з точки зору стійкості, для заданого матеріалу стрижня (сталь СтЗпс):

$$[\sigma]_{stb} = \varphi[\sigma] = 0,922 \times 163 = 150,286 \text{ МПа.}$$

5.7. Перевіряємо умову стійкості (формула 3). Бачимо, що воно виконується:

$$\sigma < [\sigma]_{stb}.$$

Таким чином, здвоєні кутики $100 \times 63 \times 7$ зі сталі СтЗпс остаточно приймаються для особливих стрижнів заданої ферми.

6. Вихідні дані для розрахунків на міцність звичайних стрижнів беремо з таблиць Г.2 та А.3.

Відповідно до таблиці Г.2 найбільше за модулем зусилля у зазначених стрижнях становить $N_{\max} = 21,213 \text{ кН}$.

Допустиме нормальне напруження для заданого матеріалу звичайних стрижнів (сталь СтЗпс) відповідно до таблиці А.3 становить $[\sigma] = 163 \text{ МПа}$.

6.1. Мінімальну площу поперечного перерізу зазначених стрижнів, котра забезпечує їхню міцність, знаходимо за формулою 2:

$$F_{\min} = \frac{N_{\max}}{[\sigma]} = \frac{21,213 \times 10^3}{163} = 130,1 \text{ мм}^2 = 1,301 \text{ см}^2.$$

За значенням $F_{\min}$ з таблиці А.2 вибираємо найближчий кутик $32 \times 20 \times 3$, у якого $F = 1,49 \text{ см}^2$ та $i_{\min} = i_u = 0,43 \text{ см}$.

Зазначені параметри цього кутика є початковими у розрахунку на стійкість.

6.2. Згідно з таблицею Г.2 однаково небезпечними з точки зору втрати стійкості є стрижні 1–6 та 2–3, оскільки в них при однаковій довжині (1,414 м) виникає однакове максимальне за модулем зусилля (21,213 кН). Виходячи з цього, розрахунок



на стійкість ведемо відносно до одного з них, наприклад, відносно до стрижня 1–6.

Послідовність та результати такого розрахунку наведені в таблиці В.6.

За результатами цього розрахунку остаточно приймається для усіх звичайних стрижнів ферми кутик $63 \times 40 \times 5$ ($F_{end} = 4,98 \text{ см}^2$).

АЛГОРИТМИ АВТОМАТИЗОВАНИХ РОЗРАХУНКІВ ФЕРМ З ЦИКЛІЧНО ЗМІНЮВАНИМ НАВАНТАЖЕННЯМ

Таке навантаження зазвичай створює робота встановленого на фермі обладнання, рухомі елементи якого здійснюють періодично повторювані рухи щодо свого нерухомого (початкового) положення.

Найбільш яскравими представниками зазначеного обладнання є ті з них, які створені на основі важільних механізмів. У цих механізмах провідною ланкою є кривошип, що обертається навколо нерухомої осі за допомогою приводу, який зазвичай складається з електродвигуна з редуктором. Від кривошипа рух передається за допомогою проміжних ланок до виконавчої ланки, що здійснює зворотно-поступальний або зворотно-обертальний рухи [8].

Саме такі механізми як джерела коливань ферм і розглядаються у цьому розділі.

В основу силових розрахунків цього розділу покладено двовимірну математичну модель, раніше реалізовану в роботах [9–13], у яких розглядалися коливання рам і ферм з встановленими на них електродвигунами з невідбалансованим ротором.

4.1 Двовимірна модель вимушених коливань

Зазначена модель базується на положенні про взаємний вплив вертикальних і горизонтальних навантажень на створення відповідних переміщень масивного тіла, скріпленого з пружним елементом (рамою або фермою). У справедливості цього положення можна переконатися на прикладі найпростішої Г-подібної рами (рис. 17, див. с. 55).



Нехай у довільний момент часу на точкову масу m , закріплену на вільному кінці цієї рами, діють деякі зовнішні сили P_1 і P_2 , які викликають переміщення означеної маси – Δ_1 та Δ_2 і відповідні деформації рами (рис. 17, формули 64–65).

$$\Delta_1 = P_1 \times \delta_{11} + P_2 \times \delta_{12}; \quad (64)$$

$$\Delta_2 = P_2 \times \delta_{22} + P_1 \times \delta_{21}, \quad (65)$$

де δ_{11} – вертикальне переміщення, викликане одиничною силою $\bar{P}_1$;

δ_{12} – вертикальне переміщення, викликане одиничною силою $\bar{P}_2$;

δ_{21} – горизонтальне переміщення, викликане одиничною силою $\bar{P}_1$;

δ_{22} – горизонтальне переміщення, викликане одиничною силою $\bar{P}_2$.

Значення δ_{12} і δ_{21} на підставі теореми про взаємність робіт і переміщень [3; 4] однакові.

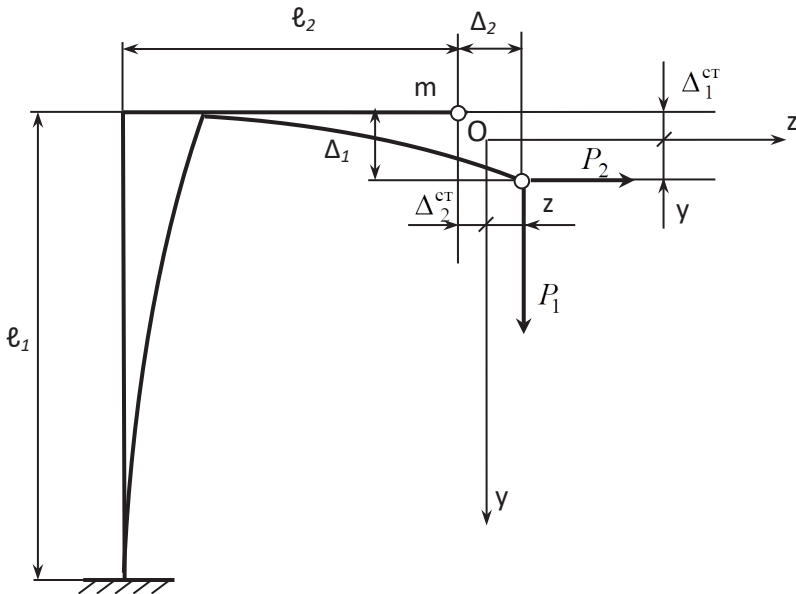


Рисунок 17

Перелічені переміщення є своєрідними показниками жорсткості пружного елемента, що визначаються в разі ферм за допомогою формул 66–68 [5]:

$$\delta_{11} = \frac{1}{E \times F} \times \sum \bar{N}_{i-k}^2 \times \ell_{i-k}; \quad (66)$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{E \times F} \times \sum \tilde{N}_{i-k}^2 \times \ell_{i-k}; \quad (67)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{E \times F} \times \sum \bar{N}_{i-k} \times \tilde{N}_{i-k} \times \ell_{i-k}, \quad (68)$$

де $i-k$ – позначення стрижнів;

i, k – номери їхніх вузлів;

ℓ_{i-k} – довжини стрижнів;

$\bar{N}_{i-k}$ та $\tilde{N}_{i-k}$ – зусилля у стрижнях ферми від дії одиничних сил – $\bar{P}_1$ та $\tilde{P}_2$, роздільно (не одночасно) прикладених до вузла ферми, у якому розташовується точкова маса.

Коливання точкової маси відбуваються в системі координат uz , осі якої проведені з положення статичної рівноваги цієї маси (точка O на рис. 17). У цьому положенні виконуються умови, які представлені формулами 69 та 70.

$$P_1^{ct} = m \times g; \quad (69)$$

$$P_2^{ct} = 0. \quad (70)$$

Відповідно до формул 64 та 65 маємо формули 71 та 72.

$$\Delta_1^{ct} = P_1^{ct} \times \delta_{11} = m \times g \times \delta_{11}; \quad (71)$$

$$\Delta_2^{ct} = P_1^{ct} \times \delta_{21} = m \times g \times \delta_{21}. \quad (72)$$

У процесі коливань (рис. 17) отримаємо формули 73 та 74.

$$\Delta_1 = \Delta_1^{ct} + y = m \times g \times \delta_{11} + y; \quad (73)$$

$$\Delta_2 = \Delta_2^{ct} + z = m \times g \times \delta_{21} + z. \quad (74)$$

Прирівнявши праві частини формул 73–74 та формул 64–65, отримаємо формулу 75.

$$\begin{cases} m \times g \times \delta_{11} + y = P_1 \times \delta_{11} + P_2 \times \delta_{12}, \\ m \times g \times \delta_{21} + z = P_2 \times \delta_{22} + P_1 \times \delta_{21}. \end{cases} \quad (75)$$

З формули 75 отримуємо залежності сил P_1 та P_2 від поточних координат точкової маси, які представлені формулами 76–77.



$$P_1 = f_1(y, z) = m \times g + \frac{y \times \delta_{22} - z \times \delta_{12}}{\delta_{11} \times \delta_{22} - \delta_{21} \times \delta_{12}}; \quad (76)$$

$$P_2 = f_2(y, z) = \frac{z \times \delta_{11} - y \times \delta_{21}}{\delta_{11} \times \delta_{22} - \delta_{21} \times \delta_{12}}. \quad (77)$$

Врахуємо, що P_1 і P_2 – це сили, що діють на пружний елемент з боку точкової маси. Тоді опорні реакції цієї маси дорівнюватимуть за модулем зазначеним силам, які розраховуються за формулами 78–79.

$$R_1 = P_1 = f_1(y, z); \quad (78)$$

$$R_2 = P_2 = f_2(y, z). \quad (79)$$

Сформуємо тепер силову схему точкової маси, розглядаючи її як відокремлену матеріальну точку, що перебуває в кожен момент часу в стані кінетостатичної рівноваги [1; 2].

У процесі коливальних на цю масу діють: сила тяжіння $m \times g$, опорні реакції R_1 та R_2 , сили інерції Φ_1 та Φ_2 , сили опору середовища (повітря) T_1 та T_2 , а також сили H_1 та H_2 , що збурюють коливання.

На рисунку 18 показані зазначені сили в момент прискореного руху коливальної маси вниз і вправо. В інші моменти часу напрямки швидкостей (v_1 ; v_2), прискорень (a_1 ; a_2) і зазначених сил можуть бути протилежними. Винятком тут є лише сила тяжіння, яка завжди спрямована вертикально вниз.

Рівняння кінетостатичної рівноваги системи сил, що діють на коливальну масу, у проекціях на осі прийнятої системи координат представлені формулами 80–81.

$$\sum P_y = m \times g + R_1^y + \Phi_1^y + T_1^y + H_1^y = 0; \quad (80)$$

$$\sum P_z = R_2^z + \Phi_2^z + T_2^z + H_2^z = 0. \quad (81)$$

Напрямки реакцій R_1 та R_2 і відповідних сил P_1 та P_2 є протилежними. Тому відповідно до формул 78 та 79 отримаємо формулу 82.

$$\begin{cases} R_1^y = -f_1(y, z); \\ R_2^z = -f_2(y, z). \end{cases} \quad (82)$$

Проекції сил Φ_1 та Φ_2 на осі координат визначаються виразами на формулі 83.

$$\begin{cases} \Phi_1^y = -m \times a_1^y = -m \times \ddot{y}; \\ \Phi_2^z = -m \times a_2^z = -m \times \ddot{z}, \end{cases} \quad (83)$$

де y та z – другі похідні за часом від поточних координат коливальної маси.

Сили T_1 та T_2 при коливаннях у повітряному середовищі зазвичай вважаються пропорційними відповідним швидкостям коливальної маси формула 84.

$$\begin{cases} T_1^y = -\mu \times v_1^y = -\mu \times \dot{y}; \\ T_2^z = -\mu \times v_2^z = -\mu \times \dot{z}, \end{cases} \quad (84)$$

де μ – коефіцієнт пропорційності ($\mu \approx 0$);

$\dot{y}$ і $\dot{z}$ – перші похідні за часом від поточних координат коливальної маси.

У цій задачі точкова маса моделює встановлений на фермі пристрій, що містить важільний механізм, який при своєму русі викликає коливання усього пристрою разом з фермою.

Сили H_1 та H_2 – це суми вертикальних та горизонтальних складових головних векторів сил інерції рухомих ланок зазначеного механізму.

Суми проєкцій сил H_1 та H_2 на осі y та z описуються залежностями, що встановлюються в ході кінематичного аналізу механізму (формула 85).

$$\begin{cases} H_1^y = -\sum m_j \times \ddot{y}'(C_j); \\ H_2^z = -\sum m_j \times \ddot{z}'(C_j), \end{cases} \quad (85)$$

де $j=1...k$ – номери рухомих ланок механізму;

$y'(C_j)$ та $z'(C_j)$ – поточні координати центрів мас рухомих ланок механізму в його «власній» системі координат, осі якої y' та z' співпадають за напрямками з осями y та z ;

$\ddot{y}'(C_j)$ та $\ddot{z}'(C_j)$ – другі похідні за часом від цих координат.

Підставивши формули 82–85 у вирази формули 80–81, після перетворень отримаємо диференціальні рівняння руху коливальної маси (формули 86–87).

$$m \times \ddot{y} + \mu \times \dot{y} + f_1(y, z) = m \times g - \sum m_j \times \ddot{y}'(C_j); \quad (86)$$

$$m \times \ddot{z} + \mu \times \dot{z} + f_2(y, z) = -\sum m_j \times \ddot{z}'(C_j). \quad (87)$$

Інтегрування рівнянь (формули 86–87) потребує завдання початкових умов для точкової маси. В цьому випадку прийнятий їх найбільш простий (нульовий) варіант:

$$t = 0; y = 0; z = 0; \dot{y} = 0; \dot{z} = 0. \quad (88)$$

Умови (формула 88) означають, що точкова маса в початковий момент часу (тобто в момент включення приводу пристрою) є нерухомою, знаходиться в початку координат (рис. 18) і виводиться з цього положення миттєво прикладеними силами H_1 та H_2 , котрі підкоряються законам з формули 85.

Інакше кажучи, період розгону приводу (кілька секунд) тут ігнорується. У цьому – відома ідеалізація запропонованої моделі.

Застосування цієї моделі покликане створити основу для розрахунків ферми на міцність і стійкість.

Слід зазначити, що вказані розрахунки мають бути доповнені перевіркою ферми на відсутність резонансу, тобто збігу її власних колових частот ω_1 та ω_2 з коловою частотою приводу – ω ,

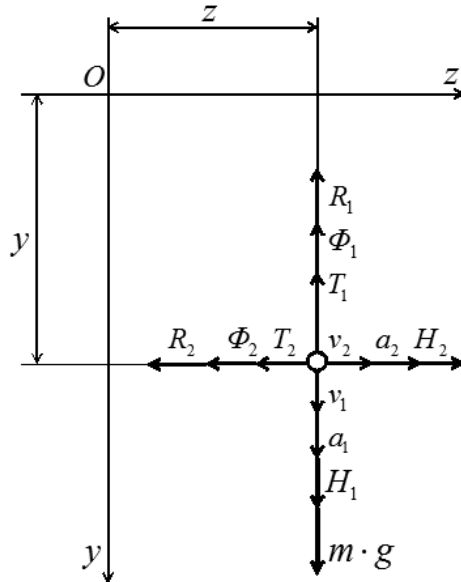


Рисунок 18

при якому розмах коливань, а разом з ним і зусилля у стрижнях ферми, сягають своїх руйнівних значень.

Умови відсутності резонансу представлені на формулі 89.

$$\begin{cases} \omega_1 \neq \omega; \\ \omega_2 \neq \omega. \end{cases} \quad (89)$$

Значення ω_1 та ω_2 визначаються за формулою 90 [11–13].

$$\omega_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m \times (\delta_{11} + \delta_{22}) \pm m \times \sqrt{(\delta_{11} + \delta_{22})^2 - 4 \times (\delta_{11} \times \delta_{22} - \delta_{12} \times \delta_{21})}}}. \quad (90)$$

У формулі 90 значення всіх радикалів беруться зі знаком плюс.

4.2 Послідовність та методи розрахунків

Метою силових розрахунків ферми, що коливається, є підбір розмірів поперечного перерізу кутиків, котрі гарантують міцність і стійкість усіх її стрижнів, а також відсутність резонансу.

Розрахунки складаються з попереднього та основного (динамічного) етапів.

4.2.1 Попередні розрахунки

На цьому етапі виконуються наступні дії.

1. До вузла ферми, де розташований пристрій, що встановлений на фермі, прикладається сила ваги цього пристрою – $P_1 = m \times g$ і визначаються відповідні зусилля в стрижнях ферми за методикою розділу 2 – N_{i-k} .

2. З використанням знайдених зусиль виконується повний цикл розрахунків ферми на міцність та стійкість за методикою розділу 2, у результаті якого встановлюється вихідне значення площі поперечного перерізу стрижнів для наступних (динамічних) розрахунків – F_{in} .

3. До зазначеного вузла (назвемо його основним) послідовно прикладаються одиничні сили $\bar{P}_1$ та $\bar{P}_2$ і від їхньої дії знаходяться за методикою розділу 2 відповідні зусилля у стрижнях ферми – $\bar{N}_{i-k}$ та $\tilde{N}_{i-k}$.



4. Визначаються вихідні значення коефіцієнтів жорсткості ферми – δ_{11} , δ_{12} , δ_{21} , δ_{22} шляхом підстановки у формули 66–68 знайдених значень $\bar{N}_{i-k}$ та $\tilde{N}_{i-k}$, а також F_{in} .

5. Проводиться кінематичний аналіз механізму, що спричиняє коливання ферми, та встановлюються закони зміни в часі поточних координат центрів мас його рухомих ланок – $y'(C_j)$ та $z'(C_j)$.

6. Зазначені закони двічі диференціюються за часом з використанням функцій *symbols* та *diff* бібліотеки *Python SymPy* та трансформуються у відповідні закони зміни величин $\ddot{y}'(C_j)$ та $\ddot{z}'(C_j)$.

7. Конкретизуються вирази (формула 85) для сил H_1^y та H_2^z шляхом підстановки в ці вирази законів зміни величин $\ddot{y}'(C_j)$ та $\ddot{z}'(C_j)$ разом зі значеннями задіяних у них параметрів.

4.2.2 Основні розрахунки

Ці розрахунки виконуються покроково з поступовим збільшенням площі поперечного перерізу стрижнів (F), починаючи з її вихідного значення ($F=F_{in}$) і закінчуючи значенням, що забезпечує міцність та стійкість усіх стрижнів ферми, а також відсутність резонансу ($F=F_{end}$).

На кожному кроці послідовність дій наступна.

1. Диференціальні рівняння (формули 86 та 87) інтегруються числовим методом *Рунге-Кутти* з використанням функції *scipy.integrate.solve – ivp* бібліотеки *Python SciPy*.

Інтегрування виконується на часовому інтервалі, не меншому за тривалість одного повного обороту кривошипну: $\Delta t \geq 2\pi/\omega$.

Внаслідок цієї дії встановлюються закони руху точкової маси (формули 91 та 92).

$$y=y(t); \quad (91)$$

$$z=z(t). \quad (92)$$

2. На основі законів (формули 91 та 92) та формул 76–77 знаходяться закони зміни сил, що діють на ферму з боку точкової маси (формули 93–94).

$$P_1(t) = m \times g + \frac{y(t) \times \delta_{22} - z(t) \times \delta_{12}}{\delta_{11} \times \delta_{22} - \delta_{21} \times \delta_{12}}; \quad (93)$$

$$P_2(t) = \frac{z(t) \times \delta_{11} - y(t) \times \delta_{21}}{\delta_{11} \times \delta_{22} - \delta_{21} \times \delta_{12}}. \quad (94)$$

3. На основі виразів (формули 93–94) і значень $\bar{N}_{i-k}$ та $\tilde{N}_{i-k}$ встановлюються закони зміни зусиль у стрижнях ферми (формули 95).

$$N_{i-k}(t) = \bar{N}_{i-k} \times P_1(t) + \tilde{N}_{i-k} \times P_2(t). \quad (95)$$

4. За формулами 95 за допомогою функцій *max* та *min* бібліотеки *Python NumPy* визначаються найбільші та найменші (з урахуванням знаків) значення $N_{i-k}(t)$ у кожному із стрижнів ферми.

5. З масиву значень $N_{i-k}(t)$, зазначених у пункті 4, за допомогою функцій *max* та *abs* бібліотеки *Python NumPy* знаходиться найбільше за модулем зусилля в стрижнях ферми – $|N_{i-k}(t)|_{\max}$.

6. Визначається модуль найбільшого нормального напруження в стрижнях ферми (формула 96).

$$|\sigma_{i-k}(t)|_{\max} = \frac{|N_{i-k}(t)|_{\max}}{F}. \quad (96)$$

7. Значення $|\sigma_{i-k}(t)|_{\max}$ перевіряється на виконання умови міцності (формули 1):

$$|\sigma_{i-k}(t)|_{\max} \leq [\sigma]. \quad (97)$$

При невиконанні цієї умови відбувається перехід до наступного (більшого за площею) стандартного перерізу кутиків (табл. А.1–А.2) і слідує повторення перерахованих вище дій. І так до значення F , достатнього для забезпечення умови міцності.

Розрахунок за пунктами 1–7 підлягають усі стрижні ферми.

8. Усі стиснуті стрижні ферми (тобто ті, у яких $N_{i-k}^{\min}$) піддаються подальшому розрахунку на стійкість за процедурою розділу 2.

Розрахунок кожного з цих стрижнів ведеться за його найбільшим за модулем стискаючим зусиллям – $|N_{i-k}^{\min}|$. Він починається зі значення $F = F_{str}$ і закінчується значенням $F = F_{stb}$.



9. За допомогою функції *max* бібліотеки *Python NumPy* знаходиться найбільше із знайдених значень F_{stb} (тобто F_{stb}^{max}). Воно і приймається як остаточне для всіх стрижнів ферми: $F_{end} = F_{stb}^{max}$.

Слід зазначити, що прийняте значення F_{end} не тільки забезпечує міцність та стійкість усіх стрижнів ферми, але й гарантує відсутність резонансу ферми в цілому, оскільки найбільші напруження в її стрижнях явно менші резонансних (тобто дуже великих) напружень:

$$|\sigma_{i-k}(t)|_{\max} \leq [\sigma] \ll \infty.$$

4.3 Введення вихідних даних

Для виконання розрахунків вводяться дані таблиць 2, 17–19.

Таблиця 17 – Форма введення вузлів ферми

Номер вузла, (i)	Координати вузла, м		Номери вузлів оточення
	y	z	
1			
...			
n			
Номер основного вузла			

Таблиця 18 – Форма введення законів руху центрів мас рухомих ланок механізму

Номери рухомих ланок (j=1...k)	Закони руху центрів мас (C_j)
1	
...	
k	

Таблиця 19 – Форма введення параметрів пристрою

Параметри	Значення параметрів

4.4 Тестові приклади

Приклад 7. На фермі з прикладу 1 (рис. 6) у вузлі 4 замість стаціонарного навантаження (P_4 та Q_4) встановлено пристрій (рис. 19), що імітує плунжерний насос для перекачування води.

Пристрій складається з приводу (електродвигуна з редуктором) і кривошипно-повзунного механізму, розміщених в єдиному корпусі. Привід на рисунку 19 не показаний.

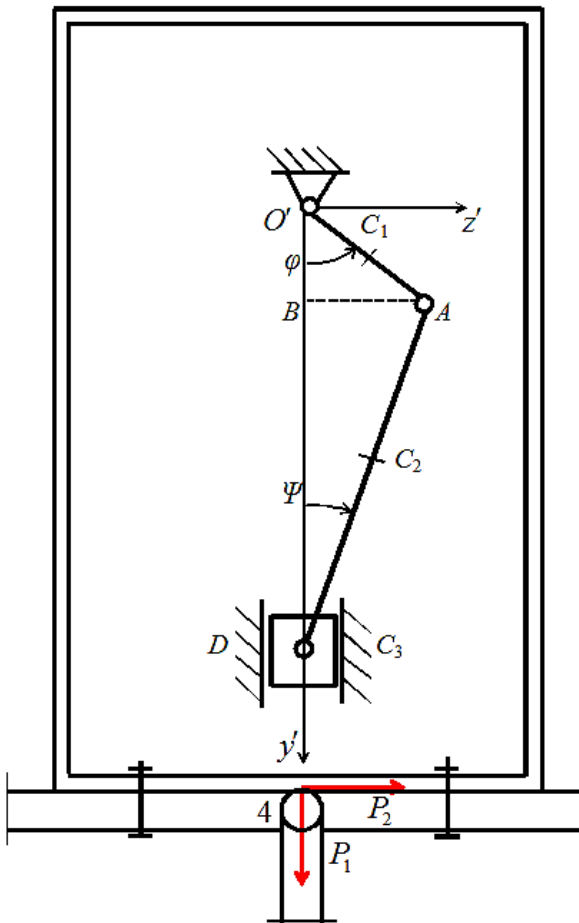


Рисунок 19



Маса всього пристрою – m , у тому числі: маса кривошипу $OA-m_1$, маса шатуна $AD-m_2$, маса повзуна $D-m_3$, спільна маса приводу та корпусу – m_4 .

Кривошип та шатун – однорідні стрижні, центри мас яких (C_1 та C_2) розташовані посередині довжини: $OC_1=C_1A$; $AC_2=C_2D$. Центр мас повзуна (C_3) збігається з точкою D . Центр мас приводу та корпусу (C_4) є нерухомим щодо системи координат $y'-z'$ і на рисунку 19 не зображений.

Кутова швидкість кривошипу – $\omega(const)$.

Вихідне положення механізму – при $\varphi=0$.

Виконати розрахунок ферми на міцність та стійкість. Вихідні дані взяти з таблиць 20–23. Масою води і опором середовища знехтувати.

Таблиця 20 – Введення вузлів ферми

Номер вузла, (i)	Координати вузла, м		Номери вузлів оточення
	y	z	
1	0	0	5; 6
2	0	4	3; 5
3	-1	3	2; 4; 5
4	-1	2	3; 5; 6
5	0	2	1; 2; 3; 4; 6
6	-1	1	1; 4; 5
Номер особливого вузла			4

Таблиця 21 – Введення стрижнів ферми

Марка сталі	Варіанти кутиків		Варіанти стрижнів	
	A1	A2	B1	B2
Ст3сп	+	-	+	-

Таблиця 22 – Введення параметрів пристрою

Параметри	Значення параметрів
1	2
m	1000 кг
m_1	50 кг
m_2	150 кг
m_3	300 кг



Закінчення таблиці 22

1	2
ℓ_1	0,2 м
ℓ_2	0,6 м
ℓ_3	0
ω	20,933 с ⁻¹
μ	0

Таблиця 23 – Введення законів руху центрів мас рухомих ланок механізму (додаток Д)

Номери рухомих ланок ($j=1\dots k$)	Закони руху центрів мас (C_j)
1	$y'(C) = - \times \cos \omega \times t$
	$z'(C) = - \times \sin \omega \times t$
2	$y'(C_2) = \ell_1 \times \cos \omega \times t + \frac{\ell_2}{2} \times \left(1 - \frac{\ell_1}{\ell_2} \times \sin \omega \times t \right)^{-}$
	$z'(C_2) = \frac{\ell_1}{2} \times \sin \omega \times t$
3	$y'(C_3) = \ell_1 \times \cos \omega \times t + \ell_2 \times \left(1 - \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2} \times \sin^2 \omega \times t \right)^{\frac{1}{2}}$
	$z'(C_3) = 0$

Попередній розрахунок

1. Будуємо розрахункову схему ферми (рис. 20, див. с. 67).

2. Визначаємо зусилля у стрижнях ферми від дії сили $P_1 = m \times g = 1000 \times 9,81 = 9810 \text{ Н} = 9,810 \text{ кН}$.

Розрахунок цих зусиль ведемо за методикою розділу 2. Результати розрахунку містяться в таблиці 24 (див. с. 67).

3. Визначаємо мінімальну площу поперечного перерізу стрижнів ферми, що забезпечує їхню міцність.

Таблиця 24 – Зусилля у стрижнях ферми від дії сили P_1

Позначення стрижнів ($i-k$)	Довжини стрижнів ℓ_{i-k} , м	Зусилля в стрижнях N_{i-k} , кН
1-5	2	4,905
1-6	1,414	-6,937
2-3	1,414	-6,937
2-5	2	4,905
3-4	1	-9,810
3-5	1,414	6,937
4-5	1	-9,810
4-6	1	-9,810
5-6	1,414	6,937

З таблиці 24 випливає, що найбільше за модулем зусилля у стрижнях ферми при зазначеному (статичному) навантаженні становить $|N|_{\max}=9,810$ кН.

Допустиме напруження для заданого матеріалу стрижнів (сталь Ст3сп) вибираємо з таблиці А.3: $[\sigma]=163$ МПа.

За формулою 2 знаходимо:

$$F_{\min} = \frac{|N|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{9,810 \times 10^3}{163} = 60,184 \text{ мм}^2 = 0,60 \text{ см}^2.$$

За знайденим значенням $F_{\min}$ з таблиці А.1 вибираємо найближчий кутик $20 \times 20 \times 3$, у якого $F=1,13 \text{ см}^2$; $i_{\min}=0,39 \text{ см}$.

Вказане значення F приймаємо для всіх стрижнів ферми як таке, що забезпечує їхню міцність при статичному навантаженні ($F=F_{str}$).

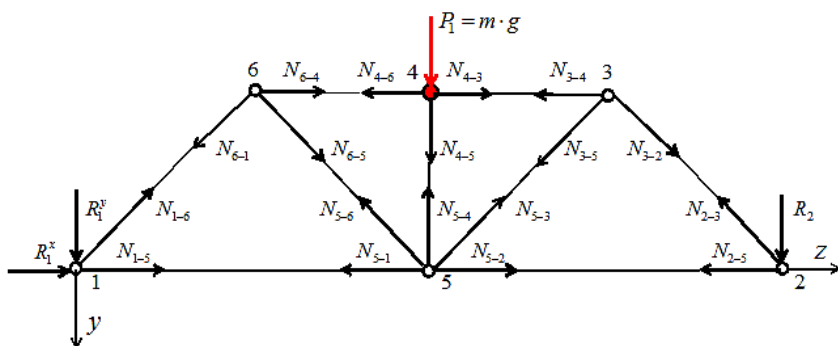


Рисунок 20

4. Виконуємо розрахунок стиснутих стрижнів на стійкість при статичному навантаженні.

У цьому випадку, як і у всіх попередніх прикладах, такому розрахунку піддаються стрижні 2–3 (або 1–6) та 3–4 (або 4–5, 4–6): у перших з них більша довжина, а у других – більший модуль стискаючого зусилля; інші стиснуті стрижні явно менш небезпечні з погляду поздовжнього згину.

Розрахунок проводиться покроково з поступовим збільшенням значення F до виконання ним умови стійкості (3).

Послідовність та результати розрахунку представлені у таблиці В.7. За результатами розрахунку приймається кутик $40 \times 40 \times 3$, у якого $F = 2,35 \text{ см}^2$.

Це є вихідна площа поперечного перерізу стрижнів для динамічного розрахунку: $F_{in} = 2,35 \text{ см}^2$.

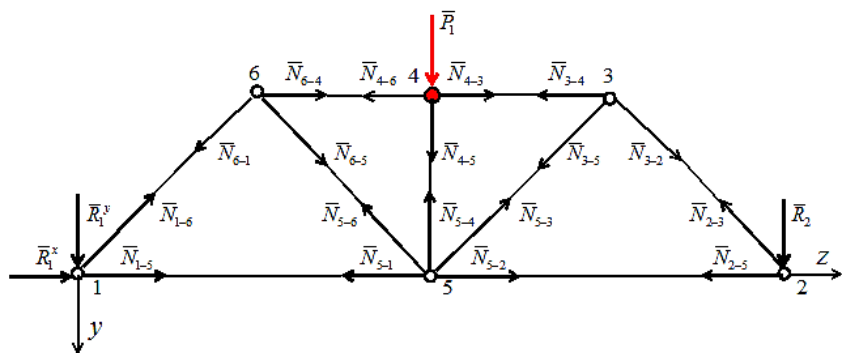


Рисунок 21

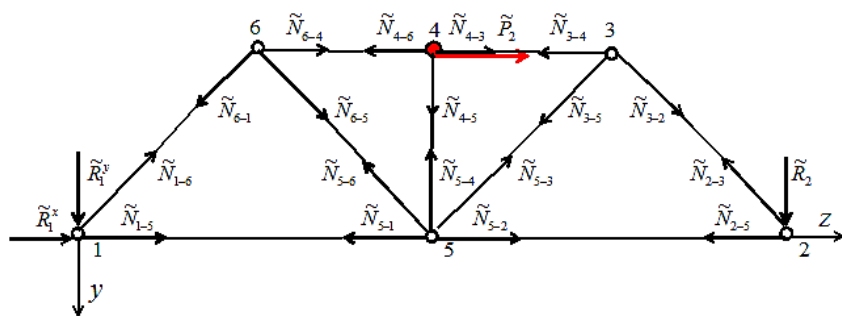


Рисунок 22



5. Знаходимо загальні вирази для коефіцієнтів жорсткості ферми.

Починаємо з визначення зусиль у стрижнях ферми від дії одиничних сил $\bar{P}_1$ і $\bar{P}_2$ (рис. 21, 22 (див. с. 68)).

Визначення вказаних зусиль ведемо за методикою розділу 2. Отримані результати подано у таблиці 25.

У цій таблиці наведено також розрахунок за формулами 66–68 коефіцієнтів жорсткості ферми в загальному вигляді.

Таблиця 25 – Розрахунок коефіцієнтів жорсткості ферми

Позначення стрижнів (i-k)	Довжини стрижнів ℓ_{i-k} м	Зусилля $\bar{N}_{i-k}$	Зусилля $\tilde{N}_{i-k}$	Розрахункові значення, м		
				$\bar{N}_{i-k}^2 \times \ell_{i-k}$	$\tilde{N}_{i-k}^2 \times \ell_{i-k}$	$\bar{N}_{i-k} \times \tilde{N}_{i-k} \times \ell_{i-k}$
1-5	2	0,5	0,75	0,5	1,125	0,75
1-6	1,414	-0,707	0,354	0,707	0,177	-0,354
2-3	1,414	-0,707	-0,354	0,707	0,177	0,354
2-5	2	0,5	0,25	0,5	0,125	0,25
3-4	1	-1	-0,5	1	0,25	0,5
3-5	1,414	0,707	0,354	0,707	0,177	0,354
4-5	1	-1	0	1	0	0
4-6	1	-1	0,5	1	0,25	-0,5
5-6	1,414	0,707	-0,354	0,707	0,177	-0,354
Суми:				6,828	2,458	1
Коефіцієнти жорсткості:				δ_{11}	δ_{22}	$\delta_{12} = \delta_{21}$
Вирази для коефіцієнтів:				$6,828/E \times F$	$2,458/E \times F$	$1/E \times F$

Таким чином:

$$\delta_{11} = \frac{6,828}{E \times F}; \quad (98)$$

$$\delta_{22} = \frac{2,458}{E \times F}; \quad (99)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{E \times F}. \quad (100)$$

Підставимо у формули 98–100 вихідне значення площі поперечного перерізу стрижнів ферми ($F_{in}=2,35 \times 10^{-4} \text{ м}^2$) та значення модуля пружності для сталі ($E=2 \times 10^{11} \text{ Н/м}^2$). Отримаємо вихідні значення коефіцієнтів жорсткості для динамічних розрахунків (формули 98а, 99а, 100а).

$$\delta_{11} = \frac{6,828}{E \times F} = \frac{6,828}{2 \times 10 \times 2,35 \times 10^{11-4}} = 14,528 \times 10^{-8} \frac{\text{м}}{\text{Н}}; \quad (98\text{а})$$

$$\delta_{22} = \frac{2,458}{E \times F} = \frac{2,458}{2 \times 10^{11} \times 2,35 \times 10^{-4}} = 5,230 \times 10^{-8} \frac{\text{м}}{\text{Н}}; \quad (99\text{а})$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{E \times F} = \frac{1}{2 \times 10^{11} \times 2,35 \times 10^{-4}} = 2,128 \times 10^{-8} \frac{\text{м}}{\text{Н}}. \quad (100\text{а})$$

6. Конкретизуємо вирази (85) для значень H_1^y та H_2^z .

З схеми механізму (рис. 19) випливає, що поточні положення всіх його рухомих ланок повністю визначаються кутом повороту кривошипу – $\varphi = \omega \times t$.

Зважаючи на це, шляхом кінематичного аналізу механізму встановлюємо закони зміни в часі координат центрів мас зазначених ланок – $y'(C_j)$ та $z'(C_j)$ (додаток Д).

Двічі продиференціюємо за часом встановлені закони за допомогою функцій *symbols* і *diff* бібліотеки *Python SymPy*.

Знайдені похідні множимо на відповідні маси рухомих ланок – m_j та результати сумуємо за кількістю зазначених ланок ($j=1, 2, 3$).

У результаті одержуємо із загальних залежностей (формула 85) конкретні закони зміни значень H_1^y та H_2^z , графіки яких представлені на рисунках 23 та 24.

Основний розрахунок

1. На першому кроці цього розрахунку проводимо інтегрування диференціальних рівнянь (формули 86–87) стосовно вихідних значень коефіцієнтів жорсткості (формули 98а–100а) і з урахуванням початкових умов (формули 88–89), вихідних даних прикладу і знайдених законів зміни сил H_1^y та H_2^z (рис. 23, 24 (див. с. 71)).

У результаті одержуємо відповідні закони руху точкової маси – $y=y(t)$ та $z=z(t)$. Графіки цих законів представлені на рисунку 25 (див. с. 72).

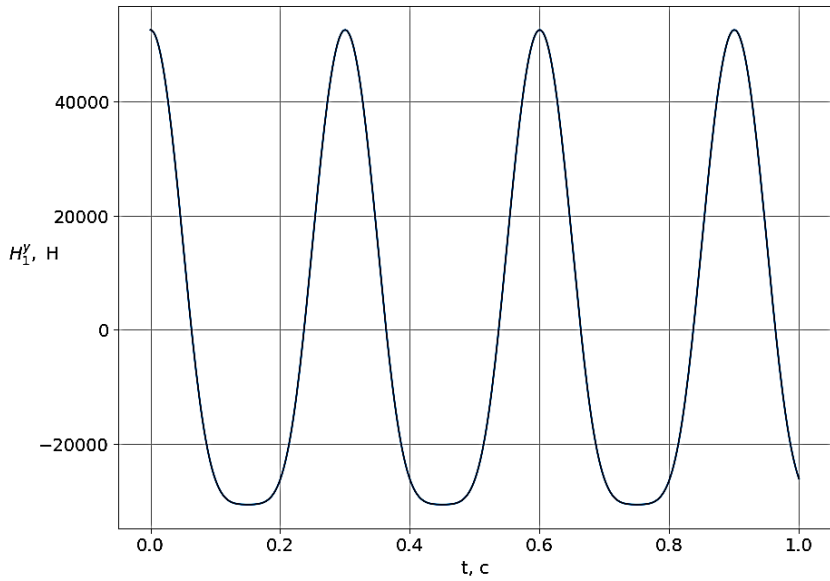


Рисунок 23

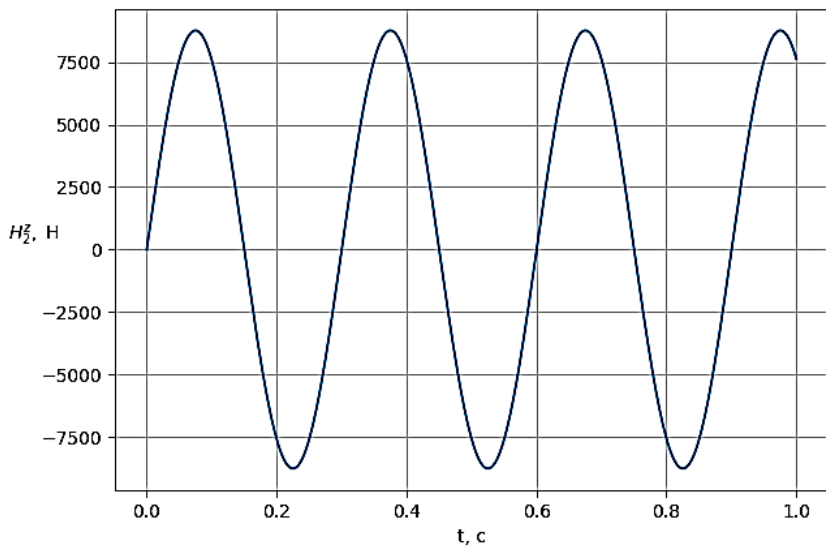


Рисунок 24

Далі, на першому кроці, використовуючи формули 76–77, знаходимо відповідні закони зміни сил, що діють на ферму з боку точкової маси, – $P_1(t)$ та $P_2(t)$. Графіки цих законів зображені на рисунку 26 (див. с. 73).

Далі, з використанням залежності (формула 95), законів – $P_1(t)$ та $P_2(t)$ і значень $\bar{N}_{i-k}$ та $\tilde{N}_{i-k}$ з таблиці 23 встановлюємо закони зміни зусиль у стрижнях ферми на першому кроці – $N_{i-k}(t)$. Їхні графіки наведені в додатку Е.

Використовуючи зазначені закони зміни зусиль у стрижнях ферми, а також функції *max* та *min* бібліотеки *Python NumPy*, знаходимо на першому кроці максимальні та мінімальні значення зусиль у кожному із стрижнів ферми при динамічному навантаженні (табл. 26, див. с. 73).

З масиву значень $N_{i-k}(t)$ представлених у таблиці 24, за допомогою функцій *max* та *abs* бібліотеки *Python NumPy* знаходимо найбільше за модулем зусилля у стрижнях ферми на першому кроці динамічного розрахунку: $|N_{i-k}(t)|_{\max} = 133,111 \text{ кН}$.

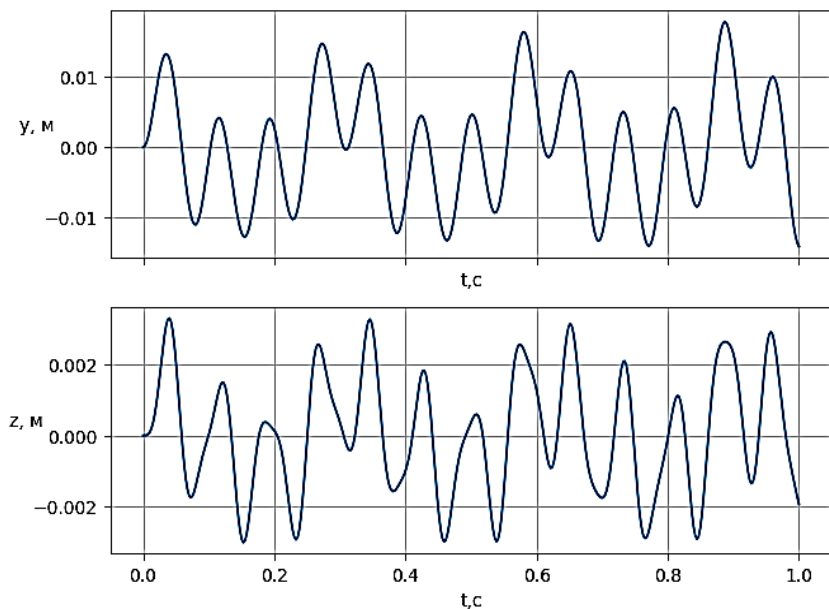


Рисунок 25

Таблиця 26 – Зусилля в стрижнях ферми на першому кроці динамічного розрахунку

Позначення стрижнів (i-k)	Зусилля у стрижнях $N_{i-k}(t)$, кН	
	max	min
1-5	68,766	-54,878
1-6	63,249	-93,658
2-3	65,149	-94,11
2-5	66,555	-46,068
3-4	92,137	-133,111
3-5	94,11	-65,149
4-5	88,066	-132,792
4-6	89,459	-132,472
5-6	93,658	-63,249

Використовуючи формулу 96, обчислюємо відповідне найбільше за модулем напруження в стрижнях ферми:

$$|\sigma_{i-k}(t)|_{\max} = \frac{|N_{i-k}(t)|_{\max}}{F} = \frac{133,111 \times 10^3}{2,35 \times 10^2} = 566,4 \text{ МПа.}$$

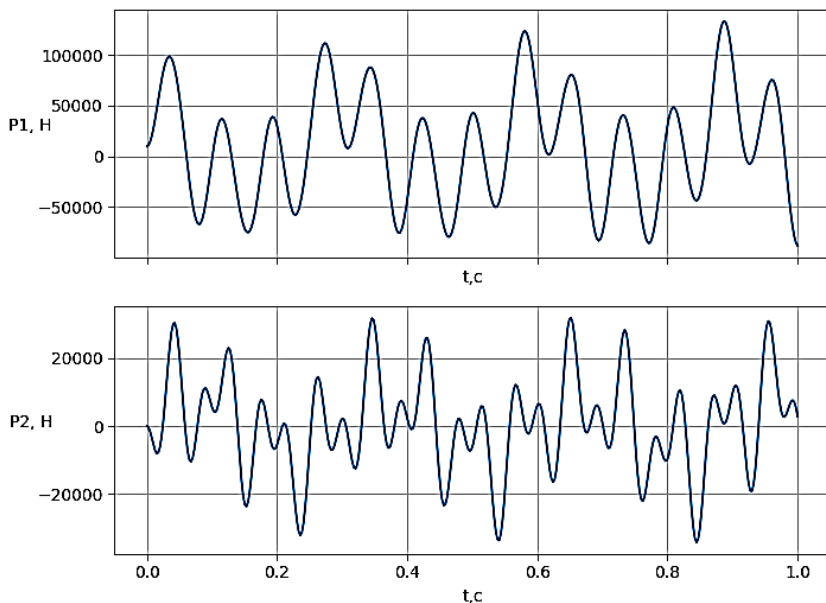


Рисунок 26

Порівнюємо значення $|\sigma_{i-k}(t)|_{\max}$ з допустимим для заданого матеріалу стержнів (163 МПа). Бачимо, що умова міцності (формула 1) на першому кроці не виконується: $|\sigma_{i-k}(t)|_{\max} > [\sigma]$. Тому переходимо до наступного кроку.

2. На другому кроці динамічного розрахунку приймаємо наступне в стандартному ряду (додаток А) значення $F=2,43 \text{ см}^2$, підраховуємо за формулами 98–100 відповідні значення коефіцієнтів жорсткості та повторюємо всі дії попереднього кроку.

Оскільки і на цьому кроці умова міцності не виконується, слідує перехід до наступного кроку. І так до виконання цієї умови.

Як впливає з таблиці 27, позитивний результат досягається лише на 21 кроці.

Таблиця 27 – Динамічний розрахунок стрижнів ферми на міцність

Номер кроку	Розміри кутика	$F, \text{см}^2$	$[N_{i-k}(t)]_{\max}$ кН	$[\sigma_{i-k}(t)]_{\max}$ МПа	$[\sigma]$, МПа	Підсумок (+ або -)
1	2	3	4	5	6	7
1	40×40×3	2,35	133,111	566,4	163	–
2	32×32×4	2,43	118,502	487,7	163	–
3	45×45×3	2,65	123,417	465,7	163	–
4	35×35×4	2,67	124,145	465,0	163	–
5	50×50×3	2,96	128,510	434,2	163	–
6	40×40×4	3,08	128,871	418,4	163	–
7	35×35×5	3,28	127,411	388,4	163	–
8	45×45×4	3,48	127,972	367,7	163	–
9	40×40×5	3,79	115,726	305,3	163	–
10	50×50×4	3,89	114,195	293,6	163	–
11	45×45×5	4,29	122,956	286,6	163	–
12	56×56×4	4,38	123,882	282,8	163	–
13	50×50×5	4,80	123,310	256,9	163	–
14	63×63×4	4,96	122,012	246,0	163	–
15	56×56×5	5,41	121,104	223,9	163	–
16	50×50×6	5,69	122,787	215,8	163	–
17	63×63×5	6,13	122,187	199,3	163	–
18	70×70×4,5	6,20	121,468	195,9	163	–
19	70×70×5	6,86	123,965	180,7	163	–
20	63×63×6	7,28	121,587	167,0	163	–
21	75×75×5	7,39	119,831	162,2	163	+



Як впливає з таблиці 27, для забезпечення міцності всіх стрижнів ферми при динамічному навантаженні достатнім є кутик $75 \times 75 \times 5$ ($F = F_{str} = 7,39 \text{ см}^2$).

3. Розрахунок стрижнів на стійкість при динамічному навантаженні починаємо з останнього значення площі в розрахунку на міцність ($F = 7,39 \text{ см}^2$).

Для реалізації цього розрахунку скористаємося даними таблиці 28.

Розрахунку на стійкість підлягають лише стиснуті стрижні. У цьому прикладі, як впливає з таблиці 28, до таких відносяться всі стрижні ферми, оскільки в кожному з них поряд з зусиллями, що розтягують, періодично виникають і стискаючі зусилля.

Таблиця 28 – Динамічні зусилля у стрижнях ферми при $F = 7,39 \text{ см}^2$

Позначення стрижнів (i-k)	Зусилля $N_{i-k}(t)$, кН	
	max	min
1-5	71,335	-55,242
1-6	51,358	-82,386
2-3	58,736	-84,731
2-5	59,916	-41,529
3-4	83,058	-119,831
3-5	84,731	-58,736
4-5	74,493	-15,979
4-6	72,636	-116,528
5-6	82,386	-51,358

У комп'ютерному варіанті розрахунку на стійкість будуть піддаватися всі стиснуті стрижні. У цьому ж прикладі такий розрахунок виконуються «вручну». Щоб зменшити його трудомісткість, розіб'ємо всі стрижні ферми на групи за їх довжиною і виберемо для розрахунку в кожній групі лише один стрижень, найнебезпечніший з погляду поздовжнього згину. Відповідно до таблиці 24, таких груп три.

До першої групи входять стрижні 3-4, 4-5 і 4-6, що мають довжину 1 м (табл. 24). Згідно з таблицею 28 найбільш небезпечним у цій групі є стрижень 3-4, у якого стискаюче зусилля є найбільшим за модулем: $|N_{3-4}^{\min}| = 119,831 \text{ кН}$.

До другої групи входять стрижні 1-6, 2-3, 3-5 та 5-6, довжина яких дорівнює 1,414 м. Найбільш небезпечним у цій групі є стрижень 2-3 з найбільшим за модулем стискаючим зусиллям: $|N_{2-3}^{\min}| = 84,731 \text{ кН}$.

У третій групі – два стрижні, довжина яких становить 2 м. Це – стрижні 1-5 та 2-5. Більш небезпечним серед них є стрижень 1-5, у якого модуль стискаючого зусилля більше: $|N_{1-5}^{\min}| = 55,242 \text{ кН}$.

Таким чином, розрахунок проводимо стосовно стрижнів 3-4, 2-3 і 1-5. Його результати представлені у таблиці В.8. Згідно з ними, для всіх стрижнів ферми остаточно приймається кутик $80 \times 80 \times 6$ ($F_{\text{end}} = 9,38 \text{ см}^2$).

Приклад 8. У розвиток прикладу 7 виконати повний розрахунок конструкції, в якій пристрій, що викликає коливання, спирається на дві однакові ферми і розташований між ними таким чином, що силове навантаження від нього передаються на вузли 4 кожної з ферм в рівних частках.

Рішення

Попередній розрахунок

1. Зусилля у стрижнях кожної з опорних ферм, спричинені силою ваги пристрою ($m \times g = 9,810 \text{ кН}$), наведені в таблиці 29. Вони дорівнюють половинам їх відповідних значень, взятих з таблиці 24.

Таблиця 29 – Зусилля у стрижнях ферм від сили $0,5 \times m \times g = 4,905 \text{ кН}$

Позначення стрижнів (i-k)	Довжини стрижнів ℓ_{i-k} м	Зусилля в стрижнях N_{i-k} кН
1-5	2	2,453
1-6	1,414	-3,469
2-3	1,414	-3,469
2-5	2	2,453
3-4	1	-4,905
3-5	1,414	3,469
4-5	1	-4,905
4-6	1	-4,905
5-6	1,414	3,469



У таблиці 29 знаходимо найбільше за модулем зусилля:
 $|N_{i-k}^{\min}| = 4,905 \text{ кН.}$

За значенням $|N_{i-k}|_{\max}$ з умови міцності обчислюємо відповідну мінімальну площу поперечного перерізу стрижня (одного кутика):

$$F_{\min} = \frac{|N_{i-k}|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{4,905 \times 10^3}{163} = 30,092 \text{ мм}^2 = 0,30 \text{ см}^2.$$

За значенням $F_{\min}$ у таблиці А.1 знаходимо потрібний кутик. Ним є кутик $20 \times 20 \times 3$, у якого $F = 1,13 \text{ см}^2$ та $i_{\min} = i_{y0} = 0,39 \text{ см.}$

Вказане значення F приймаємо для всіх стрижнів опорних ферм як таке, що забезпечує їхню міцність при статичному навантаженні ($F_{str} = F = 1,13 \text{ см}^2$).

Далі виконуємо розрахунок стиснутих стрижнів на стійкість при статичному навантаженні за аналогією з прикладом 7. Він наведений у таблиці В.9. За його результатами приймаємо кутик $40 \times 40 \times 3$ ($F_{stb} = 2,35 \text{ см}^2$).

Вказане значення площі є вихідним для динамічного розрахунку кожної з опорних ферм: $F'_{in} = F'_{stb} = 2,35 \text{ см}^2$.

2. Вирази для коефіцієнтів жорсткості конструкції (формули 101–103) отримуємо із формул 98–100.

$$\delta_{11} = \frac{6,828}{2 \times E \times F} = \frac{3,414}{E \times F}; \quad (101)$$

$$\delta_{22} = \frac{2,458}{2 \times E \times F} = \frac{1,229}{E \times F}; \quad (102)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{2 \times E \times F} = \frac{0,5}{E \times F}, \quad (103)$$

де F – площа поперечного перерізу стрижнів кожної з опорних ферм.

У справедливості формул 101–103 легко переконатися, подумки замінивши обидві ці ферми однією еквівалентною їм за жорсткістю однією фермою таких самих розмірів і форми, але з стрижнями, що складаються зі здвоєних кутиків із загальною площею перерізу $2F$, і повторивши відповідний ланцюжок дій прикладу 7.



Вихідні значення коефіцієнтів жорсткості у цьому прикладі такі:

$$\delta_{11} = \frac{3,414}{E \times F} = \frac{3,414}{2 \times 10^{11} \times 2,35 \times 10^{-4}} = 7,264 \times 10^{-8} \frac{\text{м}}{\text{Н}}; \quad (101a)$$

$$\delta_{22} = \frac{1,229}{E \times F} = \frac{1,229}{2 \times 10^{11} \times 2,35 \times 10^{-4}} = 2,615 \times 10^{-8} \frac{\text{м}}{\text{Н}}; \quad (102a)$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{0,5}{E \times F} = \frac{0,5}{2 \times 10^{11} \times 2,35 \times 10^{-4}} = 1,064 \times 10^{-8} \frac{\text{м}}{\text{Н}}. \quad (103a)$$

3. Закони зміни сил, що збурюють коливання – $H_1^y(t)$ та $H_2^z(t)$, у цьому прикладі такі самі, як і в прикладі 7.

Основний розрахунок

1. Цей розрахунок повторює відповідні дії прикладу 7 з новим вихідним значенням площі поперечного перерізу кутиків і новими значеннями коефіцієнтів жорсткості (формули 101–103), а також новою формулою для законів зміни зусиль, що виникають у стрижнях опорних ферм у процесі коливань.

У цьому прикладі на відміну від формули 95, що використовувався у прикладі 7, зазначені закони описуються формулою 104, що випливає з логіки поняття еквівалентної ферми (див. с. 77):

$$N_{i-k}(t) = 0,5 \times \bar{N}_{i-k} \times P_1(t) + 0,5 \times \tilde{N}_{i-k} \times P_2(t). \quad (104)$$

2. Як і в прикладі 7, динамічний розрахунок опорних ферм починаємо з підбору площі та відповідних розмірів поперечного перерізу їх стрижнів, виходячи з умови міцності.

Для цієї частини зазначеного розрахунку використовуємо значення площі $F = F_{in} = 2,35 \text{ см}^2$ і коефіцієнтів жорсткості (формули 101a–103a).

Результати динамічного розрахунку на міцність опорних ферм представлені в таблиці 30 (див. с. 79).

Таблиця 30 – Динамічний розрахунок опорних ферм на міцність

Номер кроку	Розміри кутика	$F, \text{см}^2$	$[N_{i-k}(t)]_{\max}, \text{кН}$	$[\sigma_{i-k}(t)]_{\max}, \text{МПа}$	$[\sigma], \text{МПа}$	Підсумок (+ або -)
1	40×40×3	2,35	62,150	264,468	163	–
2	32×32×4	2,43	61,641	253,667	163	–
3	45×45×3	2,65	62,244	234,883	163	–
4	35×35×4	2,67	61,712	231,131	163	–
5	50×50×3	2,96	62,306	210,493	163	–
6	40×40×4	3,08	61,105	198,393	163	–
7	35×35×3	3,28	59,617	181,759	163	–
8	45×45×4	3,48	62,608	179,908	163	–
9	40×40×5	3,79	59,001	155,675	163	+

Як впливає з таблиці 30, для забезпечення міцності всіх стрижнів опорних ферм при динамічному навантаженні достатнім є кутик 40×40×5 ($F_{str}=3,79 \text{ см}^2$).

Вказане значення площі є вихідним для динамічного розрахунку опорних ферм на стійкість. Результати цього розрахунку наведені в таблиці В.10. На їх підставі остаточно приймаємо для всіх стрижнів опорних ферм кутик 63×63×5 ($F_{end}=6,13 \text{ см}^2$).

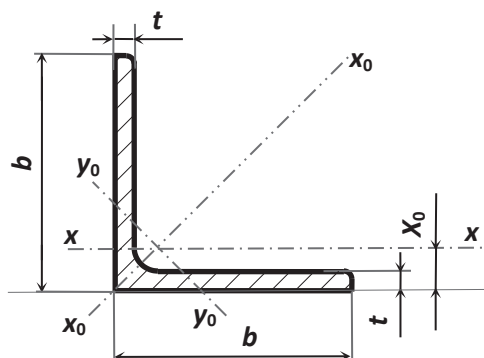
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретична механіка : підручник / В. М. Булгаков та ін. Київ : Центр учбової літератури, 2017. 640 с.
2. A. M. G. Elementary Text-Book of Theoretical Mechanics. Creative Media Partners, LLC, 2018.
3. Писаренко Г. С., Квітка О. Л., Уманський Е. С. Опір матеріалів : підручник. Київ : Вища шк., 2004. 655 с.
4. Subramanian R. Strength of Materials. OUP India, 2005. 892 p.
5. Збірник розрахунково-графічних завдань з курсу «Опір матеріалів» : навч. посіб. / Л. В. Кутовий та ін. Краматорськ : ДДМА, 2007. 220 с.
6. Баженов В. А., Перельмутер А. В., Шишов О. В. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання : підручник. Київ : ВІПОЛ, 2013. 896 с.
7. Strommen E. N. Structural Mechanics. Cham : Springer International Publishing, 2020. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-44318-4>
8. Теорія механізмів і машин : підручник / В. М. Булгаков та ін. Київ : Центр учбової літератури, 2019. 608 с.
9. Холодняк Ю. С., Подлесний С. В., Капорович С. В. Розвиток методології силових розрахунків плоских рам в умовах вимушених коливань. *Науковий вісник Донбаської державної машинобудівної академії*. Краматорськ, 2018. № 1 (25Е). С. 96–107.
10. Холодняк Ю. С., Подлесний С. В., Капорович С. В. Спрощена методика силового розрахунку плоских рам при вимушених коливаннях. *Сучасні інноваційні технології підготовки інженерних кадрів для гірничої промисловості та транспорту 2018* : зб. наук. праць міжнар. конф. Дніпро : НТУ «ДП», 2018. С. 104–113.
11. Особливості застосування спрощеної двовимірної моделі вимушених коливань у силових розрахунках плоских ферм / Ю. С. Холодняк та ін. *Вісник Донбаської державної машинобудівної академії* : зб. наук. праць. Краматорськ, 2019. № 3 (47).
12. Holodnyak Yu. S., Kaporovich S. V., Korotenko Ye. D. Elaboration of a Methodology of Power Calculation of Flat Frames Under Conditions of Forced Oscillations. *Сучасні інноваційні технології підготовки інженерних кадрів для гірничої промисловості та транспорту 2019* : зб. наук. праць міжнар. конф. Дніпро : НТУ «ДП», 2019. С. 92–100.
13. On application of a simplified two-dimensional model of forced oscillations to the power analysis of flat steelworks / Yu. S. Holodnyak [et al.]. *Перспективні технології та прилади* : зб. наук. праць. Луцьк : ЛНТУ, 2019. № 15. С. 109–119.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А. Основні параметри стрижневих профілів

А.1. Кутики сталеві гарячекатані рівнополочні (за ДСТУ 2251:2018)



b – ширина полиці;

i – радіуси інерції;

t – товщина полиці;

X_0 – відстань від центру;

F – площа перерізу ваги перерізу до зовнішньої;

J – моменти інерції грані полиці

Приклад позначення профілю:

Кутик 50×50×3 ДСТУ 2251:2018

Таблиця А.1

Позначення профілю	Основні розміри, мм		F , см ²	J_x см ⁴	W_x см ³	i_x см	J_{x_0} max, см ⁴	i_{x_0} max, см	J_{y_0} min, см ⁴	W_{y_0} см ³	i_{y_0} min, см	J_{y_0} см ⁴	X_0 см
	b	t											
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
20×20×3	20	3	1,13	0,40	0,28	0,59	0,63	0,75	0,17	0,20	0,39	0,23	0,60
20×20×4	20	4	1,46	0,50	0,37	0,58	0,78	0,73	0,22	0,24	0,38	0,28	0,64
25×25×3	25	3	1,43	0,81	0,46	0,75	1,29	0,95	0,34	0,33	0,49	0,47	0,73
25×25×4	25	4	1,86	1,03	0,59	0,74	1,62	0,93	0,44	0,41	0,48	0,59	0,76
28×28×3	28	3	1,62	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80
30×30×3	30	3	1,74	1,45	0,67	0,91	2,30	1,15	0,60	0,53	0,59	0,85	0,85
30×30×4	30	4	2,27	1,84	0,87	0,90	2,92	1,13	0,77	0,61	0,58	1,08	0,89
32×32×3	32	3	1,86	1,77	0,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,50	0,63	1,03	0,89
32×32×4	32	4	2,43	2,26	1,00	0,96	3,58	1,21	0,94	0,71	0,62	1,32	0,94
35×35×3	35	3	2,04	2,35	0,93	1,07	3,72	1,35	0,97	0,71	0,69	1,37	0,97
35×35×4	35	4	2,67	3,01	1,21	1,06	4,76	1,33	1,25	0,88	0,68	1,75	1,01
35×35×5	35	5	3,28	3,61	1,47	1,05	5,71	1,32	1,52	1,02	0,68	2,10	1,05
40×40×3	40	3	2,35	3,55	1,22	1,23	5,63	1,55	1,47	0,95	0,79	2,08	1,09
40×40×4	40	4	3,08	4,58	1,60	1,22	7,26	1,53	1,90	1,19	0,78	2,68	1,13
40×40×5	40	5	3,79	5,53	1,95	1,21	8,75	1,52	2,30	1,39	0,78	3,22	1,17
45×45×3	45	3	2,65	5,13	1,56	1,39	8,13	1,75	2,12	1,24	0,89	3,00	1,21
45×45×4	45	4	3,48	6,63	2,04	1,38	10,52	1,74	2,74	1,54	0,89	3,89	1,26
45×45×5	45	5	4,29	8,03	2,51	1,37	12,74	1,72	3,33	1,81	0,88	4,71	1,30
50×50×3	50	3	2,96	7,11	1,94	1,55	11,27	1,95	2,95	1,57	1,00	4,16	1,33

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
50×50×4	50	4	3,89	9,21	2,54	1,54	14,63	1,94	3,80	1,95	0,99	5,42	1,38
50×50×5	50	5	4,80	11,20	3,13	1,53	17,77	1,92	4,63	2,30	0,98	6,57	1,42
50×50×6	50	6	5,69	13,07	3,69	1,52	20,72	1,91	5,43	2,63	0,98	7,65	1,46
56×56×4	56	4	4,38	13,10	3,21	1,73	20,79	2,18	5,41	2,52	1,11	7,69	1,52
56×56×5	56	5	5,41	15,97	3,96	1,72	25,36	2,16	6,59	2,97	1,10	9,41	1,57
63×63×4	63	4	4,96	18,86	4,09	1,95	29,90	2,45	7,81	3,26	1,25	11,00	1,69
63×63×5	63	5	6,13	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,70	1,74
63×63×6	63	6	7,28	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,90	1,78
70×70×4,5	70	4,5	6,20	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17,00	1,88
70×70×5	70	5	6,86	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90
70×70×6	70	6	8,15	37,59	7,43	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94
70×70×7	70	7	9,42	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,20	1,99
70×70×8	70	8	10,67	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,10	2,02
75×75×5	75	5	7,39	39,53	7,21	2,31	62,65	2,91	16,41	5,74	1,49	23,10	2,02
75×75×6	75	6	8,78	46,57	8,57	2,30	73,87	2,90	19,28	6,62	1,48	27,30	2,06
75×75×7	75	7	10,15	53,34	9,89	2,29	84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	31,20	2,10
75×75×8	75	8	11,50	59,84	11,18	2,28	94,89	2,87	24,80	8,16	1,47	35,00	2,15
75×75×9	75	9	12,83	66,10	12,43	2,27	104,72	2,86	27,48	8,91	1,46	38,60	2,18
75×75×10	75	10	14,13	72,11	13,66	2,26	114,13	2,84	30,09	9,57	1,46	42,02	2,22
80×80×5,5	80	5,5	8,63	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	30,90	2,17
80×80×6	80	6	9,38	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,40	2,19
80×80×7	80	7	10,85	65,31	11,32	2,45	103,60	3,09	26,97	8,55	1,58	38,30	2,23

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
80×80×8	80	8	12,30	73,36	12,80	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	43,00	2,27
90×90×6	90	6	10,61	82,10	12,49	2,78	130,00	3,50	33,97	9,88	1,79	48,10	2,43
90×90×7	90	7	12,28	94,30	14,45	2,77	149,67	3,49	38,94	11,15	1,78	55,40	2,47
90×90×8	90	8	13,93	106,11	16,36	2,76	168,42	3,48	43,80	12,34	1,77	62,30	2,51
90×90×9	90	9	15,60	118,00	18,29	2,75	186,00	3,46	48,60	13,48	1,77	68,00	2,55
90×90×10	90	10	17,17	128,60	20,07	2,74	203,96	3,45	53,23	14,51	1,76	75,37	2,59
100×100×6,5	100	6,5	12,82	122,10	16,69	3,09	193,46	3,89	50,73	13,38	1,99	71,40	2,68
100×100×7	100	7	13,75	130,59	17,90	3,08	207,01	3,88	54,16	14,13	1,98	76,40	2,71
100×100×8	100	8	15,60	147,19	20,30	3,07	233,46	3,87	60,92	15,66	1,98	86,30	2,75
100×100×9	100	9	17,43	163,31	22,66	3,06	259,13	3,86	67,49	17,09	1,97	95,82	2,79
100×100×10	100	10	19,24	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	110,00	2,83
100×100×11	100	11	21,03	194,15	27,24	3,04	307,85	3,83	80,44	19,79	1,96	113,71	2,87
100×100×12	100	12	22,80	208,90	29,47	3,03	330,95	3,81	86,84	21,10	1,95	122,00	2,91
100×100×13	100	13	24,55	223,23	31,67	3,02	353,41	3,79	93,04	22,29	1,95	130,19	2,95
100×100×14	100	14	26,28	237,15	33,83	3,00	374,98	3,78	99,32	23,49	1,94	130,00	2,99
100×100×15	100	15	27,99	250,68	39,95	2,99	395,94	3,76	105,41	24,63	1,94	145,26	3,03
100×100×16	100	16	29,68	263,82	38,04	2,98	416,04	3,74	111,61	25,79	1,94	152,00	3,06
110×110×7	110	7	15,15	175,61	21,83	3,40	278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	106,00	2,96
110×110×8	110	8	17,20	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	116,00	3,00
120×120×8	120	8	18,89	259,31	29,58	3,71	411,21	4,67	107,41	23,49	2,39	151,90	3,23
120×120×9	120	9	21,12	288,36	33,06	3,69	457,52	4,65	119,20	25,71	2,38	169,16	3,28
120×120×10	120	10	23,33	316,70	36,49	3,68	502,59	4,64	130,80	27,85	2,37	185,90	3,32

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
120×120×11	120	11	25,52	344,34	39,86	3,67	546,46	4,63	142,23	29,91	2,36	202,12	3,36
120×120×12	120	12	27,69	371,31	43,19	3,66	589,13	4,61	153,49	31,90	2,35	217,82	3,40
125×125×8	125	8	19,69	294,36	32,20	3,87	466,76	4,87	121,98	25,67	2,49	172,00	3,36
125×125×9	125	9	22,00	327,48	36,00	3,86	520,00	4,86	135,88	28,26	2,48	192,00	3,40
125×125×10	125	10	24,33	359,82	39,74	3,85	571,04	4,84	148,59	30,45	2,47	211,00	3,45
125×125×12	125	12	28,89	422,23	47,06	3,82	670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	248,00	3,53
125×125×14	125	14	33,37	481,76	54,17	3,80	763,90	4,78	199,62	39,10	2,45	282,00	3,61
125×125×16	125	16	37,77	538,56	61,09	3,78	852,84	4,75	224,29	43,10	2,44	315,00	3,68
130×130×8	130	8	20,49	332,48	34,93	4,03	527,38	5,07	137,48	27,92	2,59	194,95	3,48
130×130×9	130	9	22,92	369,98	39,06	4,02	583,28	5,06	152,69	30,61	2,58	217,30	3,53
130×130×10	130	10	25,33	406,68	43,13	4,01	645,72	5,05	167,65	33,21	2,57	239,03	3,57
130×130×11	130	11	27,72	442,55	47,14	4,00	702,71	5,03	182,39	35,71	2,56	260,16	3,61
130×130×12	130	12	30,09	447,61	51,09	3,98	758,28	5,02	196,92	38,13	2,56	280,68	3,65
130×130×13	130	13	32,44	511,87	54,99	3,97	812,47	5,00	211,28	40,46	2,55	300,60	3,69
130×130×14	130	14	34,77	547,37	58,84	3,96	865,28	4,99	225,46	42,73	2,54	319,91	3,73
130×130×15	130	15	37,08	578,12	62,64	3,95	916,75	4,97	239,49	44,92	2,54	338,63	3,77
130×130×16	130	16	39,37	610,14	66,38	3,94	966,89	4,96	253,40	47,05	2,54	356,74	3,81
130×130×17	130	17	41,64	641,46	70,08	3,92	1015,73	4,94	267,18	49,12	2,53	374,27	3,85
130×130×18	130	18	43,89	672,08	73,73	3,91	1069,29	4,92	280,87	51,13	2,53	391,21	3,88
140×140×8	140	8	22,09	418,15	40,72	4,35	663,63	5,48	172,68	32,72	2,80	245,47	3,73
140×140×9	140	9	24,72	465,72	45,55	4,34	739,42	5,47	192,03	35,92	2,79	274,00	3,76
140×140×10	140	10	27,33	512,29	50,32	4,33	813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	301,00	3,82

Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
140×140×11	140	11	29,92	557,87	55,02	4,32	886,26	5,44	229,48	42,03	2,77	328,39	3,86
140×140×12	140	12	32,49	602,49	59,66	4,31	956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	354,00	3,90
140×140×13	140	13	35,04	646,18	64,24	4,29	1026,31	5,41	266,05	47,72	2,76	380,13	3,94
140×140×14	140	14	37,57	688,95	68,77	4,28	1093,90	5,40	284,00	50,44	2,75	404,91	3,98
140×140×15	140	15	40,08	730,83	73,23	4,27	1159,91	5,38	301,76	53,07	2,74	429,07	4,02
140×140×16	140	16	42,57	771,84	77,64	4,26	1224,34	5,36	319,34	55,64	2,74	452,50	4,06
150×150×10	150	10	23,33	634,76	58,07	4,65	1008,69	5,86	260,84	45,33	2,98	373,92	4,07
150×150×11	150	11	32,12	691,68	63,52	4,64	1099,31	5,85	284,05	48,86	2,97	407,63	4,11
150×150×12	150	12	34,89	747,48	68,90	4,63	1187,99	5,83	306,96	52,28	2,97	440,52	4,15
150×150×13	150	13	37,64	802,17	74,22	4,62	1274,77	5,82	329,58	55,60	2,96	472,60	4,19
150×150×14	150	14	40,37	855,80	79,47	4,60	1359,67	5,80	351,93	58,81	2,95	503,87	4,23
150×150×15	150	15	43,08	907,38	84,66	4,59	1442,72	5,79	374,04	61,94	2,95	534,34	4,27
150×150×16	150	16	45,77	959,94	89,79	4,58	1523,95	5,77	395,93	64,97	2,94	564,01	4,31
150×150×17	150	17	48,44	1010,50	94,85	4,57	1603,38	5,75	417,61	67,93	2,93	592,89	4,35
150×150×18	150	18	51,09	1060,08	99,86	4,55	1681,05	5,74	439,11	70,81	2,93	620,97	4,38
150×150×19	150	19	53,72	1108,70	104,82	4,54	1756,96	5,72	460,44	73,62	2,92	648,26	4,42
150×150×20	150	20	56,33	1156,40	109,71	4,53	1831,16	5,70	481,63	76,37	2,92	674,76	4,46
160×160×10	160	10	31,43	774,24	66,19	4,96	1229,10	6,25	319,33	52,52	3,19	455,00	4,30
160×160×11	160	11	34,42	844,21	72,44	4,95	1340,06	6,24	347,77	56,53	3,18	496,00	4,35
160×160×12	160	12	37,39	912,89	78,62	4,94	1450,00	6,23	375,78	60,53	3,17	537,00	4,39
160×160×13	160	13	40,34	980,30	84,73	4,93	1557,36	6,21	403,24	64,36	3,16	577,06	4,43
160×160×14	160	14	43,57	1046,47	90,77	4,92	1662,13	6,20	430,81	68,15	3,16	615,00	4,47

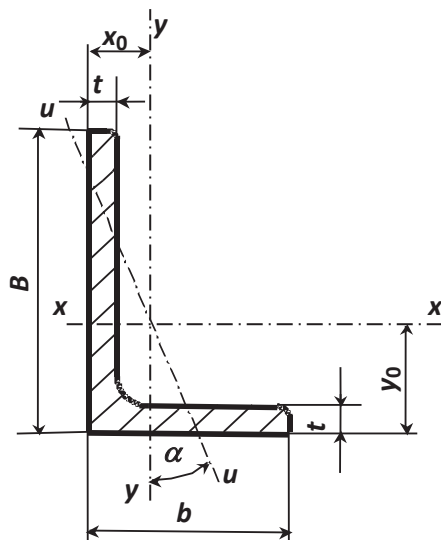
Продовження таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
160×160×15	160	15	46,18	1111,42	96,73	4,91	1765,20	6,18	457,65	71,74	3,15	653,77	4,51
160×160×16	160	16	49,07	1175,19	102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	690,00	4,55
160×160×17	160	17	51,94	1273,79	108,47	4,88	1964,62	6,15	510,95	78,73	3,14	726,83	4,59
160×160×18	160	18	54,79	1290,24	114,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	82,08	3,13	771,00	4,63
160×160×19	160	19	57,62	1359,59	119,85	4,86	2155,86	6,12	563,32	85,38	3,13	796,27	4,67
160×160×20	160	20	60,40	1418,85	125,60	4,85	2248,26	6,10	589,43	90,02	3,12	830,00	4,70
180×180×11	180	11	38,80	1216,44	92,47	5,60	1933,10	7,06	499,78	72,86	3,59	716,00	4,85
180×180×12	180	12	42,19	1316,62	100,41	5,59	2092,78	7,04	540,45	78,15	3,58	776,00	4,89
180×180×14	180	14	48,87	1512,05	116,04	5,56	2403,91	7,01	620,19	88,24	3,56	891,86	4,97
180×180×15	180	15	52,18	1607,36	123,74	5,55	2555,51	7,00	659,52	93,08	3,55	947,84	5,01
180×180×16	180	16	55,47	1701,12	131,36	5,54	2703,79	6,98	698,45	97,80	3,55	1002,67	5,05
180×180×17	180	17	58,74	1793,34	138,90	5,52	2849,68	6,96	737,01	102,41	3,54	1056,33	5,09
180×180×18	180	18	61,99	1884,07	146,36	5,51	2992,91	6,95	775,22	106,91	3,53	1108,84	5,13
180×180×20	180	20	68,43	2061,12	161,07	5,49	3271,53	6,91	850,70	115,59	3,52	1210,41	5,20
200×200×12	200	12	47,10	1822,78	124,61	6,22	2896,16	7,84	749,40	98,68	3,99	1073,00	5,37
200×200×13	200	13	50,85	1960,77	134,44	6,21	3116,18	7,83	805,35	105,07	3,98	1156,00	5,42
200×200×14	200	14	54,60	2097,00	144,17	6,20	3333,00	7,81	861,00	111,50	3,97	1236,00	5,46
200×200×15	200	15	58,29	2230,63	153,82	6,19	3546,11	7,8	915,15	117,70	3,96	1315,48	5,50
200×200×16	200	16	61,98	2362,57	163,37	6,17	3755,39	7,78	969,74	123,77	3,96	1393,00	5,54
200×200×17	200	17	65,65	2492,56	172,84	6,16	3961,99	7,77	1023,13	129,68	3,95	1469,43	5,58
200×200×18	200	18	69,30	2620,64	182,22	6,15	4164,88	7,75	1076,39	135,47	3,94	1544,25	5,62
200×200×20	200	20	76,54	2871,47	200,73	6,12	4860,42	7,72	1181,92	146,62	3,93	1689,00	5,70

Закінчення таблиці А.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
200×200×24	200	24	90,78	3350,66	236,77	6,07	5313,93	7,65	1387,38	167,74	3,91	1963,28	5,85
200×200×25	200	25	94,29	3466,21	245,59	6,06	5494,04	7,63	1438,38	172,68	3,91	2028,00	5,89
200×200×26	200	26	97,78	3580,10	254,33	6,05	5671,78	7,62	1488,43	177,69	3,90	2091,68	5,92
200×200×28	200	28	104,70	3803,0	271,59	6,03	6017,51	7,58	1588,50	187,29	3,89	2214,50	5,99
200×200×30	200	30	111,54	4019,60	288,57	6,00	6351,05	7,55	1698,16	193,06	3,89	2332,00	6,07
220×220×14	220	14	60,38	2814,36	175,18	6,83	4470,15	8,60	1158,56	138,62	4,38	1655,00	5,91
220×220×16	220	16	68,58	3175,44	198,71	6,80	5045,37	8,58	1305,52	153,34	4,36	1869,00	6,02

А.2. Кутики сталеві гарячекатані нерівнополочні (за ДСТУ 8769:2018)



B – ширина більшої полиці;

F – площа перерізу;

b – ширина меншої полиці;

J – моменти інерції;

t – товщина полиць;

i – радіуси інерції;

x_0, y_0 – відстані від центру ваги перерізу
до зовнішніх граней полиць

Приклад позначення профілю:

Кутик 50×32×3 ДСТУ 8769:2018

Таблиця А.2

Позначення профілю	Основні розміри, мм				F , см ²	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см	J_d , min, см ⁴	W_d , см ³	i_d , min, см	x_0 , см	y_0 , см	J_{xy} , см ⁴	tga
	В	В	В	В														
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
25×16×3	25	16	3	1,16	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,13	0,16	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392	
32×20×3	32	20	3	1,49	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,28	0,25	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382	
32×20×4	32	20	4	1,94	1,93	0,93	1,00	0,57	0,39	0,54	0,35	0,33	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374	
40×25×3	40	25	3	1,89	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,56	0,41	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385	
40×25×4	40	25	4	2,47	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,71	0,52	0,54	0,63	1,37	1,22	0,281	
40×25×5	40	25	5	3,03	4,73	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	0,86	0,64	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374	
45×28×3	45	28	3	2,14	4,41	1,45	1,48	1,32	0,61	0,79	0,79	0,52	0,61	0,64	1,47	1,38	0,382	
45×28×4	45	28	4	2,80	5,68	1,90	1,042	1,69	0,80	0,78	1,02	0,67	0,60	0,68	1,51	1,77	0,379	
50×32×3	50	32	3	2,42	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	1,18	0,68	0,70	0,72	1,60	2,01	0,403	
50×32×4	50	32	4	3,17	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52	0,88	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401	
56×36×4	56	36	4	3,58	11,37	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	2,19	1,13	0,78	0,84	1,82	3,74	0,406	
56×36×5	56	36	5	4,41	13,82	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	2,65	1,37	0,78	0,88	1,87	4,50	0,404	
63×40×4	63	40	4	4,04	16,33	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	3,07	1,41	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397	
63×40×5	63	40	5	4,98	19,91	4,72	2,00	6,26	2,05	1,12	3,73	1,72	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396	
63×40×6	63	40	6	5,90	23,31	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	4,36	2,02	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393	
63×40×8	63	40	8	7,68	29,60	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	5,58	2,60	0,85	1,07	2,20	9,27	0,386	
70×45×5	70	45	5	5,59	27,76	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	5,34	2,20	0,98	1,05	2,28	9,12	0,406	
75×50×5	75	50	5	6,11	34,81	6,81	2,39	12,47	3,25	1,43	7,24	2,73	1,09	1,17	2,39	12,00	0,436	
75×50×6	75	50	6	7,25	40,92	8,08	2,38	14,60	3,85	1,42	8,48	3,21	1,08	1,21	2,44	14,10	0,435	
75×50×7	75	50	7	8,37	46,77	9,31	2,36	16,61	4,43	1,41	9,69	3,69	1,08	1,25	2,48	16,18	0,435	
75×50×8	75	50	8	9,47	52,38	10,52	2,35	18,52	4,88	1,40	10,87	4,14	1,07	1,29	2,52	17,80	0,430	
80×50×5	80	50	5	6,36	41,64	7,71	2,56	12,68	3,28	1,41	7,57	2,75	1,00	1,13	2,60	13,20	0,387	

Закінчення таблиці А.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
80×50×6	80	50	6	7,55	48,98	9,15	2,55	14,85	3,88	1,40	8,88	3,24	1,08	1,17	2,65	15,50	0,386
90×56×5,5	90	56	5,5	7,86	65,28	10,74	2,88	19,67	4,53	1,58	11,77	3,81	1,22	1,26	2,92	20,54	0,384
90×56×6	90	56	6	8,54	70,58	11,66	2,88	21,22	4,91	1,58	12,70	4,12	1,22	1,28	2,95	22,53	0,384
90×56×8	90	56	8	11,18	90,87	15,24	2,85	27,08	6,39	1,56	16,29	5,32	1,21	1,36	3,04	28,33	0,380
100×63×6	100	63	6	9,58	98,29	14,52	3,20	30,58	6,27	1,79	18,20	5,27	1,38	1,42	3,23	31,50	0,393
100×63×7	100	63	7	11,09	112,86	16,78	3,19	34,99	7,23	1,77	20,83	6,06	1,37	1,46	3,28	36,10	0,392
100×63×8	100	63	8	12,57	126,96	19,01	3,18	39,21	8,17	1,77	23,38	6,82	1,36	1,50	3,32	40,50	0,391
100×63×10	100	63	10	15,47	153,95	23,32	3,15	47,18	9,99	1,75	28,34	8,31	1,35	1,58	3,40	48,60	0,387
110×70×6,5	110	70	6,5	11,45	142,42	19,11	3,53	45,61	8,42	2,00	26,94	7,05	1,53	1,58	3,55	46,80	0,402
110×70×8	110	70	8	13,93	171,54	23,22	3,51	54,64	10,20	1,98	32,31	8,50	1,52	1,64	3,61	55,90	0,400
125×80×7	125	80	7	14,06	226,53	26,67	4,01	73,73	11,89	2,29	43,40	9,96	1,76	1,80	4,01	74,70	0,407
125×80×8	125	80	8	15,98	225,62	30,26	4,00	80,95	13,47	2,28	48,82	11,25	1,75	1,84	4,05	84,10	0,406
125×80×10	125	80	10	19,70	311,64	37,27	3,98	100,47	16,52	2,26	59,33	13,74	1,74	1,92	4,14	102,00	0,404
125×80×12	125	80	12	23,36	364,79	44,07	3,95	116,84	19,46	2,24	69,47	16,11	1,72	2,00	4,22	118,00	0,400
140×90×8	140	90	8	18,00	363,68	38,25	4,49	119,79	17,19	2,58	70,27	14,39	1,58	2,03	4,49	121,00	0,411
140×90×10	140	90	10	22,24	444,45	47,19	4,47	145,54	21,14	2,58	85,51	17,58	1,96	2,12	4,58	147,00	0,409
160×100×9	160	100	9	22,87	605,97	56,04	5,15	186,03	23,96	2,85	110,40	20,01	2,20	2,24	5,19	194,00	0,391
160×100×10	160	100	10	25,28	666,59	61,91	5,13	204,09	26,42	2,84	121,16	22,02	2,19	2,28	5,23	213,00	0,390
160×100×12	160	100	12	30,04	784,22	73,42	5,11	238,75	31,23	2,82	142,14	25,93	2,18	2,36	5,32	249,00	0,388
160×100×14	160	100	14	34,72	897,19	84,65	5,08	271,60	35,89	2,80	162,49	29,75	2,16	2,43	5,40	282,00	0,385
180×110×10	180	110	10	28,33	952,28	78,59	5,80	276,37	32,27	3,12	165,44	26,96	2,42	2,44	5,88	295,00	0,376
180×110×12	180	110	12	33,69	1122,56	93,33	5,77	324,09	38,20	3,10	194,28	31,83	2,40	2,52	5,97	348,00	0,374
200×125×11	200	125	11	34,87	1449,02	107,31	6,45	446,36	45,98	3,58	263,84	38,27	2,75	2,79	6,50	465,00	0,392
200×125×12	200	125	12	37,89	1568,19	116,51	6,43	481,93	49,85	3,57	285,04	41,45	2,74	2,83	6,54	503,00	0,392
200×125×14	200	125	14	43,87	1800,83	134,64	6,41	550,77	57,43	3,54	326,54	47,57	2,73	2,91	6,62	575,00	0,390
200×125×16	200	125	16	49,77	2026,08	152,41	6,38	616,66	64,83	3,52	366,99	53,56	2,72	2,99	6,71	643,00	0,388

**А.3. Міцність стрижневих профілів з вуглецевої сталі
звичайної якості
(за ДСТУ 4484:2005)**

Таблиця А.3

Марка сталі	Основні характеристики		
	межа плинності σ_T , МПа	коефіцієнт запасу міцності n_T	допустиме напруження $[\sigma] = \sigma_T / n_T$, МПа
Сталь Ст1пс	205	1,5	137
Сталь Ст1сп	205	1,5	137
Сталь Ст2кп	215	1,5	143
Сталь Ст2пс	225	1,5	150
Сталь Ст2сп	225	1,5	150
Сталь Ст3кп	235	1,5	157
Сталь Ст3пс	245	1,5	163
Сталь Ст3сп	245	1,5	163
Сталь Ст3Гпс	245	1,5	163
Сталь Ст4кп	255	1,5	170
Сталь Ст4пс	265	1,5	177
Сталь Ст4сп	265	1,5	177
Сталь Ст5пс	285	1,5	190
Сталь Ст5сп	285	1,5	190
Сталь Ст5Гпс	285	1,5	190
Сталь Ст6пс	315	1,5	210
Сталь Ст6сп	315	1,5	210

ДОДАТОК Б. Коефіцієнти μ та ϕ для стиснутих стрижнів

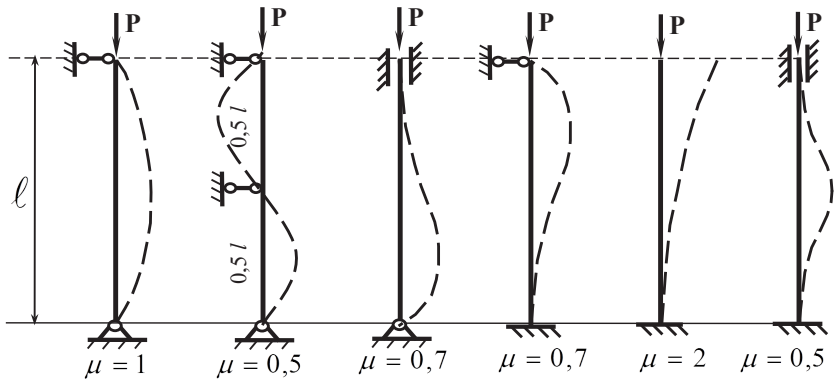


Рисунок Б.1 – Коефіцієнти μ за веденої довжини стрижня

Таблиця Б.1 – Коефіцієнти ϕ зменшення
основного допустимого напруження

Гнучкість стрижня λ	Значення ϕ для матеріалів стрижня				
	сталі Ст2, Ст3, Ст4	сталь Ст5	сталь СПК	чавун	дерево
1	2	3	4	5	6
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	–	0,25
120	0,45	0,36	0,30	–	0,22
130	0,40	0,33	0,26	–	0,18
140	0,36	0,29	0,23	–	0,16



Закінчення таблиці Б.1

1	2	3	4	5	6
150	0,32	0,26	0,21	–	0,14
160	0,29	0,24	0,19	–	0,12
170	0,26	0,21	0,17	–	0,11
180	0,23	0,19	0,15	–	0,10
190	0,21	0,17	0,14	–	0,09
200	0,19	0,16	0,13	–	0,08

ДОДАТОК В. Розрахунки на стійкість стиснутих стрижнів ферм

Таблиця В.1 – Однокутикові стрижні, приклад 1

Позначення стрижня	Розміри кутика	F , см ²	$i_{\min}$, см	ℓ , м	μ	$\lambda = \mu \times \ell / i_{\min}$	$\varphi(\lambda)$	$ N $, кН	$[\sigma] = N : F$, МПа	$[\sigma]$, МПа	$[\sigma]_{stab} = \varphi \times [\sigma]$, МПа	Підсумок (+ або -)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Крок 1												
2-3	35×35×5	3,28	0,68	1,414	1	208	<0,19	37,123	113,2	163	<31,0	-
3-4	35×35×5	3,28	0,68	1	1	147	0,332	52,5	160,1	163	54,1	-
Крок 2												
2-3	45×45×4	3,48	0,89	1,414	1	159	0,293	37,123	106,7	163	47,8	-
3-4	45×45×4	3,48	0,89	1	1	112	0,506	52,5	150,9	163	82,5	-
Крок 3												
2-3	40×40×5	3,79	0,78	1,414	1	181	0,228	37,123	97,9	163	37,2	-
3-4	40×40×5	3,79	0,78	1	1	128	0,410	52,5	138,5	163	66,8	-
Крок 4												
2-3	50×50×4	3,89	0,99	1,414	1	143	0,348	37,123	95,4	163	56,7	-
3-4	50×50×4	3,89	0,99	1	1	101	0,592	52,5	135,0	163	96,5	-
Крок 5												
2-3	45×45×5	4,29	0,88	1,414	1	161	0,287	37,123	86,5	163	46,8	-
3-4	45×45×5	4,29	0,88	1	1	114	0,492	52,5	122,4	163	80,2	-
Крок 6												
2-3	56×56×4	4,38	1,11	1,414	1	127	0,415	37,123	84,8	163	67,6	-
3-4	56×56×4	4,38	1,11	1	1	90	0,690	52,5	119,9	163	112,5	-

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Крок 7												
2-3	50×50×5	4,80	0,98	1,414	1	144	0,344	37,123	77,3	163	56,1	-
3-4	50×50×5	4,80	0,98	1	1	102	0,584	52,5	109,4	163	95,2	-
Крок 8												
2-3	63×63×4	4,96	1,25	1,414	1	113	0,499	37,123	74,8	163	81,3	+
3-4	63×63×4	4,96	1,25	1	1	80	0,750	52,5	105,8	163	122,3	+

Таблиця В.2 – Однокутикові стрижні, приклад 2

Позначення стрижня	Розміри кутика	F , см ²	$i_{\min}$, см	ℓ , м	μ	$\lambda = \mu \times \ell / i_{\min}$	$\varphi(\lambda)$	$ N $, кН	$[\sigma] = N : F$, МПа	$[\sigma]$, МПа	$[\sigma]_{stb} = \varphi \times [\sigma]$, МПа	Підсумок (+ або -)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Крок 1												
2-3	56×36×4	3,58	0,78	1,414	1	181	0,228	37,123	103,7	163	37,2	-
3-4	56×36×4	3,58	0,78	1	1	128	0,410	52,5	146,6	163	66,8	-
Крок 2												
2-3	63×40×4	4,04	0,87	1,414	1	163	0,281	37,123	91,9	163	45,8	-
3-4	63×40×4	4,04	0,87	1	1	115	0,485	52,5	130,0	163	79,1	-
Крок 3												
2-3	56×36×5	4,41	0,78	1,414	1	181	0,228	37,123	84,2	163	37,2	-
3-4	56×36×5	4,41	0,78	1	1	128	0,410	52,5	119,0	163	66,8	-

Закінчення таблиці В.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Крок 4												
2-3	63×40×5	4,98	0,86	1,414	1	164	0,278	37,123	74,5	163	45,3	-
3-4	63×40×5	4,98	0,86	1	1	116	0,478	52,5	105,4	163	77,9	-
Крок 5												
2-3	70×45×5	5,59	0,98	1,414	1	144	0,344	37,123	66,4	163	56,1	-
3-4	70×45×5	5,59	0,98	1	1	102	0,584	52,5	93,9	163	95,2	+
Крок 6												
2-3	63×40×6	5,90	0,86	1,414	1	164	0,278	37,123	62,9	163	45,3	-
3-4	63×40×6	5,90	0,86	1	1	116	0,478	52,5	89,0	163	77,9	-
Крок 7												
2-3	75×50×5	6,11	1,09	1,414	1	130	0,400	37,123	60,8	163	65,2	+
3-4	75×50×5	6,11	1,09	1	1	92	0,672	52,5	85,9	163	109,5	+

Таблиця В.3 – Двокутикові стрижні, приклад 3

Позна- чення стрижня	Розміри кутиків	F^* , см ²	$\bar{r}_{\min}^*$, см	ℓ , м	μ	$\lambda = \mu \times \ell / i_{\min}$	$\varphi(\lambda)$	$ N $, кН	$[\sigma] = N : F$, МПа	$[\sigma]$, МПа	$[\sigma]_{\text{сб}} = \varphi \times [\sigma]$, МПа	Підсумок (+ або -)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Крок 1												
2-3	28×28×3	3,24	0,85	1,414	1	166	0,272	37,123	114,6	163	44,3	-
3-4	28×28×3	3,24	0,85	1	1	118	0,464	52,5	162,0	163	74,2	-



Закінчення таблиці В.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Крок 2												
2-3	30×30×3	3,48	0,91	1,414	1	155	0,305	37,123	106,7	163	49,7	-
3-4	30×30×3	3,48	0,91	1	1	110	0,520	52,5	150,9	163	84,8	-
Крок 3												
2-3	32×32×3	3,72	0,97	1,414	1	146	0,336	37,123	99,8	163	54,8	-
3-4	32×32×3	3,72	0,97	1	1	103	0,576	52,5	141,1	163	93,9	-
Крок 4												
2-3	35×35×3	4,08	1,07	1,414	1	132	0,392	37,123	91,0	163	63,9	-
3-4	35×35×3	4,08	1,07	1	1	93	0,663	52,5	128,7	163	108,1	-
Крок 5												
2-3	30×30×4	4,54	0,90	1,414	1	157	0,299	37,123	81,8	163	48,7	-
3-4	30×30×4	4,54	0,90	1	1	111	0,513	52,5	115,6	163	83,6	-
Крок 6												
2-3	40×40×3	4,70	1,23	1,414	1	115	0,485	37,123	79,0	163	79,1	+
3-4	40×40×3	4,70	1,23	1	1	81	0,744	52,5	111,7	163	121,3	+

Таблиця В.4 – Двокутикові стрижні, приклад 4

Позначення стрижня	Розміри кутиків	F^* , см ²	i^*_{min} , см	ℓ , м	μ	$\lambda = \mu \times \ell / i^*_{min}$	$\varphi(\lambda)$	$ N $, кН	$[\sigma] = N \cdot F$, МПа	$[\sigma]_{sb} = \varphi \times [\sigma]$, МПа	Підсумок (+ або -)
Крок 1											
2-3	40×25×3	3,78	1,02	1,414	1	139	0,364	37,123	98,2	163	59,3
3-4	40×25×3	3,78	1,02	1	1	98	0,618	52,5	138,9	163	100,7
Крок 2											
2-3	32×20×4	3,88	0,91	1,414	1	155	0,305	37,123	95,7	163	49,7
3-4	32×20×4	3,88	0,91	1	1	110	0,520	52,5	135,3	163	84,8
Крок 3											
2-3	45×28×3	4,28	1,11	1,414	1	127	0,415	37,123	86,7	163	67,6
3-4	45×28×3	4,28	1,11	1	1	90	0,690	52,5	122,7	163	112,5
Крок 4											
2-3	50×32×3	4,84	1,26	1,414	1	112	0,506	37,123	76,7	163	82,5
3-4	50×32×3	4,84	1,26	1	1	79	0,756	52,5	108,5	163	123,2
											+
											+

Таблиця В.5 – Однокутикові стрижні, приклад 5

Позна- чення стрижня	Розміри кутика	F , см ²	$i_{\min}$, см	ℓ , м	μ	$\lambda = \mu \times \ell / i_{\min}$	$\varphi(\lambda)$	$ N $, кН	$[\sigma] = N : F$, МПа	$[\sigma]$, МПа	$[\sigma]_{\text{ст}} = \varphi \times [\sigma]$, МПа	Підсумок (+ або -)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Крок 1												
2-3	25×25×3	1,43	0,49	1,414	1	289	<0,19	14,142	98,9	163	<31,0	-
3-4	25×25×3	1,43	0,49	1	1	204	<0,19	20	139,9	163	<31,0	-
Крок 2												
2-3	20×20×4	1,46	0,38	1,414	1	372	<0,19	14,142	96,9	163	<31,0	-
3-4	20×20×4	1,46	0,38	1	1	263	<0,19	20	137,0	163	<31,0	-
Крок 3												
2-3	28×28×3	1,62	0,55	1,414	1	257	<0,19	14,142	87,3	163	<31,0	-
3-4	28×28×3	1,62	0,55	1	1	182	0,226	20	123,5	163	36,8	-
Крок 4												
2-3	25×25×4	1,86	0,48	1,414	1	295	<0,19	14,142	76,0	163	<31,0	-
3-4	25×25×4	1,86	0,48	1	1	208	<0,19	20	107,5	163	<31,0	-
Крок 5												
2-3	35×35×3	2,04	0,69	1,414	1	205	<0,19	14,142	69,3	163	<31,0	-
3-4	35×35×3	2,04	0,69	1	1	145	0,340	20	98,0	163	55,4	-
Крок 6												
2-3	30×30×4	2,27	0,58	1,414	1	244	<0,19	14,142	62,3	163	<31,0	-
3-4	30×30×4	2,27	0,58	1	1	172	0,254	20	88,1	163	41,4	-
Крок 7												
2-3	40×40×3	2,35	0,79	1,414	1	179	0,233	14,142	60,2	163	38,0	-

Закінчення таблиці В.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3-4	40×40×3	2,35	0,79	1	1	127	0,415	20	85,1	163	67,6	-
Крок 8												
2-3	32×32×4	2,43	0,62	1,414	1	228	<0,19	14,142	58,2	163	<31,0	-
3-4	32×32×4	2,43	0,62	1	1	161	0,287	20	82,3	163	46,8	-
Крок 9												
2-3	45×45×3	2,65	0,89	1,414	1	159	0,293	14,142	53,4	163	47,8	-
3-4	45×45×3	2,65	0,89	1	1	112	0,506	20	75,5	163	82,5	+
Крок 10												
2-3	35×35×4	2,67	0,68	1,414	1	208	<0,19	14,142	53,0	163	<31,0	-
3-4	35×35×4	2,67	0,68	1	1	147	0,332	20	74,9	163	54,1	-
Крок 11												
2-3	50×50×3	2,96	1,0	1,414	1	141	0,356	14,142	47,8	163	58,0	+
3-4	50×50×3	2,96	1,0	1	1	100	0,600	20	67,6	163	97,8	+



Таблиця В.6 – Однокутиковий стрижень, приклад 6

Позна- чення стрижня	Розміри кутика	F , см ²	$i_{\min}$, см	ℓ , м	μ	$\lambda = \mu \times \ell / i_{\min}$	$\varphi(\lambda)$	$ N $, кН	$[\sigma] = N : F$, МПа	$[\sigma]$, МПа	$[\sigma]_{\text{stb}} = \varphi \times [\sigma]$, МПа	Підсумок (+ або -)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Крок 1												
1-6	32×20×3	1,49	0,43	1,414	1	329	<0,19	21,213	142,3	163	<31,0	-
Крок 2												
1-6	40×25×3	1,89	0,54	1,414	1	262	<0,19	21,213	112,2	163	<31,0	-
Крок 3												
1-6	32×20×4	1,94	0,43	1,414	1	329	<0,19	21,213	109,3	163	<31,0	-
Крок 4												
1-6	45×28×3	2,14	0,61	1,414	1	232	<0,19	21,213	99,1	163	<31,0	-
Крок 5												
1-6	50×32×3	2,42	0,70	1,414	1	202	<0,19	21,213	87,7	163	<31,0	-
Крок 6												
1-6	40×25×4	2,47	0,54	1,414	1	262	<0,19	21,213	85,9	163	<31,0	-
Крок 7												
1-6	45×28×4	2,80	0,60	1,414	1	236	<0,19	21,213	75,8	163	<31,0	-
Крок 8												
1-6	40×25×5	3,03	0,53	1,414	1	267	<0,19	21,213	70,0	163	<31,0	-
Крок 9												
1-6	50×32×4	3,17	0,69	1,414	1	205	<0,19	21,213	66,9	163	<31,0	-
Крок 10												
1-6	56×36×4	3,58	0,78	1,414	1	181	0,228	21,213	59,3	163	37,2	-

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Крок 11												
1-6	63×40×4	4,04	0,87	1,414	1	163	0,278	21,213	52,5	163	45,3	-
Крок 12												
1-6	56×36×5	4,41	0,78	1,414	1	181	0,228	21,213	48,1	163	37,2	-
Крок 13												
1-6	63×40×5	4,98	0,86	1,414	1	164	0,278	21,213	42,6	163	45,3	+

Таблиця В.7 – Однокутикові стрижні, приклад 7 (попередній розрахунок)

Позна- чення стрижня	Розміри кутика	$F, \text{см}^2$	$i_{\min}, \text{см}$	$\ell, \text{м}$	μ	$\lambda = \mu \times \ell / i_{\min}$	$\varphi(\lambda)$	$ N , \text{кН}$	$[\sigma] = N /F, \text{МПа}$	$[\sigma], \text{МПа}$	$[\sigma]_{\text{доп}} = \varphi \times [\sigma], \text{МПа}$	Підсумок (+ або -)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Крок 1												
2-3	20×20×3	1,13	0,39	1,414	1	363	<0,19	6,937	61,4	163	<31,0	-
3-4	20×20×3	1,13	0,39	1	1	256	<0,19	9,810	86,8	163	<31,0	-
Крок 2												
2-3	25×25×3	1,43	0,49	1,414	1	289	<0,19	6,937	48,5	163	<31,0	-
3-4	25×25×3	1,43	0,49	1	1	204	<0,19	9,810	68,6	163	<31,0	-
Крок 3												
2-3	20×20×4	1,46	0,38	1,414	1	372	<0,19	6,937	47,5	163	<31,0	-
3-4	20×20×4	1,46	0,38	1	1	263	<0,19	9,810	67,2	163	<31,0	-

Закінчення таблиці В.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Крок 4												
2-3	28×28×3	1,62	0,55	1,414	1	257	<0,19	6,937	42,8	163	<31,0	-
3-4	28×28×3	1,62	0,55	1	1	182	0,226	9,810	60,6	163	36,8	-
Крок 5												
2-3	30×30×3	1,74	0,59	1,414	1	240	<0,19	6,937	39,9	163	<31,0	-
3-4	30×30×3	1,74	0,59	1	1	169	0,263	9,810	56,4	163	42,9	-
Крок 6												
2-3	32×32×3	1,86	0,63	1,414	1	224	<0,19	6,937	37,3	163	<31,0	-
3-4	32×32×3	1,86	0,63	1	1	159	0,293	9,810	52,7	163	47,8	-
Крок 7												
2-3	35×35×3	2,04	0,69	1,414	1	205	<0,19	6,937	34,0	163	<31,0	-
3-4	35×35×3	2,04	0,69	1	1	145	0,340	9,810	48,1	163	55,4	+
Крок 8												
2-3	30×30×4	2,27	0,58	1,414	1	244	<0,19	6,937	30,6	163	<31,0	-
3-4	30×30×4	2,27	0,58	1	1	172	0,254	9,810	43,2	163	41,4	-
Крок 9												
2-3	40×40×3	2,35	0,79	1,414	1	179	0,233	6,937	29,5	163	38,0	+
3-4	40×40×3	2,35	0,79	1	1	127	0,415	9,810	41,7	163	67,6	+

Таблиця В.8 – Однокутикові стрижні, приклад 7 (основний розрахунок)

Позна-чення стрижня	Розміри кутика	F , см ²	$i_{\min}$, см	ℓ , м	μ	$\lambda = \mu \times \ell / i_{\min}$	$\varphi(\lambda)$	$ N_{\min} $, кН	$[\sigma]_{\min} = N_{\min} : F$, МПа	$[\sigma]$, МПа	$[\sigma]_{std} = \varphi \times [\sigma]$, МПа	Під-сумок (+ або -)
Крок 1												
3-4	75×75×5	7,39	1,49	1	1	67	0,825	119,831	162,2	163	134,5	-
2-3	75×75×5	7,39	1,49	1,414	1	95	0,645	84,731	114,7	163	105,1	-
1-5	75×75×5	7,39	1,49	2	1	134	0,384	55,242	74,8	163	62,6	-
Крок 2												
3-4	70×70×6	8,15	1,38	1	1	72	0,798	121,218	148,7	163	130,0	-
2-3	70×70×6	8,15	1,38	1,414	1	102	0,584	85,707	105,2	163	95,2	-
1-5	70×70×6	8,15	1,38	2	1	145	0,340	52,626	64,6	163	55,4	-
Крок 3												
3-4	80×80×5,5	8,63	1,59	1	1	63	0,845	123,411	143,0	163	137,7	-
2-3	80×80×5,5	8,63	1,59	1,414	1	89	0,696	87,263	101,1	163	113,4	+
1-5	80×80×5,5	8,63	1,59	2	1	126	0,420	55,765	64,6	163	68,5	+
Крок 4												
3-4	75×75×6	8,78	1,48	1	1	68	0,820	122,485	139,5	163	133,7	-
2-3	75×75×6	8,78	1,48	1,414	1	96	0,636	86,607	98,6	163	103,7	+
1-5	75×75×6	8,78	1,48	2	1	135	0,380	55,513	63,2	163	61,9	-
Крок 5												
3-4	80×80×6	9,38	1,58	1	1	63	0,845	120,281	128,2	163	137,7	+
2-3	80×80×6	9,38	1,58	1,414	1	89	0,696	85,044	90,7	163	113,4	+
1-5	80×80×6	9,38	1,58	2	1	127	0,415	54,539	58,1	163	67,6	+

Таблиця В.9 – Однокутикові стрижні, приклад 8 (попередній розрахунок)

Позначення стрижня	Розміри кутика	F , см ²	$i_{\min}$, см	ℓ , м	μ	$\lambda = \mu \times \ell / i_{\min}$	$\varphi(\lambda)$	$ N $, кН	$[\sigma] = N : F$, МПа	$[\sigma]$, МПа	$[\sigma]_{\text{сб}} = \varphi \times [\sigma]$, МПа	Підсумок (+ або -)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Крок 1												
2-3	20×20×3	1,13	0,39	1,414	1	363	<0,19	3,469	30,7	163	<31,0	-
3-4	20×20×3	1,13	0,39	1	1	256	<0,19	4,905	43,4	163	<31,0	-
Крок 2												
2-3	25×25×3	1,43	0,49	1,414	1	289	<0,19	3,469	24,3	163	<31,0	-
3-4	25×25×3	1,43	0,49	1	1	204	<0,19	4,905	34,3	163	<31,0	-
Крок 3												
2-3	20×20×4	1,46	0,38	1,414	1	372	<0,19	3,469	23,8	163	<31,0	-
3-4	20×20×4	1,46	0,38	1	1	263	<0,19	4,905	33,6	163	<31,0	-
Крок 4												
2-3	28×28×3	1,62	0,55	1,414	1	257	<0,19	3,469	21,4	163	<31,0	-
3-4	28×28×3	1,62	0,55	1	1	182	0,226	4,905	30,3	163	36,8	+
Крок 5												
2-3	30×30×3	1,74	0,59	1,414	1	239	<0,19	3,469	19,9	163	<31,0	-
3-4	30×30×3	1,74	0,59	1	1	169	0,263	4,905	28,2	163	42,9	+
Крок 6												
2-3	32×32×3	1,86	0,63	1,414	1	224	<0,19	3,469	18,7	163	<31,0	-
3-4	32×32×3	1,86	0,63	1	1	159	0,293	4,905	26,4	163	47,8	+
Крок 7												
2-3	35×35×3	2,04	0,69	1,414	1	204	<0,19	3,469	17,0	163	<31,0	-

Закінчення таблиці В.9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3-4	35×35×3	2,04	0,69	1	1	145	0,340	4,905	24,0	163	55,4	+
Крок 8												
2-3	30×30×4	2,27	0,58	1,414	1	244	<0,19	3,469	15,3	163	<31,0	-
3-4	30×30×4	2,27	0,58	1	1	172	0,254	4,905	21,6	163	41,4	+
Крок 9												
2-3	40×40×3	2,35	0,79	1,414	1	179	0,233	3,469	14,8	163	38,0	+
3-4	40×40×3	2,35	0,79	1	1	127	0,415	4,905	20,9	163	67,6	+

Таблиця В.10 – Однокутикові стрижні, приклад 8 (основний розрахунок)

Позна- чення стрижня	Розміри кутика	$F, \text{см}^2$	$i_{\min}, \text{см}$	$\ell, \text{м}$	μ	$\lambda = \mu \times \ell / i_{\min}$	$\varphi(\lambda)$	$ N_{\min} , \text{кН}$	$[\sigma_{\min}] = N_{\min} : F, \text{МПа}$	$[\sigma], \text{МПа}$	$[\sigma]_{\text{сб}} = \varphi \times [\sigma], \text{МПа}$	Підсумок (+ або -)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Крок 1												
2-3	40×40×5	3,79	0,78	1,414	1	181	0,228	41,719	110,1	163	37,2	-
3-4	40×40×5	3,79	0,78	1	1	128	0,410	59,001	155,7	163	66,8	-
1-5	40×40×5	3,79	0,78	2	1	256	<0,19	27,404	72,3	163	<31,0	-
Крок 2												
2-3	50×50×4	3,89	0,99	1,414	1	143	0,348	43,123	110,9	163	56,7	-
3-4	50×50×4	3,89	0,99	1	1	101	0,592	60,986	156,8	163	96,5	-
1-5	50×50×4	3,89	0,99	2	1	202	<0,19	26,594	68,4	163	<31,0	-

Продовження таблиці В.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Крок 3												
2-3	45×45×5	4,29	0,88	1,414	1	161	0,287	43,540	101,5	163	46,8	-
3-4	45×45×5	4,29	0,88	1	1	114	0,492	61,577	143,5	163	80,2	-
1-5	45×45×5	4,29	0,88	2	1	227	<0,19	27,848	64,9	163	<31,0	-
Крок 4												
2-3	56×56×4	4,38	1,11	1,414	1	127	0,415	43,700	99,8	163	67,6	-
3-4	56×56×4	4,38	1,11	1	1	90	0,690	61,802	141,1	163	112,5	-
1-5	56×56×4	4,38	1,11	2	1	180	0,230	28,209	64,4	163	37,5	-
Крок 5												
2-3	50×50×5	4,80	0,98	1,414	1	144	0,344	42,202	87,9	163	56,1	-
3-4	50×50×5	4,80	0,98	1	1	102	0,584	59,689	124,4	163	95,2	-
1-5	50×50×5	4,80	0,98	2	1	204	<0,19	26,642	55,5	163	<31,0	-
Крок 6												
2-3	63×63×4	4,96	1,25	1,414	1	113	0,499	42,094	84,9	163	81,3	-
3-4	63×63×4	4,96	1,25	1	1	80	0,750	59,531	120,0	163	122,3	+
1-5	63×63×4	4,96	1,25	2	1	160	0,290	25,861	52,1	163	47,3	-
Крок 7												
2-3	56×56×5	5,41	1,10	1,414	1	129	0,405	43,091	79,7	163	66,0	-
3-4	56×56×5	5,41	1,10	1	1	91	0,681	60,940	112,6	163	111,0	-
1-5	56×56×5	5,41	1,10	2	1	182	0,226	25,385	46,9	163	36,8	-
Крок 8												
2-3	50×50×6	5,69	0,98	1,414	1	144	0,344	43,167	75,9	163	56,1	-

Закінчення таблиці В.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
3-4	50×50×6	5,69	0,98	1	1	102	0,584	61,048	107,3	163	95,2	-
1-5	50×50×6	5,69	0,98	2	1	204	<0,19	26,071	45,8	163	<31,0	-
Крок 9												
2-3	63×63×5	6,13	1,25	1,414	1	113	0,499	42,914	69,7	163	81,3	+
3-4	63×63×5	6,13	1,25	1	1	80	0,750	60,691	99,0	163	122,3	+
1-5	63×63×5	6,13	1,25	2	1	160	0,290	26,909	43,9	163	47,3	+



ДОДАТОК Г. Опорні реакції та зусилля в стрижнях ферм з рухомим навантаженням

Таблиця Г.1 – Приклад 5, $P_m = 20$ кН

Координати рухомої сили $z(P_m)$, м	Значення опорних реакцій, кН			Значення зусиль у стрижнях, кН								
	R_1^y	R_1^z	R_2	N_{1-5}	N_{1-6}	N_{2-3}	N_{2-5}	N_{3-4}	N_{3-5}	N_{4-5}	N_{4-6}	N_{5-6}
0	-20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-15	0	-5	5	-7,071	-7,071	5	-10	7,071	0	-10	7,071
2	-10	0	-10	10	-14,142	-14,142	10	-20	14,142	0	-20	14,142
3	-5	0	-15	5	-7,071	-7,071	5	-10	7,071	0	-10	7,071
4	0	0	-20	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблиця Г.2 – Приклад 6, $P_m = 20$ кН

Координати рухомої сили $z(P_m)$, м	Значення опорних реакцій, кН			Значення зусиль у стрижнях, кН								
	R_1^y	R_1^z	R_2	N_{1-5}	N_{1-6}	N_{2-3}	N_{2-5}	N_{3-4}	N_{3-5}	N_{4-5}	N_{4-6}	N_{5-6}
1	-15	0	-5	15	-21,213	-7,071	5	-10	7,071	0	-10	-7,071
1,5	-12,5	0	-7,5	12,5	-17,678	-10,607	7,5	-15	10,607	-10	-15	3,536
2	-10	0	-10	10	-14,142	-14,142	10	-20	14,142	-20	-20	14,142
2,5	-7,5	0	-12,5	7,5	-10,607	-17,678	12,5	-15	3,536	-10	-15	10,607
3	-5	0	-15	5	-7,071	-21,213	15	-10	-7,071	0	-10	7,071

ДОДАТОК Д. Закони руху центрів мас
рухомих ланок механізму
(Приклад 7)

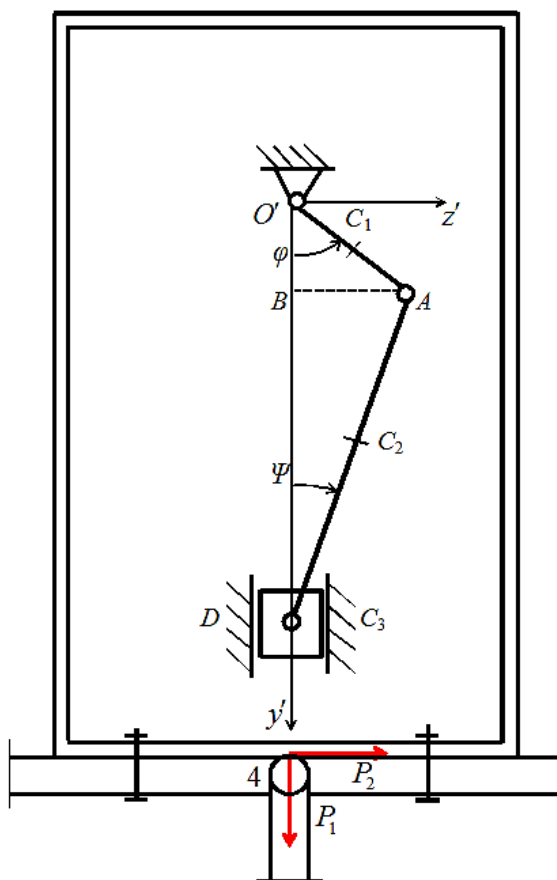


Рисунок Д.1

Кривошип:

$$y'(C_1) = \frac{O'A}{2} \times \cos \varphi = \frac{\ell_1}{2} \times \cos \omega \times t; \quad (Д.1)$$

$$z'(C_1) = \frac{O'A}{2} \times \sin \varphi = \frac{\ell_1}{2} \times \sin \omega \times t. \quad (Д.2)$$

Шатун:

$$\left\{ \begin{aligned} y'(C_2) &= O'A \times \cos \varphi + \frac{AD}{2} \times \cos \psi = O'A \times \cos \phi + \\ &+ \frac{AD}{2} \times \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \ell_1 \times \cos \varphi + \frac{\ell_2}{2} \times \sqrt{1 - \left(\frac{AB}{BD}\right)^2} = \\ &= \ell_1 \times \cos \varphi + \frac{\ell_2}{2} \times \sqrt{1 - \left(\frac{\ell_1 \times \sin \varphi}{\ell_2}\right)^2} = \ell_1 \times \cos \omega \times t + \\ &+ \frac{\ell_2}{2} \times \sqrt{1 - \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2} \times \sin^2 \omega \times t} = \ell_1 \times \cos \omega \times t + \frac{\ell_2}{2} \times \\ &\times \left(1 - \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2} \times \sin^2 \omega \times t\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right. \quad (Д.3)$$

$$z'(C_2) = \frac{\ell_2}{2} \times \sin \psi = \frac{AB}{2} = \frac{\ell_1 \times \sin \varphi}{2} = \frac{\ell_1}{2} \times \sin \omega \times t. \quad (Д.4)$$

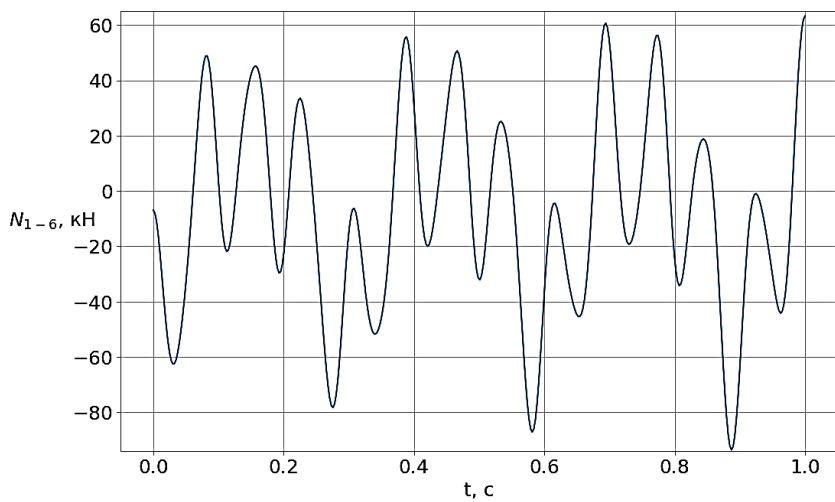
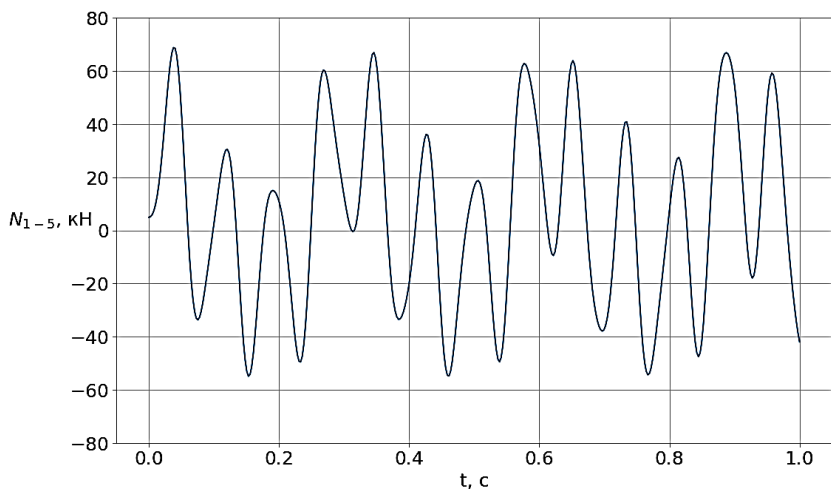
Повзун:

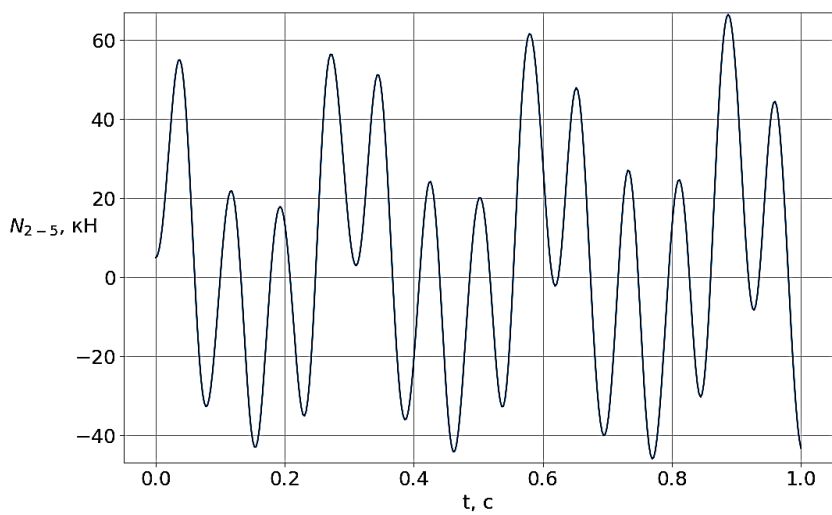
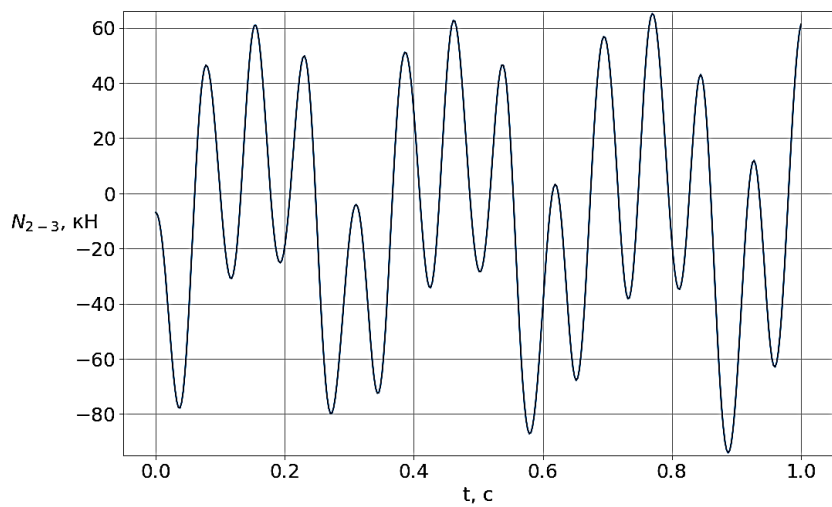
$$\left\{ \begin{aligned} y'(C_3) &= O'A \times \cos \varphi + AD \times \cos \psi = \dots = \\ &= \ell_1 \times \cos \omega \times t + \ell_2 \times \left(1 - \frac{\ell_1^2}{\ell_2^2} \times \sin^2 \omega \times t\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right. \quad (Д.5)$$

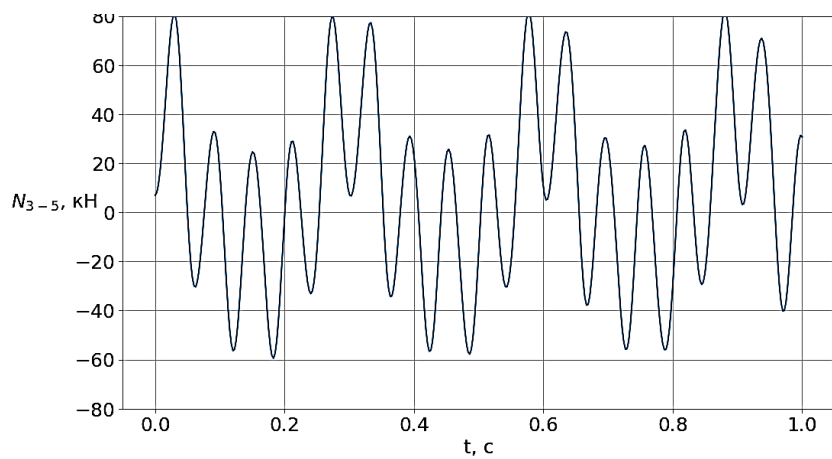
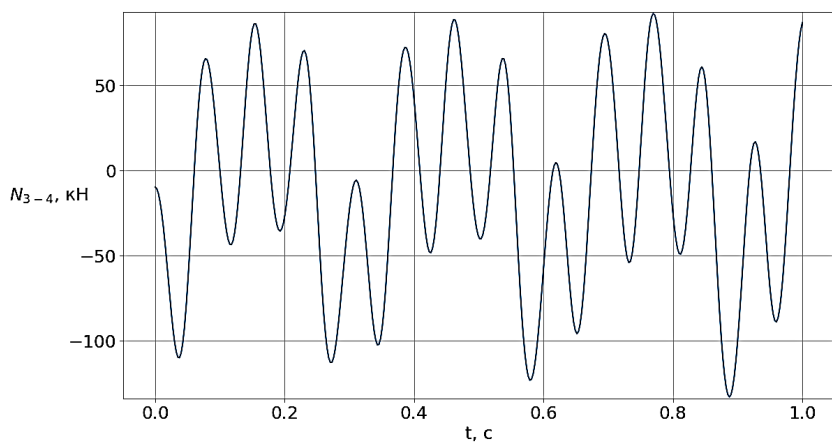
$$z'(C_3) = 0. \quad (Д.6)$$

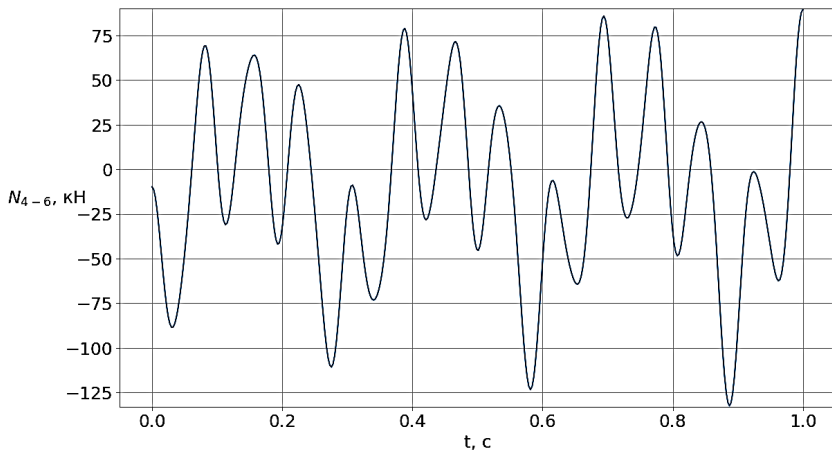
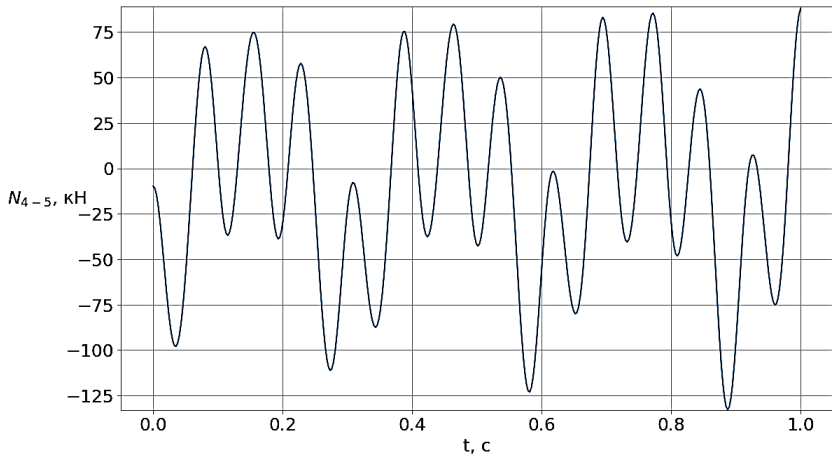


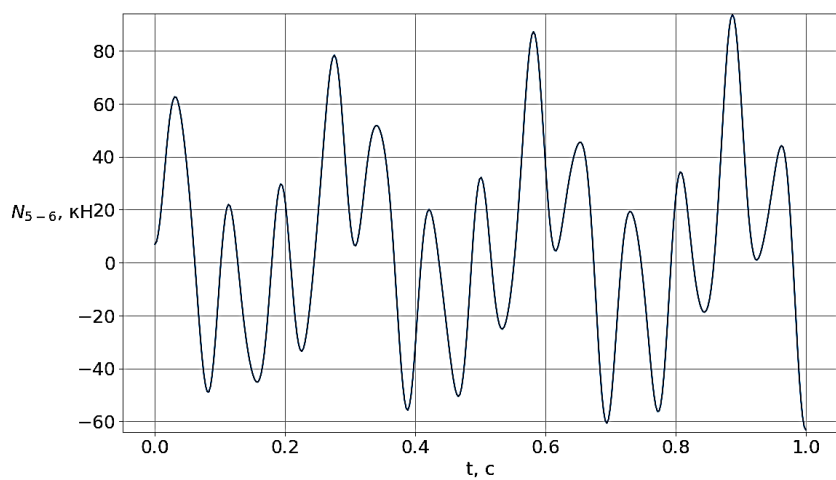
ДОДАТОК Е. Графіки зусиль у стрижнях коливної ферми (Приклад 7, крок 1)











Навчальне видання

**КОСТИКОВ Олександр Анатолійович
ХОЛОДНЯК Юрій Сергійович
САГАЙДА Павло Іванович
КАСЬЯНЮК Олександр Сергійович**

АЛГОРИТМИ АВТОМАТИЗОВАНИХ РОЗРАХУНКІВ ПЛОСКИХ СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ ФЕРМ

Навчальний посібник

Дизайн обкладинки *В. Савельєва*

Технічний редактор *О. Гринюк*

Верстка *О. Данильченко*



Підписано до друку 03.06.2026 р.
Формат 60х84/16. Папір офсетний.
Цифровий друк. Гарнітура Cambria.
Ум. друк. арк. 6,98. Наклад 300.
Замовлення № 0626-025.

Видавництво та друк: Олді+
65101, м. Одеса, вул. Інглезі, 6/1
тел.: +38 (095) 559-45-45, e-mail: office@oldiplus.ua
Свідоцтво ДК № 7642 від 29.07.2022 р.
Замовлення книг:
тел.: +38 (050) 915-34-54, +38 (068) 517-50-33
e-mail: book@oldiplus.ua

