


**ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»**

**СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ РОБОТОТЕХНІКИ
ТА МЕХАТРОНІКИ**

**курс лекцій з навчальної дисципліни
«Системний аналіз робототехніки
та мехатроніки»**

Запоріжжя 2024

mip metinvest
polytechnic



УДК 681.5(072)
Си 34

Рекомендовано Науково-методичною радою
ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ
ПОЛІТЕХНІКА»
(протокол №8 від 12.07.2024 р)

Укладач

Цимбал Б. М., доктор наук з державного управління, доцент.

Рецензенти:

Погребняк А. – доктор технічних наук, доцент, професор кафедри туризму та готельно-ресторанної справи Університету митної справи та фінансів.

Си
34

Системний аналіз робототехніки та мехатроніки : курс лекцій з дисципліни «Системний аналіз робототехніки та мехатроніки» / уклад. Б. М. Цимбал. Запоріжжя : ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА», 2024. 163 с.

В курсі лекцій розглянуто питання визначення та термінологія робототехніки, принципи робототехніки, методи побудови робототехнічних пристроїв та систем, а також їх використання, аналіз схем вантажопотоків та об'єктів транспортування в логістичних системах виробництва, класифікація, огляд та аналіз сучасних пристроїв для перевантаження об'єктів транспортування, перспективи розвитку робототехнічних систем. На конкретних прикладах розглянуто питання розрахунків елементів робототехнічних пристроїв. Було розглянуто та системно проаналізовано сучасну робототехніку, а також її планування та керування. Розглядається аналіз та синтез простих та складних механічних систем роботів та маніпуляторів.

УДК 681.5(072)

© ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА», 2024

ЗМІСТ

	стор.
ВСТУП	5
ТЕМА 1. ОСНОВИ СТРУКТУРНОГО АНАЛІЗУ І СИНТЕЗУ МЕХА- НИЧНИХ СИСТЕМ ПРОМИСЛОВИХ РОБОТІВ ТА МАНІПУЛЯТО- РІВ	7
1.1 Просторові конфігурації.....	7
1.2 Аналіз ступенів свободи твердого тіла	8
1.3 Основи структурного аналізу і синтезу механічних систем промислових роботів та маніпуляторів	11
Контрольні запитання до теми 1.....	16
Використана література.....	17
ТЕМА 2. ОСНОВИ КІНЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ МЕХАНІЧНИХ СИ- СТЕМ ПРОМИСЛОВИХ РОБОТІВ ТА МАНІПУЛЯТО- РІВ	18
2.1 Визначення положення ланок механізму і траєкторій окремих точок ланок	18
2.2 Визначення кутових швидкостей і прискорень ланок механі- зму і лінійних швидкостей та прискорень окремих точок шля- хом побудови планів	20
2.3 Аналіз рухів твердого тіла	25
Контрольні запитання до теми 2.....	39
Використана література.....	40
ТЕМА 3. ОСНОВИ СИЛОВОГО АНАЛІЗУ МЕХАНІЧНИХ СИС- ТЕМ	41
3.1 Сили інерції ланок промислових роботів та маніпуляторів, ви- значення динамічних сил за величиною та напрямком.....	41
3.2 Визначення реакцій у механізмах з нижчими кінематичними парами.....	46
3.3 Практичні вправи з передової кінематики.....	51
Контрольні запитання до теми 3.....	62
Використана література.....	63
ТЕМА 4. ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РЕГУЛЮВАННЯ ХОДУ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ПРОМИСЛОВИХ РОБОТІВ ТА МАНІПУ- ЛЯТОРІВ	64
4.1 Визначення моменту інерції маховика.....	64
4.2 Метричний синтез маховика.....	67
Контрольні запитання до теми 4.....	70
Використана література.....	71
ТЕМА 5. ОСНОВИ АНАЛІЗУ ТА СИНТЕЗУ ПРОСТИХ ТА СКЛАД- НИХ ЕВОЛЬВЕНТНИХ ЗУБЧАСТИХ ПЕРЕДАЧ ПРИВОДУ МЕХА- НИЧНИХ СИСТЕМ ПРОМИСЛОВИХ РОБОТІВ ТА МАНІПУЛЯТО- РІВ	72
5.1 Визначення розмірів нульового, рівнозміщеного та нерівно зміщеного евольветного зачеплення.....	72



5.2	Послідовність розрахунку зубчастого зачеплення при вписуванні в задану міжосьову відстань.....	78
5.3	Практичні вправи з кінематики замкнених ланцюгів.....	82
	Контрольні запитання до теми 5.....	85
	Використана література.....	86
	ТЕМА 6. ОСНОВИ АНАЛІЗУ ТА СИНТЕЗУ КУЛАЧКОВИХ МЕХАНІЗМІВ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ПРОМИСЛОВИХ РОБОТІВ ТА МАНІПУЛЯТОРІВ.....	87
6.1	Динаміка відкритих ланцюгів.....	87
6.2	Основні поняття та визначення.....	96
6.3	Фазові кути кулачка.....	99
6.4	Кути тиску та передачі руху.....	100
	Контрольні запитання до теми 6.....	101
	Використана література.....	102
	ТЕМА 7. ГЕНЕРАЦІЯ ТРАЕКТОРІЇ РОБОТІВ.....	103
7.1	Основні визначення та поняття про генерацію траєкторії роботів.....	103
7.2	Траєкторії точка-точка.....	104
7.3	Поліноміальні траєкторії проміжних точок.....	111
7.4	Масштабування оптимального часу.....	113
	Контрольні запитання до теми 7.....	121
	Використана література.....	122
	ТЕМА 8. ПЛАНУВАННЯ РУХУ РОБОТІВ.....	123
8.1	Огляд планування руху.....	123
8.2	Фундаменти.....	127
8.3	Повні планувальники шляху.....	136
8.4	Методи сітки.....	137
8.5	Методи відбору проб.....	146
8.6	Віртуальні потенційні поля.....	153
8.7	Нелінійна оптимізація.....	159
8.8	Згладжування.....	161
	Контрольні запитання до теми 8.....	161
	Використана література.....	162



ВСТУП

Вивчення курсу лекцій "Системний аналіз об'єктів мехатронних систем" є надзвичайно актуальним і важливим аспектом інженірингової освіти в сучасному світі. Цей курс лекцій не лише віддзеркалює технологічний прогрес у галузі гірництва та металургії, але й розвиває теоретичні та практичні навички, необхідні для вирішення викликів цієї індустрії. Сприяє формуванню у студентів навичок системного аналізу як основи сучасної інженерної методології. Також формує здатність використовувати спеціальні наукові методи, що дозволяють отримати кількісні і якісні оцінки варіантів розв'язування інженерних задач у галузі робототехніки та мехатроніки.

В курсі лекцій вивчаються основні поняття та методології системного аналізу складних взаємопов'язаних об'єктів, які функціонують у відповідності до множин суперечливих критеріїв і цілей за наявності суттєвих ризиків та невизначеностей зовнішніх і внутрішніх чинників. В рамках курсу лекцій розглядаються методи системного аналізу, зв'язок системного аналізу з моделюванням, застосування методологій системного аналізу при створенні робототехнічних і мехатронних систем, методи отримання інформації від експертів, методології передбачення та сценарного аналізу в задачах прийняття рішень і стратегічного планування.

В курсі лекцій розглянуто питання визначення та термінологія робототехніки, принципи робототехніки, методи побудови робототехнічних пристроїв та систем, а також їх використання, аналіз схем вантажопотоків та об'єктів транспортування в логістичних системах виробництва, класифікація, огляд та аналіз сучасних пристроїв для перевантаження об'єктів транспортування, перспективи розвитку робототехнічних систем. На конкретних прикладах розглянуто питання розрахунків елементів робототехнічних пристроїв. Було розглянуто та системно проаналізовано сучасну робототехніку, а також її планування та керування. Розглядається аналіз та синтез простих та складних механічних систем роботів та маніпуляторів.

Отримані знання дають студентам можливість сформулювати системне мислення, цілісний підхід до вирішення складних задач, використовувати набуті знання і навички для виконання кваліфікаційної роботи.

В якості основних результатів навчання очікуються:

- Здійснювати інженерні розрахунки для вирішення складних задач і практичних проблем у галузевому машинобудуванні.
- Аналізувати інженерні об'єкти, процеси та методи.
- Знання та розуміння механіки і машинобудування та перспектив їхнього розвитку.
- Планувати і виконувати наукові дослідження, аналізувати їх результати, обґрунтовувати висновки.
- Здійснювати аналіз і синтез механічних систем роботів та маніпуляторів.

- Здійснювати кінематичний та динамічний аналіз механічних систем промислових роботів та маніпуляторів.
- Досліджувати та регулювати хід механічних систем промислових роботів та маніпуляторів.

Відповідність результатів вивчення дисципліни компетентностям представлена в таблиці 1.

Таблиця 1 – Таблиця відповідності результатів вивчення дисципліни компетентностям

Компетентності	РН
<p>1. Здатність до пошуку, оброблення та аналізу інформації з різних джерел.</p> <p>2. Здатність вчитися та оволодівати сучасними знаннями.</p> <p>3. Здатність створювати, удосконалювати та застосовувати кількісні математичні, наукові й технічні методи та комп'ютерні програмні засоби, застосовувати системний підхід для розв'язування інженерних задач галузевого машинобудування, зокрема в умовах технічної невизначеності.</p>	<p>1. Здійснювати інженерні розрахунки для вирішення складних задач і практичних проблем у галузевому машинобудуванні.</p> <p>2. Аналізувати інженерні об'єкти, процеси та методи.</p> <p>3. Знання та розуміння механіки і машинобудування та перспектив їхнього розвитку.</p> <p>4. Планувати і виконувати наукові дослідження, аналізувати їх результати, обґрунтовувати висновки.</p> <p>5. Здійснювати аналіз і синтез механічних систем роботів та маніпуляторів.</p> <p>6. Здійснювати кінематичний та динамічний аналіз механічних систем промислових роботів та маніпуляторів.</p> <p>7. Досліджувати та регулювати хід механічних систем промислових роботів та маніпуляторів.</p>

ТЕМА 1

ОСНОВИ СТРУКТУРНОГО АНАЛІЗУ І СИНТЕЗУ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ПРОМИСЛОВИХ РОБОТІВ ТА МАНІПУЛЯТОРІВ

Метою вивчення теми є ознайомлення з основами структурного аналізу і синтезу механічних систем промислових роботів та маніпуляторів.

Завдання вивчення теми збігаються з переліком питань для розгляду, що наведений нижче.

Перелік питань до розгляду

- 1.1 Просторові конфігурації
- 1.2 Аналіз ступенів свободи твердого тіла
- 1.3 Основи структурного аналізу і синтезу механічних систем промислових роботів та маніпуляторів

1.1 Просторові конфігурації

Робот механічно сконструйований шляхом з'єднання набору тіл, які називаються ланками, одне з одним за допомогою різних типів з'єднань. Приводи, такі як електродвигуни, передають сили або крутні моменти, які змушують ланки робота рухатися. Зазвичай кінцевий ефектор, такий як захват або рука для захоплення та маніпулювання об'єктами, прикріплюється до певної ланки. Усі роботи, розглянуті в цій лекції, мають ланки, які можна моделювати як тверді тіла.

Можливо, найфундаментальнішим питанням, яке можна поставити про робота, є де він? Відповідь дає конфігурація робота: специфікація позицій усіх точок робота. Оскільки ланки робота є жорсткими та мають відому форму, для представлення його конфігурації потрібно лише кілька цифр. Наприклад, конфігурація дверей може бути представлена одним числом, кутом θ навколо її петлі. Конфігурацію точки на площині можна описати двома координатами (x, y) . Конфігурація монети, що лежить головою вгору на плоскому столі, може бути описана трьома координатами: двома координатами (x, y) , які вказують розташування певної точки на монеті, і однією координатою (θ) , яка вказує орієнтацію монети (див. рис. 1.1).

Усі наведені вище координати приймають значення в безперервному діапазоні дійсних чисел. Кількість ступенів свободи (dof) робота — це найменша кількість дійсних координат, необхідних для представлення його конфігурації. У наведеному вище прикладі двері мають один ступінь свободи. Монета, яка лежить головою вгору на столі, має три ступені свободи. Навіть якби монета могла лежати головою вгору або решкою вгору, її простір конфігурації все одно мав би лише три ступені свободи; четверта змінна, яка вказує, яка сторона монети вгору, приймає значен-

ня в дискретному наборі {орла, решка}, а не в безперервному діапазоні реальних значень, як інші три координати.

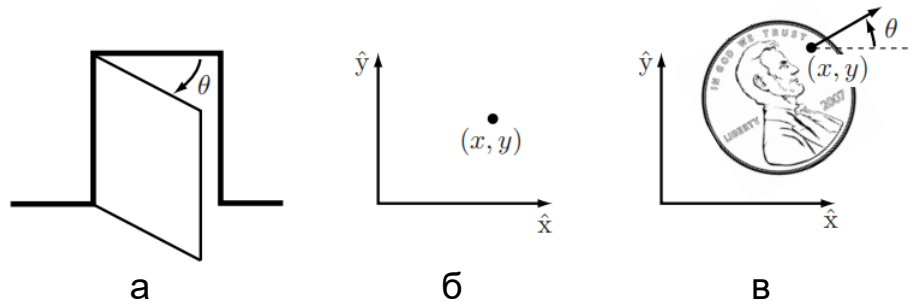


Рисунок 1.1 – Конфігурація: а) дверей описується кутом θ ; б) точки на площині описується координатами (x, y) ; в) Конфігурація монети на столі описується (x, y, θ) , де θ визначає напрямок, у якому дивиться Авраам Лінкольн

Конфігурація робота – це повна специфікація положення кожної точки робота. Мінімальна кількість n дійсних координат, необхідних для представлення конфігурації, є кількістю ступенів свободи (dof) робота. N -вимірний простір, що містить усі можливі конфігурації робота, називається простором конфігурації (С-простір). Конфігурація робота представлена точкою в його С-просторі.

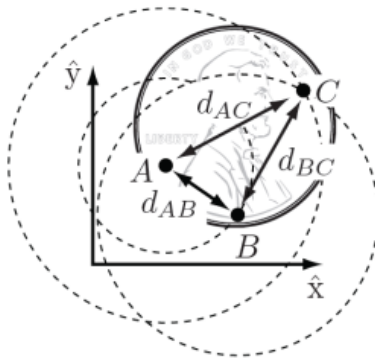
У цьому розділі ми вивчаємо С-простір і ступені свободи загальних робіт. Оскільки наші роботи побудовані з жорстких ланок, ми спочатку перевіряємо ступені свободи окремого твердого тіла, а потім ступені свободи звичайних багатоланкових робіт. Далі ми вивчаємо форму (або топологію) і геометрію С-просторів і їх математичне представлення. Розділ завершується обговоренням С-простору кінцевого ефектора робота, його простору завдань.

1.2 Аналіз ступенів свободи твердого тіла

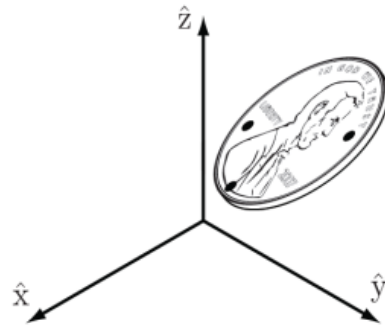
Продовжуючи приклад із монетою, що лежить на столі, виберіть три точки А, В та С на монеті (рис. 1.2 (а)). Коли система координат \hat{x} – \hat{y} прикріплена до площини, записані положення цих точок на площині (x_A, y_A) , (x_B, y_B) і (x_C, y_C) . Якби точки можна було розмістити незалежно будь-де на площині, монета мала б шість ступенів свободи - по два для кожної з трьох точок. Але, згідно з визначенням твердого тіла, відстань між точками А і точками В, позначена $d(A, B)$, завжди постійна, незалежно від того, де знаходиться монета.



а



б



в

Рисунок 1.2 – Монета та три точки: а) вибір трьох точок, прикріплених до монети; б) після того, як розташування А вибрано, В має лежати на колі радіуса d_{AB} з центром у А; після того, як розташування В вибрано, С має лежати на перетині кіл із центрами в А та В; тільки одне з ці два перехрестя відповідають конфігурації «голови вгору»; в) Конфігурація монети в тривимірному просторі задана трьома координатами А, двома кутами до точки В на сфері радіуса d_{AB} з центром у А та одним кутом до точки С на колі, визначеному перетином сфери а з центром А і сфери з центром В

Так само відстані $d(B, C)$ і $d(A, C)$ мають бути постійними. Таким чином, завжди повинні виконуватися наступні обмеження рівності для координат (x_A, y_A) , (x_B, y_B) і (x_C, y_C) :

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = d_{AB}, \\ d(B, C) &= \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = d_{BC}, \\ d(A, C) &= \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = d_{AC}. \end{aligned}$$

Щоб визначити кількість ступенів свободи монети на столі, спочатку вибирають положення точки А на площині (рисунок 1.2 (б)). Ми можемо вибрати все, що завгодно, тому ми маємо два ступені свободи для визначення, а саме (x_A, y_A) . Коли (x_A, y_A) визначено, обмеження $d(A, B) = d_{AB}$ обмежує вибір (x_B, y_B) до тих точок кола радіуса d_{AB} з центром у точці А. Точку на цьому колі можна визначити одним параметром, наприклад, кутом, що визначає розташування В на колі з центром у точці А. Назвемо цей кут φ_{AB} і визначте його як кут, який вектор \overrightarrow{AB} утворює з віссю \hat{x} .

Після того, як ми вибрали місце розташування точки В, існує лише два можливих розташування точки С: на перетинах кола радіусом d_{AC} з центром в точці А і кола радіуса d_{BC} з центром у В (рис. 1.2 (б)). Ці два рішення відповідають орлам або решкам. Іншими словами, коли ми розмістили А і В і вибрали орли або решки, два обмеження $d(A, C) = d_{AC}$ та $d(B, C) = d_{BC}$ усувають дві очевидні свободи, що надаються (x_C, y_C) , і розташування С є фіксованим. Монета має рівно три ступені свободи в площині, які можна визначити (x_A, y_A, φ_{AB}) .

Припустімо, що ми вирішили вказати положення додаткової точки D на монеті. Це вводить три додаткові обмеження: $d(A, D) = d_{AD}$, $d(B, D) = d_{BD}$ та $d(C, D) = d_{CD}$. Одне з цих обмежень є надлишковим, тобто воно не надає нової інформації; лише два з трьох обмежень є незалежними. Дві свободи, очевидно введені координатами (x_D, y_D) , потім негайно усуваються цими двома незалежними обмеженнями. Те саме стосується будь-якої іншої новообраної точки на монеті, тому немає потреби враховувати додаткові точки.

Ми застосовували таке загальне правило для визначення кількості ступенів свободи системи:

$$\begin{aligned} \text{ступені свободи} &= (\text{сума свобод точок}) - \\ &- (\text{кількість незалежних обмежень}). \end{aligned} \quad (1.1)$$


Це правило також можна виразити через кількість змінних і незалежних рівнянь, які описують систему:

$$\begin{aligned} \text{ступені свободи} &= (\text{кількість змінних}) - \\ &- (\text{кількість незалежних рівнянь}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Це загальне правило також можна використовувати для визначення кількості свобод твердого тіла в трьох вимірах. Наприклад, припустімо, що наша монета більше не обмежена столом (рис. 1.2 (в)). Координати для трьох точок A, B і C тепер задані (x_A, y_A) , (x_B, y_B) і (x_C, y_C) відповідно. Точку A можна розмістити вільно (три ступені свободи). Розташування точки B підлягає обмеженню $d(A, B) = d_{AB}$, тобто вона повинна лежати на сфері радіуса d_{AB} з центром в точці A. Таким чином, ми маємо $3 - 1 = 2$ свободи для визначення, які можна виразити як широту та довготу точки на сфері. Нарешті, розташування точки C має лежати на перетині сфер із центрами A і B радіусом d_{AC} та d_{BC} відповідно. У загальному випадку перетин двох сфер є колом, а розташування точки C можна описати кутом, що параметризує це коло. Отже, точка C додає $3 - 2 = 1$ свободу. Після вибору положення точки C монета фіксується в просторі.

Таким чином, тверде тіло в тривимірному просторі має шість свобод, які можна описати трьома координатами, що параметризують точку A, двома кутами, що параметризують точку B, і одним кутом, що параметризує точку C, за умови, що A, B і C неколінеарні.

Ми тільки що встановили, що тверде тіло, яке рухається в тривимірному просторі, яке ми називаємо просторовим твердим тілом, має шість ступенів свободи. Подібним чином, тверде тіло, що рухається в двовимірній площині, яке ми надалі називаємо плоским твердим тілом, має три ступені свободи. Цей останній результат також можна отримати, розглядаючи плоске тверде тіло як просторове тверде тіло з шістьма ступенями свободи, але з трьома незалежними обмеженнями $z_A = z_B = z_C = 0$.



Оскільки наші роботи складаються з твердих тіл, рівняння (1.1) можна виразити таким чином:

$$\begin{aligned} \text{ступені свободи} &= (\text{сума свобод тіл}) - \\ &- (\text{кількість незалежних обмежень}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Рівняння (1.3) формує основу для визначення ступенів свободи загальних роботів, що є темою наступного розділу.

1.3 Основи структурного аналізу і синтезу механічних систем промислових роботів та маніпуляторів

Розв'язання завдань аналізу та синтезу механічних систем промислових роботів та маніпуляторів вимагає вивчення законів створення механізмів, законів їх руху та причин, що обумовлюють ці рухи. Тому при вивченні механізмів, що застосовуються в промислових роботах та маніпуляторах використовуються положення загально інженерної дисципліни. Теорія механізмів і машин, що поділяється на три основних розділи:

1. *Структура і класифікація механізмів.*
2. *Кінематика механізмів.*
3. *Динаміка механізмів.*

У розділі структури і класифікації механізмів вивчаються закони будови механізмів. При цьому всі механізми розподіляються на класи за певними структурними ознаками, що полегшує їх подальше вивчення, оскільки кожен з таких класів має певний метод кінематичного і кінетостатичного дослідження.

У розділі кінематики механізмів вивчаються закони руху ланок механізмів з геометричної точки зору, незалежно від причин, що викликають рух цих ланок.

У розділі динаміки механізмів вивчаються сили взаємодії ланок механізмів і машин при заданому законі руху ведучої ланки та зв'язок між рухом ланок механізму, силами, що діють на них, та масами, які мають ці ланки.

Основи структурної класифікації стосовно до плоских механізмів були викладені в роботі *Л. В. Ассура* у 1914-1917 р.р. і поглиблені академіком *І. І. Артоболовським*. Ця класифікація дозволяє застосувати загальні методи кінематичного та силового аналізів до різноманітних механізмів. В основу класифікації механізмів був покладений принцип утворення механізмів, який полягає у тому, що будь-який механізм може бути утворений шляхом приєднання до ведучої ланки (ланок) кінематичних ланцюгів, які одержали назву *структурних груп* (груп Ассура).

Структурною групою називається такий кінематичний ланцюг, який має нульовий ступінь рухомості, тому приєднання чи відокремлення групи від механізму не змінює ступеня рухомості існуючого ме-



ханізму.

Для кінематичного ланцюга, який складається з пар лише п'ятого класу (а якщо у ланцюгу є пари і четвертого класу, то вони завжди можуть бути замінені), умовою існування структурної групи буде:

$$3n - 2p_5 = 0, \text{ звідки}$$

$$p_5 = \frac{3}{2}n \quad (1.4)$$

З формули (1.4) витікає, що співвідношення кількості рухомих ланок n і пар п'ятого класу p , у структурній групі буде таким (табл. 1.1).

Таблиця 1.1 – Співвідношення кількості рухомих ланок n і пар п'ятого класу p , у структурній групі

n	2	4	6	...
p_5	3	6	9	...

З таблиці 1.1 видно, що найпростішою групою буде група, яка складається з двох ланок і трьох кінематичних пар п'ятого класу. Така група одержала назву структурної групи другого класу або ж двоповодкової групи. Групи другого класу можуть бути розподілені на п'ять видів у залежності від кількості обертальних і поступальних пар та їх взаємного розташування.

На рис. 1.3 показані схеми п'яти видів структурних груп другого класу.

Як видно, у групах другого класу дві кінематичні пари залишаються вільними, і цими парами група може приєднатись до інших ланок механізму (або стояка, або ведучої ланки).

Порядок структурної групи визначається кількістю кінематичних пар, якими група приєднується до основного механізму. Тому групи другого класу відносяться до груп другого порядку.

Узагальнюючи класифікацію плоских кінематичних ланцюгів можна зробити такі визначення:

1. *Клас контуру* визначається кількістю пар, до яких входять утворюючі його ланки.
2. *Клас групи* визначається найвищим за класом контуром, що входить до її складу.
3. *Клас механізму* визначається найвищою за класом групою, що входить до його складу.

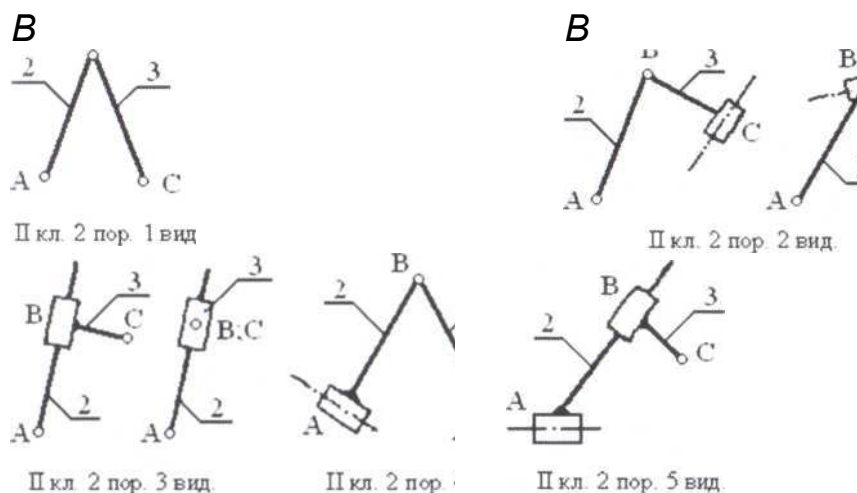


Рисунок 1.3 – Група другого класу різних видів

Варто відзначити, що сукупність ведучої і нерухомої ланок з однією кінематичною парою (у більшості випадків обертальною, рідше – поступальною) умовно відноситься до *механізмів першого класу*.

В курсі розглядаються механізми лише другого класу (тобто такі, до складу яких входять групи лише другого класу), внаслідок того, що такі механізми найбільше розповсюджені, а також тому, що деякі механізми третього класу можна віднести до механізмів другого класу, якщо вибрати іншу ведучу ланку.

Порядок проведення структурного аналізу механізмів *такий*:

1. Визначаються рухомі ланки механізму.
2. Визначаються кінематичні пари механізму та їх клас (здійснюється заміна вищих кінематичних пар ланцюгами з парами лише п'ятого класу).
3. Визначається ступінь рухомості механізму W за формулою Чебишева (усуваються пасивні зв'язки і зайві ступені рухомості).
4. Виділяються структурні групи, які входять до складу механізму (виділення груп розпочинається з груп другого класу, умови приєднання яких до початкового механізму (механізму I класу) виконані).
5. За найвищим класом виділених груп визначається клас механізму.

Зробимо структурний аналіз плоского шарнірно-важільного механізму за його структурною схемою (рис. 1.4.).

Порядок виконання завдання:

1. Визначаємо ланки механізму.
 - 1 - кривошип (ведуча ланка);
 - 2 - шатун-куліса;
 - 3 - повзун;
 - 4 - шатун-кулісний камінь;
 - 5 - коромисло;
 - 6 - шатун;

- 7 - коромисло;
 - 8 - шатун-куліса;
 - 9 - коромисло-кулісний камінь;
 - 0 - нерухома ланка, стояк.
- В механізмі рухомих ланок: $n=9$.

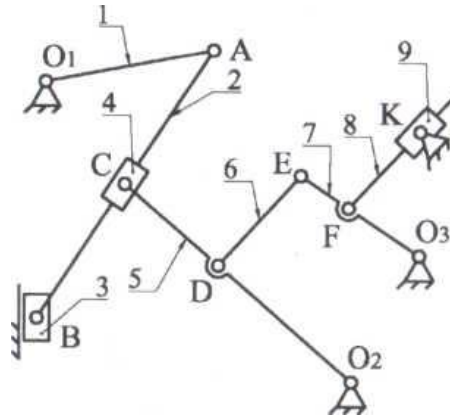


Рисунок 1.4 – Структурна схема механізму

2. Визначаємо кінематичні пари механізму та їх клас (здійснюємо заміну вищих кінематичних пар ланками з парами лише п'ятого класу).

- кін. пара O_1 (0; 1), P_5 , обертальна (кінематична пара O , (утворена ланками 0 та 1), клас кінематичної пари – P_5 , за характером відносно-го руху – обертальна);
- кін. пара A (1; 2), P_5 , обертальна;
- кін. пара $C1$ (2; 4), P_5 , поступальна;
- кін. пара $C2$ (4; 5), P_5 , обертальна;
- кін. пара $B1$ (2; 3), P_5 , обертальна;
- кін. пара $B2$ (0; 3), P_5 , поступальна;
- кін. пара D (5; 6), P_5 , обертальна;
- кін. пара $O2$ (0; 5), P_5 , обертальна;
- кін. пара E (6; 7), P_5 , обертальна;
- кін. пара F (7; 8), P_5 , обертальна;
- кін. пара $O3$ (0; 7), P_5 , обертальна;
- кін. пара $K1$ (8; 9), P_5 , поступальна;
- кін. пара $K2$ (0; 9), P_5 , обертальна.

В механізмі кінематичних пар: $P_5=13$, $P_4=0$, вищі кінематичні пари відсутні.

3. Визначаємо ступінь рухомості механізму W за формулою Чебишева (усуваємо пасивні зв'язки і зайві ступені рухомості):

$$W = 3 \cdot n - 2 \cdot P_5 - P_4 = 3 \cdot 9 - 2 \cdot 13 = 1$$

Пасивні зв'язки та зайві ступені рухомості в наведеній структурній схемі- відсутні.

4. Обираємо початковий механізм (механізм першого класу) та виділяємо структурні групи, які входять до складу механізму (розпочинаємо з структурних груп, умови приєднання яких до механізму першого класу виконані).

Ведучою ланкою механізму є кривошип I. Назначаємо один механізм першого класу (ступінь рухомості механізму $W=1$) (рис. 1.5).

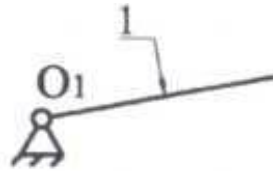


Рисунок 1.5 – Механізм 1 кл.

Механізм 1 класу складається з: стояка 0 та кривошипу 1, які утворюють одну кінематичну пару O_1 (рис. 1.6).

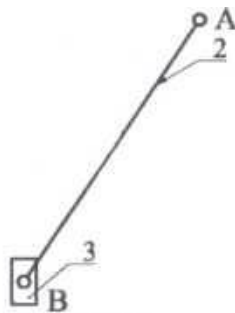


Рисунок 1.6 – Група ланок 2 кл. 2 пор. 2 вид

Першою структурною групою, яка приєднана до механізму першого класу є група 2 класу, (ланки 2, 3 та кінематичні пари: A, B, B_2).

Група 2 класу 2 порядку 2 виду є «першою» тому, що вона своїми зовнішніми кінематичними парами A та B_2 приєднується до двох різних ланок початкового механізму (рис. 1.6).

Другу структурну групу 2 класу 2 порядку 2 виду утворюють ланки 4,5 та три кінематичні пари C_1, C_2, O_2 (рис. 1.7).

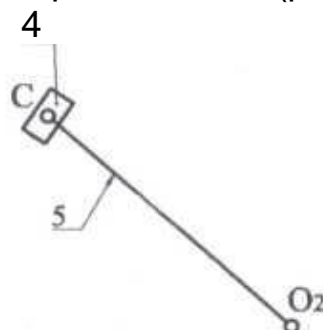


Рисунок 1.7 – Група ланок 2 кл. 2 пор. 2 вид

Наступні дві ланки 6,7 та три кінематичні пари О, Е, О₃ надходять до групи 2 класу 2 порядку 1 виду (рис. 1.8).

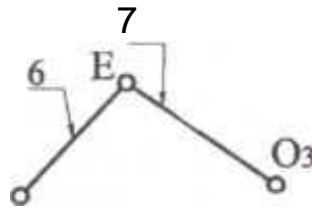


Рисунок 1.8 – Група ланок 2 кл. 2 пор. 1 вид

Остання структурна група складається з ланок 8, 9 та кінематичних пар F, K₁, K₂ (2 клас 2 порядок 3 вид) (рис. 1.9).

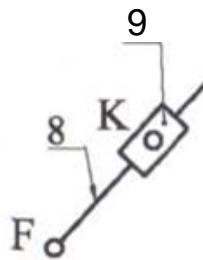


Рисунок 1.9 – Група ланок 2 кл. 2 пор. 3 вид

Склад і послідовність приєднання структурних груп механізму виражаємо формулою будови:


1 кл. (ланки 0,1) → 2 кл. 2 пор. 2 вид (ланки 2; 3) → 2 кл. 2 пор. 2 вид ланки 4; 5) → 2 кл. 2 пор. 1 вид (ланки 6; 7) → 2 кл. 2 пор. 3 вид (ланки 8; 9).

5. За найвищим класом виділених структурних груп визначаємо клас механізму.

Клас механізму - 2 кл.

Контрольні запитання до теми 1

1. Які основні просторові конфігурації можуть мати роботи?
2. Що таке ступені свободи твердого тіла?
3. Як визначають конфігурацію робота?
4. Скільки ступенів свободи має монета, що лежить на столі?
5. Що таке конфігураційний простір (С-простір) робота?
6. Як визначити кількість ступенів свободи для робота?
7. Як координати точки А впливають на конфігурацію монети на площині?
8. Які обмеження накладаються на координати точок А, В та С на монеті?
9. Як визначають конфігурацію твердого тіла в тривимірному просторі?



10. Які основні закони вивчають в структурному аналізі та синтезі механічних систем?

11. Що вивчається в розділі структури і класифікації механізмів?

12. Що таке кінематика механізмів?

13. Які сили вивчаються в розділі динаміки механізмів?

14. Хто заклав основи структурної класифікації механізмів і коли?

15. Що таке структурна група у механізмах?

16. Як обчислити ступінь рухомості структурної групи?

17. Яке значення має кількість пар п'ятого класу у структурній групі?

18. Яка найпростіша структурна група і як вона називається?

19. Як визначається порядок структурної групи?

20. Які схеми п'яти видів структурних груп другого класу існують?

21. Яке значення має ведуча і нерухома ланки у механізмах першого класу?

22. Які механізми розглядаються у курсі і чому?

23. Як змінюється ступінь свободи робота з додаванням нових ланок?

24. Яке практичне значення має аналіз ступенів свободи для роботів та маніпуляторів?

25. Які методи використовуються для кінематичного та кінетостатичного дослідження механізмів?

Використана література

1. Ceccarelli M. Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulation. Second Edition. Rome : Springer Cham, 2022. 381 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90848-5>.

2. Ковальов Ю. А., Кошель С. О., Манойленко О. П. Проектування промислових роботів та маніпуляторів : навчальний посібник. Київ : Центр учбової літератури, 2022. 256 с.



ТЕМА 2

ОСНОВИ КІНЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ПРОМИСЛОВИХ РОБОТІВ ТА МАНІПУЛЯТОРІВ

Метою вивчення теми є ознайомлення основами кінематичного аналізу механічних систем промислових роботів та маніпуляторів, провести дослідження руху ланок без урахування сил, які діють на механізм, послідовно вирішити три задачі.

Завдання вивчення теми збігаються з переліком питань для розгляду, що наведений нижче.

Перелік питань до розгляду

2.1 Визначення положення ланок механізму і траєкторій окремих точок ланок

2.2 Визначення кутових швидкостей і прискорень ланок механізму і лінійних швидкостей и прискорень окремих точок шляхом побудови планів

2.3 Аналіз рухів твердого тіла

Кінематичний аналіз механізму, тобто дослідження руху ланок без урахування сил, які діють на механізм, полягає в послідовному вирішенні таких трьох задач:

1. Визначення положень ланок механізму для даного моменту часу і траєкторій окремих точок ланок, описуваних за певний період часу роботи механізму.

2. Визначення кутових швидкостей ланок і лінійних швидкостей окремих точок ланок.

3. Визначення кутових прискорень ланок і лінійних прискорень окремих точок ланок механізму.

2.1 Визначення положення ланок механізму і траєкторій окремих точок ланок

Перейдемо до вирішення першої з поставлених задач. Вихідними даними для розв'язання задачі по визначенню положень ланок механізму є: кінематична схема механізму, розміри ланок і закон руху однієї ведучої ланки (якщо $W = 1$), чи кількох ведучих ланок (якщо $W > 1$). Визначення положень ланок механізму, як правило, проводиться графічним шляхом, тому виконується креслення кінематичної схеми на аркуші у довільно вибраному масштабі довжини μ_1 .

Будь-який масштаб, в тому числі і масштаб довжин μ_1 , може бути визначений як відношення:

$$\mu = \frac{A}{K} \quad (2.1)$$

де A – натуральна, величина у відповідних одиницях вимірювання (напр., швидкість в м/сек, сила – в Н, робота – в Нм і т. п.), яку ми зображаємо на кресленні відповідним відрізком K мм;

K – довжина відрізка на кресленні у мм, що відповідає натуральній величині.

Масштаб довжин μ_1 схеми буде мати розмірність м/мм і може бути не стандартною величиною. Можна застосовувати обчислювальні масштаби довжин – 0,001; 0,002; 0,005; 0,0005 м/мм, яким відповідають креслярські масштаби 1:1; 1:2; 1:5; 2:1 згідно з ДСТУ, а також довільно обрані будь які інші.

Потрібно відзначити, що обчислювальні масштаби при зображенні всіх інших натуральних величин (швидкості, прискорення, сили і т.і.) не стандартизовані і вибираються зручними для обчислень.

Побудова плану положень повинна здійснюватись у певній послідовності. Розглянемо її на прикладі механізму приводу конвеєру (рис. 2.1). Якщо для механізму відомі розміри ланок, відношення осей нерухомих шарнірів та напрямної (розміри a та b) та закон руху ведучої ланки кривошипа (кутова швидкість — ω_1 або число обертів за хвилину — n_1), то після вибору масштабу плану положень (масштабу довжин μ_1) послідовність подальших дій повинна бути такою:

1. На кресленні наносяться у вибраному масштабі осі нерухомих шарнірів A і O та положення напрямної x — x , при цьому використовуються розміри a і b .

2. Проводиться траєкторія точки B кривошипа — окружність радіуса $AB = \frac{L_{AB}}{\mu_1}$.

Ця окружність поділяється точками B_0, B_1, B_2 й (на окремі ділянки, рівні по довжині (рис. 2.1). Таких ділянок звичайно вибирають 6, 8, 12 і т. ін. Зауважимо, що за нульове положення т. B (для спрощення подальших досліджень механізму) обирають таке, яке відповідає одному з можливих крайніх положень вихідної ланки механізму, що досліджується (або ланки до якої прикладається сила корисного опору).

3. Для кожного положення точки кривошипа B_0, B_1, B_2 , вибудуються положення інших ланок механізму. Основним методом визначення положень точок B, C, E , в є метод засічок. Так положення точки C знайдеться, якщо ми з точки O нанесемо радіусом OC частину окружності, яка буде траєкторією точки C , а потім з точки B зробимо на цій окружності засічку радіусом BC . Положення точки E знайдеться як перетин дуг, проведених з точок C і O радіусами, рівними відповідно CE і DE . Аналогічно будується і положення точки F .

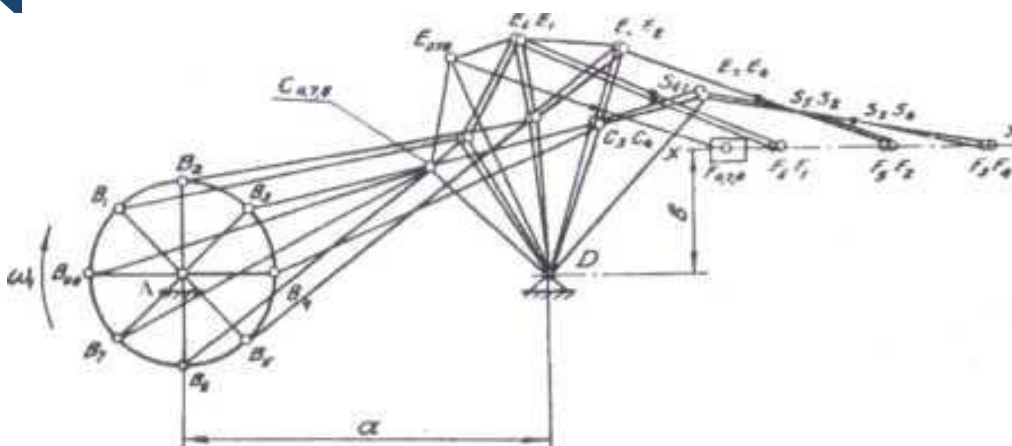


Рисунок 2.1 – Побудова плану положень механізму конвеєра

Послідовність побудови положень окремих точок відповідає послідовності приєднання до ведучої ланки структурних груп. Для кожної з них положення крайніх елементів кінематичних пар уже відоме, а положення середньої (внутрішньої) кінематичної пари визначається методом засічок.


Якщо побудовані плани для багатьох положень механізму, то стає не важко визначити і побудувати траєкторії окремих точок (наприклад, точки 5, рис. 2.1) шляхом пропорціонального поділу ланок на відрізки і послідовного сполучення одержаних точок Б, плавними кривими. Для того щоб знайти на плані положень два особливі положення — так звані крайні положення повзуна необхідно щоб ланки АВ і ВС мали напрямок вздовж однієї прямої лінії, то вочевидь, що точка Е ланки ДЕ переміститься або в правий, або лівий бік, відповідно до чого крайнє положення займе і повзун (точка І). У ці моменти часу швидкість повзуна дорівнює нулю (повзун при цьому змінює напрямок руху).

2.2 Визначення кутових швидкостей і прискорень ланок механізму і лінійних швидкостей і прискорень окремих точок шляхом побудови планів

Визначення швидкостей і прискорень окремих точок ланок механізму може здійснюватись різноманітними методами. Використовуються такі методи кінематичного аналізу:

- а) метод планів швидкостей і прискорень;
- б) аналітичний метод кінематичного аналізу.
- в) метод кінематичних діаграм.

Раніше було зауважено, що будь-який плоский механізм може бути утворений приєднанням до ведучої ланки структурних груп. Це положення Ассура, що є основою запропонованої ним системи класифікації плоских механізмів, вже було використане нами при розв'язанні першої задачі кінематики — побудови плану положень ланок механізму. Воно буде ви-



користано і при розв'язанні другої і третьої задач кінематики методом побудови планів швидкостей і прискорень.

Надалі ми переконаємося у тому, що, виконавши структурний аналіз механізму і визначивши, скільки і яких видів структурних груп другого класу входить до його складу, ми завжди можемо побудувати плани швидкостей і прискорень для будь-яких точок ланок механізму, використовуючи властивість структурних груп, яка полягає в тому, що швидкості і прискорення елементів крайніх пар структурної групи нам завжди заздалегідь відомі чи можуть бути легко визначені. Ця властивість є однією з найцінніших властивостей запропонованої Ассуром раціональної системи класифікації плоских механізмів.

Побудова планів швидкостей і прискорень для механізмів другого класу ведеться на основі векторних рівнянь.

Переходячи до дослідження кожної структурної групи треба вибрати таку точку, для якої можна скласти два векторних рівняння, що можуть бути спільно розв'язані. Одне векторне рівняння має більше двох невідомих параметрів векторів і тому не може бути самостійно розв'язане.

Звичайно, треба чітко уявляти і ті дві точки, швидкості і прискорення яких використовуються при складанні векторних рівнянь. Якщо ланки групи утворюють поступальні кінематичні пари, то виявляється необхідність при складанні векторних рівнянь використати точки, що належать напрямним ланкам.

Для структурних груп різних видів при складанні векторних рівнянь треба враховувати їх специфіку, але відправні положення — спільні для всіх видів.

Методику побудови планів швидкостей і прискорень розглянемо на прикладі двох механізмів: приводу конвеєра і механізму поперечно

стругального верстата, які складаються з структурних груп другого класу різних видів. Вихідними даними для побудови планів швидкостей і прискорень повинні бути кінематична схема механізму і закон руху ведучої ланки.

План швидкостей механізму з групами першого та другого видів. Побудуємо плани швидкостей і прискорень для механізму приводу конвеєра, кінематична схема якого наведена на рис. 2.1. а, закон руху ведучої ланки (кривошипа АВ) заданий у вигляді числа обертів на хвилину — n_1 .

У даному механізмі першою приєднаною до кривошипа структурною групою буде група, яка складається з ланок 2 і 3 з кінематичними парами В і D (крайні або зовнішні) і С (внутрішня),— група другого класу першого виду. Використовуючи відому теорему з теоретичної механіки про те, що швидкість будь-якої точки плоскої фігури може бути представлена як геометрична сума швидкості полюса і швидкості обертання навколо полюса, складаємо два векторних рівняння для визначення швидкості точки С:

$$\left. \begin{aligned} \vec{V}_C &= \vec{V}_B + \vec{V}_{BC} \\ \vec{V}_C &= \vec{V}_D + \vec{V}_{CD} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

В рівняннях (3) V_C , V_B і V_D — вектори абсолютних швидкостей точок С, В і О, а V_{CB} і V_{CD} — вектори відносних швидкостей точки С відносно точок В і О. Тут (як у всіх випадках для структурних груп другого класу) швидкості центрів крайніх пар відомі, або ж визначаються за величиною і напрямком.

Швидкість точки В визначається з умов рівномірного обертання кривошипа АВ тобто $V_B = \frac{\pi n_1}{30} \cdot L_{AB} \frac{м}{с}$, а швидкість точки D дорівнює нулю, $V_D = 0$.

Визначивши величину і напрямок швидкості точки В і вибравши масштаб побудови плану швидкостей $\mu_V = \frac{V_B}{(pVB)}$ з розмірністю $\frac{м/сек}{мм}$ (де V_B — швидкість точки В, м/сек, а (pVB) , мм — відрізок на плані швидкостей, який відповідає швидкості точки В на плані). Починаємо будувати план швидкостей. Для цього обираємо полюс плану швидкостей (позначається p_V , рис. 2.2, б) і відкладаємо від полюса відрізок (p_Vb) .

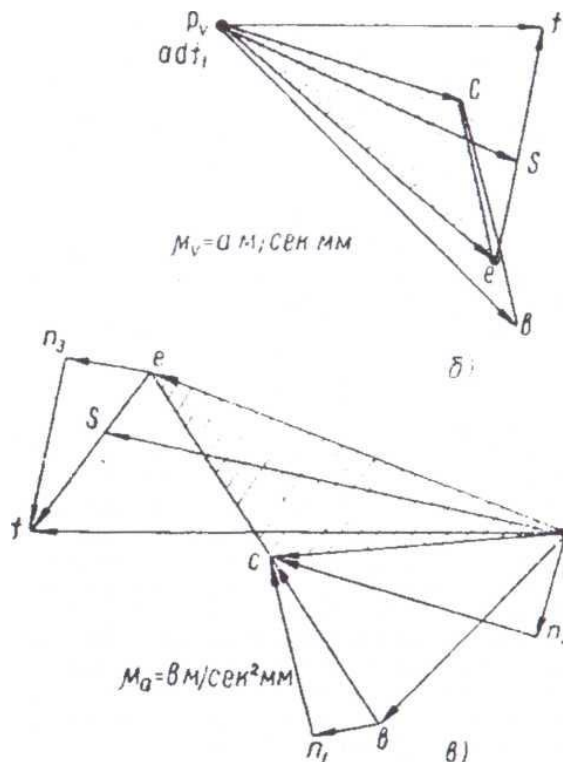


Рисунок 2.2 – Кінематичне дослідження механізму конвеєра:
а – план положень механізму: б – план швидкостей: в – план прискорень

Швидкість V_B , і відповідно (p_Vb) направлені перпендикулярно до ланки АВ у відповідності з напрямком її обертання. До кінця вектора V_B (точки b на плані) ми повинні додати, згідно з першим рівнянням (2.3) ве-

ктор відносної швидкості V_{CB} . Ми не знаємо величини швидкості V_{CB} , а знаємо лише лінію її дії (перпендикулярно до ланки 2, точніше — перпендикулярно прямій, що з'єднує точки С і В). Проводимо з точки b в обох напрямках лінію, перпендикулярну ланці 2. Переходимо до використання другого рівняння (2.2). Швидкість центру шарніра пари D рівна нулю, тому точка d буде співпадати з полюсом плану p.

Величина відносної швидкості V_{CD} , невідома, а лінія її дії перпендикулярна прямій CD ланки 3. З точки d плану проводимо лінію, перпендикулярну прямій CD, до перетину з лінією дії швидкості V_{CB} і одержуємо точку c, яка й визначає кінець вектора V_C абсолютної швидкості точки С.

Напрямки відносних швидкостей V_{CB} і V_{CD} визначаються при розгляді рівнянь (2.2). На плані вектори цих швидкостей будуть направлені відповідно від точок b і d до точки c. В даному випадку ($V_D = 0$) абсолютна швидкість V_C буде співпадати за величиною і напрямком з відносною швидкістю V_{CO} .

Дійсні величини швидкостей (V_{CB} і V_{CD}) знайдуться при помноженні відрізків плану (bc) і (dc) = (p_{VC}) на масштаб плану μ_V , тобто:

$$V_{CB} = (bc) \cdot \mu_V \frac{\text{м}}{\text{сек}}; V_{CD} = V_C(dc) \cdot \mu_V = (p_{VC})\mu_V \frac{\text{м}}{\text{сек}}$$

Для того, щоб закінчити побудову плану швидкостей для першої приєднаної групи, нам залишилось визначити швидкість центру обертальної пари E. Це можна зробити на основі двох векторних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \vec{V}_E &= \vec{V}_E + \vec{V}_{EC} \\ \vec{V}_E &= \vec{V}_D + \vec{V}_{ED} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Доцільніше застосувати відому з теоретичної механіки властивість планів швидкостей і прискорень, що носить назву теореми подібності. Фігури відносних швидкостей та прискорень однієї ланки подібні та схоже розташовані з фігурами відповідних ланок. Схожим розташуванням подібних фігур зветься таке, при якому зберігається послідовність індексів на контурах цих фігур, якщо їх обходити у вибраному напрямку (наприклад, при обході за годинниковою стрілкою фігури ланки та фігури відносних швидкостей послідовність букв повинна бути D → C → E та d → c → e).

Продовжимо побудову плану швидкостей для другої структурної групи (другого виду), яка складається з ланок 4, 5 і пар E, F₁, (зовнішніх) і F (внутрішньої). Складаємо векторні рівняння для визначення швидкості точки E внутрішньої пари. При складанні рівнянь ми використовуємо точку E та точку F₁ що належить напрямній та співпадає з центром пари F:

$$\left. \begin{aligned} \vec{V}_F &= \vec{V}_E + \vec{V}_{FE} \\ \vec{V}_F &= \vec{V}_{F_1} + \vec{V}_{FF_1} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Використовуючи перше рівняння (2.4), знаходимо лінію дії вектора швидкості V_{FE} (перпендикулярно ланці FE) і проводимо цю лінію з кінця вектора швидкості UE (точка e на плані). Потім, як і при побудові швидкості точки C переходимо до використання другого рівняння (2.4).

Швидкість точки F_1 , нам відома — вона рівна нулю, тобто $V_{F_1} = 0$, тому що напрямна з'являється стійкою, отже вектор швидкості V_{F_1} буде знаходитись у полюсі (точка f_1) співпадає з полюсом P_V). До кінця вектора \vec{V}_{F_1} необхідно додати вектор відносної швидкості \vec{V}_{FF_1} , невідомий за величиною, але відомий за лінією дії, яка співпадає з напрямком $x - x$ напрямної.

Перетин ліній дії відносних швидкостей \vec{V}_{FE} і \vec{V}_{FF_1} визначає точку f , отже, абсолютну швидкість \vec{V}_F . Напрямки відносних швидкостей \vec{V}_{FE} та \vec{V}_{FF_1} будуть знайдені з розгляду рівнянь (2.4).

Величини абсолютної швидкості \vec{V}_F і відносної швидкості \vec{V}_{FF_1} будуть знайдені з множення відповідних відрізків (pvf) та (ef) плану на масштаб μ_V . Побудувавши план швидкостей, можна визначити не лише лінійні швидкості будь-яких точок механізму, але й знайти кутові швидкості ланок. Наприклад, модулі кутових швидкостей ланок 2 і 4 знайдуться з рівнянь:

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{L_{BC}} = \frac{(bc)\mu_V}{L_{BC}} \frac{1}{\text{сек}}$$

$$\omega_4 = \frac{V_{FE}}{L_{FE}} = \frac{(ef)\mu_V}{L_{EF}} \frac{1}{\text{сек}}$$

В ці рівняння величини (bc) та (ef) підставляються в міліметрах, а L_{BC} та L_{EF} — довжини ланок — в метрах. Напрямки кутових швидкостей ω_2 та ω_4 визначаються, якщо відповідні вектори \vec{V}_{CB} та \vec{V}_{FE} прикласти на план положень у точках C і F (рис. 2.2, а). Після цього виявилось, що ω_2 та ω_4 мають напрямки протилежні напрямку обертання годинникової стрілки.

Для визначення швидкості будь-якої точки, що лежить на ланці 4 (EF), можна записати такі рівняння:

$$\left. \begin{aligned} \vec{V}_S &= \vec{V}_E + \vec{V}_{SE} \\ \vec{V}_S &= \vec{V}_F + \vec{V}_{SF} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$



Тому, що лінія дії вектора відносної швидкості \vec{V}_{SE} така ж, як і вектора \vec{V}_{SF} ці вектори не перетинаються і розв'язати рівняння (2.5) неможливо. Тут можна застосувати тільки теорему подібності, яка дає можливість записати таке відношення:

$$\frac{V_{SE}}{V_{FE}} = \frac{V_{ES}}{V_{EF}}, \text{ чи } \frac{(es)\mu_V}{(ef)\mu_V} = \frac{(ES)\cdot\mu_1}{(EF)\cdot\mu_1}$$

або остаточно

$$(es) = (ef) \frac{(ES)}{(EF)} \quad (2.6)$$

Рівняння (2.6) показує, що для визначення відрізка плану швидкостей, який зображує відносну швидкість \vec{V}_{SE} , необхідно відрізок (ef) поділити у тому ж співвідношенні, в якому точка S ділить ланку EF на плані положень. Абсолютна швидкість точки S знайдеться, якщо довжину відрізка (p_vS) плану на масштаб μ_V тобто $V_S = (p_vS)\mu_V \frac{M}{сек}$.


Так само шляхом пропорціонального ділення можна знайти абсолютні і відносні швидкості будь-яких точок ланок механізму.

2.3 Аналіз рухів твердого тіла

У попередній лекції ми побачили, що для визначення положення та орієнтації твердого тіла в тривимірному фізичному просторі необхідно мінімум шість чисел. У цій лекції ми розробляємо систематичний спосіб опису положення та орієнтації твердого тіла, який базується на приєднанні системи відліку до тіла. Конфігурація цього кадру відносно фіксованого опорного кадру потім представляється у вигляді матриці 4 x 4. Ця матриця є прикладом неявного представлення С-простору, як обговорювалося в попередньому розділі: фактичний шестивимірний простір конфігурацій твердого тіла отримується шляхом застосування десяти обмежень до 16-вимірному простору 4 x 4 реальної матриці.

Така матриця не тільки представляє конфігурацію кадру, але також може бути використана для (1) переміщення та повороту вектора або кадру та (2) зміни представлення вектора або кадру з координат в одному кадрі на координати в іншому кадрі. Ці операції можна виконувати за допомогою простої лінійної алгебри, що є основною причиною, чому ми вирішили представити конфігурацію у вигляді матриці 4 x 4.

Неевклідова (тобто не «плоска») природа С-простору позицій і орієнтацій приводить нас до використання матричного представлення. Однак швидкість твердого тіла можна представити просто як точку в R^6 ,



визначену трьома кутовими швидкостями та трьома лінійними швидкостями, які разом ми називаємо просторовою швидкістю або скручуванням. Загалом, навіть якщо С-простір робота може не бути векторним простором, набір можливих швидкостей у будь-якій точці С-простору завжди утворює векторний простір. Наприклад, розглянемо робота, С-простір якого є сферою S^2 : хоча С-простір не є плоским, у будь-якій точці сфери простір швидкостей можна розглядати як площину (векторний простір), дотичну до цієї точки на сфері.

Будь-яка конфігурація твердого тіла може бути досягнута, починаючи з фіксованої (домашньої) системи відліку та інтегруючи постійне скручування протягом певного часу. Такий рух нагадує рух гвинта, що обертається і поступає вздовж однієї нерухомої осі. Спостереження про те, що всі конфігурації можуть бути досягнуті гвинтовим рухом, спонукає до представлення конфігурації з шести параметрів, яке називається експоненціальними координатами. Шість параметрів можна розділити на параметри, що описують напрямок осі шнека, і скаляр, щоб вказати, наскільки далеко слід рухатися шнеком, щоб досягти бажаної конфігурації.

Ця лекція завершується обговоренням сил. Подібно до того, як кутові та лінійні швидкості об'єднуються в один вектор у R^6 , моменти (крутні моменти) і сили об'єднуються разом у шестивектор, який називається просторовою силою або гайковим ключем.

Щоб проілюструвати концепції та надати короткий опис розділу, ми починаємо з мотивуючого плоского прикладу. Перш ніж це зробити, ми зробимо деякі зауваження щодо векторної нотації.

Трохи про вектори та системи відліку

Вільний вектор — це геометрична величина з довжиною та напрямком. Уявіть це як стрілку в R^n . Його називають «вільним», тому що він не обов'язково кудись вкорінений; значення мають лише його довжина та напрямок. Лінійну швидкість можна розглядати як вільний вектор: довжина стрілки — це швидкість, а напрямок стрілки — це напрямок швидкості. Вільний вектор позначається вертикальним текстовим символом, наприклад, v .

Якщо система відліку та масштаб довжини були вибрані для основного простору, в якому лежить v , тоді цей вільний вектор можна перемістити в таке положення, щоб основа стрілки була в початку координат без зміни орієнтації. Тоді вільний вектор v може бути представлений його координатами в системі відліку. Ми пишемо вектор курсивом, $V \in R^n$, де v знаходиться у «голові» стрілки в координатах рамки. Якщо обрано іншу систему відліку та масштаб довжини, то представлення V зміниться, але базовий вільний вектор v залишиться незмінним.

Іншими словами, ми говоримо, що v є вільним від координат; воно відноситься до фізичної величини в базовому просторі, і йому байдуже, як ми її представляємо. Однак v є представленням v , яке залежить від вибору системи координат.

Точка p у фізичному просторі також може бути представлена як вектор. За наявності вибору системи відліку та масштабу довжини для фізичного простору, точку p можна представити як вектор від початку системи відліку до p ; її вектор представлення позначено курсивом $p \in \mathbb{R}^n$. Тут, як і раніше, інший вибір системи відліку та масштабу довжини для фізичного простору призводить до іншого представлення $p \in \mathbb{R}^n$ для тієї самої точки p у фізичному просторі. Дивіться рисунок 2.3.

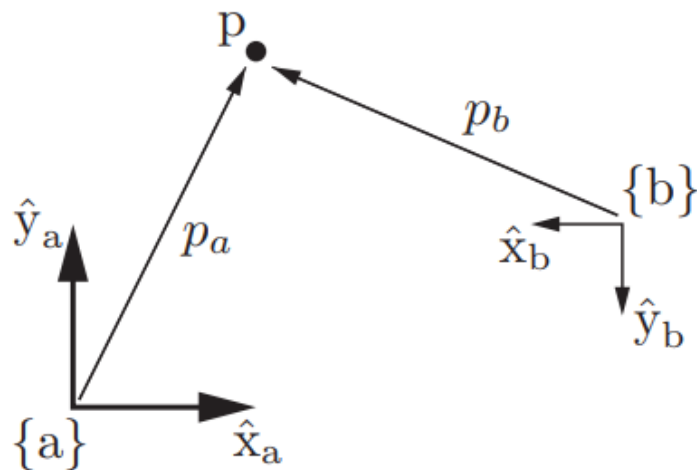


Рисунок 2.3 – Точка p існує у фізичному просторі, і їй байдуже, як ми представляємо, якщо зафіксувати систему відліку $\{a\}$ з одиничними осями координат \hat{x}_a і \hat{y}_a , ми можемо представити p як $p_a = (1, 2)$; якщо ми фіксуємо опорний кадр $\{b\}$ в іншому місці, а іншої орієнтації та іншого масштабу довжини, ми можемо представити p як $p_b = (4, -2)$

У решті цієї книги вибір масштабу довжини завжди передбачається, але ми матимемо справу з системами відліку в різних положеннях і орієнтаціях. Система відліку може бути розміщена в будь-якому місці простору, і будь-яка система відліку веде до рівноцінного представлення базового простору та об'єктів у ньому. Ми завжди припускаємо, що точно один стаціонарний фіксований кадр або просторовий кадр, позначений $\{s\}$, був визначений. Це можна прикріпити, наприклад, до кута кімнати. Так само ми часто припускаємо, що принаймні одна рама була прикріплена до якогось рухомого твердого тіла, такого як корпус квадранта, який летить у кімнаті. Цей каркас тіла, позначений $\{b\}$, є нерухомим каркасом, який збігається з каркасом, прикріпленим до тіла, у будь-який момент.

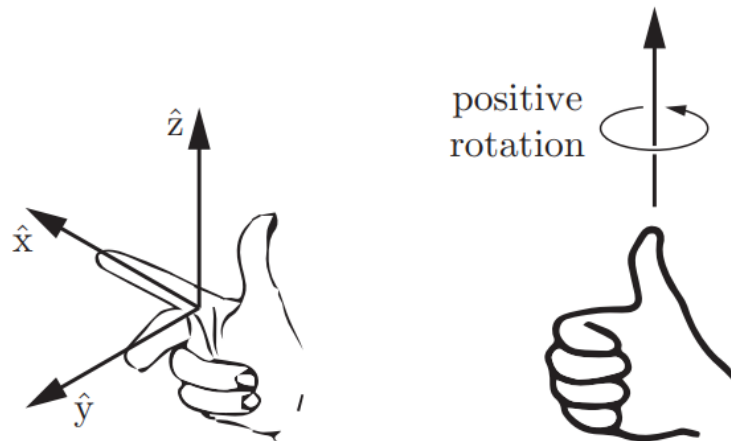
Хоча прийнято прив'язувати початок рамки $\{b\}$ до якоїсь важливої точки на тілі, наприклад центру маси, це не обов'язково. Початок кадру $\{b\}$ навіть не обов'язково повинен знаходитися на самому фізичному тілі, якщо його конфігурація відносно тіла, якщо спостерігати з боку спостерігача, нерухомого відносно тіла, є постійною.

Важливо! Усі рами в цій книзі стаціонарні, інерційні, рами. Коли ми говоримо про каркас тіла $\{b\}$, ми маємо на увазі нерухомий каркас, який миттєво збігається з каркасом, який прикріплений до (можливо, рухомого) тіла. Це важливо мати на увазі, оскільки ви, можливо, проходили курс динаміки, у якому використовувалися неінерційні рухомі каркаси, прикріплені до обертових тіл. Не плутайте їх із нерухомими, інерційними каркасами тіла.

Для простоти ми зазвичай будемо називати каркас кузова каркасом, прикріпленим до рухомого твердого тіла. Незважаючи на це, в будь-який момент під «каркасом тіла» ми насправді маємо на увазі нерухому рамку, яка миттєво збігається з рамкою, що рухається разом з тілом.

Варто ще раз повторити: всі рами нерухомі.

Усі системи відліку є правосторонніми, як показано на рисунку 2.4. Позитивне обертання навколо осі визначається як напрямок, у якому згинаються пальці правої руки, коли великий палець спрямований уздовж осі (рис. 2.4).



Рисонок 2.4 – (Ліворуч) Осі x , y і z правосторонньої системи відліку вирівняно відповідно з вказівним, середнім і великим пальцями правої руки. (Вправо) Позитивне обертання навколо осі відбувається в тому напрямку, в якому скручуються пальці правої руки, коли великий палець спрямований уздовж осі

Рухи твердого тіла на площині. Розглянемо плоске тіло (сіра форма) на рисунку 2.4; його рух обмежений площиною. Припустимо, що масштаб довжини та фіксована система відліку $\{s\}$ були вибрані, як показано, з одиничними осями \hat{X}_s та \hat{Y}_s . (У цій лекції позначення капелюха вказує на одиничний вектор.) Подібним чином ми прикріплюємо систему відліку з одиничними осями \hat{X}_b та \hat{Y}_b до плоского тіла. Оскільки ця рамка рухається разом з тілом, її називають рамою тіла і позначають $\{b\}$.

Щоб описати конфігурацію плоского тіла, потрібно вказати лише положення та орієнтацію каркаса тіла відносно нерухомого каркаса. Початок тіла-рама p можна виразити через осі координат



{s} як

$$p = p_x \hat{x}_s + p_y \hat{y}_s \quad (2.7)$$

Ви, ймовірно, більше звикли записувати цей вектор як просто $p = (p_x, p_y)$; це добре, коли немає можливості неоднозначності щодо систем відліку, але запис p як у рівнянні (2.7) чітко вказує на систему відліку, щодо якої визначено (p_x, p_y) .

Найпростіший спосіб описати орієнтацію каркаса тіла {b} відносно фіксованого каркаса {s} — це вказати кут θ , як показано на рисунку 2.5. Інший (правда, менш простий) спосіб полягає в тому, щоб визначити напрямки одиничних осей \hat{X}_b і \hat{Y}_b {b} відносно {s} у формі

$$x_b = \cos \theta X_s + \sin \theta y_s, \quad (2.8)$$

$$y_b = -\sin \theta X_s + \cos \theta y_s. \quad (2.9)$$

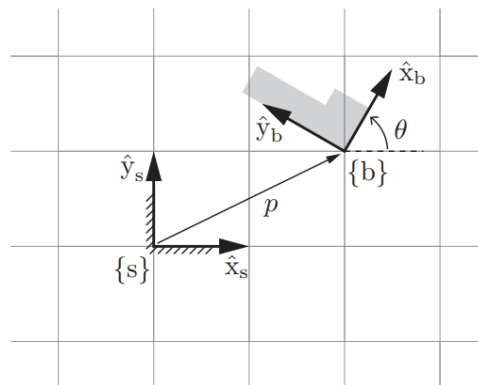


Рисунок 2.5 – Система {b} тіла виражається в координатах фіксованої системи {s} вектором p і напрямками одиничних осей \hat{X}_b та \hat{Y}_b . У цьому прикладі $p = (2, 1)$ і $\theta = 60^\circ$, тому $x_b = (\cos \theta, \sin \theta) = (0,5, 1/\sqrt{2})$ і $y_b = (-\sin \theta, \cos \theta) = (-1/\sqrt{2}, 0,5)$

На перший погляд, це здається досить неефективним способом представлення орієнтації тіла та каркасу. Однак уявіть, якби тіло довільно рухалося в тривимірному просторі; одного кута θ було б недостатньо для опису орієнтації зміщеної системи відліку. Насправді нам знадобляться три кути, але поки що незрозуміло, як визначити відповідний набір із трьох кутів. Однак виразити напрямки координатних осей {b} через коефіцієнти координатних осей {s}, як ми зробили вище для плоского випадку, є простим.

Припустимо, що ми погоджуємося виразити все в термінах {s}, тоді як точку p можна представити як вектор-стовпець $p \in \mathbb{R}^2$ виду

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

два вектори x_b і y_b також можна записати як вектори-стовпці та за-пакувати в наступну матрицю P 2×2 :

$$P = [\hat{x}_b \ \hat{y}_b] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Матриця P є прикладом **матриці обертання**. Хоча P складається з чотирьох чисел, вони підлягають трьом обмеженням (кожен стовець P має бути одиничним вектором, а два стовпці мають бути ортогональними один одному), а один ступінь свободи, що залишився, параметризований θ . Разом пара (P, p) забезпечує опис орієнтації та положення $\{b\}$ відносно $\{s\}$.

Тепер зверніться до трьох кадрів на рисунку 2.6. Повторюючи наведений вище підхід і виражаючи $\{c\}$ в $\{s\}$ як пару (R, r) , ми можемо написати

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

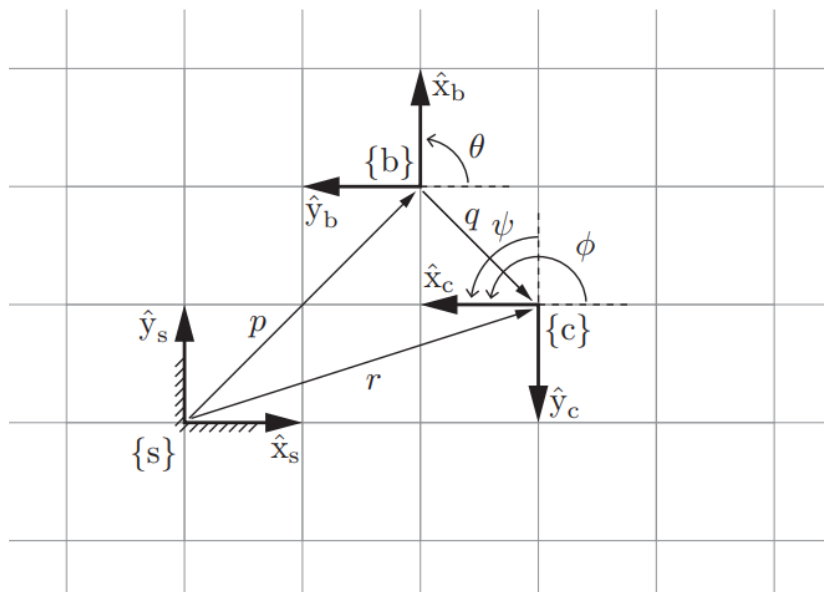



Рисунок 2.6 – Кадр $\{b\}$ у $\{s\}$ задано (P, p) , а кадр $\{c\}$ у $\{b\}$ задано (Q, q) . З них ми можемо вивести кадр $\{c\}$ у $\{s\}$, описаний (R, r) . Числові значення векторів p, q і r і напрямки осей координат трьох кадрів видно з сітки одиничних квадратів

Ми також можемо описати кадр $\{c\}$ відносно $\{b\}$. Позначаючи q вектор від початку $\{b\}$ до початку $\{c\}$, виражений у координатах $\{b\}$, і позначаючи Q орієнтацію $\{c\}$ відносно $\{b\}$, ми можемо записати $\{c\}$ відносно $\{b\}$ як пару (Q, q) , де

$$q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega \\ \sin \omega & \cos \omega \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$



Якщо ми знаємо (Q, q) (конфігурація $\{c\}$ відносно $\{b\}$) і (P, p) (конфігурація $\{b\}$ відносно $\{s\}$), ми можемо обчислити конфігурацію $\{c\}$ відносно $\{s\}$ наступним чином:

$$R = PQ \text{ (перетворення } Q \text{ на кадр } \{s\}) \quad (2.13)$$

$r = Pq + p$ (перетворіть q на кадр $\{s\}$ і векторну суму за допомогою p). (2.14)

Таким чином (P, p) не тільки представляє конфігурацію $\{b\}$ в $\{s\}$; його також можна використовувати для перетворення представлення точки або кадру з координат $\{b\}$ на координати $\{s\}$.

Тепер розглянемо тверде тіло з двома прикріпленими до нього рамами, $\{d\}$ і $\{c\}$. Кадр $\{d\}$ спочатку збігається з $\{s\}$, а $\{c\}$ спочатку описується (R, r) у $\{s\}$ (рис. 2.7 (a)). Потім тіло переміщується таким чином, що $\{d\}$ переміщується до $\{d'\}$, збігаючись із рамкою $\{b\}$, описаною (P, p) у $\{s\}$. Куди потрапляє $\{c\}$ після цього руху? Позначивши конфігурацію нового фрейму $\{c'\}$ як (R', r') , ви можете це перевірити

$$R = PR, \quad (2.15)$$

$$r' = Pr + p, \quad (2.16)$$

що подібне до рівнянь (2.13) і (2.14). Різниця полягає в тому, що (P, p) виражається в тій самій системі, що й (R, r) , тому рівняння розглядаються не як зміна координат, а замість цього як переміщення твердого тіла (також відоме як тверде тіло рух тіла): на малюнку 2.7 (a) перетворення ϕ обертає $\{c\}$ відповідно до P і перетворення ϕ переводить його на p у $\{s\}$.

Таким чином, ми бачимо, що пара матриця-вектор повороту, така як (P, p) , може бути використана для трьох цілей:

- (a) представити конфігурацію твердого тіла в $\{s\}$ (рис. 2.5);
- (b) змінити систему відліку, в якій представлений вектор або рамка (рис. 2.6);
- (c) щоб перемістити вектор або рамку (рис. 2.7 (a)).

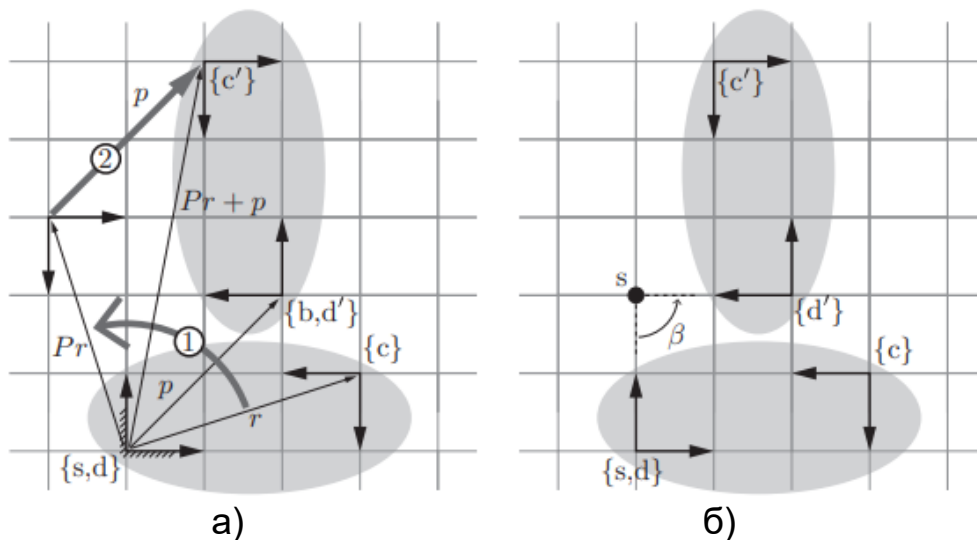


Рисунок 2.7 – Рама $\{d\}$, прикріплена до еліптичного твердого тіла: а) спочатку збігається з $\{s\}$, зміщується до $\{d'\}$ (яка збігається з нерухомою рамою $\{b\}$), спочатку обертаючись відповідно до P , потім перекладаючи відповідно до p , де (P, p) є представленням $\{b\}$ у $\{s\}$. Таке ж перетворення перетворює каркас $\{c\}$, також прикріплений до твердого тіла, до $\{c'\}$. Перетворення, позначене φ , жорстко повертає $\{c\}$ навколо початку $\{s\}$, а потім перетворення (φ переводить кадр на p , виражений у $\{s\}$); б) замість того, щоб розглядати це зміщення як обертання з подальшим переміщенням, обертання та переміщення можна виконувати одночасно. Переміщення можна розглядати як поворот на $\beta=90^\circ$ навколо фіксованої точки s

Посилаючись на рисунок 2.7 (б), зауважте, що рух твердого тіла, зображений на рисунку 2.7 (а), виражений як обертання з подальшим переміщенням, можна отримати, просто обертаючи тіло навколо фіксованої точки s на кут β . Це плоский приклад гвинтового руху. Тому переміщення можна параметризувати трьома координатами гвинта (β, s_x, s_y) , де $(s_x, s_y) = (0, 2)$ позначає координати точки s (тобто вісь гвинта поза сторінки) у фіксованому кадрі $\{s\}$.

Інший спосіб представити рух гвинта - розглядати його як переміщення, отримане шляхом одночасного дотримання кутової та лінійної швидкостей на заданій відстані. Оглядова фігура 2.7 (б), ми бачимо, що обертання навколо s з одиничною кутовою швидкістю ($\omega = 1$ рад/с) означає, що точка в початку кадру $\{s\}$ рухається зі швидкістю дві одиниці на секунду спочатку в X -напрямку кадру $\{s\}$, тобто $v = (v_x, v_y) = (2, 0)$. Ми можемо упакувати їх разом у три вектори $S = (\omega, v_x, v_y) = (1, 2, 0)$, представлення осі гвинта. Дотримання цієї осі гвинта під кутом $\theta = \pi/2$ дає кінцеве переміщення. Таким чином, ми можемо представити переміщення за допомогою трьох координат $S \theta = (\pi/2, \pi, 0)$. Ці координати мають деякі переваги, і ми називаємо їх експоненціальними координатами для плоского переміщення твердого тіла.

Щоб представити комбінацію кутової та лінійної швидкості, яка називається скручуванням, візьмемо вісь гвинта $S = (\omega, v_x, v_y)$, де $\omega = 1$ і масштабуйте його, помноживши на деяку швидкість обертання, θ . Скручування $V = S_0$. Чисте переміщення, отримане обертанням навколо осі гвинта S на кут θ , еквівалентне зміщенню, отриманому обертанням навколо S зі швидкістю $\theta = \theta$ протягом одиниці часу, тому $V = S_0$ також можна вважати набором експоненціальних координат.

Попередній перегляд решти цієї глави. Ми узагальнюємо наведені вище поняття для тривимірних рухів твердого тіла. Для цього розглянемо тверде тіло, яке займає тривимірний фізичний простір, як показано на рисунку 2.8. Припустимо, що вибрано масштаб довжини для фізичного простору, і що фіксований кадр $\{s\}$ і каркас тіла $\{b\}$ вибрано, як показано. У цій книзі всі системи відліку є правосторонніми – одиничні осі $\{x, y, z\}$ завжди задовольняють $x \times y = z$. Позначимо одиничні осі нерухомої системи $\{x_s, y_s, z_s\}$, а одиничні осі каркаса тіла на $\{x_b, y_b, z_b\}$. Нехай p позначає вектор від початку фіксованої системи до початку основної системи. У термінах фіксованих координат системи p можна виразити як

$$p = p_1 x_s + p_2 y_s + p_3 z_s. \quad (2.17)$$

Осі рами тіла також можна виразити як

$$x_b = \Gamma_{11} x_s + \Gamma_{21} y_s + \Gamma_{31} z_s, \quad (2.18)$$

$$y_b = \Gamma_{12} x_s + \Gamma_{22} y_s + \Gamma_{32} z_s, \quad (2.19)$$

$$z_b = \Gamma_{13} x_s + \Gamma_{23} y_s + \Gamma_{33} z_s. \quad (2.20)$$

Визначення $p \in \mathbb{R}^3$ and $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ як

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \quad R = [\widehat{x}_b \quad \widehat{y}_b \quad \widehat{z}_b] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

12 параметрів, визначених (R, p) , потім забезпечують опис положення та орієнтації твердого тіла відносно нерухомої рами.

Оскільки орієнтація твердого тіла має три ступені свободи, лише три з дев'яти елементів R можна вибрати незалежно.

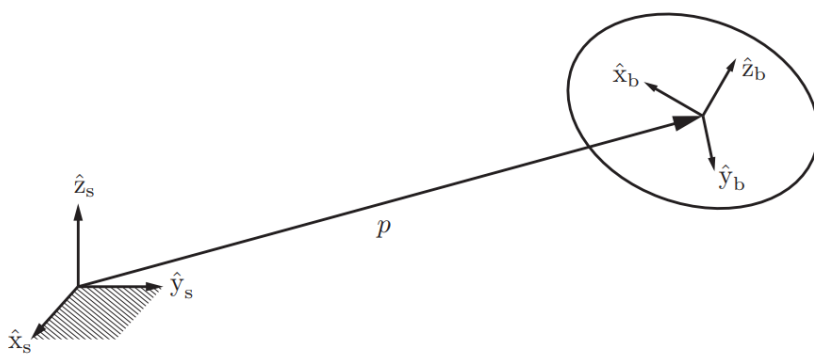


Рисунок 2.8 – Математичний опис положення та орієнтації.

Одне трипараметричне представлення поворотів забезпечується експоненціальними координатами, які визначають вісь обертання та кут повороту навколо цієї осі. Ми залишаємо інші популярні представлення орієнтацій (трюхпараметричні кути Ейлера та кути крену-нахилу-рискання, параметри Кейлі-Родрігеса та одиничні кватерніони, які використовують чотири змінні з одним обмеженням).

Потім ми досліджуємо шестипараметричні експоненціальні координати для конфігурації твердого тіла, які виникають в результаті інтегрування шестивимірною скручування, що складається з кутової та лінійної швидкостей тіла. Це представлення впливає з теореми Шальза-Моцці, яка стверджує, що будь-яке переміщення твердого тіла може бути отримано кінцевим обертанням і переміщенням навколо фіксованої осі гвинта.

Завершуємо обговоренням сил і моментів. Замість того, щоб розглядати їх як окремі тривимірні величини, ми об'єднуємо вектори моменту та сили в шестивимірний ключ. Поворотний і гайковий ключ і правила маніпулювання ними складають основу для кінематичного та динамічного аналізу в наступних розділах.

Використання матриць обертання. Аналогічно обговоренню після рівнянь (2.15) та (2.16), є три основні способи використання матриці обертання R :

- (а) представляти орієнтацію;
- (б) змінити систему відліку, в якій представлений вектор або рамка;
- (с) щоб повернути вектор або рамку.

У першому випадку R вважається фреймом; у другому і третьому варіантах використання R розглядається як оператор, який діє на вектор або систему (змінюючи її систему відліку або обертаючи її).

Щоб проілюструвати ці способи використання, зверніться до рисунка 2.9, на якому показано три різні координатні рамки - $\{a\}$, $\{b\}$ і $\{c\}$ - що представляють той самий простір. Ці кадри вибрано так, щоб мати те саме походження, оскільки ми представляємо лише орієнтації, але, щоб зробити осі зрозумілими, на рисунку показано той самий простір, намальований тричі.

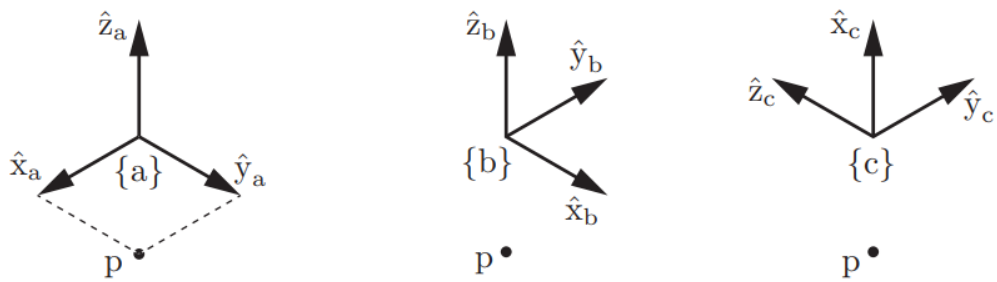


Рисунок 2.9 – Той самий простір і та сама точка p представлені в трьох різних кадрах з різними орієнтаціями

Також показано точку p у просторі. Не показано фіксований інтервал $\{s\}$, який вирівняно з $\{a\}$. Можна записати орієнтації трьох кадрів відносно $\{s\}$

$$R_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_c = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

і розташування точки p у цих системах можна записати

$$p_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_c = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Зауважте, що $\{b\}$ отримується обертанням $\{a\}$ навколо z а на 90° , а $\{c\}$ — обертанням $\{b\}$ навколо y б на -90° .

Відображення орієнтації Коли ми пишемо R_c , ми неявно маємо на увазі орієнтацію кадру $\{c\}$ відносно фіксованого кадру $\{s\}$. Ми можемо бути більш чіткими щодо цього, записавши це як R_{sc} : ми представляємо кадр $\{c\}$ другого нижнього індексу відносно кадру $\{s\}$ першого нижнього індексу. Ця нотація дозволяє нам виразити один кадр відносно іншого, який не є $\{s\}$; наприклад, R_{bc} — це орієнтація $\{c\}$ відносно $\{b\}$.

Якщо немає можливості сплутати кадри, ми можемо просто написати R .

Переглядаючи рисунок 2.9, ми бачимо це

$$R_{ac} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_{ca} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Простий розрахунок показує, що $R_{ac} R_{ca} = I$; тобто $R_{ac} = R^{-1}$ - або, що те саме, з пропозиції 3.3, $R_{ac} = R_a$. Фактично, для будь-яких двох кадрів $\{d\}$ і $\{e\}$,

$$R_{de} = R^{-1}_{ed} = R^T_{ed}$$

Ви можете перевірити цей факт, використовуючи будь-які два кадри на рисунку 2.9.

Зміна системи відліку Матриця повороту R_{ab} представляє орієнтацію $\{b\}$ в $\{a\}$, а R_{bc} представляє орієнтацію $\{c\}$ у $\{b\}$. Прямий розрахунок показує, що орієнтація $\{c\}$ в $\{a\}$ може бути обчислена як

$$R_{ac} = R_{ab} R_{bc}. \quad (2.22)$$

У попередньому рівнянні R_{bc} можна розглядати як представлення орієнтації $\{c\}$, тоді як R_{ab} можна розглядати як математичний оператор, який змінює систему відліку з $\{b\}$ на $\{a\}$, тобто

$$R_{ac} = R_{ab} R_{bc} = \text{змінити_посилальний_кадр_з_}\{b\}_на_}\{a\} (R_{bc}).$$

Рухи та повороти твердого тіла. Приклад 2.1. На рисунку 2.10 показана рука робота, встановлена на рухомій платформі на колесах, яка рухається в кімнаті, і камера, закріплена на стелі.

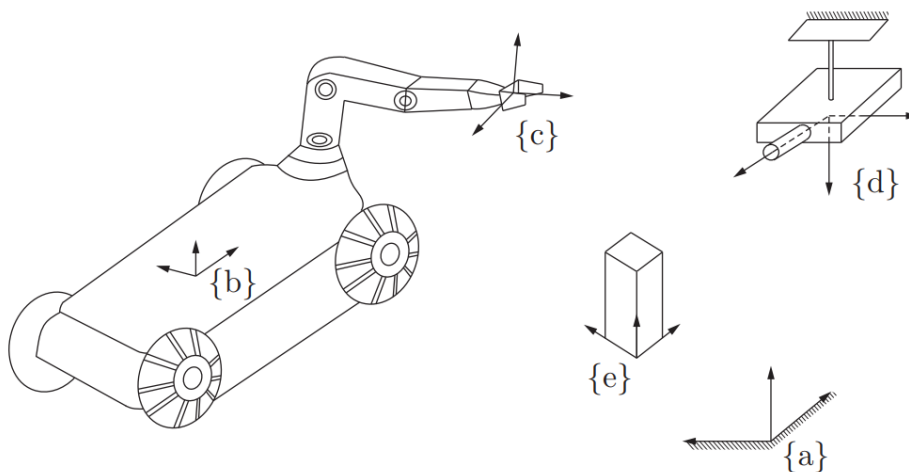


Рисунок 2.10 – Призначення систем відліку

Рамки $\{b\}$ та $\{c\}$ відповідно прикріплені до платформи з колесами та кінцевого елемента руки робота, а рама $\{d\}$ прикріплена до камери. Встановлено фіксовану рамку $\{a\}$, і робот повинен підняти об'єкт із рамкою тіла $\{e\}$. Припустимо, що перетворення T_{db} і T_{de} можна обчислити на основі вимірювань, отриманих за допомогою камери. Трансформацію T_{bc} можна обчислити, використовуючи вимірювання кута суглоба руки. Перетворення T_{ad} вважається заздалегідь відомим. Припустимо, що ці обчислені і відомі перетворення задаються наступним чином:

$$T_{db} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 250 \\ 0 & -1 & 0 & -150 \\ -1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_{de} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 300 \\ 0 & -1 & 0 & 100 \\ -1 & 0 & 0 & 120 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_{ad} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 400 \\ 0 & -1 & 0 & 50 \\ -1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_{bc} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 30 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & -40 \\ 1 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Необхідно визначити конфігурацію об'єкта відносно руки робота, T_{ce} . Ми це знаємо

$$T_{ab}T_{bc}T_{ce} = T_{ad}T_{de},$$

де єдиною величиною, окрім T_{ce} , яка не надається нам безпосередньо, є T_{ab} . Однак, оскільки $T_{ab} = T_{ad}T_{db}$, ми можемо визначити T_{ce} таким чином:

$$T_{ce} = (T_{ad}T_{db}T_{bc})^{-1}T_{ad}T_{de}$$

З наведених перетворень отримуємо

$$T_{ad}T_{de} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 280 \\ 0 & 1 & 0 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_{ad}T_{db}T_{bc} = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 230 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 160 \\ 1 & 0 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(T_{ad}T_{db}T_{bc})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -75 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 70/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 390/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

оцінюється T_{ce}

$$T_{ce} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -75 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & -260/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 130/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Приклад 2.2. На рисунку 2.11 показано вид зверху автомобіля з одним керованим переднім колесом, який рухається по площині.

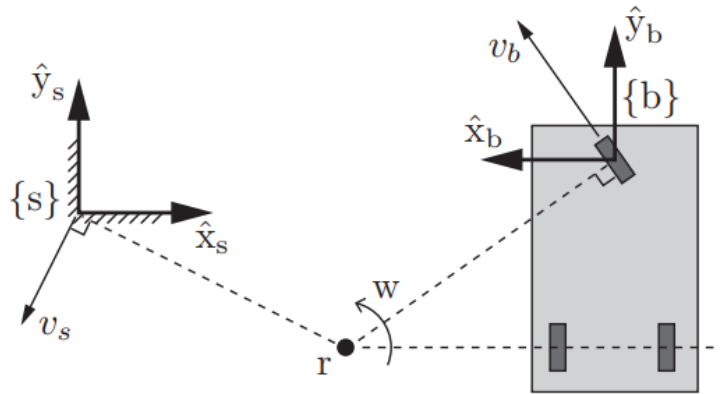


Рисунок 2.11 – Скручування, що відповідає миттєвому руху шасі триколісного автомобіля, можна візуалізувати як кутову швидкість w навколо точки r

Вісь Z в основній рамки $\{b\}$ знаходиться всередині сторінки, а вісь Z s нерухомої рамки $\{s\}$ — поза сторінкою. Кут переднього колеса автомобіля призводить до того, що рух автомобіля є чистою кутовою швидкістю $w = 2$ рад/с навколо осі сторінки в точці r на площині. Переглядаючи рисунок, ми можемо записати r як $r_s = (2, -1, 0)$ або $r_b = (2, -1, 4, 0)$, w як $\omega_s = (0, 0, 2)$ або $\omega_b = (0, 0, -2)$, а T_{sb} як

$$T_{sb} = \begin{bmatrix} R_{sb} & p_{sb} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

З рисунка і проста геометрія, ми отримуємо

$$v_s = \omega_s \times (-r_s) = r_s \times \omega_s = (-2, -4, 0),$$

$$v_b = \omega_b \times (-r_b) = r_b \times \omega_b = (2.8, 4, 0),$$


і таким чином отримати кручення V_s і V_b :

$$\mathcal{V}_s = \begin{bmatrix} \omega_s \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{V}_b = \begin{bmatrix} \omega_b \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 2.8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Щоб підтвердити ці результати, спробуйте обчислити $V_s = [AdTsb]V_b$.

Контрольні запитання до теми 2

1. Що таке кінематичний аналіз механізму?
2. Які три основні задачі кінематичного аналізу?
3. Що є вихідними даними для визначення положень ланок механізму?
4. Як визначається масштаб довжин μ_1 у кінематичному аналізі?
5. Яка послідовність побудови плану положень для механізму приводу конвеєра?
6. Що означає поняття "метод засічок" у визначенні положень точок?
7. Які методи використовуються для визначення швидкостей і прискорень окремих точок ланок механізму?
8. Що таке метод планів швидкостей і прискорень?
9. Які особливості аналізу структурних груп другого класу?
10. Як визначаються вектори абсолютних швидкостей точок у методі планів швидкостей?
11. Як розраховуються відносні швидкості точок за допомогою векторних рівнянь?
12. Які початкові дані потрібні для побудови плану швидкостей?
13. Що таке теорема подібності у теоретичній механіці?
14. Як визначається швидкість центру обертальної пари E у механізмі?
15. Які приклади механізмів другого класу різних видів наведені у лекції?
16. Що являє собою план прискорень і як його будувати?
17. Які властивості структурних груп другого класу використовуються при побудові планів прискорень?
18. Як розраховується швидкість точки B при рівномірному обертанні кривошипа?
19. Які методи кінематичного аналізу застосовуються для механізмів поперечно стругального верстата?
20. Як проводиться векторне рівняння для визначення швидкості точки C?

- 
21. Які властивості планів швидкостей і прискорень використовуються у механізмах другого класу?
 22. Які особливості має побудова плану положень для механізму з різними структурними групами?
 23. Як використовуються лінії дії векторів швидкостей при побудові планів?
 24. Яка роль швидкостей центрів крайніх пар у структурних групах другого класу?
 25. Як визначаються відносні швидкості VCB і VCD у механізмі приводу конвеєра?

Використана література

1. Ceccarelli M. Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulation. Second Edition. Rome : Springer Cham, 2022. 381 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90848-5>.
2. Ковальов Ю. А., Кошель С. О., Манойленко О. П. Проектування промислових роботів та маніпуляторів : навчальний посібник. Київ : Центр учбової літератури, 2022. 256 с.

ТЕМА 3

ОСНОВИ СИЛОВОГО АНАЛІЗУ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ

Метою вивчення теми є ознайомлення основами силового аналізу механічних систем, силами інерції ланок промислових роботів та маніпуляторів, визначенням динамічних сил за величиною та напрямком.

Завдання вивчення теми збігаються з переліком питань для розгляду, що наведений нижче.

Перелік питань до розгляду

- 3.1 Сили інерції ланок промислових роботів та маніпуляторів, визначення динамічних сил за величиною та напрямком
- 3.2 Визначення реакцій у механізмах з нижчими кінематичними парами
- 3.3 Практичні вправи з передової кінематики

3.1 Сили інерції ланок промислових роботів та маніпуляторів, визначення динамічних сил за величиною та напрямком

Вступ. Порядок силового розрахунку полягає у тому, що конструктори спочатку визначають зовнішні сили, які діють на механічні системи промислових роботів та маніпуляторів, потім – задаються наближеними законами руху вхідних ланок механічної системи, що досліджується та розраховують сили інерції, які виникають при цьому русі. Закінчується силовий аналіз визначенням зусиль, які діють на окремі ланки механічних систем роботів. *Розрахунки*, в яких не враховуються додаткові сили, що виникають при русі машини, *називаються статичними*, вони вірні лише при розгляді нерухомих систем чи при прямолінійно-рівномірному русі, коли не виникають прискорення. Обмежуватись такими розрахунками при дослідженні механічних систем промислових роботів та маніпуляторів не можна, необхідно врахувати і ті додаткові зусилля, які виникають при русі механічних складових систем роботів та маніпуляторів, тому що саме вони можуть перевищувати статичні сили, що прикладені до таких механізмів системи на значну величину.

Розрахунки, в яких враховуються зусилля, що виникають при русі, називаються *динамічними*. *Методи силового розрахунку* можуть бути різноманітними, найбільш зручним методом є *кінестатичний*. Суть цього методу полягає у тому, що при розв'язанні завдань динаміки користуються рівняннями статички. В основу його покладений відомий *принцип Д'Аламбера*: „рівнянням динаміки системи можна надати вигляд рівнянь статички, якщо до безпосередньо діючих на механізм сил додати фіктивні сили інерції”. Варто, однак, пам'ятати що сили інерції не фіктивні, а цілком реальні, але діють вони не на прискорюване тіло,

а на тіло, яке надає прискорення. Фіктивність сил інерції у даному випадку полягає у тому, що при складанні рівнянь рівноваги ці сили вважають прикладеними до прискорюваного тіла.

Внаслідок проведеного силового розрахунку механізму може бути визначене зусилля, що діє на ведучу ланку; це дозволяє визначити необхідний крутний момент двигуна, який має бути встановлений на даній машині.

Як відомо з курсу теоретичної механіки, при русі будь-якої матеріальної точки ланки виникає сила інерції. Для ланок, які мають площину симетрії, паралельну площині руху всі елементарні сили інерції, що виникають, можуть бути умовно приведені до головного вектора сил інерції:

$$\bar{P}_{iH} = m\bar{a}_s \quad (3.1)$$

і головного моменту пар сил інерції

$$M_{iH} = -J_S\varepsilon \quad (3.2)$$

де m — маса ланки, зосереджена у центрі мас S ; a_s — повне прискорення точки B ;

a_s — момент інерції ланки відносно осі, яка проходить через центр мас; ε — кутове прискорення ланки.

Знак мінус у рівняннях (3.1) та (3.2) вказує, що сила \bar{P}_{iH} спрямована протилежно прискоренню \bar{a}_s , а момент M_{iH} спрямований у бік, протилежний напрямленню кутового прискорення ε .

Отже, для визначення \bar{P}_{iH} і M_{iH} необхідно знати величини маси ланки m , повне прискорення центру мас a_s , кутове прискорення ланки ε і момент інерції маси ланки J_S .

Величини маси і моменту інерції ланки при виконанні розрахунків механізмів є заданими. Значення прискорення центру мас і кутового прискорення ланок механізму визначають після виконаного кінематичного аналізу.

Внаслідок того, що величини і напрямки рівнодіючих сил і моментів пар сил інерції залежать від характеру руху ланок, розглянемо різні випадки руху, які здійснюють ланки плоских механізмів.

Поступальний рух. При поступальному рівномірному русі ($V = \text{const}$) $a_s = 0$ і $\varepsilon = 0$. отже сили інерції відсутні.

При русі зі змінною швидкістю V ($V = \text{inv}$) буде виникати лише сила інерції $\bar{P}_{iH} = -\overline{m \cdot a_s}$ прикладена у центрі мас ланки S направлена у протилежний його прискоренню бік (рис. 3.1). Враховуючи ту обставину, що при поступальному русі прискорення будь-яких точок ланки однакові, можна величину сили інерції визначити як добуток маси на прискорення будь-якої точки цієї ланки, наприклад $P_{iH} = m a_s = m a_B$.

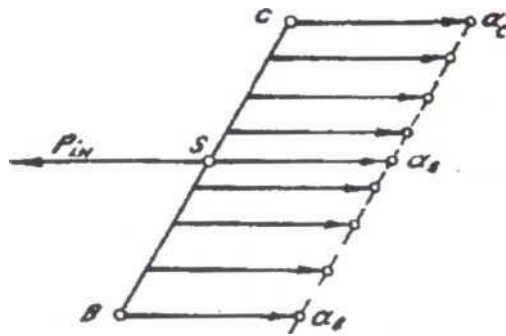


Рисунок 3.1 – Сили інерції при поступальному русі ланки

Обертальний рух. При цьому виді руху спостерігаються два різних випадки:

а) ланка обертається навколо осі, яка проходить через центр мас Б (рис. 3.2). Тоді при рівномірному русі головний вектор сили інерції P_{iH} і момент пар сил інерції M_{iH} рівні нулю, внаслідок того, що $a_s = 0$ і $\varepsilon = 0$. У випадку нерівномірного обертання $\varepsilon \neq 0$ і момент пар сил інерції рівний $M_{iH} = -J_S \varepsilon$.

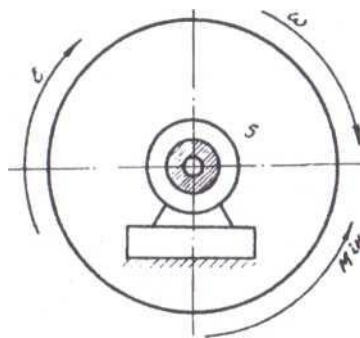


Рисунок 3.2 – До визначення моменту пар сил інерції при обертальному русі

б) ланка обертається навколо осі В, яка не проходить через центр мас Б (рис. 3.3). У цьому випадку при рівномірному русі, коли $\varepsilon = 0$, буде діяти лише сила інерції $\bar{P}_{iH} = -\bar{m} \cdot \bar{a}_s$ прикладена у центрі мас; при нерівномірному русі $\varepsilon \neq 0$ на ланку буде діяти сила $\bar{P}_{iH} = -\bar{m} \cdot \bar{a}_s$ і момент $M_{iH} = -J_S \varepsilon$.

Для зручності проведення силових розрахунків іноді доцільно замінити силу і момент пар сил інерції однією силою. Величину, точку прикладання і напрямок цієї рівнодіючої сили можна визначити з тих міркувань, щоб дія вказаної сили була еквівалентна дії сили P_{iH} та моменту сил інерції M_{iH} . Для цього перенесемо силу P_{iH} паралельно самій собі. Прикладемо її до точки К (рис. 3.3) і розкладемо на дві складові P_{iH}^n , направлену по осі ланки ВК і P_{iH}^t , – перпендикулярно до осі ланки.

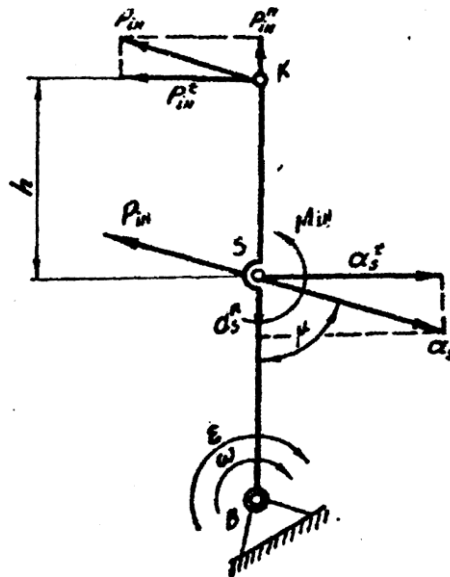


Рисунок 3.3 – До визначення центру коливань

Ураховуючи те, що сила $P_{ін}$ прикладена в точці К, повинна замінювати дії сили $P_{ін}$, прикладеної в центрі мас в і моменту $M_{ін}$ можна записати наступне рівняння моментів, відносно осі В обертання ланки (при цьому ураховуємо, що момент від сили $P_{ін}^n$ дорівнює нулю).

$$\begin{aligned}
 P_{ін}^t \cdot (L_{BS} + h) &= M_{ін} + P_{ін}^t \cdot L_{BS} \\
 P_i^t L_{BS} + P_i^t h &= M_{ін} + P_i^t L_{BS} \\
 P_i^t h &= M_{ін}
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

де h — відстань від центру мас S до точки K . Через те, що $M_{ін} = J\epsilon$, $\epsilon = \frac{a_{SB}^t}{L_{BS}}$, а $P_{ін}^t = m \cdot a_{SB}^t$,

з рівняння (3.3) визначимо величину h

$$h = \frac{M_{ін}}{P_{ін}^t} = \frac{J_S \epsilon}{m a_{SB}^t} = \frac{J_S \cdot a_{SB}^t}{m \cdot a_{SB}^t \cdot L_{BS}} = \frac{J_S}{m L_{BS}}
 \tag{3.4}$$

Відстань від осі обертання В до точки К визначається з рівняння:

$$L_{BK} = L_{BS} + h = L_{BS} + \frac{J_S}{m L_{BS}}
 \tag{3.5}$$

Точка К одержала назву центру коливання.

Таким чином, при обертальному русі з нерівномірною кутовою швидкістю навколо осі, яка не проходить через центр мас силу інерції $P_{ін}$ можна прикласти у центрі коливання К, положення якого визна-

чається за рівнянням (3.5).

Складний рух. При складному русі ланки сили інерції, що виникають, $\bar{P}_{iH} = -\overline{m \cdot a_s}$ також можуть бути представлені головним вектором сил інерції моментом пар сил інерції $M_{iH} = -J_S \varepsilon$ (рис. 3.4).

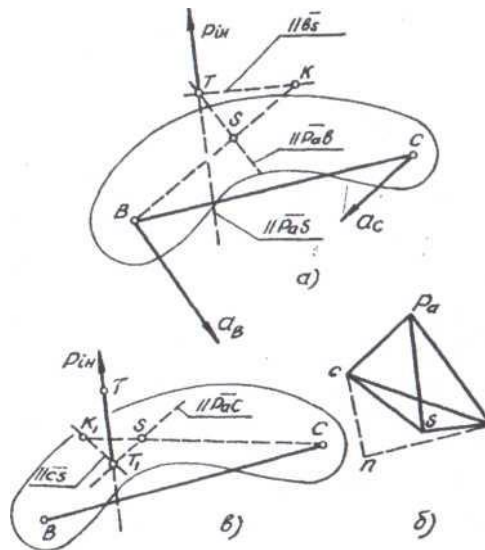


Рисунок 3.4 – Сили інерції при складному русі ланки

Однак у цьому випадку, для зручності проведення кінестатичного розрахунку, сила інерції \bar{P}_{iH} і момент пар сил інерції M_{iH} можуть бути замінені лише силою \bar{P}_{iH} , яка проходить через узагальнений центр коливання T .

Положення цієї точки можна визначити, якщо розглядати складний рух ланки, як переносний поступальний з прискоренням будь-якої вибраної точки і відносний обертальний навколо цієї точки (вибрана точка не повинна бути центром мас ланки).

Розглянемо ланку BC (рис. 3.4, а), що здійснює складний рух, прискорення точок B і C задані планом прискорень (рис. 3.4, б) тоді прискорення центру мас S ланки буде рівним

$$a_s = (p_a s) \mu_a$$

Складний рух уявимо як переносний поступальний з точкою B і відносний обертальний навколо точки B.

Тоді прискорення \bar{a}_s можна представити у вигляді

$$\bar{a}_s = \mu_a [(\overline{p_a b}) + (\overline{b s})],$$

а, отже, і головний вектор сил інерції $\bar{P}_{iH} = -\overline{m \cdot a_s}$ буде

$$\bar{P}_{iH} = [-m \mu_a (\overline{p_a b}) + [-m \mu_a (\overline{b s})]], \quad (3.6)$$

чи, позначивши перший доданок через $\overline{P_{iH}^I}$, а другий через $\overline{P_{iH}^B}$ одержимо

$$\bar{P}_{iH} = \bar{P}_{iH}^{\Pi} + \bar{P}_{iH}^B \quad (7)$$

де \bar{P}_{iH}^{Π} – сила інерції у переносному поступальному русі ланки з прискоренням точки В;

\bar{P}_{iH}^B – сила інерції у відносному обертальному русі ланки навколо точки В.

Сила проходить через центр мас ланки і спрямована зворотно прискоренню \bar{a}_B , а сила \bar{P}_{iH}^B проходить через центр коливання ланки (точку К), яка може бути визначена з рівняння,

$$L_{BK} = L_{BS} + \frac{J_S}{mL_{BS}}$$

і направлена зворотно прискоренню \bar{a}_{BS} . Перетин ліній дії цих двох сил визначає положення узагальненого центру коливання Т через який буде проходити повна сила інерції

$$\bar{P}_{iH} = -m \cdot \bar{a}_S = \bar{P}_{iH}^{\Pi} + \bar{P}_{iH}^B$$

При знаходженні положення точки Т немає необхідності визначати величини \bar{P}_{iH}^{Π} і \bar{P}_{iH}^B досить через центр мас S ланки провести промінь, паралельний прискоренню \bar{a}_B ($\parallel P_{aB}$), а через центр коливання К провести промінь, паралельний прискоренню \bar{a}_{SB} ($\parallel \bar{b}_S$) їх перетин і є точка Т, через яку буде проходити сила інерції $\bar{P}_{iH} = -m \cdot \bar{a}_S$, яка буде проходити повна сила інерції $\bar{P}_{iH} = -m \cdot \bar{a}_S$, яка направлена зворотно прискоренню \bar{a}_S .

Можна складний рух ланки ВС уявити як переносно-поступальний рух з точкою С і відносний — обертальний навколо цієї точки. Тоді ми одержимо інший узагальнений центр коливання Т₁, який також буде знаходитись на лінії дії сили P_{iH} .

3.2. Визначення реакцій у механізмах з нижчими кінематичними парами

Умови статичної визначеності плоских кінематичних ланцюгів. Рух механізму відбувається під дією прикладених до нього сил. Сили взаємодії ланок, які виникають при цьому у місцях їх зіткнення, називаються реакціями в кінематичних парах. Завдання визначення реакцій у кінематичних парах зводиться до визначення величини, напрямку і точки прикладення рівнодіючої реакції.

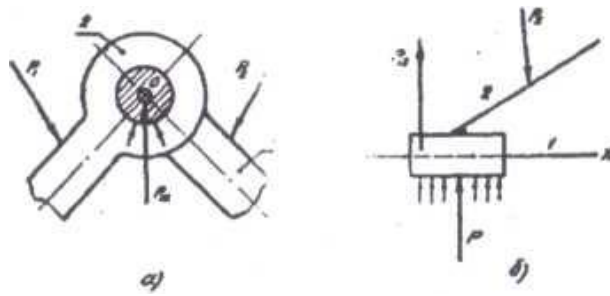


Рисунок 3.5 – Реакції в кінематичних парах: а) обертальній;
б) поступальній

Через те, що у плоских механізмах є два типи кінематичних пар п'ятого класу — обертальні і поступальні, розглянемо реакції, що виникають в цих парах, не враховуючи при цьому, у першому наближенні, сили тертя. В обертальній парі п'ятого класу результуюча сила реакції P_{12} буде проходити через центр O , шарніра (рис. 3.5, а). Величина і лінія цієї рівнодіючої невідомі, тому що вони залежать від сил, прикладених до ланок пари.

В поступальній парі результуюча реакція P_{12} буде направлена перпендикулярно до осі руху x — x цієї пари (рис. 3.5, б), при цьому невідомими є її величина і точка прикладання.

Таким чином, в реакціях, які виникають в кінематичних парах п'ятого класу, завжди невідомі два параметри, що визначають силу.

При плоскому русі механізму для кожної ланки можна скласти три рівняння рівноваги, а для n ланок число всіх рівнянь буде рівним $3n$. Число невідомих параметрів, які мають бути визначені для механізму з числом p_5 пар п'ятого класу, буде складати $2p_5$. Кінематичний ланцюг буде статично визначений, якщо задовольняється умова

$$3n = 2 p_5 \quad (3.8)$$

Таке співвідношення між числом рухомих ланок та числом пар п'ятого класу ми одержали раніше для структурних груп, тому можемо зробити висновок, що структурні групи з точки зору силового дослідження є статично визначеними, тому при знаходженні реакцій у кінематичних парах доцільно структурно розглядати рівновагу таких груп.

При цьому, звичайно, варто користуватися раціональними прийомами знаходження реакцій в кінематичних парах, для структурних груп різних видів.

Послідовність визначення реакцій.

Визначення реакцій у кінематичних парах структурних групах другого класу потрібно проводити у такій послідовності:

1. Для визначення реакцій у крайніх обертальних парах необхідно розкласти реакції на складові за двома взаємно перпендикулярними напрямками, один з яких має обов'язково проходити через центр

найближчої обертальної пари (рис. 3.6. а, б).

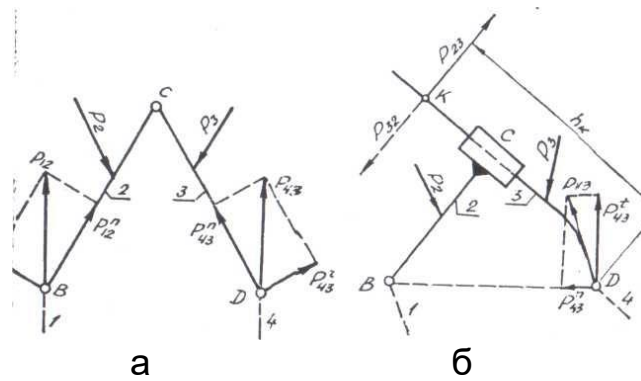


Рисунок 3.6 – До визначення реакцій в кінематичних парах структурних груп другого класу: а) першого виду; б) третього виду

Складові реакцій, спрямовані перпендикулярно до лінії, яка з'єднує центри найближчих двох обертальних пар, визначаються з умови рівноваги всіх сил, які діють на групу (чи на окрему ланку), шляхом складання рівняння моментів відносно центру найближчої обертальної пари. Для випадку, зображеного на рис. 3.6, б.

$$\sum M_B(P) = 0 \quad M_B(P_2) + M_B(P_3) - P_{43}^t L_{BD} = 0$$

звідки

$$P_{43}^t = \frac{M_B(P_2) + M_B(P_3)}{L_{BD}}$$

Для випадку, зображеного на рис. 3.6, а,

$$\sum M_C(P) = 0 \quad M_C(P_2) - P_{12}^t L_{BC} = 0.$$

звідки

$$P_{12}^t = \frac{M_C(P_2)}{L_{BC}}$$

Значення моментів треба приймати зі своїм знаком; якщо внаслідок розрахунку P_{43}^t (чи P_{12}^t) вийде від'ємним, то вказані вектори сил треба спрямувати у протилежний бік.

3. Невідомі складові реакцій у крайніх кінематичних парах за рис. 3.6, а (P_{43}^n і P_{12}^n) спрямовані по лінії, яка з'єднує центри шарнірів, визначаються графічно – шляхом побудови замкненого багатокутника сил (плану сил), при умові, що $\sum \bar{P} = \bar{0}$:

$$\bar{P}_{12} + \bar{P}_{12}^t + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_{43}^t + \bar{P}_{43}^n = 0$$

У тих випадках, коли крайня пара поступальна, графічно визначається повна величина реакції у цій парі.

Коли поступальною парою є середня (рис. 3.6, б), спочатку з рівноваги всієї групи визначається складова реакції в одній з обертальних пар (\bar{P}_{43}^t або \bar{P}_{12}^t): потім графічно знаходиться повна реакція у середній парі з розгляду рівноваги однієї ланки, а далі повністю реакція в іншій обертальній парі. Для цього спочатку будується силовий многокутник для однієї ланки, а потім для всієї групи на основі рівнянь рівноваги:

$$\text{ланки } \bar{P}_{43}^n + \bar{P}_{43}^t + \bar{P}_3 + \bar{P}_{23} = 0$$

$$(\text{або } \bar{P}_{12}^n + \bar{P}_{12}^t + \bar{P}_2 + \bar{P}_{32} = 0$$

$$\text{та групи } \bar{P}_{12} + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \bar{P}_{43}^{\square} = 0$$

Для визначення реакції ($\bar{P}_{23} = -\bar{P}_{32}$) у середній обертальній кінематичній парі (рис. 3.6, а) необхідно розглянути рівновагу однієї ланки, яка входить до складу даної групи. Величина і напрямок вказаної сили визначиться з плану сил, які діють на одну ланку

$$\sum P = 0 \quad \bar{P}_{12} + \bar{P}_2 + \bar{P}_{32} = 0 \quad (\text{або } \bar{P}_{43}^{\square} + \bar{P}_3 + \bar{P}_{23})$$

4. Положення точки прикладання реакцій у поступальних парах визначиться з розгляду суми моментів всіх сил, які діють на окремо взяту ланку, відносно центру найближчої обертальної пари (рис. 3.6, б)

$$\sum M_D(P) = 0; \quad M_D(P_3) - P_{23} h_K \mu_i = 0,$$

звідки $h_K = \frac{M_D(P_3)}{P_{23} \mu_1}$

Якщо значення h_K — від'ємне, реакцію \bar{P}_{23} необхідно прикласти по другий

бік від центру обертальної пари.

Кінетостатика ведучої ланки механізму.

Для рівноваги ведучої ланки механізму необхідно, крім сили \bar{P}_{21} викликані всіма силами, що діють на ведені ланки механізму, прикласти момент, який діє з боку двигуна.

Враховуючи ту обставину що невідомих параметрів сили реакції у парі п'ятого класу, утвореній ведучою ланкою з стояком, лише дві. а рівнянь статки для цієї ланки можна скласти три, третє рівняння рівноваги дозволяє визначити величину цього моменту.

Момент, прикладений до ведучої ланки, що зрівноважує дію всіх сил, прикладених до механізму, одержав назву зрівноважуючого мо-

менту ($M_{зр}$).

Цей момент може бути моментом зрівноважуючої сили, прикладеної до довільно вибраної точки на ведучій ланці.

Нехай на ведучу ланку (рис. 3.6. а) діє сила \overline{P}_{21} , що являє собою реакцію веденої частини механізму.

Для визначення зрівноважуючого моменту складемо рівняння моментів усіх сил відносно точки 0.

$$M_{зр} + M_0(P_{21}) = 0 \quad (3.9)$$

Знак зрівноважуючого моменту визначиться за знаком моменту $M_0(P_{21})$.

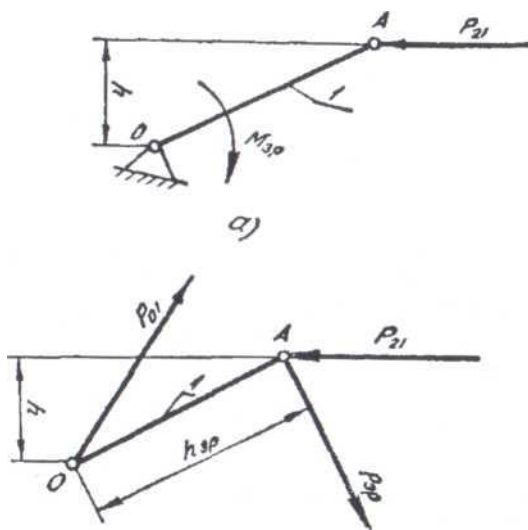


Рисунок 3.7 – До визначення на ведучій ланці: а) зрівноважуючого моменту; б) зрівноважуючої сили

Якщо ж замість зрівноважуючого моменту до ланки прикладена зрівноважуюча сила (рис. 3.7, б), то, довільно вибравши точку прикладання і лінію дії, визначають її величину з рівняння

$$P_{зр} \cdot h_{зр} + P_{21} \cdot h = 0 \quad (3.10)$$

де $h_{зр}$ – перпендикуляр, проведений з точки 0 на лінію дії сили $\overline{P}_{зр}$.

Реакція \overline{P}_{01} у кінематичній парі 0 визначиться побудовою плану сил згідно і рівнянням

$$\overline{P}_{зр} + \overline{P}_{21} + \overline{P}_{01} = 0$$

3.3 Практичні вправи з передової кінематики

Пряма кінематика робота стосується розрахунку положення та орієнтації його кінцевої рами за координатами θ .

Рисунок 3.8 ілюструє задачу прямої кінематики для плоского відкритого ланцюга 3R. Довжина ланки L_1 , L_2 і L_3 .

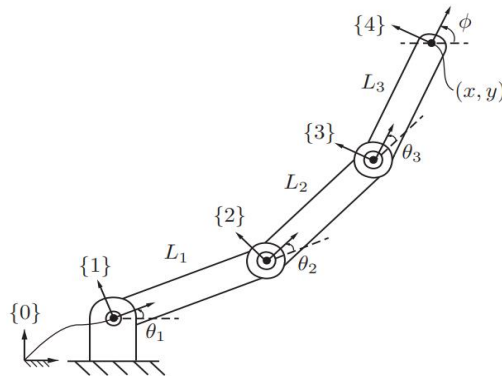


Рисунок 3.8 – Пряма кінематика плоского відкритого ланцюга 3R, для кожного кадру показано осі x і y ; осі z паралельні та поза сторінкою

Виберіть фіксовану раму $\{0\}$ з початковою точкою, розташованою в базовому з'єднанні, як показано, і припустіть, що кінцева рама $\{4\}$ була прикріплена до кінця третьої ланки. Декартова позиція (x, y) і орієнтація ϕ рамки кінцевого ефектора як функції кутів з'єднання $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ визначаються за формулою:

$$x = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \quad (3.11)$$

$$y = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \quad (3.12)$$

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3. \quad (3.13)$$

Якщо вас цікавить лише положення (x, y) кінцевого ефектора, тоді простір завдань робота буде вважатися площиною x - y , а пряма кінематика складатиметься лише з рівнянь (3.11) і (3.12). Якщо положення та орієнтація кінцевого ефектора мають значення, пряма кінематика складатиметься з трьох рівнянь (3.11) - (3.13).

Хоча наведений вище аналіз можна виконати лише за допомогою базової тригонометрії, неважко уявити, що для більш загальних просторових ланцюгів аналіз може стати значно складнішим. Більш систематичний метод отримання прямої кінематики може включати прикріплення опорних систем до кожної ланки; на рисунку 3.8 три опорні кадри зв'язку позначені відповідно $\{1\}$, $\{2\}$ і $\{3\}$. Тоді пряму кінематику можна записати як добуток чотирьох однорідних матриць перетворення:



$$T_{04} = T_{01}T_{12}T_{23}T_{34}, \quad (3.14)$$

де

$$T_{01} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{12} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & L_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_{23} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & L_2 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Зауважте, що T_{34} є константою і що кожна решта T_{i-1} , i залежить лише від спільної змінної θ_i .

Як альтернативу цьому підходу, давайте визначимо M як положення та орієнтацію кадру $\{4\}$, коли всі кути з'єднання встановлені на нуль («домашній» або «нульове» положення робота). Потім

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 + L_2 + L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

Тепер розглядайте кожну вісь поворотного з'єднання як вісь гвинта з нульовим кроком. Якщо θ_1 і θ_2 утримуються в нульовому положенні, тоді вісь гвинта, що відповідає обертанню про суглоб 3 можна виразити у кадрі $\{0\}$ як

$$S_3 = \begin{bmatrix} \omega_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -(L_1 + L_2) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ви повинні бути в змозі підтвердити це простим візуальним оглядом рисунка 3.8. Коли рука витягнута прямо вправо в нульовій конфігурації, уявіть поворотний стіл, що обертається з кутовою швидкістю $\omega_3=1$ рад/с навколо осі шарніра 3. Лінійна швидкість v_3 точки на поворотній платформі в початку $\{0\}$ знаходиться в напрямку $-y_0$ зі швидкістю $L_1 + L_2$ одиниць/с. Алгебраїчно $v_3 = -\omega_3 \times q_3$, де q_3 — будь-яка точка на осі з'єднання 3, виражена в $\{0\}$, наприклад, $q_3 = (L_1 + L_2, 0, 0)$.

Гвинтова вісь S_3 може бути виражена у формі матриці $se(3)$ як

$$[S_3] = \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -(L_1 + L_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для будь-якого θ_3 матричне експоненціальне представлення для гвинтових рухів з попереднього розділу дозволяє нам записати

$$T_{04} = e^{[S_3]\theta_3} M \quad (\text{for } \theta_1 = \theta_2 = 0). \quad (3.17)$$

Тепер для $\theta_1 = 0$ і будь-який фіксований (але довільний) θ_3 , обертання навколо суглоба 2 можна розглядати як застосування гвинтового руху до жорсткої пари (ланка2)/(ланка3), тобто,

$$T_{04} = e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} M \quad (\text{for } \theta_1 = 0), \quad (3.18)$$

де $[S_3]$ і M є такими, як визначено раніше, і

$$[S_2] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Нарешті, зберігаючи θ_2 і θ_3 фіксований, обертання навколо шарніра 1 можна розглядати як застосування гвинтового руху до всього жорсткого триланкового вузла. Тому ми можемо записати для довільних значень ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$),

$$T_{04} = e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} M, \quad (3.20)$$

$$[S_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Таким чином, пряма кінематика може бути виражена як добуток матричних експонент, кожна з яких відповідає руху гвинта. Зауважте, що в цьому останньому виведенні прямої кінематики не використовуються жодні опорні системи посилення; мають бути визначені лише $\{0\}$ та M .

У цій главі ми розглянемо пряму кінематику загальних відкритих

ланцюгів. Одне широко використовуване представлення для прямої кінематики відкритих ланцюгів спирається на параметри Денавіта-Гартенберга (параметри DH), і це представлення використовує рівняння (3.14). Інше представлення ґрунтується на формулі добутку експонентів (PoE), що відповідає рівнянню (3.20). Перевага представлення DH полягає в тому, що воно вимагає мінімальної кількості параметрів для опису кінематики робота: для n -шарнірного робота воно використовує $3n$ чисел для опису структури робота та n чисел для опису значень з'єднань. Представлення PoE не є мінімальним (воно вимагає $6n$ чисел для опису n осей гвинтів, на додаток до n значень з'єднань), але воно має переваги перед представленням DH (наприклад, не потрібні кадри зв'язку), і це наш бажаний вибір представлення прямої кінематики. Представлення DH та його зв'язок із представленням PoE.

Формула добутку експонент. Щоб використовувати формулу PoE, необхідно лише призначити стаціонарний кадр $\{s\}$ (наприклад, на фіксованій основі робота або в будь-якому іншому місці, яке зручно для визначення опорного кадру) і кадр $\{b\}$ наприкінці ефектора, описаний M , коли робот знаходиться в нульовому положенні. Звичайним є визначення рамки на кожній ланці, хоча зазвичай на осі з'єднання; вони потрібні для представлення DH і корисні для відображення графічної візуалізації геометричної моделі робота та для визначення властивостей маси ланки, які нам знадобляться. Таким чином, коли ми визначаємо кінематику n -шарнірного робота, ми можемо або (1) мінімально використовувати кадри $\{s\}$ і $\{b\}$, якщо ми лише зацікавлені в кінематиці, або (2) позначайте $\{s\}$ як рамку $\{0\}$, використовуйте рамки $\{i\}$ для $i = 1, \dots, n$ (рамки для ланок i на з'єднаннях i) і використовуйте ще одну кадр $\{n + 1\}$ (відповідає $\{b\}$) на кінцевому ефекторі. Кадр $\{n + 1\}$ (тобто $\{b\}$) є фіксованим відносно $\{n\}$, але він знаходиться в більш зручному місці для представлення конфігурації кінцевого ефектора. У деяких випадках ми обходимося без кадру $\{n + 1\}$ і просто називаємо $\{n\}$ кадром кінцевого ефекту $\{b\}$.

Перше формулювання: гвинтові осі в базовій рамі. Ключова концепція формули PoE полягає в тому, щоб розглядати кожне з'єднання як застосування гвинтового руху до всіх зовнішніх зв'язків. Щоб проілюструвати це, розглянемо загальний просторовий відкритий ланцюг, подібний до показаного на рисунку 3.9, що складається з n з'єднань з однією степенями свободи, з'єднаних послідовно. Щоб застосувати формулу PoE, ви повинні вибрати фіксований базовий кадр $\{s\}$ і кінцевий кадр $\{b\}$, приєднаний до останньої ланки. Поставте робота в нульове положення, встановивши всі значення з'єднань на нуль із указаним напрямком позитивного зміщення (обертання для поворотних з'єднань, переміщення для призматичних з'єднань) для кожного з'єднання. Нехай $MESE(3)$ позначає конфігурацію кадру кінцевого ефектора відносно фіксованого базового кадру, коли робот знаходиться в нульовій позиції.

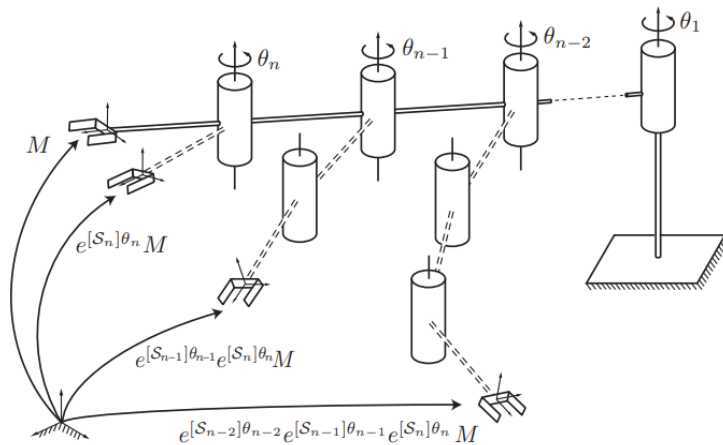


Рисунок 3.9 – Ілюстрація формули РоЕ для просторового відкритого ланцюга з n-ланками

Тепер припустимо, що з'єднання n зміщено до деякого значення з'єднання θ_n . Кінець ефектора на рамку M зазнає зміщення форми

$$T = e^{[S_n]\theta_n} M, \quad (3.22)$$

де $T \in SE(3)$ — нова конфігурація рами кінцевого механізму, а $S_n = (\omega_n, v_n)$ — вісь гвинта шарніра n , як виражено у фіксованій базовій рамі. Якщо шарнір n обертається (що відповідає руху гвинта з нульовим кроком), то $\omega_n \in \mathbb{R}^3$ — одиничний вектор у позитивному напрямку осі n суглоба; $v_n = -\omega_n \times q_n$, де q_n будь-яка довільна точка на спільній осі n , як записано в координатах у фіксованій базовій системі відліку; θ_n — спільний кут. Якщо з'єднання n є призматичним, то $\omega_n = 0$, $v_n \in \mathbb{R}^3$ є одиничним вектором у напрямку позитивного зсуву, а θ_n представляє призматичне розширення/втягнення.

Якщо ми припустимо, що з'єднання $n - 1$ також може змінюватися, тоді це призведе до застосування гвинтового руху до ланки $n - 1$ (і, як розширення, до ланки n , оскільки ланка n з'єднана з ланкою $n - 1$ через з'єднання n). Таким чином, рама кінцевого ефектора зазнає зміщення форми

$$T = e^{[S_{n-1]}\theta_{n-1}} \left(e^{[S_n]\theta_n} M \right). \quad (3.23)$$

Продовжуючи це міркування та дозволяючи тепер усі суглоби ($\theta_1, \dots, \theta_n$) змінюватися, впливає, що

$$T(\theta) = e^{[S_1]\theta_1} \dots e^{[S_{n-1]}\theta_{n-1}} e^{[S_n]\theta_n} M. \quad (3.24)$$

Це добуток формули експоненцій, що описує пряму кінематику

відкритого ланцюга з n -dof. Зокрема, ми називаємо рівняння (3.24) просторовою формою добутку експоненціальної формули, посилаючись на той факт, що осі гвинтів виражені у фіксованому просторі.

Підводячи підсумок, для розрахунку прямої кінематики відкритого ланцюга за допомогою просторової форми формули РоЕ (3.24) нам потрібні такі елементи:

(a) конфігурація кінцевого ефектора $MESE(3)$, коли робот знаходиться у вихідному положенні;

(b) гвинтові осі S_1, \dots, S_n , виражені у фіксованій базовій рамі, що відповідає з'єднаним рухам, коли робот знаходиться у вихідному положенні;

(c) спільні змінні $\theta_1, \dots, \theta_n$.

На відміну від подання D-H, опорні кадри зв'язку визначати не потрібно. Подальші переваги стануть очевидними, коли ми розглянемо кінематику швидкості в наступному розділі.

Приклади

Тепер ми виводимо пряму кінематику для деяких поширених просторових відкритих ланцюгів за допомогою формули РоЕ.

Приклад 3.1 (3R просторовий відкритий ланцюг). Розглянемо відкритий ланцюг 3R на рис 3.10, показано у вихідному положенні (усі спільні змінні встановлені рівними нулю). Виберіть фіксований кадр $\{0\}$ і кінцевий ефекторний кадр $\{3\}$, як показано на рисунку, і виразіть усі вектори та однорідні перетворення в термінах фіксованого кадру.

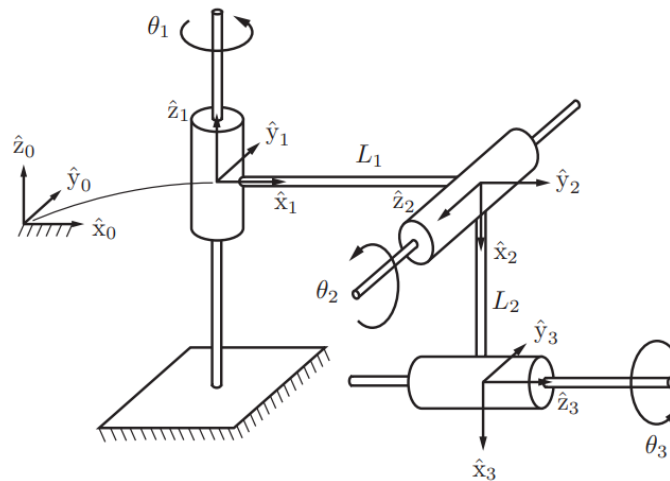


Рисунок 3.10 – Просторовий відкритий ланцюг 3R

Передня кінематика має вигляд:

$$T(\theta) = e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} M,$$

де $MESE(3)$ – це конфігурація кадру кінцевого ефектора, коли робот знаходиться в нульовому положенні. Шляхом перевірки M можна отримати як

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & L_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -L_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вісь гвинта $S_1 = (\omega_1, v_1)$ для осі з'єднання 1 тоді визначається як $\omega_1 = (0, 0, 1)$ і $v_1 = (0, 0, 0)$ (фіксований початок координат $(0,0,0)$ є зручним вибором для точки q_1 , що лежить на осі 1). Щоб визначити вісь гвинта S_2 для осі з'єднання 2, зауважте, що вісь 2 з'єднання вказує в напрямку $-y_0$, так що $\omega_2 = (0, -1, 0)$. Вибираємо $q_2 = (L_1, 0, 0)$, тоді $v_2 = -\omega_2 \times q_2 = (0, 0, -L_1)$. Нарешті, щоб визначити вісь гвинта S_3 для осі з'єднання 3, зауважте, що $\omega_3 = (1, 0, 0)$. Вибираючи $q_3 = (0, 0, -L_2)$, випливає, що $v_3 = -\omega_3 \times q_3 = (0, -L_2, 0)$.

Підводячи підсумок, ми маємо наступні матричні представлення 4 x 4 для трьох з'єднаних гвинтових осей S_1 , S_2 і S_3 :

$$[S_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[S_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[S_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Гвинтові осі зручніше буде перерахувати в такій табличній формі (таблиця 3.1).

Таблиця 3.1 – Гвинтові осі в табличній формі

i	ω_i	v_i
1	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 0)$
2	$(0, -1, 0)$	$(0, 0, -L_1)$
3	$(1, 0, 0)$	$(0, L_2, 0)$

Приклад 3.2. (3R плоский відкритий ланцюг). Для робота на рисунку 3.1 ми виразили початкову конфігурацію кінцевого ефектора M (рівняння (3.6)) і осі гвинтів S_1 (таблиця 3.2).



Таблиця 3.2 – Початкова конфігурація кінцевого ефектора M і осі гвинтів S_1

i	ω_i	v_i
1	$(0, 0, 1)$	$(0, 0, 0)$
2	$(0, 0, 1)$	$(0, -L_1, 0)$
3	$(0, 0, 1)$	$(0, -(L_1 + L_2), 0)$

Оскільки рух відбувається в площині x - y , ми могли б еквівалентно записати кожен вісь гвинта S_i як 3-вектор (ω_z, v_x, v_y) (таблиця 3.3).

Таблиця 3.3 – рух в площині x - y кожен вісь гвинта S_i як 3-вектор (ω_z, v_x, v_y)

i	ω_i	v_i
1	1	$(0, 0)$
2	1	$(0, -L_1)$
3	1	$(0, -(L_1 + L_2))$

і M як елемент $SE(2)$:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & L_1 + L_2 + L_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

У цьому випадку пряма кінематика використовуватиме спрощену матричну експоненцію для плоских рухів.

Приклад 3.3. (6R просторовий відкритий ланцюг). Тепер ми отримуємо кінематику прямого ходу відкритого ланцюга 6R на рисунку 3.11.

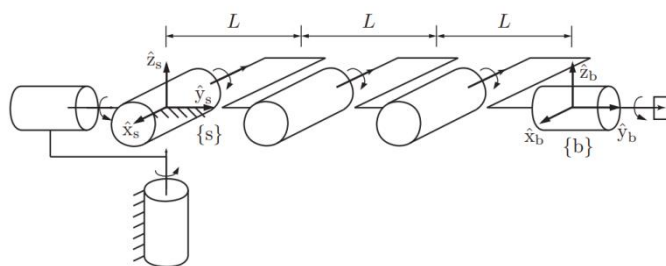


Рисунок 3.11 – Пряма кінематика PoE для відкритого ланцюга 6R

Руки з шістьма ступенями свободи відіграють важливу роль у робототехніці, оскільки вони мають мінімальну кількість з'єднань, що дозволяє кінцевому ефектору переміщувати тверде тіло з усіма його ступенями свободи, лише з урахуванням обмежень робочого простору робота. З цієї причини руки робота з шістьма ступенями іноді називають маніпуляторами загального призначення.

Нульове положення та напрям позитивного обертання для кожної

осі суглоба вказані на рисунку. Фіксований кадр {s} і кінцевий кадр {b} також призначаються, як показано. Рамка кінцевого ефектора M знаходиться в нульовому положенні

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3L \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Вісь гвинта для шарніра 1 знаходиться в напрямку $\omega_1=(0,0,1)$. Найбільш зручним вибором для точки q_1 , що лежить на осі 1, є початок координат, так що $v_1 = (0,0,0)$. Вісь гвинта для шарніра 2 знаходиться в напрямку у нерухомої рами, тому $\omega_2 = (0,1,0)$. Вибираючи $q_2 = (0, 0, 0)$, маємо $v_2=(0,0,0)$. Вісь гвинта для шарніра 3 знаходиться в напрямку $\omega_3 =(-1,0,0)$. Вибір $q_3 = (0, 0,0)$ призводить до $v_3 = (0,0,0)$. Вісь гвинта для шарніра 4 знаходиться в напрямку $\omega_4 = (-1,0, 0)$. Вибір $q_4 = (0, L, 0)$ призводить до $v_4 = (0,0, L)$. Вісь гвинта для шарніра 5 знаходиться в напрямку $\omega_5 = (-1, 0, 0)$; вибір $q_5 = (0, 2L, 0)$ призводить до $v_5 = (0,0, 2L)$. Вісь гвинта для шарніра 6 знаходиться в напрямку $\omega_6 = (0,1,0)$; вибір $q_6 = (0,0,0)$ призводить до $v_6 = (0,0,0)$. Підсумовуючи, осі гвинтів $S_i = (\omega_i, v_i)$, $i = 1, \dots, 6$ (таблиця 3.4).

Таблиця 3.4 – Осі гвинтів $S_i = (\omega_i, v_i)$, $i = 1, \dots, 6$

i	ω_i	v_i
1	(0, 0, 1)	(0, 0, 0)
2	(0, 1, 0)	(0, 0, 0)
3	(-1, 0, 0)	(0, 0, 0)
4	(-1, 0, 0)	(0, 0, L)
5	(-1, 0, 0)	(0, 0, 2L)
6	(0, 1, 0)	(0, 0, 0)

Приклад 3.4. (Просторовий відкритий ланцюг RRPRRR). У цьому прикладі ми розглядаємо просторовий відкритий ланцюг RRPRRR із шістьма ступенями свободи на рисунку 3.12.

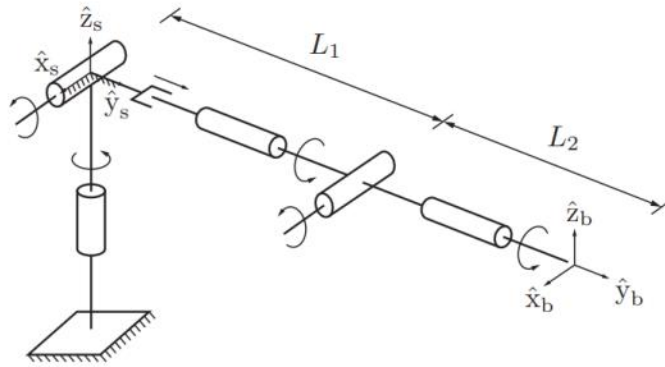


Рисунок 3.12 – Просторовий відкритий ланцюг RRP RRR

Рамка кінцевого ефектора в нульовому положенні визначається як

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L_1 + L_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Гвинтові осі $S_i = (\omega_i, v_i)$ перераховані в наступній таблиці 3.5.

Таблиця 3.5 – Гвинтові осі $S_i = (\omega_i, v_i)$

i	ω_i	v_i
1	(0, 0, 1)	(0, 0, 0)
2	(1, 0, 0)	(0, 0, 0)
3	(0, 0, 0)	(0, 1, 0)
4	(0, 1, 0)	(0, 0, 0)
5	(1, 0, 0)	(0, 0, $-L_1$)
6	(0, 1, 0)	(0, 0, 0)

Зверніть увагу, що третій шарнір є призматичним, тому $\omega_3 = 0$ і v_3 є одиничним вектором у напрямку додатного зсуву.

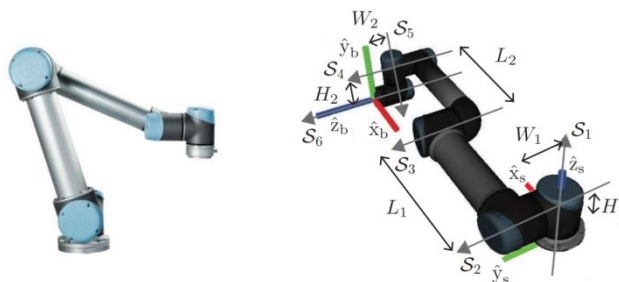


Рисунок 3.13 – (Зліва) рука робота Universal Robots UR5 6R.

(Праворуч) показано на нульовому рівні положення; позитивні повороти навколо вказаних осей задаються звичайною правою рукою правило.

W_1 – відстань уздовж y_s - напрямком між антипаралельними осями суглобів 1 і 5. $W_1 = 109$ мм, $W_2 = 82$ мм, $L_1 = 425$ мм, $L_2 = 392$ мм, $H_1 = 89$ мм, $H_2 = 95$ мм

Приклад 3.5. (рука робота UR5 6R від Universal Robots) . Рука робота Universal Robots UR5 6R показана на рисунку 3.13 . Кожен шарнір безпосередньо приводиться в рух безщитковим двигуном у поєднанні з гармонічною передачею без люфту 100:1, що значно збільшує крутний момент, доступний у шарнірі, одночасно знижуючи його максимальну швидкість. На рисунку 3.6 показано осі гвинтів S_1, \dots, S_6 , коли робот знаходиться в нульовому положенні. Кадр кінцевого ефектора $\{b\}$ в нульовій позиції визначається як

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & L_1 + L_2 \\ 0 & 0 & 1 & W_1 + W_2 \\ 0 & 1 & 0 & H_1 - H_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Осі гвинтів $S_i = (\omega_i, v_i)$ перераховані в наступній таблиці 3.6.

Таблиця 3.6 – Осі гвинтів $S_i = (\omega_i, v_i)$

i	ω_i	v_i
1	(0, 0, 1)	(0, 0, 0)
2	(0, 1, 0)	($-H_1, 0, 0$)
3	(0, 1, 0)	($-H_1, 0, L_1$)
4	(0, 1, 0)	($-H_1, 0, L_1 + L_2$)
5	(0, 0, -1)	($-W_1, L_1 + L_2, 0$)
6	(0, 1, 0)	($H_2 - H_1, 0, L_1 + L_2$)

Як приклад прямої кінематики встановіть $\theta_2 = -\pi/2$ і $\theta_5 = \pi/2$, а всі інші спільні кути дорівнюють нулю. Тоді конфігурація кінцевого ефектора є

$$\begin{aligned} T(\theta) &= e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} e^{[S_4]\theta_4} e^{[S_5]\theta_5} e^{[S_6]\theta_6} M \\ &= I e^{-[S_2]\pi/2} I^2 e^{[S_5]\pi/2} I M \\ &= e^{-[S_2]\pi/2} e^{[S_5]\pi/2} M \end{aligned}$$

оскільки $e^0 = 1$. Оцінюючи, отримуємо

$$T(\theta) = e^{-[S_2]\pi/2} e^{[S_5]\pi/2} M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0.095 \\ 1 & 0 & 0 & 0.109 \\ 0 & 0 & 1 & 0.988 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

де лінійними одиницями є метри, і як показано на рисунку 3.14.

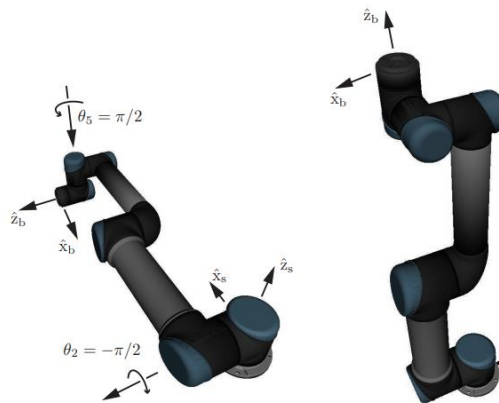


Рисунок 3.14 – (Зліва) UR5 у вихідному положенні з осями з'єднань 2 і 5 зазначено. (Справоруч) UR5 при з'єднаних кутах $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_6) = (0, -\pi/2, 0, 0, \pi/2, 0)$

Контрольні запитання до теми 3

1. Що таке реакції у кінематичних парах?
2. Які умови статичної визначеності плоских кінематичних ланцюгів?
3. Як визначаються реакції у обертальній кінематичній парі?
4. Як визначаються реакції у поступальній кінематичній парі?
5. Чому результуюча сила реакції в обертальній парі проходить через центр шарніра?
6. Як розкладаються реакції на складові у крайніх обертальних парах?
7. Що означає поняття рівнодіючої реакції?
8. Яка різниця між обертальною і поступальною кінематичними парами п'ятого класу?
9. Як визначається точка прикладання реакцій у поступальних парах?
10. Що таке кінетостатика ведучої ланки механізму?
11. Як визначити зрівноважуючий момент?
12. Чому зрівноважуючий момент може бути моментом зрівноважуючої сили?
13. Як розглядається рівновага однієї ланки у структурних групах?



14. Що таке план сил, що діють на одну ланку?
15. Яка формула використовується для визначення кінематичного ланцюга?
16. Чому структурні групи є статично визначеними з точки зору силового дослідження?
17. Які раціональні прийоми використовуються для знаходження реакцій у кінематичних парах?
18. Як визначається положення точки прикладання реакцій у поступальних парах?
19. Що таке умова рівноваги всіх сил, що діють на групу?
20. Як скласти рівняння моментів відносно центру найближчої обертальної пари?
21. Що таке зрівноважуючий момент і як він визначається?
22. Як визначити величину і напрямок сили реакції у кінематичній парі?
23. Яка різниця між обертальною і поступальною парами при визначенні реакцій?
24. Як впливає сила тертя на визначення реакцій у кінематичних парах?
25. Які методи використовуються для статичного аналізу кінематичних ланцюгів?

Використана література

1. Ceccarelli M. Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulation. Second Edition. Rome : Springer Cham, 2022. 381 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90848-5>.
2. Ковальов Ю. А., Кошель С. О., Манойленко О. П. Проектування промислових роботів та маніпуляторів : навчальний посібник. Київ : Центр учбової літератури, 2022. 256 с.

ТЕМА 4

ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТА РЕГУЛЮВАННЯ ХОДУ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ПРОМИСЛОВИХ РОБОТІВ ТА МАНІПУЛЯТОРІВ

Метою вивчення теми є дослідити та ознайомитись з регулюванням ходу механічних систем промислових роботів та маніпуляторів.

Завдання вивчення теми збігаються з переліком питань для розгляду, що наведений нижче.

Перелік питань до розгляду

- 4.1 Визначення моменту інерції маховика
- 4.2 Метричний синтез маховика

4.1 Визначення моменту інерції маховика

Вступ. Метою регулювання ходу механічних систем є визначення оптимальної величини моменту інерції махової маси ведучої ланки механізму такої системи, яка дозволяє розрахувати її основні геометричні розміри, при яких забезпечується робота машини з заданим за заданням коефіцієнтом нерівномірності руху δ .

Послідовність графічного способу дослідження та регулювання ходу механічної системи.

1. Визначити величину зведеного до кривошипу моменту сил для 12 положень механізму системи враховуючи сили ваги ланок, сили та моменти сил опору. Результати розрахунків занести в таблицю. Побудувати графік зміни зведеного моменту в залежності від положення кривошипу для одного оберту ведучої ланки.

2. Побудувати графік зміни роботи сил опору та сил тяжіння ланок механізму за цикл роботи машини за допомогою метода графічного інтегрування графічної залежності зведеного моменту сил. Використовуючи положення про закон передачі роботи машиною за один повний цикл та припущення про сталість величини рушійного моменту побудувати лінійну залежність роботи рушійних сил від положення кривошипу в межах одного повного оберту.

3. За допомогою діаграм робіт побудувати графічну залежність зміни кінетичної енергії машини за цикл її роботи.

4. Визначити величину зведеного до кривошипу моменту інерції мас ланок механізму для 12 положень механізму враховуючи маси та моменти інерції ланок, що задаються в завданні. Результати розрахунків занести в таблицю. Побудувати графік зміни зведеного моменту інерції в залежності від положення кривошипу для одного оберту ведучої ланки (для зручності подальших побудов пропонуємо будувати графік зведеного моменту інерції повернувши його попередньо на кут 90 градусів).

5. Побудувати діаграму «енерго-мас» графічно виключивши па-

раметр φ з графічних залежностей кінетичної енергії та зведеного моменту інерції. Виконати побудови, що дозволяють отримати довжину відрізка, за якою необхідно розрахувати оптимальну величину моменту інерції маховика.

6. Обрати конструкцію та матеріал маховика, визначити основні його і симетричні розміри, розрахувати масу маховика.

Є кілька методів визначення маси маховика. Частіше за інші застосовують графо-аналітичний метод, при якому зведений момент інерції маховика знаходиться за допомогою діаграми «енерго-мас» $\Delta T = \Delta T(J_{зв})$. Для розв'язання завдання крім вказаного графіка треба знати середню кутову швидкість обертання ведучої ланки і коефіцієнт нерівномірності ходу машини δ .

Значення максимальної і мінімальної швидкостей, в залежності від відомої середньої кутової швидкості ω_{cp} і заданого коефіцієнту нерівномірності δ .

$$\left. \begin{aligned} \omega_{max} &= \omega_{cp} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \\ \omega_{min} &= \omega_{cp} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Знайдемо величину $tg \psi_{max}$ і $tg \psi_{min}$

$$\left. \begin{aligned} tg \psi_{max} &= \frac{\mu_{Jзв}}{2\mu_T} \omega_{max}^2 \\ tg \psi_{min} &= \frac{\mu_{Jзв}}{2\mu_T} \omega_{min}^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Визначивши з рівнянь (4.1) значення ω_{max}^2 та ω_{min}^2 і підставивши їх у рівняння (4.2) одержимо

$$\left. \begin{aligned} tg \psi_{max} &= \frac{\mu_{Jзв}}{2\mu_T} \omega_{cp}^2 \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \\ tg \psi_{min} &= \frac{\mu_{Jзв}}{2\mu_T} \omega_{cp}^2 \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Рівняння (4.3) дають можливість визначити кути ψ_{max} та ψ_{min} в залежності від заданого коефіцієнту δ та середньої кутової швидкості ведучої ланки, яка дорівнює:

Проведемо два промені (рис. 4.1), дотичних до діаграми $\Delta T = \Delta T(J_{зв})$ під визначеними кутами ψ_{max} та ψ_{min} .

Для зручності проведення цих променів слід в іншому місці креслення провести прямі 1—1 та 2—2 під кутами ψ_{max} та ψ_{min} до горизонтальної прямої і вже потім побудувати промені дотичні до діаграми $\Delta T = \Delta T(J_{зв})$ паралельно прямим 1—1 і 2—2,

Ці промені повинні перетнутися в точці O , яка являє собою початок координат нової системи $\Delta T = \Delta T(J_{3B})$.

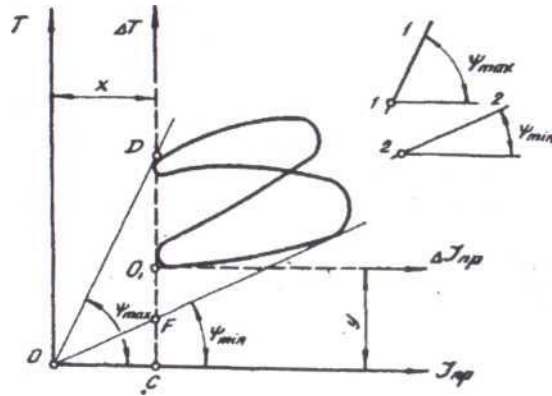


Рисунок 4.1 – Діаграма «енерго-мас»

З діаграми «енерго-мас» в старій та новій системах координат видно, що загальний зведений момент інерції механізму можна подати у вигляді суми

$$J_{3B} = J_0 + \Delta J_{3B} \quad (4.4)$$

Де J_0 – незмінна частина зведеного моменту інерції механізму;

ΔJ_{3B} – змінна частина моменту інерції, яка залежить від положення ланок механізму.

Постійна частина зведеного моменту інерції J_0 і являє собою зведений момент інерції додаткової маси, тобто момент інерції маси маховика.

На рис. 4.1 момент інерції J_0 виражений відрізком xu в масштабі $\mu_{J_{3B}}$.

Таким чином, зведений момент інерції маховика дорівнює

$$J_{3B} = x \cdot \mu_{J_{3B}} \quad (4.5)$$

Внаслідок невеликих значень коефіцієнтів δ різниця між кутами ψ_{max} та ψ_{min} мала. Це призводить до того, що точка перетину цих дотичних знаходиться поза межами формату креслення, що позбавляє можливості безпосередньо виміряти відрізок x .

У цьому випадку величину зведеного моменту інерції маховика J_0 можна визначити, використавши відрізок DF , який одержуємо від перетину цих дотичних до діаграми $\Delta T = \Delta T(J_{3B})$ з віссю ординат ΔT (див. рис. 4.1).

Згідно з кресленням можна записати:

$$\operatorname{tg} \psi_{max} = \frac{(DC)}{(OC)}; \operatorname{tg} \psi_{min} = \frac{(FC)}{(OC)}$$



та

$$\operatorname{tg} \psi_{max} - \operatorname{tg} \psi_{min} = \frac{(DC)-(FC)}{(OC)} = \frac{(DF)}{(OC)} \quad (4.6)$$

У той же час різниця $\operatorname{tg} \psi_{max} - \operatorname{tg} \psi_{min}$ буде дорівнювати

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi_{max} - \operatorname{tg} \psi_{min} &= \frac{\omega_{cp}^2}{2} \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \frac{\mu_{J3B}}{2\mu_T} - \frac{\omega_{cp}^2}{2} \left(1 - \frac{\delta}{2}\right) \frac{\mu_{J3B}}{2\mu_T} = \\ &= \omega_{cp}^2 \delta \frac{\mu_{J3B}}{2\mu_T} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Одержимо

$$\omega_{cp}^2 \delta \frac{\mu_{J3B}}{2\mu_T} = \frac{(DF)}{(OC)}$$

з урахуванням $(OC)\mu_{J3B} = J_0$, зведеного моменту інерції маховика

$$J_0 = \frac{(DF)\mu_T}{\delta\omega_{cp}^2} \quad (4.8)$$

Таким чином, визначення зведеного моменту інерції маховика зводиться до знаходження відрізка DF.

4.2 Метричний синтез маховика

Конструктивно маховик найчастіше виконують у вигляді важкого обода зі шпичцями (рис. 4.2). При цьому наближено можна вважати, що момент інерції маховика, дорівнює моменту інерції обода

$$J_M = mR^2, \quad (4.9)$$

де J_M – момент інерції маховика;

m – маса маховика;

R – розрахунковий радіус маховика.

Якщо маховик встановити на одній осі з ланкою зведення (у двигунах внутрішнього згорання, компресорах, де маховики набули найбільшого поширення, ланкою зведення найчастіше є колінчастий вал, на який також встановлюють і маховик), то його момент інерції, визначений за рівнянням (4.9), є одночасно його зведеним моментом інерції, тобто $J_0 = J_M$. Тоді

$$J_M = \frac{(DF)\mu_T}{\delta\omega_{cp}^2} \quad (4.9)$$

чи, виразивши ω_{cp} через частоту обертання (n , об/хв.), одержимо

$$J_M = \frac{900 \cdot (DF)\mu_T}{\delta \cdot \pi^2 \cdot n^2}$$

Іноді у динамічних розрахунках замість моменту інерції маховика використовують добуток квадрату розрахункового діаметру маховика на його вагу, так званий маховий момент.

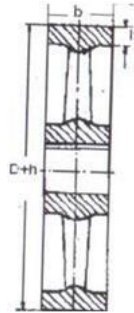


Рисунок 4.2 – До визначення основних розмірів маховика

Рівняння для визначення величини махового моменту одержимо враховуючи, що $m = \frac{G}{g}$ та $R = \frac{D}{2}$ тоді

$$J_m = \frac{GD^2}{4g}$$

і маховий момент буде дорівнювати

$$GD^2 = 4gJ_m \quad (4.12)$$

Підставивши у формулу (4.12) значення J_m з (4.11) і враховуючи, що $\pi^2 \approx g$ одержимо формулу для визначення махового моменту маховика

$$GD^2 = \frac{3600 \cdot (DF)\mu_T}{\delta \cdot \pi^2 \cdot n^2} \quad (4.13)$$

Діаметром маховика звичайно задаються виходячи з конструктивних міркувань.

Однак, вибираючи діаметр маховика, необхідно слідкувати за тим щоб його окружна швидкість V_M була меншою, ніж критична швидкість V_{KP} при якій може наступити розрив маховика під дією центробіжних сил, тобто повинна бути дотримана нерівність

$$V_M = \frac{\pi D n}{60} < V_{KP} \sqrt{\frac{g[\sigma_z]}{\gamma}} \quad (4.14)$$

де $[\sigma_z]$ – допустиме напруження на розрив;
 γ – питома вага матеріалу маховика.

Для чавунних маховиків $V_{KP} < 36$ м/с.

Задавшись діаметром маховика, визначають його теоретичну вагу як частку від ділення махового моменту на квадрат діаметра

$$G_T = \frac{GD^2}{D^2}$$

При визначенні розмірів обода вважають, що у ньому зосереджено близько 90% всієї маси маховика, тобто, вага обода дорівнює $G_o \approx 0,9G_T$.

Позначивши розміри маховика згідно рис. 4.2 і використавши формулу для визначення обсягу обода маховика, як тіла обертання, можна записати, що

$$G_o = b \cdot h \cdot \pi \cdot D \cdot \gamma \quad (4.15)$$

де D — розрахунковий діаметр маховика;

b — ширина обода;

h — висота обода;

γ — питома вага.

Звичайно рекомендується приймати $b=(2\div 3)h$.

Якщо на машині є кілька валів, доцільно встановити маховик на більш швидкохідному валу, адже при цьому маховий момент (і відповідна маса і розміри) маховика може бути значно зменшений.

Момент інерції маховика встановленого на більш швидкохідному валу, визначається з умови рівності кінетичних енергій, тобто

$$\frac{J_M \omega_1^2}{2} = \frac{J_{M_i} \omega_i^2}{2} \quad (4.16)$$

звідки

$$J_{M_i} = J_M \left(\frac{\omega_1}{\omega_i} \right)^2 = J_M i_{li}^2 \quad (4.17)$$

де J_{M_i} , — момент інерції маховика, встановленого на i -тому валу;


ω_i , — кутова швидкість i -того вала;

ω_1 — кутова швидкість ланки зведення;

i_{li} — передаточне відношення від ланки зведення до i —того вала.

Таким чином можна зменшити зведений момент інерції маховика (і відповідно його масу), на величину пропорційну квадрату передаточного відношення.


На практиці спеціальні маховики можуть бути не встановленими. Це обґрунтовано лише тоді, коли маси ланок механізму мають зведений момент інерції, який забезпечує роботу машини з заданим коефіцієнтом нерівномірності. Так, наприклад, в обладнанні легкої промисловості ланки



що обертаються виконують функції маховика (ведений шків пасової передачі швейних машин, муфти які використовуються в приводах обладнання легкої промисловості). Більшість металорізальних верстатів (токарних, свердлильних та ін.) не обладнані спеціальними маховиками, бо зубчасті колеса коробок швидкостей мають маховий момент, достатній для забезпечення рекомендованого коефіцієнта нерівномірності.

Контрольні запитання до теми 4

1. Що є метою регулювання ходу механічних систем?
2. Які методи використовуються для визначення моменту інерції маховика?
3. Як обчислюється середня кутова швидкість ведучої ланки?
4. Яке рівняння використовується для визначення максимальних та мінімальних швидкостей ведучої ланки?
5. Що таке діаграма «енерго-мас» і як вона використовується?
6. Яким чином можна визначити зведений момент інерції маховика?
7. Що означає зведений момент інерції мас ланок механізму?
8. Як побудувати графік зміни зведеного моменту в залежності від положення кривошипу?
9. Що таке метричний синтез маховика?
10. Як обрати конструкцію та матеріал маховика?
11. Які основні розміри потрібно розрахувати для маховика?
12. Як побудувати графік зміни роботи сил опору та сил тяжіння ланок механізму?
13. Які дані необхідні для побудови графіка кінетичної енергії машини за цикл її роботи?
14. Як визначити величину $\text{tg}\psi_{\text{max}}$ і $\text{tg}\psi_{\text{min}}$?
15. Як використовувати метод графічного інтегрування для побудови графіка?
16. Що таке закон передачі роботи машиною за один повний цикл?
17. Як побудувати лінійну залежність роботи рушійних сил від положення кривошипу?
18. Що таке момент інерції додаткової маси?
19. Як знайти величину зведеного моменту інерції маховика за допомогою відрізка DF ?
20. Як обчислюється маса маховика?
21. Які конструктивні особливості маховика впливають на його момент інерції?
22. Як обрати оптимальний діаметр маховика?
23. Які фактори впливають на критичну швидкість маховика?
24. Як зменшити зведений момент інерції маховика за допомогою передаточного відношення?



25. Які приклади обладнання, що не потребує спеціальних маховиків, можна навести?

Використана література

1. Ceccarelli M. Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulation. Second Edition. Rome : Springer Cham, 2022. 381 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90848-5>.

2. Ковальов Ю. А., Кошель С. О., Манойленко О. П. Проектування промислових роботів та маніпуляторів : навчальний посібник. Київ : Центр учбової літератури, 2022. 256 с.

ТЕМА 5

ОСНОВИ АНАЛІЗУ ТА СИНТЕЗУ ПРОСТИХ ТА СКЛАДНИХ ЕВОЛЬВЕНТНИХ ЗУБЧАСТИХ ПЕРЕДАЧ ПРИВОДУ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ПРОМИСЛОВИХ РОБОТІВ ТА МАНІПУЛЯТОРІВ

Метою вивчення теми є ознайомлення з основами аналізу та синтезу простих та складних евольвентних зубчастих передач приводу механічних систем промислових роботів та маніпуляторів.

Завдання вивчення теми збігаються з переліком питань для розгляду, що наведений нижче.

Перелік питань до розгляду

5.1 Визначення розмірів нульового, рівнозмщеного та нерівно зміщеного евольвентного зачеплення

5.2 Послідовність розрахунку зубчастого зачеплення при вписуванні в задану міжосьову відстань

5.3 Практичні вправи з кінематики замкнених ланцюгів

5.1 Визначення розмірів нульового, рівнозмщеного та нерівнозмщеного евольвентного зачеплень

Вступ. Положення, що наведені в розділі відносяться до зубчастих коліс, які виготовлені методом обкатування зуборізною рейкою на основі вихідного контуру.


Послідовність виконання синтезу та аналізу зубчастої передачі та планетарного (диференційного) редуктора приводу механічних систем промислових роботів.

1 Вибрати вихідні дані відповідно до заданої схеми та варіанту. Розрахувати геометричні параметри заданої евольвентної пари циліндричних зубчастих коліс. Побудувати картину евольвентного зубчастого зачеплення в торцевому перерізі. На кресленні показати не менше трьох зубців на кожному колесі. Масштаб побудови вибрати таким, щоб висота зубця на кресленні становила не менше 45 мм. Виділити на кресленні теоретичну та активну лінії зачеплення, активні ділянки профілів зубців, позначити основні розміри.

2 Скласти таблицю параметрів (основні дані, довідкові дані), яку розмістити на кресленні у відповідності до вимог ЄСКД.

3 Розрахувати якісні показники (коефіцієнти перекриття зубчастої пари, відносного ковзання) і побудувати їх діаграми.

4 Вибрати вихідні дані для проектування планетарної передачі (при необхідності визначити передаточне відношення планетарного механізму).



Виконати розрахунок (вибір кількості зубців планетарного механізму). Перевірити умови співвісності, сусідства та складання. Розрахувати ККД планетарного механізму.

5 Викреслити кінематичну схему приводу машини в довільно вибраному масштабі. Побудувати діаграми лінійних швидкостей точок та кутових швидкостей коліс, виконати кінематичне дослідження зубчатого механізму графічним та аналітичним методами.

Вихідними параметрами дослідження зубчатих механізмів приводу механічних систем промислових роботів вважаємо такі дані: кількість зубців коліс (z_1, z_2), модуль зачеплення m (мм), міжосьова відстань a_w (м).

Параметри зуборізної рейки:

- коефіцієнт висоти головки зубця – h_a ;
- коефіцієнт радіального зазору $c^*=0,25$;
- профільний кут зубчастої рейки $\alpha = 20^\circ$.

При виконанні даного дослідження може бути обраний один із варіантів розрахунку та викреслювання зубчастого зачеплення: а) нульове; б) рівнозміщене; в) нерівнозміщене; г) вписування в задану міжосьову відстань a_w .

Нульове зачеплення складається з двох нульових коліс. Нульове зубчасте колесо нарізується без зміщення зуборізної рейки - середня лінія рейки перекатується без проковзування по ділильному колу. Характерною ознакою нульового колеса є однаковість товщини зубця і ширини западини по ділильному колу. Нульова шестерня повинна мати число зубців, що дорівнює або більше мінімального $z_{\min}=17$. За меншої кількості зубців виникає підріз ніжки зубця шестерні в разі її виготовлення зубчастою рейкою за методом обкатування.

Підріз зубця небезпечний з двох причин, перша причина - це ослаблення небезпечного перерізу ніжки зубця шестерні, що призводить до зменшення міцності зубця в разі згину, друга - порушення сталості передаточного відношення внаслідок скорочення робочої частини зубця.

У разі необхідності виготовлення шестерні з кількістю зубців, меншою від 17, використовується коригування, за якого зуборізна рейка установлюється з зазором між її середньою лінією й ділильним колом, тобто зміщується в напрямі від центру заготовки колеса, такий напрям зміщення вважають позитивним і виготовлене колесо називають також позитивним, характерною ознакою якого є більша товщина зубця по ділильному колу, ніж ширина западини по тому ж колу, товщина зубця біля його основи збільшується й міцність на згин зубця зростає.

У разі зміщення зуборізної рейки до центру заготовки (від'ємне зміщення) отримується від'ємне колесо, товщина його зубця по ділильному колу менша за ширину западини по цьому ж колу.

Абсолютне зміщення рейки - відстань між її середньою лінією й ділильним колом, мм:

$$b = x \cdot m$$

де x - коефіцієнт зміщення; m - модуль зачеплення, мм.

Коефіцієнт зміщення x - підрізу - це найменше його значення, яке забезпечує виготовлення колеса без підрізування, визначається за формулою:

$$x = \frac{17 - z_1}{17}$$

де z_1 - число зубців шестерні.

Рівнозміщене зачеплення складається з шестерні та колеса, які нарізані зі зміщеннями однаковими за модулем, але протилежними за знаком, шестерня повинна бути додатним колесом, оскільки має меншу кількість зубців, більшу частоту обертання (зубці зазнають більшої кількості циклів, навантаження), колесо - додатне.

Коефіцієнт зміщення шестерні x_1 , колеса: $-x_2$ За заданими (z_1, z_2) вибирають коефіцієнти x_1, x_2, x_3 .

Для рівнозміщеного зачеплення коефіцієнти зміщення ($x_1=x_2$) вибирають з табл. 5.1.

Таблиця 5.1 – Значення коефіцієнтів корекції $x, = -x_2$ для рівнозміщеного зачеплення

z_2	Значення при z_1						
	11	12	13	14	15	16	17
20	0,356	0,300	0,250	0,200	0,155	0,115	0,102
21	0,360	0,310	0,264	0,220	0,181	0,144	0,110
22	0,382	0,328	0,283	0,239	0,201	0,165	0,131
23	0,394	0,340	0,298	0,255	0,218	0,182	0,148
24	0,408	0,357	0,313	0,271	0,235	0,199	0,165
25	0,415	0,368	0,324	0,283	0,247	0,210	0,178
26	0,422	0,379	0,335	0,295	0,259	0,221	0,191
27	0,430	0,389	0,347	0,308	0,270	0,232	0,205
28	0,436	0,395	0,354	0,318	0,279	0,242	0,214
29	0,442	0,401	0,362	0,329	0,288	0,252	0,228
30	0,448	0,408	0,370	0,339	0,297	0,262	0,233
31	0,454	0,415	0,377	0,350	0,306	0,272	0,242
32	0,460	0,422	0,385	0,360	0,315	0,282	0,251
34	0,470	0,431	0,395	0,368	0,327	0,294	0,265
36	0,478	0,440	0,405	0,377	0,339	0,307	0,278
38	0,487	0,450	0,417	0,386	0,351	0,320	0,292
40	0,496	0,460	0,427	0,396	0,363	0,333	0,306
44	0,505	0,470	0,439	0,408	0,377	0,349	0,322
48	0,515	0,481	0,451	0,420	0,391	0,365	0,339

Для нерівнозмщеного зачеплення, якщо $2 > i_{1,2} > 1$, то спочатку в табл. 5.2 за заданим z_1 , знаходять коефіцієнт Δy , а потім в табл. 5.3 за заданими z_1 і z_2 знаходять коефіцієнти x_1 і x_2 .

Таблиця 5.2 – Значення коефіцієнтів Δy для нерівно зміщеного зачеплення при $2 > i_{1,2} > 1$

z_1	11	12	13	14	15	16	17
Δy	0,127	0,145	0,160	0,175	0,190	0,202	0,215
z_1	18	19	20	21	22	23	24
Δy	0,227	0,239	0,250	0,257	0,265	0,270	0,278

Таблиця 5.3 – Значення коефіцієнтів x_1 і x_2 для нерівнозмщеного зачеплення при $2 > i_{1,2} > 1$

		Значення при z_1									
z_2	11		12		13		14		15		
	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	
16	0,534	0,322	0,566	0,376	0,588	0,426	0,600	0,485	0,609	0,547	
18	0,568	0,312	0,609	0,358	0,638	0,405	0,661	0,452	0,677	0,508	
20	0,601	0,303	0,646	0,345	0,676	0,389	0,706	0,433	0,371	0,481	
22	0,630	0,297	0,679	0,337	0,714	0,376	0,745	0,419	0,775	0,463	
23	—	—	0,693	0,334	0,730	0,372	0,763	0,414	0,792	0,458	
24	—	—	0,706	0,333	0,745	0,369	0,780	0,409	0,813	0,449	
25	—	—	—	—	0,758	0,368	0,796	0,405	0,830	0,445	
26	—	—	—	—	0,773	0,365	0,813	0,400	0,848	0,440	
28	—	—	—	—	—	—	0,840	0,397	0,881	0,431	
30	—	—	—	—	—	—	—	—	0,908	0,428	
		Значення при z_1									
z_2	16		17		18		19		20		
	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	
20	0,744	0,528	0,756	0,580	0,756	0,639	0,756	0,699	0,755	0,755	
22	0,793	0,507	0,809	0,554	0,814	0,609	0,830	0,652	0,831	0,707	
24	0,834	0,491	0,856	0,534	0,871	0,579	0,888	0,673	0,892	0,715	
26	0,869	0,480	0,898	0,517	0,916	0,561	0,937	0,601	0,948	0,645	
28	0,907	0,467	0,936	0,504	0,958	0,543	0,980	0,583	0,997	0,624	
30	0,936	0,462	0,968	0,496	0,994	0,532	1,017	0,571	1,038	0,608	
32	0,967	0,455	0,999	0,490	1,026	0,525	1,054	0,559	1,076	0,594	
34	—	—	1,030	0,483	1,059	0,516	1,088	0,550	1,110	0,584	
36	—	—	—	—	1,088	0,511	1,117	0,545	1,141	0,578	
38	—	—	—	—	—	—	1,145	0,540	1,173	0,570	
40	—	—	—	—	—	—	—	—	1,201	0,567	

Якщо $5 > i_{1,2} > 2$, то спочатку в таблиці 5.4 за заданим 7-і знаходять коефіцієнти Δy і x_1 , а потім в таблиці 5.5 за заданими z_1 і z_2 , і знаходять x_2 .

Таблиця 5.4 – Значення коефіцієнтів Δy та x_1 , для нерівнозмщеного зачеплення при $5 \geq i_{1,2} \geq 2$

Z_1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Δy	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,25
X_1	0,66	0,73	0,80	0,86	0,92	0,98	1,04	1,10	1,16	1,22	1,27

Таблиця 5.5 – Значення коефіцієнтів x_2 для нерівнозмщеного зачеплення $5 \geq i_{12} \geq 2$

Z_2	Значення z_1										
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
25	0,442	0,425	-	-	-	-	-	-	-	-	-
30	0,501	0,486	0,471	0,468	-	-	-	-	-	-	-
35	0,556	0,542	0,528	0,522	0,518	0,512	0,505	-	-	-	-
40	0,610	0,596	0,582	0,577	0,575	0,569	0,564	0,560	0,553	-	-
45	0,661	0,648	0,635	0,632	0,628	0,624	0,620	0,616	0,611	0,606	0,566
50	0,709	0,696	0,685	0,684	0,682	0,677	0,674	0,671	0,667	0,662	0,628
55	0,754	0,745	0,734	0,731	0,728	0,727	0,722	0,720	0,716	0,677	0,677
60	-	0,789	0,782	0,780	0,779	0,778	0,777	0,773	0,772	0,769	0,729

Якщо в таблицях відсутнє число зубців, що задане в завданні, то необхідно застосувати лінійну інтерполяцію.

Наприклад, якщо задане число зубців $z=33$, а у таблиці наведені коефіцієнти зміщення $X_{(z=30)}$ та $X_{(z=35)}$, то шуканий коефіцієнт зміщення $X_{(z=33)}$ визначаємо за формулою:

$$x_{(z=33)} = x_{(z=30)} + \frac{(x_{z=35} - x_{z=30})}{5} (z_{(33)} - z_{(30)}).$$

Визначаємо коефіцієнт відхилення міжосьової відстані (сприйманого зміщення) у за формулою: $y = x_c - \Delta y$,

де $x_c = x_1 + x_2$.

Розраховуємо геометричні параметри зубчастого зачеплення за формулами таблиці 5.6.

Таблиця 5.6 – Геометричні параметри зубчастого зачеплення за формулами

Найменування	Зачеплення		
	Нульове	Рівнозміщене	Нерівнозміщене $x_c \neq 0$
Крок зачеплення	$P = \pi \cdot m$		
Радіуси ділительних кіл	$r_{1,2} = \frac{m \cdot z_{1,2}}{2}$		
Радіуси основних кіл	$r_{b1,2} = r_{1,2} \cos \alpha$		
Радіуси кіл виступів	$= m \left(\frac{z_{1,2}}{2} + h_a^* \right)$	$r_{a1,2} = m \times \left(\times \frac{z_{1,2}}{2} + x_{1,2} + h_a^* \right)$	$r_{a1,2} = m \times \left(\times \frac{z_{1,2}}{2} + x_{1,2} + h_a^* - \Delta y \right)$
Радіуси кіл западин	$= m \left(\frac{z_{1,2}}{2} - h_a^* - c^* \right)$	$r_{f1,2} = m \left(\frac{z_{1,2}}{2} + x_{1,2} - h_a^* - c^* \right)$	
Радіуси початкових	$r_{w1,2} = r_{1,2}$		$r_{w1,2} = r_{1,2} \left(1 + \frac{2y}{z_c} \right)$
Міжосьова відстань	$a_w = \frac{m z_c}{2}$		$a_w = m \left(\frac{z_c}{2} + y \right)$
Висота зубця	$h = m(2h_a^* + c^*)$		$h = m(2h_a^* + c^* - \Delta y)$
Товщина зубця по ділительному колу	$s_{1,2} = \frac{\pi m}{2}$		$s_{1,2} = m \left(\frac{\pi}{2} + 2x_{1,2} \operatorname{tg} \alpha \right)$

Індекс 1 відноситься до розмірів колеса, що має індекс 2 – до розмірів колеса, що має більше число зубців

Визначаємо евольвентний кут зачеплення

$$\operatorname{inv} \alpha_w = \operatorname{inv} \alpha + \frac{2 \cdot x_c}{z_c} \operatorname{tg} \alpha,$$

де $Z_c=Z_1+Z_2$, α - кут профілю контуру ($\alpha=20$ за стандартом).

За таблицею 5.7 евольвентних функцій через $inv\alpha_w$ знаходимо кут зачеплення α_w .

Таблиця 5.7 – Значення евольвентної функції

Кут	Порядок	0,0	10	20	30	40	50
20°	0,0	149	153	157	161	165	169
21°	0,0	173	178	182	187	191	196
22°	0,0	200	205	210	215	220	225
23°	0,0	320	236	341	247	252	258
24°	0,0	263	269	275	281	287	293
25°	0,0	800	306	313	319	326	333
26°	0,0	339	346	358	361	368	375
27°	0,0	383	390	398	406	414	422
28°	0,0	430	438	447	455	464	473
29°	0,0	482	491	500	509	518	529
30°	0,0	537	547	557	567	577	588
31°	0,0	598	608	619	630	641	652
32°	0,0	664	675	686	698	710	722
33°	0,0	734	747	759	772	785	798
34°	0,0	811	824	838	851	865	879
35°	0,0	893	908	922	937	951	96

Одержуємо результати розрахунків та креслимо зачеплення зубчастих коліс в довільно вибраному масштабі довжин КІ.

5.2. Послідовність розрахунку зубчастого зачеплення при вписуванні в задану міжосьову відстань

За заданими z_1, z_2, m, α_w визначаємо коефіцієнт спрямованого зміщення «у» за формулою:

$$y = \frac{a_w^* - a}{m},$$

де

$$a = \frac{(z_1 + z_2) \cdot m}{2}$$

Визначаємо кут зачеплення α_w за формулою:

$$\alpha_w = \arccos \frac{a \cdot \cos \alpha}{a_w^*}.$$

де $inv\alpha_w = \operatorname{tg}\alpha_w - \alpha_w$; $inv\alpha = \operatorname{tg}\alpha - \alpha$ евольвентні функції.

Для розподілення знайденого коефіцієнта x_c на складові x_1 і x_2 використовуємо залежність:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(x_c - \frac{y(Z_2 - Z_1)}{Z_c} \right).$$

Для прикладу розглянемо визначення коефіцієнтів зміщення при таких даних: $z_1=15$, $z_2=18$, $m=10$ мм, $a_w^*=170$ мм.

Коефіцієнт сприйманого зміщення

$$y = \frac{a_w^* - a}{m} = \frac{170 - 165}{10} = 0,5$$

де $a = \frac{m(z_1 + z_2)}{2} = \frac{10(15 + 18)}{2} = 165$ мм.

Кут зачеплення

$$\alpha_w = \arccos \frac{165 \cdot \cos 20^\circ}{170} = 24,209^\circ$$

Коефіцієнт сумарного зміщення

$$x_c = \frac{(15 + 18)(0,02708 - 0,0149)}{2 \cdot \operatorname{tg} 20^\circ} = 0,552,$$

де $inv\alpha_w = 0,02708$; $inv 20^\circ = 0,0149$ (див. таблиця 5.7).

Коефіцієнт зміщення

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(0,552 - \frac{0,5(18 - 15)}{15 + 18} \right) = 0,253,$$

$$x_2 = 0,552 - 0,253 = 0,299.$$

Перевіряємо коефіцієнт x_1 за умовою відсутності підрізання

$$x_1^{min} = \frac{17 - z_1}{17} = \frac{17 - 15}{17} = 0,1176 < x_1.$$

Перевіряємо коефіцієнти зміщення за умовою відсутності загострення головок зубців

$$x_3 = 0,15Z^{0,7};$$

$$x_{31} = 0,15 Z_1^{0,7} = 0,15 \cdot 15^{0,7} = 0,998 > x_1;$$

$$x_{32} = 0,15 Z^{0,7} = 0,15 \cdot 18^{0,7} = 1,134 > x_2.$$

Тобто, загострення зубців не буде, оскільки $[x_3] \leq 0,4$.

Після вибору коефіцієнтів зміщення підраховуємо всі розміри зубчастого зачеплення за наведеними формулами (таблиця 5.6)

Одержуємо результати розрахунків та креслимо зачеплення зубчастих коліс в довільно вибраному масштабі довжин КІ.

Графічний синтез елементів зубчастого зачеплення.

Елементи профілів зубців графічно синтезуємо в такій послідовності:

1. Відкладаємо міжосьову відстань O_1O_2 (рис. 5.1). З центрів коліс O_1 , і O_2 радіусами r_{w1} і r_{w2} початкових кіл будуємо кола, що дотикаються в точці Р (поліус зачеплення).

2. Будуємо основні кола радіусами r_{B1} і r_{B2} та проводимо дотичну до них пп. З центрів коліс опускаємо перпендикуляри до дотичної і отримуємо точки N_1 і N_2 – початку та кінця теоретичної лінії зачеплення.

Для того щоб знайти точки (N_1 і N_2 іншим способом, можна розрахувати відстані $PN_1 = r_{w1} \cdot \sin \alpha_w$; $PN_2 = r_{w2} \cdot \sin \alpha_w$, які потім відкласти від полюсу Р вздовж теоретичної лінії зачеплення в різні боки.

3. Викреслюємо дуги ділительних кіл, кіл западин та вершин.

4. Будуємо евольвенти профілів зубців першого і другого коліс передачі.

Евольвентою кола називається крива яку описує будь яка точка прямої,

що перекочується по цьому колу без відносного ковзання.

В теорії зачеплення коло, евольвентою якого є профіль зубця, називається *основним колом*, а пряма, яка перекочується без ковзання по цьому колу, називається *твірною*.

Для побудови 1-ї евольвенти (рис. 5.2) відрізок N_1P ділимо на чотири частини, одержані точки позначаємо 1, 2, 3.

З точки 3 проводимо дугу радіуса $\rho = 3P$ до перетину в точці Р' з основним колом, тоді $\cup N_1P' = N_1P$. Дугу N_1P' також ділимо на чотири рівні частини. Такі ж рівні частини дуг відкладаємо і в інший бік від точки N_1 по основному колу. Одержані точки на основному колі позначаються 1', 2', 3', 4', 5', 6', і т. д. Через отримані точки до основного кола проводимо дотичні, на яких відкладаємо відрізки 1'1'', 2'2'', 3'3''..., відповідно рівні відрізкам 1P, 2P, 3P... З'єднуючи послідовно точки Р', 1'', 2'', 3'',... плавною кривою, отримуємо евольвенту зубця першого класу. Кінцева точка евольвенти повинна знаходитися за колом вершин.

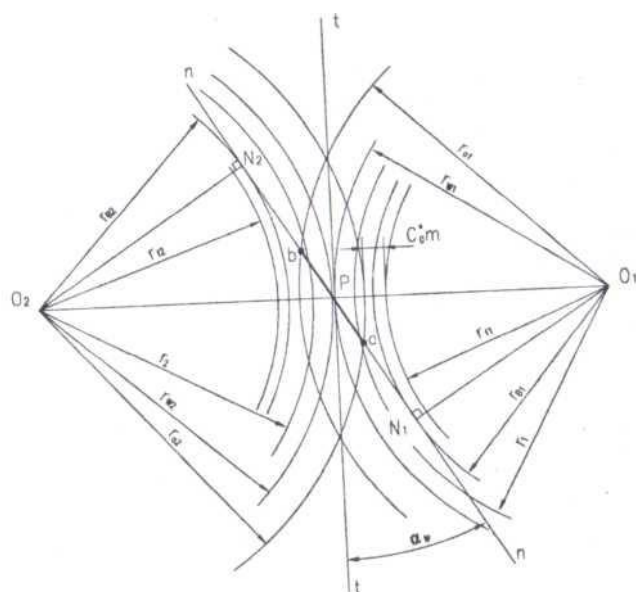


Рисунок 5.1 – Елементи зубчастого зачеплення

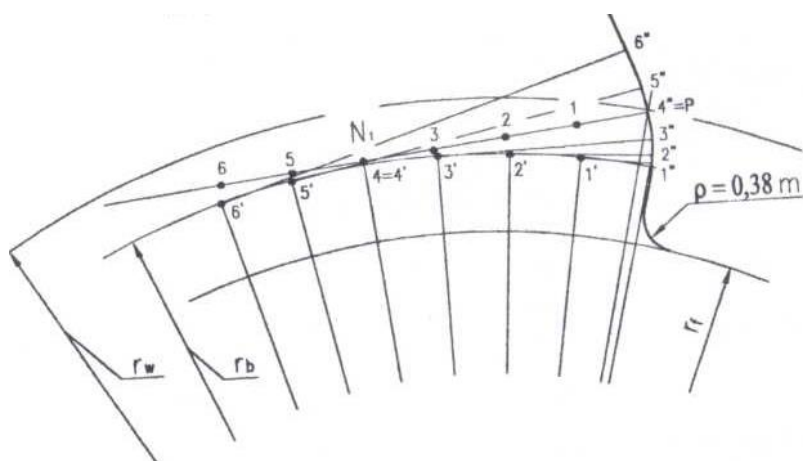


Рисунок 5.2 – Побудова евольвенти

Профіль зубця біля його основи будується спрощено. Через початкову точку P' евольвенти проводимо радіальну пряму до перетину з колом западин і в місці перетину радіальна пряма спрягається з колом западин радіусом $0,38m$.

Слід пам'ятати, що радіус кола западин може бути більшим, рівним або меншим від радіуса основного кола. Це залежить від числа зубців колеса та коефіцієнта зміщення.

Аналогічно будується профільна крива зубця другого колеса.

Будуємо повний профіль зубця. Для цього від отриманої евольвентної кривої по ділильному колу відкладаємо товщину зубця, яку ділимо навпіл. З'єднуємо цю середину з центром колеса та проводимо вісь симетрії, відносно якої будуємо другу профільну криву зубця (рис. 5.3).

Викреслюємо по три зубця на кожному колесі. Для цього відкладаємо крок p по ділильному колу в один та інший бік від побудованої осі симетрії зубця та проводимо осі симетрії другого і третього зубців, відносно яких викреслюємо повні профілі цих зубців. Для зручності побу-

дови профілю цих зубців рекомендуємо використати шаблон зроблений з профілю вже побудованого першого зубця.

На виконаному кресленні необхідно показати радіуси кіл: ділільних, початкових, основних, вершин і западин отриманих зубчатих коліс передачі, радіальні зазори в передачі, сприймане зміщення та кут зачеплення.

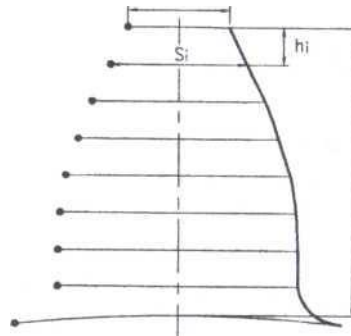


Рисунок 5.3 – Побудова профілю зубця

5.3 Практичні вправи з кінематики замкнених ланцюгів

Для загального n ступеня свободи відкритого ланцюга з прямої кінематики $T(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}^n$, зворотну задачу кінематики можна сформулювати так: дано гомогенне перетворення $X \in SE(3)$, знайти розв'язки θ , які задовольняють $T(\theta) = X$. Виділимо основні особливості оберненої кінематичної задачі, розглянемо дволанковий плоский відкритий ланцюг на рис. 5.4 (а) як мотиваційний приклад. Розглядаючи лише положення кінцевого ефектора та ігноруючи його орієнтацію, пряма кінематика може бути виражена як

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Припускаючи $L_1 > L_2$, множина досяжних точок, або робочий простір, є кільцем внутрішнього радіуса $L_1 - L_2$ і зовнішній радіус $L_1 + L_2$. Дано деякий кінцевий ефект положення (x, y) , не важко побачити що там може бути або нуль, одиниця або два рішення в залежності на (x, y) в екстер'єр, межа, або всередині цього кільця, відповідно. Коли є два рішення, кут в другий суглоб («лікоть» спільний) може бути позитивний або негативний. Ці два рішення іноді називають рішеннями «лівий» і «правий» або «ліктем вгору» і «лікоть вниз» рішення.

Пошук явного рішення (θ_1, θ_2) для заданого (x, y) також не є складним. Для цього нам буде корисно ввести двоаргументну арктангенс функцію $\text{atan2}(y, x)$, яка повертає кут від початку координат до точки (x, y) на площині. Це схоже на обернений тангенс $\tan^{-1}(y/x)$, але в той час як

$\tan^{-1}(y/x)$ є рівним до $\tan^{-1}(p/x)$, і тому \tan^{-1} тільки повертає кути в діапазоні $(\pi/2, \pi/2)$, функція atan2 повертає кути в діапазоні $(\pi, \pi]$. для це причина, atan2 є іноді дзвонив в чотирикутник арктангенс.

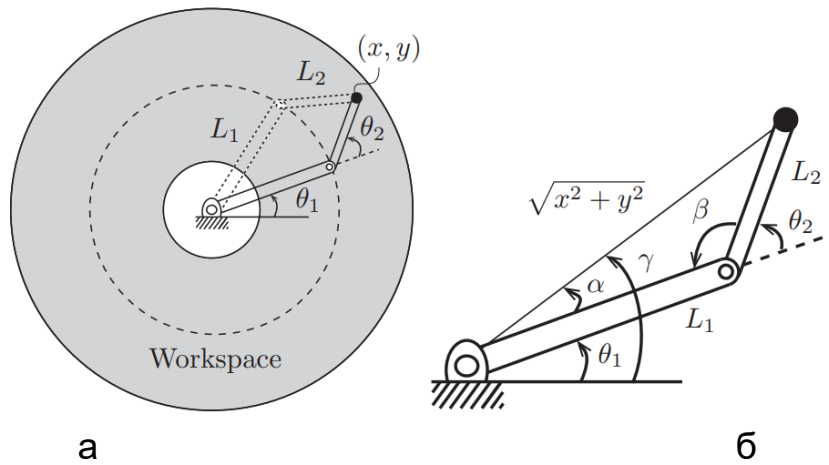


Рисунок 5.4 – Зворотна кінематика з 2R площинного відкритого ланцюга: а) робочий простір, лівша і правша конфігурації; б) геометричне рішення.

Також згадаємо закон косинусів,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 ab \cos C,$$

де a, b, c є довжини з в три сторони з а трикутник і C є в інтер'єр кут з в трикутник протилежність в бік з довжина c .

Посилання до рис. 5.4 (b), кут β , обмежений до брехня в інтервал $[0, \pi]$, може бути визначається від в закон з косинуси,

$$L_1^2 + L_2^2 - 2 L_1 L_2 \cos \beta = x^2 + y^2,$$

від котрого це впливає що

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{L_1^2 + L_2^2 - x^2 - y^2}{2L_1 L_2} \right).$$

Також із закону косинусів,

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{x^2 + y^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1 \sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

Кут γ є визначається використовуючи в двоаргументній арктангенс функції, $\gamma = \text{atan2}(y, x)$. З цими кутами правильний розв'язок зворотньої кінематики

$$\theta_1 = \gamma - \alpha, \theta_2 = \pi - \beta$$

і в ліві рішення є

$$\theta_1 = \gamma + \alpha, \theta_2 = \beta - \pi.$$

Якщо $x^2 + y^2$ назовні в діапазон $[L_1 - L_2, L_1 + L_2]$ потім рішення не існує.

Цей простий мотиваційний приклад ілюструє, що для відкритих ланцюгів кінематична задача може мати декілька рішень; ця ситуація в контрасті з прямою кінематикою, де унікальне переміщення кінцевого ефектора T існує для заданих спільних значень θ . Фактично триланкові планарні відкриті ланцюги мають в-скінченна кількість розв'язків для точок (x, y) , що лежать усередині робочого простору; у цьому випадку ланцюг має додатковий ступінь свободи і називається таким кінематично надлишковий.

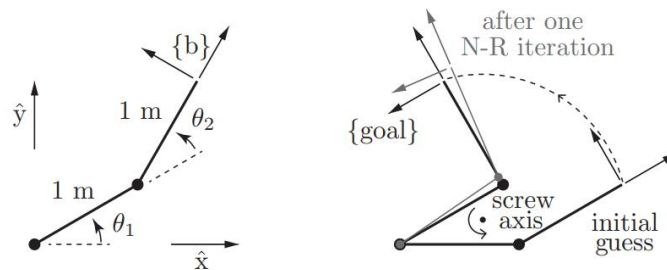


Рисунок 5.5 – (Зліва) Робот 2R. (Праворуч) Мета полягає в тому, щоб знайти спільні кути поступливості кадр кінцевого ефекту $\{goal\}$, що відповідає $\theta_1 = 30^\circ$ і $\theta_2 = 90^\circ$. Початкове припущення $(0^\circ, 30^\circ)$. Після однієї ітерації Ньютона–Рафсона розраховані кути з'єднання становлять $(34,23, 79,18^\circ)$. Також вказується вісь гвинта, яка веде початкову раму до рами воріт (за допомогою кривої пунктирної лінії)

Приклад 5.1 (Робот Planar 2R). Тепер ми застосовуємо тіло Якобіана Ньютона – алгоритм зворотної кінематики Raphson для робота 2R на рисунку 5.5. Кожне посилення дорівнює 1 м у довжину, і ми хотіли б знайти спільні кути, які містять вершину робота на $(x, y) = (0,366 \text{ м}, 1,366 \text{ м})$, що відповідає $\theta_d = (30, 90)$ і

$$T_{sd} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.866 & 0 & 0.366 \\ 0.866 & -0.5 & 0 & 1.366 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

як показано рамкою $\{goal\}$ на малюнку 5.5. Передня кінематика, виражена

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Нашим початковим припущенням щодо рішення є $\theta^0 = (0,30)$, і ми визначаємо допуск до помилок $\omega = 0,001$ рад (або $0,057^\circ$) і $v = 10^{-4}$ м (100 мкм). Прогрес методу Ньютона–Рафсона проілюстровано в таблиці 5.8 нижче, де лише $(\omega_{zb}, v_{xb}, v_{yb})$ -компоненти скручування тіла V_b задано, оскільки рух робота обмежено площиною x – y .


Таблиця 5.8 – Компоненти $(\omega_{zb}, v_{xb}, v_{yb})$ скручування тіла V_b задано, оскільки рух робота обмежено площиною x – y

i	(θ_1, θ_2)	(x, y)	$\mathcal{V}_b = (\omega_{zb}, v_{xb}, v_{yb})$	$\ \omega_b\ $	$\ v_b\ $
0	$(0.00, 30.00^\circ)$	$(1.866, 0.500)$	$(1.571, 0.498, 1.858)$	1.571	1.924
1	$(34.23^\circ, 79.18^\circ)$	$(0.429, 1.480)$	$(0.115, -0.074, 0.108)$	0.115	0.131
2	$(29.98^\circ, 90.22^\circ)$	$(0.363, 1.364)$	$(-0.004, 0.000, -0.004)$	0.004	0.004
3	$(30.00^\circ, 90.00^\circ)$	$(0.366, 1.366)$	$(0.000, 0.000, 0.000)$	0.000	0.000

Ітераційна процедура збігається в межах допусків після трьох ітерацій. На малюнку 5.5 показано початкове припущення, конфігурацію мети та конфігурації після однієї ітерації. Зауважте, що перший обчислений v_{xb} додатний, незважаючи на те, що початок рамки воріт знаходиться в напрямку $-x_b$ початкової вгадати. Причина в тому, що постійна швидкість тіла V_b , яка приймає початкову припустити, що {goal} за одну секунду — це обертання навколо осі гвинта, зазначеного в фігурі.

Контрольні запитання до теми 5

1. Що таке нульове евольвентне зачеплення?
2. Яка основна відмінність між нульовим і рівнозміщеним евольвентним зачепленням?
3. Які параметри необхідно визначити для розрахунку геометричних параметрів евольвентної пари циліндричних зубчастих коліс?
4. Як визначається коефіцієнт зміщення x для уникнення підрізу зубця?
5. Чому підріз зубця є небезпечним для зубчастої передачі?
6. Які умови необхідно перевірити при проектуванні планетарної передачі?
7. Як визначити радіуси основних кіл зубчастих коліс?

- 
8. Що таке відносне ковзання в зубчастій передачі і як його розрахувати?
 9. Які параметри включаються у таблицю для креслення зубчастого зачеплення згідно з вимогами ЄСКД?
 10. Як виконується коригування зубчастої передачі при числі зубців менше мінімально допустимого?
 11. Що таке теоретична та активна лінії зачеплення?
 12. Як побудувати картину евольвентного зубчастого зачеплення в торцевому перерізі?
 13. Які параметри зуборізної рейки використовуються при виконанні дослідження зубчатих механізмів?
 14. Як визначити коефіцієнти x_1 і x_2 для нерівнозмщеного зачеплення?
 15. Що таке коефіцієнт відхилення міжосьової відстані і як його розрахувати?
 16. Які умови співвісності необхідно перевірити при проектуванні планетарного механізму?
 17. Які практичні вправи з кінематики замкнених ланцюгів розглядаються в лекції?
 18. Як визначити радіуси кіл виступів зубчастих коліс?
 19. Що таке передаточне відношення планетарного механізму і як його розрахувати?
 20. Які значення коефіцієнтів корекції використовуються для рівнозмщеного зачеплення?
 21. Як впливає позитивне і від'ємне зміщення на товщину зубця?
 22. Яка мінімальна кількість зубців повинна бути у нульової шестерні?
 23. Як виконати кінематичне дослідження зубчатого механізму графічним методом?
 24. Що таке модуль зачеплення і як він впливає на геометричні параметри зачеплення?
 25. Як побудувати діаграми лінійних швидкостей точок та кутових швидкостей коліс?

Використана література

1. Seccarelli M. Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulation. Second Edition. Rome : Springer Cham, 2022. 381 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90848-5>.
2. Ковальов Ю. А., Кошель С. О., Манойленко О. П. Проектування промислових роботів та маніпуляторів : навчальний посібник. Київ : Центр учбової літератури, 2022. 256 с.

ТЕМА 6

ОСНОВИ АНАЛІЗУ ТА СИНТЕЗУ КУЛАЧКОВИХ МЕХАНІЗМІВ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ ПРОМИСЛОВИХ РОБОТІВ ТА МАНІПУЛЯТО- РІВ

Метою вивчення теми є ознайомлення з основами аналізу та синтезу кулачкових механізмів механічних систем промислових роботів та маніпуляторів.

Завдання вивчення теми збігаються з переліком питань для розгляду, що наведений нижче.

Перелік питань до розгляду

- 6.1 Динаміка відкритих ланцюгів
- 6.2 Основні поняття та визначення
- 6.3 Фазові кути кулачка
- 6.4 Кути тиску та передачі руху

6.1 Динаміка відкритих ланцюгів

Вступ. *Послідовність виконання синтезу та аналізу кулачкових механізмів механічних систем (графічний спосіб).*

1. Вибрати вихідні дані для синтезу кулачкового механізму заданого типу.

2. Побудувати в невизначеному масштабі графічну залежність руху штовхача: аналог прискорення штовхача – функція кута повороту кулачка (за заданим законом руху штовхача).

3. За допомогою метода графічного інтегрування побудувати графіки залежностей аналога швидкості та переміщення штовхача функція кута повороту кулачка.

4. Визначити масштабні коефіцієнти діаграм руху штовхача кулачкового механізму.

5. Виконати графічну побудову для визначення оптимальної величини мінімального радіусу кулачка, який би забезпечив виконання умови динамічного синтезу кулачкового механізму (використати величину кута тиску, яка є рекомендованою для даного типу кулачкового механізму).

6. Виконати профілювання кулачка за допомогою метода обернення руху. Побудувати теоретичний та робочий профілі кулачка. Позначити робочий профіль кулачка, штовхач, для роликів штовхачів-ролик штовхача, опори (стояк). Позначити ланки механізму, визначити фазові кути кулачкового величини кутів тиску для різних взаємних, побудувати діаграму зміни даного кута від кута повороту кулачка, позначити допустиму величину кута, зробити висновки.

Завдання синтезу кулачкового механізму полягає у тому, щоб

синтезувати теоретичний та робочий профілі кулачка, що задовольняють вимогам технологічного процесу. Для цього задаються:

1. Схема кулачкового механізму.
2. Закон руху кулачка у вигляді $\omega_{\text{кул}} = \text{const}$.
3. Закон руху відомої ланки (штовхача) у вигляді рівняння $\frac{d^2\beta}{d\varphi^2} =$

$f(\varphi)$ – для коромислових кулачкових механізмів або

$\frac{d^2s}{d\varphi^2} = f(\varphi)$ – для механізмів з штовхачем, що рухається поступально.

4. Фазові кути кулачкового механізму: $\varphi_{\text{в}}$ - кут віддалення, $\varphi_{\text{д}}$ - кут дальнього відстоювання, $\varphi_{\text{п}}$ - кут повернення.

5. Хід штовхача: (β_{max} - максимальний кут відхилення коромислового штовхача, або h_{max} - максимальне переміщення штовхача, що поступально рухається.

6. Мінімальний кут передачі руху (γ_{min}), або допустимий кут тиску ($\theta_{\text{доп}} = 90 - \gamma_{\text{min}}$).

7. Деякі лінійні розміри: $l_{\text{кор}}$ - довжина коромислового штовхача.

У цьому питанні ми ще раз вивчаємо рухи роботів із відкритим ланцюгом, але цього разу з урахуванням сил і крутних моментів, які їх викликають; це предмет динаміки роботів. Пов'язані динамічні рівняння, які також називаються рівняннями руху, являють собою набір диференціальних рівнянь другого порядку у вигляді

$$\tau = M(\theta) \ddot{\theta} + h(\theta, \dot{\theta}), \quad (6.1)$$

де $\theta \in R^n$ – вектор спільних змінних, $\tau \in R^n$ – вектор спільних сил і крутних моментів, $M(\theta) \in R^{n \times n}$ – симетрична додатньо визначена матриця мас, а $h(\theta, \dot{\theta}) \in R^n$ – сили, які об'єднують доцентрові, коріолісові, сили тяжіння та тертя, які залежать від θ і $\dot{\theta}$. Не варто вводити в оману уявну простоту цих рівнянь; навіть для «простих» відкритих ланцюгів, наприклад, з осями з'єднань, ортогональними або паралельними одна одній, $M(\theta)$ і $h(\theta, \dot{\theta})$ можуть бути надзвичайно складними.

Подібно до того, як було зроблено різницю між прямою та зворотною кінематикою робота, також прийнято розрізняти пряму та зворотню динаміку робота. Пряма задача – це задача визначення прискорення θ робота з урахуванням стану ($\theta, \dot{\theta}$), а також спільних сил і крутних моментів,

$$\ddot{\theta} = M^{-1}(\theta) (\tau - h(\theta, \dot{\theta})), \quad (8.2)$$

а обернена задача полягає в знаходженні спільних сил і крутних моментів τ , що відповідають стану робота та бажаному прискоренню, тобто рівнянню (6.1).

Динамічні рівняння робота зазвичай отримують одним із двох



способів: прямим застосуванням динамічних рівнянь Ньютона й Ейлера для твердого тіла (часто називають формулюванням Ньютона-Ейлера) або динамічним формулюванням Лагранжа, отриманим із кінетичної та потенційної енергії. робота.

Формалізм Лагранжа концептуально елегантний і досить ефективний для роботів з простими структурами, наприклад, з трьома або менше ступенями свободи. Однак обчислення можуть швидко стати громіздкими для роботів із більшим ступенем свободи. Для загальних відкритих ланцюгів формулювання Ньютона-Ейлера призводить до ефективних рекурсивних алгоритмів як для зворотної, так і для прямої динаміки, які також можуть бути зібрані в аналітичні вирази закритої форми для, наприклад, матриці мас $M(\theta)$ та інших членів у рівняння динаміки (6.1) . Формулювання Ньютона-Ейлера також використовує інструменти.

У цьому питанні ми вивчаємо формулювання динаміки Лагранжа та Ньютона-Ейлера для роботи з відкритим ланцюгом. У той час як ми зазвичай виражаємо динаміку через змінні θ спільного простору, іноді зручно виразити її через конфігурацію, скручування та швидкість зміни скручування кінцевого ефектора. Іноді роботи підлягають набору обмежень на їх рух, наприклад, коли робот вступає в контакт із твердим середовищем. Це призводить до формулювання обмеженої динаміки, за допомогою якого простір спільних крутних моментів і сил розділений на підпростір, який викликає рух робота, і підпростір, який викликає сили проти обмежень.

Формулювання Лагранжа. Основні поняття та спонукальні приклади. Першим кроком у лагранжевому формулюванні динаміки є вибір набору незалежних координат $q \in R^n$, який описує конфігурацію системи. Координати q називають узагальненими координатами. Після вибору узагальнених координат вони потім визначають узагальнені сили $f \in R^n$. Сили f і швидкості координат \dot{q} подвійні одна одній у тому сенсі, що скалярний добуток $f^T \dot{q}$ відповідає потужності. Тоді функція Лагранжа $L(q, \dot{q})$ визначається як кінетична енергія всієї системи $K(q, \dot{q})$ мінус потенційна енергія $P(q)$,

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - P(q).$$

Тепер рівняння руху можна виразити через лагранжіан таким чином:

$$f = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \quad (6.3)$$

Ці рівняння також називаються рівняннями Ейлера-Лагранжа із зовнішніми силами. Виведення можна знайти в динамічних текстах.

Ми проілюструємо формулювання динаміки Лагранжа на двох прикладах. У першому прикладі розглянемо частинку масою m , змуше-



ну рухатися по вертикальній лінії. Конфігураційний простір частинки є цією вертикальною лінією, і природним вибором узагальненої координати є висота частинки, яку ми позначаємо скалярною змінною $x \in R$. Припустимо, що гравітаційна сила mg діє вниз, а зовнішня сила f є застосовується вгору. За другим законом Ньютона рівняння руху частинки має вигляд:

$$f - mg = m\ddot{x}. \quad (6.4)$$

Тепер ми застосуємо формалізм Лагранжа, щоб отримати той самий результат. Кінетична енергія дорівнює $m\dot{x}^2/2$, потенціальна – mgx , лагранжіан:

$$L(x, \dot{x}) = K(x, \dot{x}) - P(x) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - mgx. \quad (6.5)$$

Тоді рівняння руху має вигляд

$$L(x, \dot{x}) = K(x, \dot{x}) - P(x) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - mgx, \quad (6.6)$$

що відповідає рівнянню (6.4).

Тепер ми виведемо динамічні рівняння для плоского відкритого ланцюга $2R$, що рухається під дією сили тяжіння (рис. 6.1).

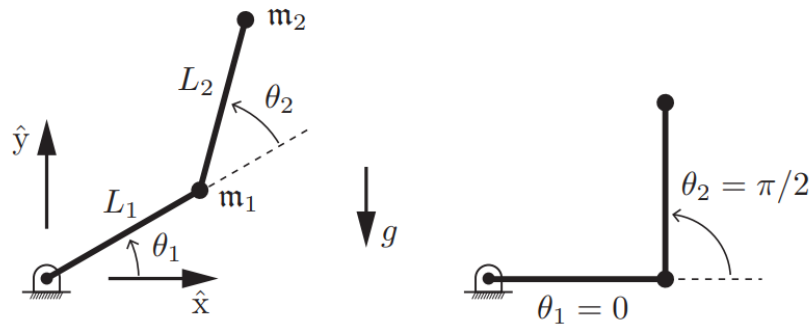


Рисунок 6.1 – (Ліворуч) Розімкнутий ланцюг $2R$ під дією сили тяжіння. (Праворуч) При $\theta = (0, \pi/2)$

Ланцюг рухається в площині $\hat{x} - \hat{y}$, а сила тяжіння g діє в напрямку $-\hat{y}$. Перш ніж отримати динаміку, необхідно визначити масу та інерційні властивості всіх ланок. Для простоти дві ланки моделюються як точкові маси m_1 і m_2 , зосереджені на кінцях кожної ланки. Положення та швидкість маси ланки-1 визначаються як

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1 \\ L_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin \theta_1 \\ L_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1,$$

в той час як маси ланки-2 задані як

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin \theta_1 - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) & -L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) & L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}.$$

Як узагальнені координати виберемо спільні координати $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. Тоді узагальнені сили $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ відповідають шарнірним моментам (оскільки $\tau^T \dot{\theta}$ відповідає потужності). Лагранжیان $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta})$ має вигляд

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}) = \sum_{i=1}^2 (\mathcal{K}_i - \mathcal{P}_i), \quad (6.7)$$

де члени кінетичної енергії ланки \mathcal{K}_1 і \mathcal{K}_2 дорівнюють

$$\mathcal{K}_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2$$

$$\mathcal{K}_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$= \frac{1}{2} m_2 \left((L_1^2 + 2L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_2^2) \dot{\theta}_1^2 + 2(L_2^2 + L_1 L_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2 \right),$$

а члени потенційної енергії ланки \mathcal{P}_1 і \mathcal{P}_2 є

$$\mathcal{P}_1 = m_1 g y_1 = m_1 g L_1 \sin \theta_1,$$

$$\mathcal{P}_2 = m_2 g y_2 = m_2 g (L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin (\theta_1 + \theta_2)).$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа (8.3) для цього прикладу мають вигляд

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2. \quad (6.8)$$

Динамічні рівняння для плоского ланцюга 2R впливають із явної оцінки правої частини (6.8) (ми опускаємо детальні обчислення, які є простими, але стомлюючими):

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= (\mathbf{m}_1 L_1^2 + \mathbf{m}_2(L_1^2 + 2L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_2^2)) \ddot{\theta}_1 \\ &\quad + \mathbf{m}_2(L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_2^2) \ddot{\theta}_2 - \mathbf{m}_2 L_1 L_2 \sin \theta_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\ &\quad + (\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) L_1 g \cos \theta_1 + \mathbf{m}_2 g L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \\ \tau_2 &= \mathbf{m}_2(L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_2^2) \ddot{\theta}_1 + \mathbf{m}_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 + \mathbf{m}_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \\ &\quad + \mathbf{m}_2 g L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Ми можемо зібрати доданки разом у рівняння виду:

$$\tau = M(\theta) \ddot{\theta} + \underbrace{c(\theta, \dot{\theta})}_{h(\theta, \dot{\theta})} + g(\theta), \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} M(\theta) &= \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1 L_1^2 + \mathbf{m}_2(L_1^2 + 2L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_2^2) & \mathbf{m}_2(L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_2^2) \\ \mathbf{m}_2(L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_2^2) & \mathbf{m}_2 L_2^2 \end{bmatrix}, \\ c(\theta, \dot{\theta}) &= \begin{bmatrix} -\mathbf{m}_2 L_1 L_2 \sin \theta_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\ \mathbf{m}_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}, \\ g(\theta) &= \begin{bmatrix} (\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) L_1 g \cos \theta_1 + \mathbf{m}_2 g L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \mathbf{m}_2 g L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

де $M(\theta)$ — симетрична позитивно визначена матриця маси, $c(\theta, \dot{\theta})$ — вектор, що містить Коріолісовий і доцентровий моменти, а $g(\theta)$ — вектор, що містить гравітаційні моменти. Вони показують, що рівняння руху є лінійними за $\ddot{\theta}$, квадратними за $\dot{\theta}$ і тригонометричними за θ . Це вірно загалом для серійних ланцюгів, що містять поворотні шарніри, а не лише для робота 2R.

Члени $M(\theta) \ddot{\theta} + c(\theta, \dot{\theta})$ у рівнянні (6.10) можна було б отримати шляхом запису $f_i = m_i a_i$ для кожної точкової маси, де прискорення a_i записуються через θ , диференціюючи вирази для (якщо \dot{x}_1, \dot{y}_1) і (якщо \dot{x}_2, \dot{y}_2) наведені вище:

$$f_1 = \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{z1} \end{bmatrix} = \mathbf{m}_1 \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{m}_1 \begin{bmatrix} -L_1 \dot{\theta}_1^2 c_1 - L_1 \ddot{\theta}_1 s_1 \\ -L_1 \dot{\theta}_1^2 s_1 + L_1 \ddot{\theta}_1 c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.11)$$

$$f_2 = m_2 \begin{bmatrix} -L_1\dot{\theta}_1^2 c_1 - L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 c_{12} - L_1\ddot{\theta}_1 s_1 - L_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) s_{12} \\ -L_1\dot{\theta}_1^2 s_1 - L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 s_{12} + L_1\ddot{\theta}_1 c_1 + L_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

де S_{12} вказує на $\sin(\theta_1 + \theta_2)$ тощо. Визначення r_{11} як вектора від суглоба 1 до m_1 , r_{12} як вектора від суглоба 1 до m_2 і r_{22} як вектора від суглоба 2 до m_2 , моменти в вирівняних системах $\{i\}$, приєднаних до з'єднань 1 і 2, можна виразити як $m_1 = r_{11} \times f_1 + r_{12} \times f_2$ і $m_2 = r_{22} \times f_2$. (Зверніть увагу, що суглоб 1 має забезпечувати крутний момент для переміщення як m_1 , так і m_2 , але шарнір 2 повинен забезпечувати крутний момент лише для переміщення m_2 .) Крутні моменти з'єднання t_1 і t_2 є лише третіми елементами m_1 і m_2 , тобто моментами навколо осей z_i поза сторінкою відповідно.

У (x, y) координатах прискорення мас записуються просто як другі похідні за часом від координат, наприклад, (\ddot{x}_2, \ddot{y}_2) . Це пояснюється тим, що система $\hat{x} - \hat{y}$ є інерціальною. Однак спільні координати (θ_1, θ_2) не знаходяться в інерціальній системі, тому прискорення виражаються як сума доданків, які є лінійними щодо других похідних спільних змінних, $\ddot{\theta}$, і квадратичними першими похідними спільних змінних, $\dot{\theta}^T \dot{\theta}$, як видно з рівнянь (6.11) і (6.12). Квадратичні члени, що містять $\dot{\theta}_i^2$ називаються **доцентровими** членами, а квадратичні члени, що містять $\dot{\theta}_i \dot{\theta}_j$, $i \neq j$, називаються членами **Коріоліса**. Іншими словами, $\ddot{\theta} = 0$ не означає нульове прискорення мас через доцентрові та коріолісові члени.

Щоб краще зрозуміти доцентрові та коріолісові члени, розглянемо плече в конфігурації $(\theta_1, \theta_2) = (0, \pi/2)$, тобто $\cos \theta_1 = \sin \theta_1, \theta_2 = 1, \sin \theta_1 = \cos(\theta_1, \theta_2) = 0$. Припускаючи $\ddot{\theta} = 0$, прискорення (\ddot{x}_2, \ddot{y}_2) m_2 з рівняння (6.12) можна записати:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -L_1\dot{\theta}_1^2 \\ -L_2\dot{\theta}_1^2 - L_2\dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix}}_{\text{доцентрові терміни}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -2L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \end{bmatrix}}_{\text{терміни Коріоліса}}.$$

На рис. 6.2 показано доцентрове прискорення $a_{\text{cent}1} = (-L_1, \dot{\theta}_1^2, -L_2, \dot{\theta}_2^2)$, коли $\theta_2 = 0$, доцентрове прискорення $a_{\text{cent}2} = (0, -L_2, \dot{\theta}_2^2)$ при $\theta_1 = 0$, а прискорення **Коріоліса** $a_{\text{cor}} = (0, -2L_2, \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)$, коли $\dot{\theta}_1$, і $\dot{\theta}_2$ є позитивними. Як показано на рисунку 6.2, кожне доцентрове прискорення $a_{\text{cent}i}$ притягує m_2 до шарніра i , щоб підтримувати обертання m_2 навколо центру кола, визначеного шарніром i . Тому $a_{\text{cent}ij}$ створює нульовий крутний момент навколо шарніра i . Прискорення Коріоліса a_{cor} у цьому прикладі проходить через шарнір 2, тому він створює нульовий крутний момент навколо шарніра 2, але створює негативний крутний момент навколо шарніра 1; крутний момент навколо шарніра 1 є негативним, тому що m_2 наближається до шарніра 1 (через рух шарніра 2). Тому



інерція через m_2 відносно осі Z_1 зменшується, що означає, що позитивний імпульс навколо шарніра 1 падає, тоді як швидкість $\dot{\theta}_1$ шарніра 1 є постійною. Тому шарнір 1 повинен прикладати негативний крутний момент, оскільки крутний момент визначається як швидкість зміни моменту імпульсу. Інакше $\dot{\theta}_1$ зростатиме як m_2 наближається до суглоба 1 так само, як швидкість обертання фігуристки збільшується, коли вона тягне витягнуті руки під час обертання.

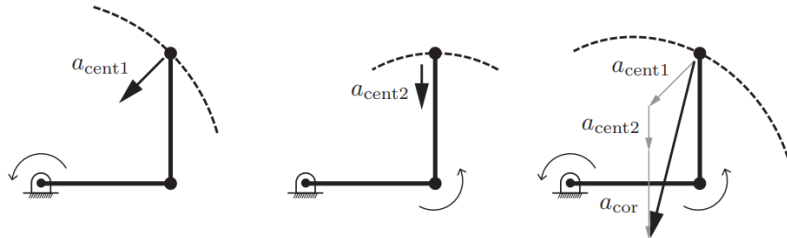


Рисунок 6.2 – Прискорення m_2 , коли $\theta = (0, \pi/2)$ і $\ddot{\theta} = 0$. (Ліворуч) Доцентрове прискорення $a_{cent1} = (-L_1 \ddot{\theta}_2, -L_2 \ddot{\theta}_2)$ від m_2 , коли $\dot{\theta}_2 = 0$. (Середній) Доцентрове прискорення $a_{cent2} = (0, -L_2 \ddot{\theta}_2)$ m_2 при $\dot{\theta}_1 = 0$. (Праворуч) Коли обидва з'єднання є обертається з $\dot{\theta}_i > 0$, прискорення є векторною сумою a_{cent1} , a_{cent2} і Прискорення Кориоліса $a_{cor} = (0, -2 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)$

Загальні формулювання. Тепер ми опишемо формулювання динаміки Лагранжа для загальних відкритих ланцюгів з n -ланками. Першим кроком є вибір набору узагальнених координат $\theta \in \mathbb{R}^n$ для конфігураційного простору системи. Для відкритих ланцюгів, усі з'єднання яких запущені, зручно і завжди можливо вибрати θ як вектор значень з'єднань. Узагальнені сили позначатимемо $\tau \in \mathbb{R}^n$. Якщо θ_i — обертовий шарнір, то τ_i відповідатиме крутному моменту, а якщо θ_i — призматичний шарнір, то τ_i відповідатиме силі.

Після того, як θ вибрано та визначено узагальнені сили τ , наступним кроком є формулювання лагранжіана $L(\theta, \dot{\theta})$ наступним чином:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = K(\theta, \dot{\theta}) - P(\theta), \quad (6.13)$$

де $K(\theta, \dot{\theta})$ — кінетична енергія, а $P(\theta)$ — потенційна енергія всієї системи. Для роботів із жорсткими ланками кінетичну енергію завжди можна записати у вигляді

$$K(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}(\theta) \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta}, \quad (6.14)$$

де $m_{ij}(\theta)$ — (i, j) -й елемент $n \times n$ матриці мас $M(\theta)$; конструктивний доказ цього твердження надається, коли ми розглядаємо формулювання Ньютона-Ейлера.



Динамічні рівняння отримані аналітично шляхом обчислення правої частини

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.15)$$

З кінетичною енергією, вираженою у рівнянні (6.14), динаміку можна записати явно як

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n m_{ij}(\theta) \ddot{\theta}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \Gamma_{ijk}(\theta) \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.16)$$

де $\Gamma_{ijk}(\theta)$, відомі як символи Крістоффеля першого роду, визначаються таким чином:

$$\Gamma_{ijk}(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial \theta_i} \right).$$

Це показує, що символи Крістоффеля, які генерують Коріолісові та центропетельні члени $c(\theta, \dot{\theta})$, є похідними від матриці мас $M(\theta)$.

Як ми вже бачили, рівняння (6.16) часто збираються разом у формі

$$\tau = M(\theta) \ddot{\theta} + c(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta) \quad \text{або} \quad M(\theta) \ddot{\theta} + h(\theta, \dot{\theta}),$$

де $g(\theta)$ є просто $d\mathcal{P}/d\theta$.

Ми можемо чітко побачити, що коріолісові та доцентрові члени мають квадратичну швидкість за допомогою форми

$$\tau = M(\theta) \ddot{\theta} + \dot{\theta}^T \Gamma(\theta) \dot{\theta} + g(\theta), \quad (6.18)$$

де $\Gamma(\theta)$ – матриця $n \times n \times n$, а добуток $\dot{\theta}^T \Gamma(\theta) \dot{\theta}$ слід інтерпретувати наступним чином:

$$\dot{\theta}^T \Gamma(\theta) \dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}^T \Gamma_1(\theta) \dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T \Gamma_2(\theta) \dot{\theta} \\ \vdots \\ \dot{\theta}^T \Gamma_n(\theta) \dot{\theta} \end{bmatrix},$$

де $\Gamma_i(\theta)$ — матриця $n \times n$ із (j, k) -м записом Γ_{ijk} .

Також прийнято бачити динаміку, записану як

$$\tau = M(\theta) \ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) \dot{\theta} + g(\theta),$$

де $C(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ називається **матрицею Коріоліса** з (i, j) записом

$$c_{ij}(\theta, \dot{\theta}) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ijk}(\theta) \dot{\theta}_k. \quad (6.19)$$

Матриця Коріоліса використовується для доведення наступної властивості пасивності (твердження 6.1), який можна використати для доказу стабільності певних законів керування роботом.

Твердження 6.1. Матриця $M(\theta) - 2C(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ є кососиметричним, де $M(\theta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матриця маси, $M(\theta)$ – її похідна за часом, а $C(\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ є матрицею Коріоліса, як визначено в рівнянні (6.19).

Доказ. (i, j) -й компонент $M - 2C$ є

$$\begin{aligned} \dot{m}_{ij}(\theta) - 2c_{ij}(\theta, \dot{\theta}) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_{ij}}{\partial \theta_k} \dot{\theta}_k - \frac{\partial m_{ij}}{\partial \theta_k} \dot{\theta}_k - \frac{\partial m_{ik}}{\partial \theta_j} \dot{\theta}_k + \frac{\partial m_{kj}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_{kj}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_k - \frac{\partial m_{ik}}{\partial \theta_j} \dot{\theta}_k. \end{aligned}$$

Помінявши місцями індекси i і j , можна побачити, що

$$m_{ji}(\theta) - 2c_{ji}(\theta, \dot{\theta}) = -(m_{ij}(\theta) - 2c_{ij}(\theta, \dot{\theta})),$$

таким чином доводячи, що $(M - 2C)^T = -(M - 2C)$, як заявлено.

6.2 Основні поняття і визначення

У механічних системах промислових роботів та маніпуляторів поряд з зубчастими і шарнірними механізмами набули широкого розповсюдження кулачкові механізми. Особливо часто кулачкові механізми знаходять застосування при автоматизації технологічних процесів. Кулачкові механізми забезпечують нерівномірний рух (обертальний, поступальний чи коливальний) веденої ланки при рівномірному русі ведучої, рух веденої ланки з зупинками і т. ін.

У структурному відношенні кулачкові механізми являють собою ланцюги з нижчими і вищими кінематичними парами. Найчастіше це триланкові механізми, які складаються з кулачка 1, штовхача 2 і стояка 3 (рис. 6.3, а).

Кулачком називається ведуча ланка вищої пари, яка надає веденій ланці заданий рух, закон якого визначається профілем кулачка. Лінія перетину циліндричної поверхні кулачка з площиною, перпендикулярною до його осі, називається профілем кулачка.

Штовхачем називається ведена ланка, яка утворює з кулачком вищу пару. За профілем штовхачі бувають: загострені — (див. рис. 6.3, б), роликові — (див. рис. 6.3, в), плоскі — (див. рис. 6.3, г) та криволінійні — (див. рис. 6.3, д).

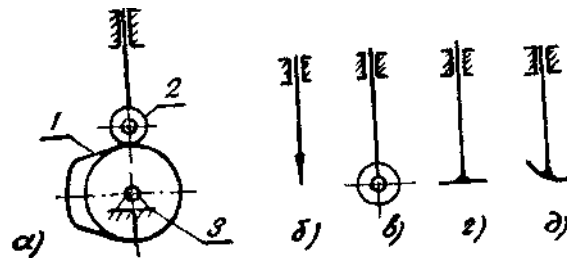


Рисунок 6.3 – Кулачковий механізм та профілі штовхачів: а – схема механізму, штовхачі; б – загострений; в - роликовий; г – плоский; д – криволінійний

Загострені штовхачі на практиці застосовуються рідко внаслідок того, що у місці контакту виникають великі питомі тиски і відбувається знос спряжених поверхонь. Найбільше поширення набули роликові штовхачі.

Кулачкові механізми залежать від форми кулачка та бувають плоскими і просторовими. Найбільше поширення мають плоскі кулачкові механізми з дисковим кулачком.

Плоскі кулачкові механізми у залежності від взаємного розташування ведучої і веденої ланок та характеру їх руху поділяються на: *центрові* – (рис. 6.4, а), *позацентрові* (рис. 6.4, б), *коромислові* (рис. 6.4, в).

Для забезпечення постійного зіткнення кулачка з штовхачем застосовується силове або геометричне замикання. Силове замикання найчастіше здійснюється пружиною (рис. 6.4, а, б, в), чи за рахунок власної ваги штовхача.

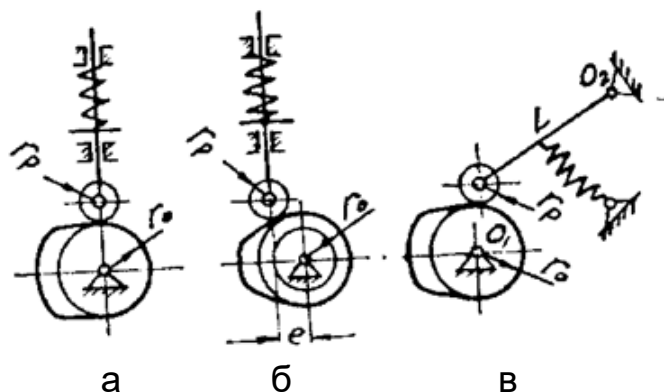


Рисунок 6.4 – Схеми плоских кулачкових механізмів»: а) центро-

вий; б) позацентровий; в) коромисло вий

Приклад геометричного (кінематичного) замикання за допомогою паза, вифрезуваного у тілі кулачка, в якому рухається ролик штовхача, показаний на рис. 6.5.

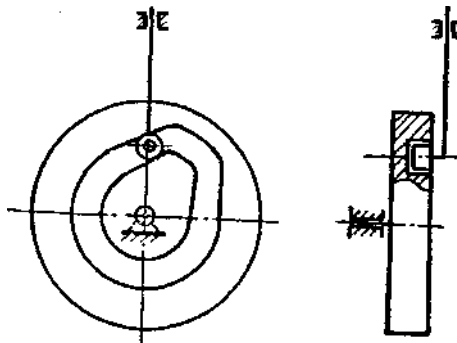


Рисунок 6.5 – Геометричне замикання в кулачковому механізмі

При дослідженні кулачкових механізмів розглядаються два основних завдання:

1. *Аналіз кулачкового механізму*, коли за заданими розмірами ланок, профілем кулачка і законом його руху визначаються закон руху веденої ланки.

2. *Синтез кулачкового механізму*, коли за заданими законом руху веденої ланки (штовхача) будується профіль кулачка.

Дослідження кулачкових механізмів може бути виконане, як графічними, так і аналітичними методами. Графічне дослідження переважно здійснюють за допомогою кінематичних діаграм.

Дослідження кулачкових механізмів з найбільш поширеною роликвою формою штовхача, зручно проводити при розгляді теоретичної схеми передачі, у якій кулачок стикається з загостреним штовхачем (див. рис 6.6).

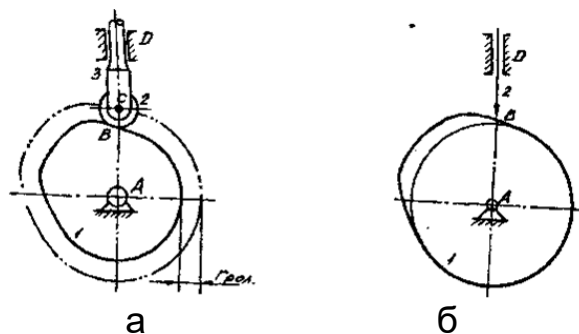


Рисунок 6.6 – Механізм з зайвим ступенем вільності: а) основний; б) замінючий

Теоретична схема, у відношенні руху веденої ланки, тотожна з дійсною, але дослідження її значно спрощується. Профіль кулачка β' (рис. 6.7, а), називається теоретичним профілем. Дійсний (чи практич-

ний) профіль кулачка β являє собою еквідистантну криву, рівновіддалену від теоретичного профілю на величину радіуса r_p ролика.

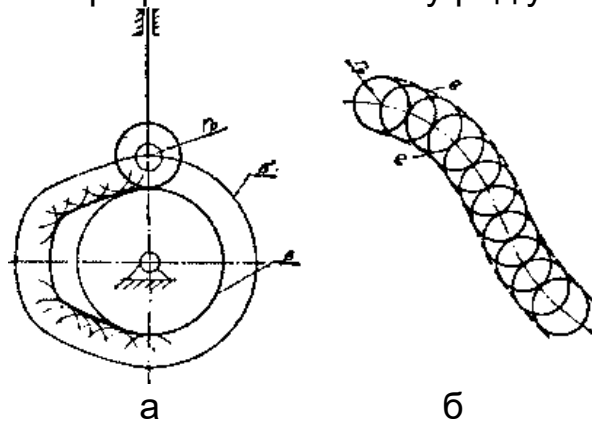


Рисунок. 6.7 – Теоретичний та практичний профілі кулачка: а) схема механізму; б) побудова еквідистантних кривих е.

6.3 Фазові кути кулачка

Перш ніж перейти до аналізу і синтезу кулачкових механізмів, розглянемо основні визначення і співвідношення, які зустрічаються при їх дослідженні. Профіль кулачка можна розділити на чотири характерних ділянки, які у залежності від виконуваного технологічного процесу можуть мати різну величину. Розглянемо вказані ділянки на прикладі кулачкового механізму, поданого на рис. 6.8.

1. Ділянка профілю a_b , яка забезпечує підйом штовхача, називається профілем віддалення, а відповідний центральний кут β_b — кутом віддалення.

2. Ділянка профілю b_c , яка забезпечує знаходження штовхача у найвищому положенні, називається профілем дальнього стояння, а центральний кут β_d — кутом дальнього стояння.

3. Ділянка профілю c_d яка забезпечує повернення штовхача у нижче положення, називається профілем повернення, а кут β_c — кутом повернення.

4. Ділянка профілю d_a , яка забезпечує знаходження штовхача у нижчому положенні, називається профілем ближнього стояння, а кут β_b — кутом ближнього стояння.

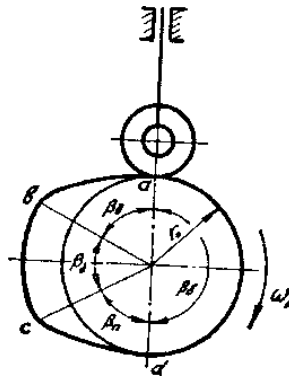


Рисунок 6.8 – Характерні ділянки профіля кулачка

Кути повороту кулачка, відповідні віддаленню, дальньому стоянню, поверненню та ближньому стоянню штовхача, позначимо через φ_B , φ_D , φ_P та φ_B . Кут повороту кулачка, рівний сумі φ_B , φ_D та φ_B носить назву *робочого кута*

$$\varphi_P = \varphi_B + \varphi_D + \varphi_P. \quad (6.20)$$

У залежності від виконуваного технологічного процесу деякі з ділянок профілю (і відповідні їм кути) можуть бути рівними нулю (це відноситься до кутів φ_D та φ_B). Кути φ_B та φ_P дорівнювати нулю не можуть.

Тривалість повного повороту кулачка $t = \frac{60}{n_K}$ сек,

де n_K - частота обертання кулачка (об/хв).

При рівномірному обертанні кулачка можна так визначити час віддалення з відомою кутовою швидкістю ω_K ближнього стояння штовхача:

$$t_B \frac{\varphi_B}{\omega_K}; t_D \frac{\varphi_D}{\omega_K}; t_P \frac{\varphi_P}{\omega_K}; t_B \frac{\varphi_B}{\omega_K} \quad (6.21)$$

Сума часу $t_B + t_D + t_P = t_P$ відповідає повороту кулачка на величину робочого кута φ_P .

Радіус найменшої окружності кулачка r_0 носить назву *радіуса основної шайби, або мінімального радіуса кулачка*.

6.4 Кути тиску та передачі руху

При передачі руху сила N яка діє з боку кулачка на штовхач, спрямована (якщо нехтувати тертям) по нормалі n - n до профілю кулачка (рис. 6.9, а). Розкладемо її на дві складові: силу P , яка діє по лінії руху штовхача, і силу Q , перпендикулярну до першої. Позначимо кут, утворений силами P і N , через α і назовемо його кутом тиску, тоді

$$\left. \begin{aligned} P &= N \cos \alpha \\ Q &= N \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

Корисною для підймання штовхача є лише сила P , сила ж Q викликає перекіс штовхача в напрямних і може призвести до його заклинювання.

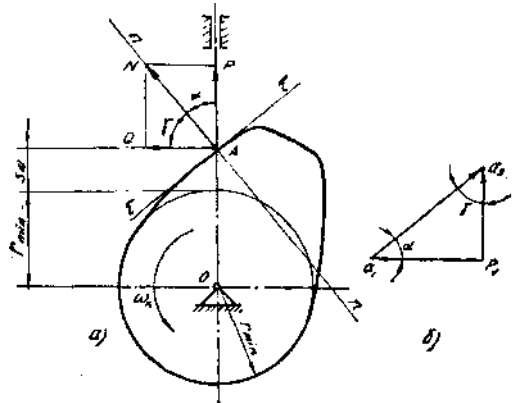


Рисунок 6.9 – До визначення кутів тиску та передачі руху кулачкового механізму: а) схема механізму; б) план швидкостей

Тому при проектуванні кулачкового механізму необхідно прагнути до зменшення кута тиску. Однак, зменшення цього кута призводить до збільшення габаритів передачі і тому рекомендують кут тиску приймати не більше 45° для коромислових механізмів та не більше 30° для кулачкових механізмів зі штовхачем, що рухається поступально.

В деяких випадках роботу кулачкової передачі зручно характеризувати не за кутом тиску, а за додатковим кутом $\gamma = 90^\circ - \alpha$, який називають кутом передачі руху. Очевидно, що при проектуванні кулачкової передачі необхідно прагнути до збільшення кута γ . Найбільш сприятливий випадок буде при застосуванні плоского штовхача, коли $\gamma = 90^\circ$ (рис. 6.10).

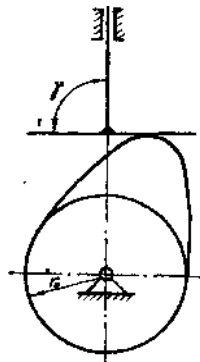



Рисунок 6.10 – Кулачковий механізм з плоским штовхачем

Контрольні запитання до теми 6

1. Які основні етапи синтезу кулачкових механізмів?
2. Що таке динаміка відкритих ланцюгів?

- 
3. Які основні поняття та визначення використовуються при аналізі кулачкових механізмів?
 4. Що таке фазові кути кулачка?
 5. Як визначаються кути тиску та передачі руху?
 6. Як вибрати вихідні дані для синтезу кулачкового механізму?
 7. Який графічний метод використовується для побудови залежності руху штовхача?
 8. Як проводиться графічне інтегрування для визначення швидкості та переміщення штовхача?
 9. Що таке масштабні коефіцієнти діаграм руху штовхача?
 10. Як визначити оптимальну величину мінімального радіусу кулачка?
 11. Що таке профілювання кулачка?
 12. Які існують теоретичні та робочі профілі кулачка?
 13. Як позначаються фазові кути кулачкового механізму?
 14. Що таке максимальний кут відхилення коромислового штовхача?
 15. Що таке мінімальний кут передачі руху?
 16. Які лінійні розміри визначаються при синтезі кулачкового механізму?
 17. Що таке рівняння руху для відкритих ланцюгів?
 18. Як використовуються динамічні рівняння Ньютона-Ейлера у синтезі кулачкових механізмів?
 19. Що таке лагранжян і як він визначається?
 20. Як виглядають рівняння Ейлера-Лагранжа із зовнішніми силами?
 21. Які основні відмінності між прямою та зворотною динамікою роботів?
 22. Як застосовується формулювання Лагранжа до роботів з відкритим ланцюгом?
 23. Що таке доцентрові та коріолісові сили і як вони враховуються у динаміці роботів?
 24. Як визначаються моменти та крутні моменти у спільних координатах робота?
 25. Які виклики виникають при обчисленні динаміки для роботів із більшим ступенем свободи?

Використана література

1. Seccarelli M. Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulation. Second Edition. Rome : Springer Cham, 2022. 381 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90848-5>.
2. Ковальов Ю. А., Кошель С. О., Манойленко О. П. Проектування промислових роботів та маніпуляторів : навчальний посібник. Київ : Центр учбової літератури, 2022. 256 с.



ТЕМА 7

ГЕНЕРАЦІЯ ТРАЄКТОРІЇ РОБОТІВ

Метою вивчення теми є ознайомлення з генерацією траєкторії роботів, траєкторією точка-точка, поліноміальними траєкторіями проміжних точок та масштабуванням оптимального часу.

Завдання вивчення теми збігаються з переліком питань для розгляду, що наведений нижче.

Перелік питань до розгляду

- 7.1 Основні визначення та поняття про генерацію траєкторії роботів
- 7.2 Траєкторії точка-точка
- 7.3 Поліноміальні траєкторії проміжних точок
- 7.4 Масштабування оптимального часу

7.1 Основні визначення та поняття про генерацію траєкторії роботів

Вступ. Під час руху робота контролеру робота надається постійний потік цільових положень і швидкостей для відстеження. Ця специфікація положення робота як функція часу називається траєкторією. У деяких випадках траєкторія повністю задана завданням – наприклад, кінцевому ефектору може знадобитися стежити за відомим рухомим об'єктом. В інших випадках, наприклад, коли завдання полягає в тому, щоб просто перейти з однієї позиції в іншу за певний час, ми маємо свободу розробити траєкторію, щоб відповідати цим обмеженням. Це область планування траєкторії. Траєкторія має бути достатньо плавною функцією часу, і вона повинна відповідати будь-яким заданим обмеженням швидкостей, прискорень або крутних моментів суглобів.

У цій лекції ми розглядаємо траєкторію як комбінацію шляху, суто геометричного опису послідовності конфігурацій, досягнутих роботом, і масштабування часу, яке визначає час, коли ці конфігурації досягаються. Ми розглядаємо три випадки: прямолінійні траєкторії «точка-точка» як у просторі суглоба, так і в просторі завдання; траєкторії, що проходять через послідовність часових проміжних точок; і траєкторії з мінімальним часом уздовж заданих шляхів з урахуванням обмежень приводу.

Шлях $\theta(s)$ відображає скалярний параметр шляху s , який вважається рівним θ на початку шляху та 1 у кінці, на точку в просторі конфігурації робота Θ , $\theta: [0, 1] \rightarrow \Theta$. Коли s збільшується від 0 до 1 , робот рухається по шляху. Іноді s приймають за час і можуть змінюватись від часу $s = 0$ до загального часу руху $s = T$, але часто корисно відокремити роль параметра геометричного шляху s від параметра часу t . Масштабування часу $s(t)$

присвоює значення s кожному моменту часу $t \in [0, T]$, $s : [0, T] \rightarrow [0, 1]$.

Разом шлях і шкала часу визначають траєкторію $\theta(s(t))$, або скорочено $\theta(t)$. Використовуючи правило ланцюга, швидкість і прискорення вздовж траєкторії можна записати як

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{ds} \dot{s}, \quad (7.1)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d\theta}{ds} \ddot{s} + \frac{d^2\theta}{ds^2} \dot{s}^2. \quad (7.2)$$

Щоб гарантувати, що прискорення (і, отже, динаміка) робота є чітко визначеним, кожен з $\theta(s)$ і $s(t)$ має бути двічі диференційованим.

7.2 Траєкторії точка-точка

Найпростішим типом руху є рух від спокою в одній конфігурації до спокою в іншій. Ми називаємо це рухом від точки до точки. Найпростішим видом шляху для руху від точки до точки є пряма лінія. Прямолінійні шляхи та їх часові масштаби обговорюються нижче.

Прямі лінії. «Пряма» від початкової конфігурації $\theta_{\text{поч.}}$ щоб кінцева конфігурація $\theta_{\text{кін.}}$. Θ могла бути визначена в просторі з'єднань або в просторі завдань. Перевагою прямолінійного шляху від $\theta_{\text{поч.}}$ до $\theta_{\text{кін.}}$ в просторі з'єднання є простота: оскільки межі з'єднання зазвичай мають форму $\theta_{\text{поч.}} < \theta_i < \theta_{i, \text{max}}$ для кожного суглоба i допустимі конфігурації суглобів утворюють опуклий набір Θ_{free} у просторі суглоба, тому пряма лінія між будь-якими двома кінцевими точками в Θ_{free} також лежить у Θ_{free} . Прямую можна записати

$$\theta(s) = \theta_{\text{поч.}} + s(\theta_{\text{кін.}} - \theta_{\text{поч.}}), \quad s \in [0, 1] \quad (7.3)$$

з похідними

$$\frac{d\theta}{ds} = \theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}}, \quad (7.4)$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0. \quad (7.5)$$

Прямі лінії в суглобовому просторі зазвичай не дають прямолінійного руху кінцевого ефектора в робочому просторі. Якщо потрібні прямолінійні рухи простору завдань, початкову та кінцеву конфігурації можна

вказати за допомогою X початку та кінця X у просторі завдань.

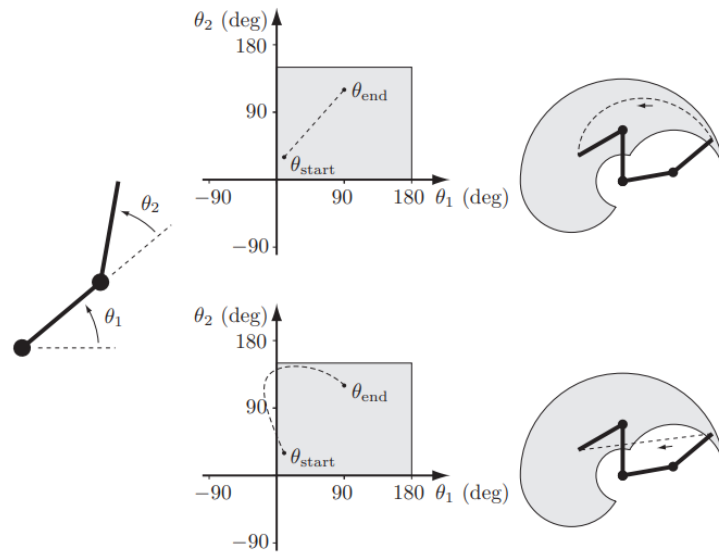


Рисунок 7.1 – (Ліворуч) робот 2R із межами з'єднання $0^\circ \leq \theta_1 \leq 180^\circ$, $0^\circ \leq \theta_2 \leq 150^\circ$. (Вгорі у центрі) прямолінійний шлях у суглобовій щілині та (вгорі праворуч) відповідний рух кінцевого ефектора в просторі завдань (пунктирна лінія). Конфігурації доступної кінцевої точки, підлягають обмеженням з'єднань, позначені сірим кольором. (Внизу по центру) Ця крива лінія в суглобі пробіє і (внизу праворуч) відповідний прямолінійний шлях у просторі завдань (пунктирна лінія) порушить межі з'єднання.

Якщо X початок і X кінець представлені мінімальним набором координат, тоді пряма лінія визначається як $X(s) = X_{\text{початок}} + s(X_{\text{кінець}} - X_{\text{початок}})$, $s \in [0, 1]$. Порівняно з випадком, коли використовуються спільні координати, необхідно вирішити наступні проблеми:

- Якщо шлях проходить поблизу кінематичної сингулярності, спільні швидкості можуть стати невиправдано великими для майже всіх часових масштабів шляху.
- Оскільки досяжний простір завдань робота може не бути опуклим у координатах X , деякі точки на прямій лінії між двома досяжними кінцевими точками можуть бути недосяжними (рисунок 7.1).

На додаток до проблем, наведених вище, якщо $X_{\text{поч.}}$ і $X_{\text{кін.}}$ представлені як елементи $SE(3)$ замість мінімального набору координат, то виникає питання, як визначити «пряму» лінію в $SE(3)$. Конфігурація у вигляді $X_{\text{початок}} + s(X_{\text{кінець}} - X_{\text{початок}})$ зазвичай не міститься в $SE(3)$.

Одним із варіантів є використання руху гвинта (одночасне обертання навколо та переміщення вздовж фіксованої осі гвинта), яке переміщує кінцевий ефектор робота від $X_{\text{поч.}} = X(0)$ до $X_{\text{кін.}} = X(1)$. Щоб отримати цей $X(s)$, ми можемо явно записати початкову та кінцеву конфігурації у кадрі $\{s\}$ як X_s , початок і $X_{s,\text{кін.}}$ і використати наше правило скасування нижнього індексу, щоб виразити кінцеву конфігурацію у початковому кадрі:

$$X_{\text{поч.,кін.}} = X_{\text{поч.}} s X_{\text{с,кін.}} = X^{-1} s_{\text{поч.}} X_{\text{с,кін.}}$$

Тоді $\log(X_{\text{поч.}}^{-1} X_{\text{с,кін.}})$ — це матричне представлення скручування, виражене в кадрі {start}, яке переміщує X початок до $X_{\text{кін.}}$ за одиницю часу. Тому шлях можна записати як

$$X(s) = X_{\text{поч.}} \exp(\log(X_{\text{поч.}}^{-1} X_{\text{кін.}})s), \quad (7.6)$$

де $X_{\text{поч.}}$ помножено на матричну експоненціалу, оскільки поворот представлений у кадрі {start}, а не у фіксованому світовому кадрі {s}.

Цей рух гвинта забезпечує «прямолінійний» рух у тому сенсі, що вісь гвинта є постійною. Початок кінцевого ефектора зазвичай не йде прямою лінією в декартовому просторі, оскільки він слідує за гвинтовим рухом. Може бути краще відокремити обертальний рух від поступального руху. Записуючи $X = (R,p)$, ми можемо визначити шлях

$$p(s) = p_{\text{поч.}} + s(p_{\text{кін.}} - p_{\text{поч.}}), \quad (7.7)$$

$$R(s) = R_{\text{поч.}} \exp(\log(R_{\text{поч.}}^{-1} R_{\text{кін.}})s) \quad (7.8)$$

де початок рамки йде по прямій лінії, а вісь обертання постійна в рамці тіла. На рисунку 7.2 показано гвинтовий шлях і відокремлений шлях для тих самих $X_{\text{поч.}}$ і $X_{\text{кін.}}$.

Масштабування часу прямолінійного шляху

Масштабування часу $s(t)$ шляху має забезпечувати належну плавність руху та дотримання будь-яких обмежень на швидкість і прискорення робота. Для прямолінійного шляху в просторі суглоба форми (7.3) масштабовані в часі швидкості та прискорення суглобів є $\dot{\theta} = \dot{s}(\theta_{\text{кін.}} - \theta_{\text{поч.}})$ і $\ddot{\theta} = \ddot{s}(\theta_{\text{кін.}} - \theta_{\text{поч.}})$, відповідно. Для прямолінійного шляху в просторі завдань, параметризованого мінімальним набором координат $X \in \mathbb{R}^m$, просто замініть θ , $\dot{\theta}$ і $\ddot{\theta}$ на X , \dot{X} і \ddot{X} .

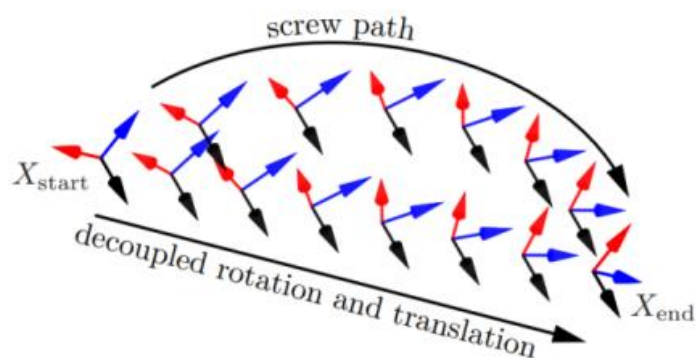


Рисунок 7.2 – Шлях, що слідує за постійним рухом гвинта, порівняно з роз'єднаним шляхом, де початок системи йде по прямій лінії, а кутова швидкість постійна

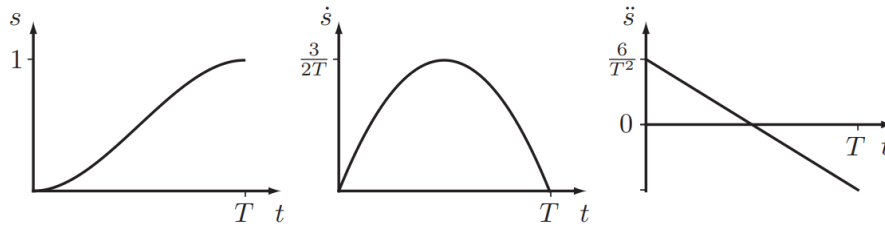


Рисунок 7.3 – Графіки $s(t)$, $\dot{s}(t)$ і $\ddot{s}(t)$ для поліноміального часового масштабування третього порядку.

Поліноміальне масштабування часу

Поліноми третього порядку. Зручною формою масштабування часу $s(t)$ є кубічний поліном часу,

$$s(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3. \quad (7.9)$$

Рух від точки до точки за час T накладає початкові обмеження $s(0) = \dot{s}(0) = 0$ і кінцеві обмеження $s(T) = 1$ і $\dot{s}(T) = 0$. Оцінка рівняння (7.9) і його похідна

$$\dot{s}(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 \quad (7.10)$$

при $t = 0$ і $t = T$ і розв'язуючи чотири обмеження для a_0, \dots, a_3 , ми знаходимо

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{3}{T^2}, \quad a_3 = -\frac{2}{T^3}.$$

Графіки $s(t)$, $\dot{s}(t)$ і $\ddot{s}(t)$ показані на рисунку 7.3.

Підставляючи $s = a_2t^2 + a_3t^3$ у рівняння (7.3), виходить

$$\theta(t) = \theta_{\text{start}} + \left(\frac{3t^2}{T^2} - \frac{2t^3}{T^3} \right) (\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}}), \quad (7.11)$$

$$\dot{\theta}(t) = \left(\frac{6t}{T^2} - \frac{6t^2}{T^3} \right) (\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}}), \quad (7.12)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \left(\frac{6}{T^2} - \frac{12t}{T^3} \right) (\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}}). \quad (7.13)$$

Максимальні сумарні швидкості досягаються на половині шляху $t = T/2$:

$$\dot{\theta}_{\max} = \frac{3}{2T}(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}}).$$

Максимальні спільні прискорення і уповільнення досягаються при $t = 0$ і $t = T$:

$$\ddot{\theta}_{\max} = \left| \frac{6}{T^2}(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}}) \right|, \quad \ddot{\theta}_{\min} = - \left| \frac{6}{T^2}(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}}) \right|.$$

Якщо відомі обмеження на максимальні сумісні швидкості $|\dot{\theta}| \leq \dot{\theta}_{\text{limit}}$, максимальні суглобові прискорення $|\ddot{\theta}| \leq \ddot{\theta}_{\text{limit}}$, ці межі можна перевірити, щоб побачити, чи можливий запитований час руху T . Крім того, можна вирішити для T , щоб знайти мінімально можливий час руху, який задовольняє найбільше обмеження швидкості або прискорення.

Поліноми п'ятого порядку Оскільки масштабування часу третього порядку не обмежує прискорення шляху кінцевої точки $\ddot{s}(0)$ і $\ddot{s}(T)$ рівними нулю, робота просять досягти переривчастого стрибка прискорення як при $t = 0$, так і при $t = T$. Це означає нескінченний ривок, похідну від прискорення, який може викликати вібрацію робота.

Одне з рішень полягає в тому, щоб обмежити прискорення кінцевої точки до $s(0) = s(T) = 0$. Додавання цих двох обмежень до формулювання проблеми вимагає додавання ще двох свобод дизайну в поліномі, що дає квінтичний поліном часу, $s(t) = a_0 + \dots + a_5 t^5$. Ми можемо використовувати шість кінцевих обмежень положення, швидкості та прискорення, щоб однозначно розв'язати $a_0 + \dots + a_5$, що дає більш плавний рух із вищою максимальною швидкістю, ніж кубічне масштабування часу. Графік часового масштабування показано на рисунку 7.4.

Трапецієподібні профілі руху. Трапецієподібні шкали часу досить поширені в управлінні двигуном, особливо для руху одного суглоба, і вони отримали свою назву через свої профілі швидкості.

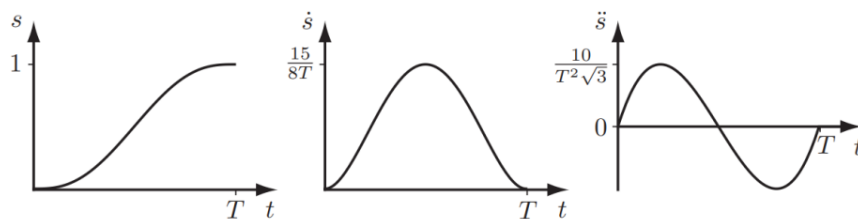


Рисунок 7.4 – Графіки $s(t)$, $\dot{s}(t)$ і $\ddot{s}(t)$ для поліноміального часового масштабування п'ятого порядку

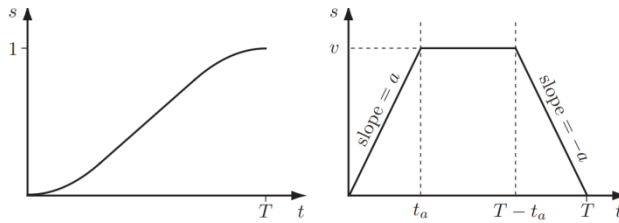


Рисунок 7.5 – Графіки $s(t)$ і $S(t)$ для трапецієподібного профілю руху

Рух від точки до точки складається з постійної фази прискорення $\dot{s} = a$ часу t_a , за якою слідує фаза постійної швидкості $\dot{s} = v$ часу $t_v = T - 2t_a$, за якою слідує постійна фаза уповільнення $\dot{s} = -a$ часу t_a . Отриманий s -профіль є трапецією, а s -профіль — зчепленням параболи, лінійного сегмента та параболи як функції часу (рис. 7.5).

Трапецієподібне масштабування часу не таке плавне, як кубічне масштабування часу, але воно має перевагу в тому, що якщо є відомі постійні обмеження спільних швидкостей $\dot{\theta}_{\text{limit}} \in \mathbb{R}^n$ і сумісних прискорень $\ddot{\theta}_{\text{limit}} \in \mathbb{R}^n$, тоді трапецієподібний рух за допомогою найбільший v і задовільний є найшвидшим можливим прямолінійним рухом.

$$|(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}})v| \leq \dot{\theta}_{\text{limit}}, \quad (7.14)$$

$$|(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}})a| \leq \ddot{\theta}_{\text{limit}} \quad (7.15)$$

Якщо $v^2/a > 1$, робот ніколи не досягне швидкості v під час руху (наприклад, 7.10). Трифазний рух прискорення-вибігу-уповільнення стає двофазним рухом прискорення-уповільнення «бах-бах», а трапецієподібний профіль $s(t)$ на рисунку 7.5 стає трикутником.

Оскільки лише два з v , a і T можна вибрати незалежно, у нас є три варіанти:

- Виберіть v і a так, щоб $v^2/a < 1$, забезпечуючи триступеневий трапецієподібний профіль, і розв'яжіть $s(T) = 1$ (використовуючи рівняння (7.24)) для T :

$$T = \frac{a + v^2}{va}$$

Якщо v і a відповідають максимально можливим суглобовим швидкостям і прискоренням, це мінімально можливий час руху.

Виберіть v і T так, щоб $2 > vT > 1$, забезпечивши триступеневий трапецієподібний профіль і щоб максимальна швидкість v була достатньою для досягнення $s = 1$ за час T , і розв'яжіть $s(T) = 1$ для a :

$$a = \frac{v^2}{vT - 1}$$

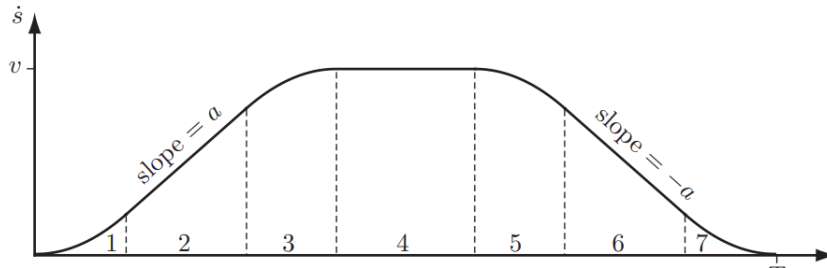


Рисунок 7.6 – Графік $s(t)$ для профілю руху S-кривої, що складається з семи етапів: (1) постійний позитивний ривок, (2) постійне прискорення, (3) постійний негативний ривок, (4) постійна швидкість, (5) постійний негативний ривок, (6) постійне уповільнення та (7) постійний позитивний ривок

Якщо припустити, що $v^2/a < 1$, трапецієподібний рух повністю визначається v , a , t_a і T , але лише два з них можуть бути визначені незалежно, оскільки вони повинні задовольняти $s(T) = 1$ і $v = \dot{s}$ при a . Навряд чи ми б задали t а самостійно, тому ми можемо виключити його з рівнянь руху заміною $t_a = v/a$. Профіль руху протягом трьох етапів (прискорення, вибіг, уповільнення) можна записати через v , a і T наступним чином:

$$\text{for } 0 \leq t \leq \frac{v}{a}, \quad \ddot{s}(t) = a, \quad (7.16)$$

$$\dot{s}(t) = at, \quad (7.17)$$

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2; \quad (7.18)$$

$$\text{for } \frac{v}{a} < t \leq T - \frac{v}{a}, \quad \ddot{s}(t) = 0, \quad (7.19)$$

$$\dot{s}(t) = v, \quad (7.20)$$

$$s(t) = vt - \frac{v^2}{2a}; \quad (7.21)$$

$$\text{for } T - \frac{v}{a} < t \leq T, \quad \ddot{s}(t) = -a, \quad (7.22)$$

$$\dot{s}(t) = a(T - t), \quad (7.23)$$

$$s(t) = \frac{2avT - 2v^2 - a^2(t - T)^2}{2a}. \quad (7.24)$$

• Виберіть a і T так, щоб $aT^2 > 4$, гарантуючи, що рух завершується вчасно, і розв'яжіть $s(T) = 1$ для v :

$$v = \frac{1}{2} \left(aT - \sqrt{a} \sqrt{aT^2 - 4} \right)$$

Масштабування часу S-кривої. Подібно до того, як кубічний поліно-



міальний часовий масштаб призводить до нескінченного ривка на початку та в кінці руху, трапецієподібні рухи викликають переривчасті стрибки прискорення при $t \in \{0, t_a, T - t_a, T\}$. Рішенням є більш плавне масштабування часу S-кривої, популярний профіль руху в управлінні двигуном, оскільки він дозволяє уникнути вібрацій або коливань, спричинених ступінчастими змінами прискорення. Масштабування часу S-кривої складається з семи етапів: (1) постійний ривок $d^3s/dt^3 = J$ до досягнення бажаного прискорення $\ddot{s} = a$; (2) постійне прискорення до наближення до бажаного $\dot{s} = v$; (3) постійний негативний ривок $-J$ до тих пір, поки s не дорівнюватиме нулю точно в момент, коли S досягає v ; (4) рух накатом при постійній v ; (5) постійний негативний ривок $-J$; (6) постійне уповільнення $-a$; і (7) постійний позитивний ривок J , поки s і S не досягнуть нуля точно в той момент, коли s досягне 1.

Профіль $S(t)$ для S-кривої показано на малюнку 7.6.

Враховуючи деяку підмножину v, a, J і загальний час руху T , алгебраїчна маніпуляція виявляє час перемикання між етапами та умови, які гарантують, що всі сім етапів фактично досягнуті, подібно до випадку трапецієподібного профілю руху.

7.3 Поліноміальні траєкторії проміжних точок

Якщо мета полягає в тому, щоб суглоби робота проходили через серію проміжних точок у визначений час, без суворої специфікації щодо форми шляху між послідовними точками, простим рішенням є використання поліноміальної інтерполяції для безпосереднього пошуку історії з'єднань $\theta(t)$ без попереднього визначення шляху $\theta(s)$, а потім масштабування часу $s(t)$ (рисунок 7.7).

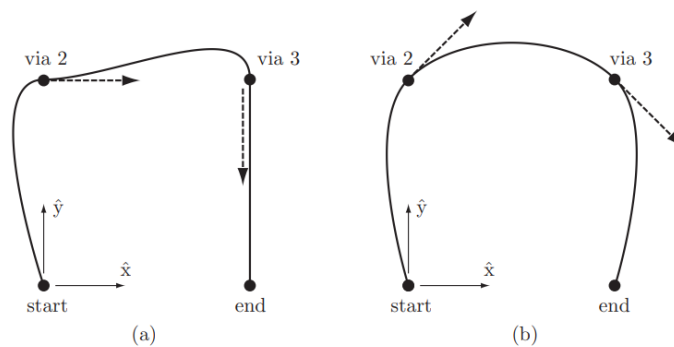


Рисунок 7.7 – Два шляхи в просторі (x, y) , що відповідають кусково-кубічним траєкторіям, що інтерполують чотири прохідні точки, включаючи початкову та кінцеву точки. Швидкості на початку та в кінці дорівнюють нулю, а швидкості на отворах 2 і 3 позначено штриховими дотичними векторами. Форма шляху залежить від швидкостей, указаних у проміжних точках

Нехай траєкторія визначається k за допомогою точок, з початковою



точкою в $T_1 = 0$ і кінцевою точкою в $T_k = T$. Оскільки кожна спільна історія інтерполюється індивідуально, ми зосереджуємось на одній спільній змінній і називаємо її β , щоб уникнути розповсюдження нижніх індексів. У кожній прохідній точці $i \in \{1, \dots, k\}$ користувач вказує бажане положення $\beta(T_i) = \beta_i$ і швидкість $\dot{\beta}(T_i) = \dot{\beta}_i$. Траєкторія має $k - 1$ відрізок, а тривалість відрізка $j \in \{1, \dots, k - 1\}$ є $\Delta T_j = T_{j+1} - T_j$. Спільна траєкторія протягом сегмента j виражається поліномом третього порядку

$$\beta(T_j + \Delta t) = a_{j0} + a_{j1} \Delta t + a_{j2} \Delta t^2 + a_{j3} \Delta t^3 \quad (7.25)$$

через час Δt , що минув на сегменті j , де $0 < \Delta t < \Delta T_j$. Відрізок j підпадає під дію чотирьох обмежень

$$\begin{aligned} \beta(T_j) &= \beta_j, & \dot{\beta}(T_j) &= \dot{\beta}_j, \\ \beta(T_j + \Delta T_j) &= \beta_{j+1}, & \dot{\beta}(T_j + \Delta T_j) &= \dot{\beta}_{j+1}. \end{aligned}$$

Вирішення цих обмежень для a_{j0}, \dots, a_{j3} дає результат

$$a_{j0} = \beta_j, \quad (7.26)$$

$$a_{j1} = \dot{\beta}_j, \quad (7.27)$$

$$a_{j2} = \frac{3\beta_{j+1} - 3\beta_j - 2\dot{\beta}_j \Delta T_j - \dot{\beta}_{j+1} \Delta T_j}{\Delta T_j^2}, \quad (7.28)$$

$$a_{j3} = \frac{2\dot{\beta}_j + (\dot{\beta}_j + \dot{\beta}_{j+1}) \Delta T_j - 2\dot{\beta}_{j+1}}{\Delta T_j^3}. \quad (7.29)$$

На рисунку 7.8 показані часові історії для інтерполяції на малюнку 7.7 (а). У цьому двовимірному (x, y) координатному просторі проміжні точки 1, ..., 4 виникають у моменти часу $T_1 = 0$, $T_2 = 1$, $T_3 = 2$ і $T_4 = 3$. Проміжні точки знаходяться в $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$ зі швидкостями $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$ і $(0, 0)$.

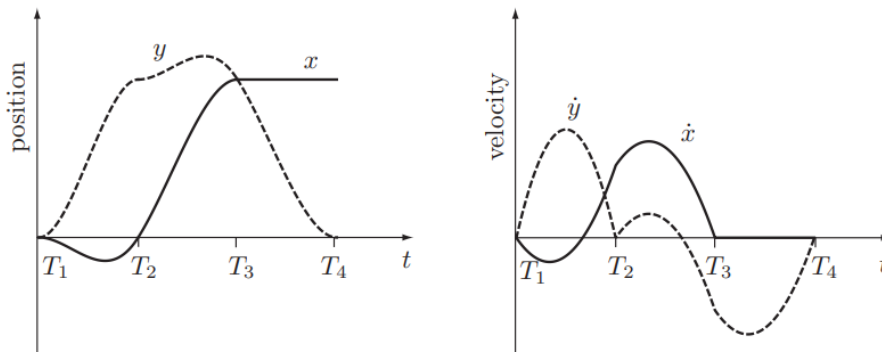



Рисунок 7.8 – Часові історії координат для інтерполяції кубічної проміжної точки

Варто згадати дві проблеми:



- час і вектори координат до проміжних точок до та після відповідного проміжного пункту. Як приклад, траєкторія на малюнку 7.7 (b) більш гладка, ніж траєкторія на малюнку 7.7 (a).

- Інтерполяція кубічних проміжних точок гарантує безперервність швидкостей у проміжних точках, але не прискорень. Цей підхід легко узагальнити до використання поліномів п'ятого порядку та специфікації прискорень у проміжних точках ціною збільшення складності рішення.

Якщо використовуються лише дві точки (початкова та кінцева точки), а швидкості в кожній дорівнюють нулю, результуюча траєкторія ідентична прямолінійній кубічній поліноміальній траєкторії в масштабі часу, розглянутій у розділі 7.2.

Існує багато інших методів інтерполяції набору проміжних точок. Наприклад, популярна інтерполяція B-сплайн. У B-сплайн-інтерполяції шлях може не проходити точно через проміжні точки, але шлях гарантовано буде обмежений опуклою оболонкою проміжних точок, на відміну від шляхів на рисунку 7.7. Це може бути важливо, щоб переконатися, що обмеження суглобів або перешкоди робочого простору дотримуються.

7.4 Масштабування оптимального часу

У випадку, коли шлях $\theta(s)$ повністю визначений завданням або планувальником шляху уникнення перешкод (наприклад, рис. 7.9), задача планування траєкторії зводиться до знаходження масштабування часу $s(t)$. Можна вибрати масштабування часу, щоб мінімізувати енергію, споживану під час дотримання обмеження часу, або щоб запобігти розливанню склянки води, яку несе робот. Одне з найкорисніших масштабувань часу мінімізує час руху по шляху, залежно від обмежень приводу робота. Такі оптимальні за часом траєкторії максимізують продуктивність робота.

У той час як трапецієподібні шкали часу розділу 7.2 можуть давати оптимальні за часом траєкторії, це лише за припущення прямолінійних рухів, постійного максимального прискорення a та постійної максимальної швидкості накату v . Для більшості роботів через залежні від стану межі шарнірного приводу та стан- залежна динаміка

$$M(\theta)\ddot{\theta} + c(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta) = \tau, \quad (7.30)$$

максимальні доступні швидкості та прискорення змінюються на шляху.

У цьому розділі ми розглядаємо проблему пошуку найшвидшого можливого масштабування часу $s(t)$, яке відповідає обмеженням приводу робота. Ми запишемо межі для i -го приводу як

$$\tau_{\min i}(\theta, \dot{\theta}) \leq \tau_i \leq \tau_{\max i}(\theta, \dot{\theta}). \quad (7.31)$$

Доступний крутний момент приводу зазвичай є функцією поточної



швидкості шарніра. Наприклад, для даної максимальної напруги двигуна постійного струму максимальний крутний момент, доступний від двигуна, падає лінійно зі швидкістю двигуна.

Перш ніж продовжити, ми нагадаємо, що квадратичні члени швидкості $c(\theta, \dot{\theta})$ в рівнянні (7.30) можна записати еквівалентно як

$$c(\theta, \dot{\theta}) = \dot{\theta}^T \Gamma(\theta) \dot{\theta},$$

де $\Gamma(\theta)$ – тривимірний тензор символів Крістоффеля, побудований з частинних похідних компонентів матриці мас $M(\theta)$ по θ . Ця форма більш наочно показує квадратичну залежність від швидкостей. Тепер, починаючи з рівняння (7.30), замінюючи $\dot{\theta}$ на $(d\theta/ds)\dot{s}$ і $\ddot{\theta}$ на $(d\theta/ds)\ddot{s} + (d\theta/ds^2)\dot{s}^2$ і переставляючи, ми отримуємо

$$\underbrace{\left(M(\theta(s)) \frac{d\theta}{ds} \right)}_{m(s) \in \mathbb{R}^n} \ddot{s} + \underbrace{\left(M(\theta(s)) \frac{d^2\theta}{ds^2} + \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^T \Gamma(\theta(s)) \frac{d\theta}{ds} \right)}_{c(s) \in \mathbb{R}^n} \dot{s}^2 + \underbrace{g(\theta(s))}_{g(s) \in \mathbb{R}^n} = \tau, \quad (7.32)$$

виражається більш компактно у вигляді векторного рівняння

$$m(s)\ddot{s} + c(s) \dot{s}^2 + g(s) = \tau, \quad (7.33)$$

де $m(s)$ – ефективна інерція робота, коли він обмежений траєкторією $\theta(s)$, $c(s)\dot{s}^2$ містить квадратичні терміни швидкості, а $g(s)$ — гравітаційний момент.

Подібним чином, обмеження спрацьовування (7.31) можна виразити як функцію s :

$$\tau_i^{\min}(s, \dot{s}) < \tau_i < \tau_i^{\max}(s, \dot{s}). \quad (7.34)$$

Підставляючи i -ту складову рівняння (7.33), отримуємо

$$\tau_i^{\min}(s, \dot{s}) < m_i(s)\ddot{s} + c_i(s) \dot{s}^2 + g_i(s) < \tau_i^{\max}(s, \dot{s}). \quad (7.34)$$

Нехай $L_i(s, \dot{s})$ і $U_i(s, \dot{s})$ — мінімальне та максимальне прискорення \ddot{s} , що задовольняють i -ту компоненту рівняння (7.35). Залежно від знака $m_i(s)$, у нас є три можливості:

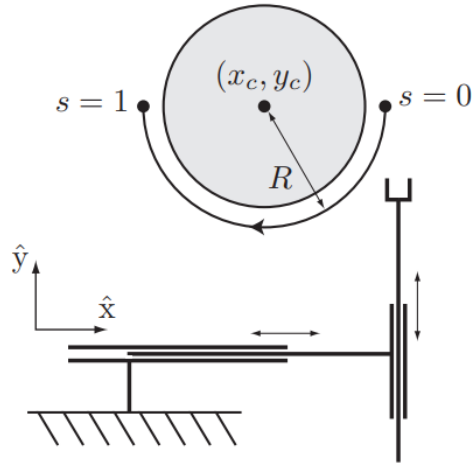


Рисунок 7.9 – Планувальник шляху повернув напівкруглу траєкторію радіусом R навколо перешкоди в просторі (x, y) для робота з двома призматичними шарнірами

Шлях можна представити через параметр шляху s , як $x(s) = x_c + R \cos \pi s$ і $y(s) = y_c - R \sin \pi s$ для $s \in [0, 1]$. Для робота $2R$ інверсна кінематика буде використана для вираження шляху як функції s у координатах з'єднання.

$$\left. \begin{aligned} \text{if } m_i(s) > 0, \quad L_i(s, \dot{s}) &= \frac{\tau_i^{\min}(s, \dot{s}) - c(s)\dot{s}^2 - g(s)}{m_i(s)}, \\ U_i(s, \dot{s}) &= \frac{\tau_i^{\max}(s, \dot{s}) - c(s)\dot{s}^2 - g(s)}{m_i(s)} \\ \text{if } m_i(s) < 0, \quad L_i(s, \dot{s}) &= \frac{\tau_i^{\max}(s, \dot{s}) - c(s)\dot{s}^2 - g(s)}{m_i(s)}, \\ U_i(s, \dot{s}) &= \frac{\tau_i^{\min}(s, \dot{s}) - c(s)\dot{s}^2 - g(s)}{m_i(s)} \end{aligned} \right\}$$

if $m_i(s) = 0$, ми маємо точку нульової інерції, розглянуту в розділі 7.4.

Визначення

$$L(s, \dot{s}) = \max_i L_i(s, \dot{s}) \quad U(s, \dot{s}) = \min_i U_i(s, \dot{s}),$$

межі приводу (7.35) можна записати як залежні від стану обмеження масштабування часу

$$L(s, \dot{s}) < s < U(s, \dot{s}). \quad (7.37)$$

Тепер можна сформулювати проблему оптимального масштабування часу:

Дано шлях $\theta(s)$, $s \in [0, 1]$, початковий стан $(s_0, \dot{s}_0) = (0, 0)$ і кінцевий стан $(s_f, \dot{s}_f) = (1, 0)$, знайдіть монотонно зростаюче двічі диференційоване масштабування часу $s : [0, T] \rightarrow [0, 1]$, що

- (а) задовольняє $s(0) = \dot{s}(0) = \dot{s}(T) = 0$ і $s(T) = 1$, і

(b) мінімізує загальний час подорожі T уздовж шляху, дотримуючись обмежень приводу (7.37).

Постановку задачі легко узагальнити на випадок ненульових початкової та кінцевої швидкостей уздовж шляху, $\dot{s}(0) > 0$ і $\dot{s}(T) > 0$.

Фазова площина (s, \dot{s}) . Проблему легко візуалізувати у фазовій площині (s, \dot{s}) робота з обмеженням шляху, де s змінюється від 0 до 1 на горизонтальній осі та \dot{s} на вертикальній осі. Оскільки $s(t)$ монотонно зростає, $\dot{s}(t) > 0$ для всіх часів t і для всіх $s \in [0,1]$. Часове масштабування шляху – це будь-яка крива на фазовій площині, яка монотонно рухається вправо від $(0, 0)$ до $(1, 0)$ (рисунок 7.10). Однак не всі такі криві задовольняють обмеження прискорення (7.37).

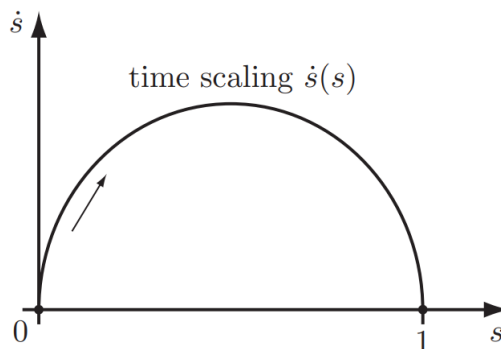


Рисунок 7.10 – Масштабування часу у фазовій площині (s, \dot{s}) є кривою, де $\dot{s} > 0$ у будь-який час, що з'єднує початкове положення траєкторії та швидкість $(0, 0)$ з кінцевою позицією та швидкістю $(1, 0)$

Щоб побачити вплив обмежень прискорення, для кожного (s, \dot{s}) у фазовій площині ми можемо побудувати межі $L(s, \dot{s}) < \ddot{s} < U(s, \dot{s})$ у вигляді конуса, побудованого з s, L , і U , як показано у двох вимірах на рисунку 7.11 (а). Якщо $L(s, \dot{s}) > U(s, \dot{s})$, конус зникає – немає команд приводу, які можуть утримувати роботу на шляху в цьому стані. Ці неприпустимі стани позначені сірим кольором на рисунку 7.11 (а). Для будь-якого s зазвичай існує єдина гранична швидкість $\dot{s}_{lim}(s)$, вище якої всі швидкості є неприпустимими. Функція $s \dot{s}_{lim}(s)$ називається кривою обмеження швидкості. На кривій обмеження швидкості $L(s, \dot{s}) = U(s, \dot{s})$, і конус зводиться до одного вектора.

Щоб масштабування часу задовольняло обмеженням прискорення, тангенс кривої масштабування часу повинен лежати всередині можливого конуса в усіх точках кривої. На малюнку 7.11 (b) показаний приклад нездійсненого масштабування часу, який вимагає більшого уповільнення, ніж можуть забезпечити приводи в зазначеному стані.

Для руху з мінімальним часом «швидкість» s повинна бути якомога вищою на кожному s , при цьому все ще задовольняючи обмеження прискорення та обмеження кінцевої точки. Щоб побачити це, запишіть загальний час руху T як



$$T = \int_0^T 1 dt. \quad (7.38)$$

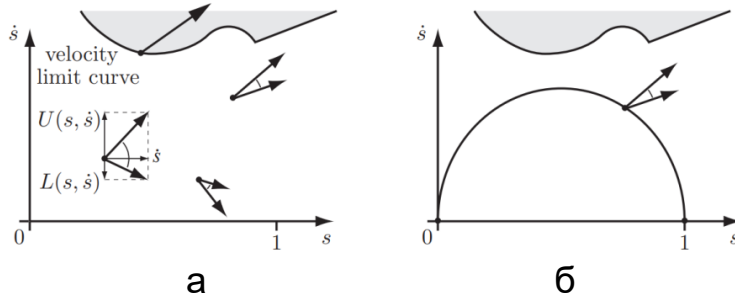


Рисунок 7.11 – Конуси руху з обмеженням прискорення в чотирьох різних станах: а) верхній промінь конуса є сумою $U(s, \dot{s})$, відображених у вертикальному напрямку (зміна швидкості) та \dot{s} , відображених у горизонтальному напрямку (зміна положення). Нижній промінь конуса побудований з $L(s, \dot{s})$ і \dot{s} . Точки сірого кольору, обмежені кривою обмеження швидкості, мають $L(s, \dot{s}) > U(s, \dot{s})$: стан неприпустимий і немає конуса руху. На кривій обмеження швидкості конус зводиться до одного дотичного вектора; б) запропоноване масштабування часу є нездійсненним, оскільки дотична до кривої знаходиться поза конусом руху в зазначеному стані

Зробивши заміну $ds/ds = 1$ і змінивши межі інтегрування з 0 до T (час) на 0 до 1 (s), отримаємо

$$T = \int_0^T 1 dt = \int_0^T \frac{ds}{ds} dt = \int_0^1 \frac{dt}{ds} ds = \int_0^1 \dot{s}^{-1}(s) ds. \quad (7.39)$$

Таким чином, щоб мінімізувати час, $\dot{s}^{-1}(s)$ має бути якомога меншим, а отже, $\dot{s}(s)$ має бути якомога більшим, при всіх s , в той же час задовольняючи обмеженням прискорення (7.37) і граничним обмеженням.

Це означає, що масштабування часу має завжди працювати або на межі $U(s, \dot{s})$, або на межі $L(s, \dot{s})$, і наш єдиний вибір – коли перемикається між цими обмеженнями. Загальним рішенням є траєкторія тріск-банг: максимальне прискорення $U(s, \dot{s})$ з наступним переходом на максимальне гальмування $L(s, \dot{s})$. (Це схоже на трапецієподібний профіль руху, який ніколи не досягає швидкості руху накатом.) У цьому випадку масштабування часу обчислюється чисельним інтегруванням $U(s, \dot{s})$ вперед у s від $(0, 0)$, інтегруванням $L(s, \dot{s})$ назад у s від $(1, 0)$ та знаходженням перетину ці криві (рис. 7.12 (а)). Перемикання між максимальним прискоренням і максимальним уповільненням відбувається на перехресті.

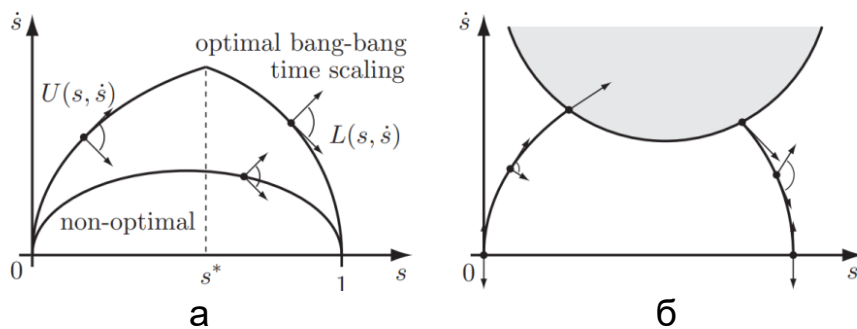


Рисунок 7.12 – Оптимальне за часом масштабування часу: а) інтегрує $U(s, \dot{s})$ з $(0, 0)$ і перемикається на $L(s, \dot{s})$ у точці перемикання s^* ; також показано неоптимальне масштабування часу з дотичною всередині конуса руху; б) Іноді крива обмеження швидкості перешкоджає рішенням з одним перемикачем

У деяких випадках крива обмеження швидкості перешкоджає рішенням з одним перемиканням (рис. 7.12 (б)). У цих випадках потрібен алгоритм для пошуку кількох точок перемикання.

Алгоритм масштабування часу

Пошук оптимального масштабування часу зводиться до пошуку перемикачів між максимальним прискоренням $U(s, \dot{s})$ і максимальним уповільненням $L(s, \dot{s})$, максимізуючи «висоту» кривої у фазовій площині (s, \dot{s}) .

Алгоритм масштабування часу

1. Ініціалізуйте порожній список перемикачів $S = \{\}$ і лічильник перемикачів $i = 0$. Встановіть $(s_i, \dot{s}_i) = (0,0)$.
2. Проінтегруйте рівняння $\dot{s} = L(s, \dot{s})$ назад у часі від $(1,0)$ до $L(s, \dot{s}) > U(s, \dot{s})$ (крива обмеження швидкості пройдено) або $s = 0$. Назвіть цю фазу плоска крива F .
3. Проінтегруйте рівняння $\ddot{s} = U(s, \dot{s})$ вперед у часі від (s_i, \dot{s}_i) , доки воно не перетне F або поки $U(s, \dot{s}) < L(s, \dot{s})$ (крива граничної швидкості пройдена). Назвемо цю криву A_i . Якщо A_i перетинає F , тоді збільште i , встановіть (s_i, \dot{s}_i) значення (s, \dot{s}) , при якому відбувається перетин, і додайте s_i до списку перемикачів S . Це перемикання від максимального прискорення до максимального уповільнення. Проблема вирішена, і S є набором перемикачів, виражених у параметрі шляху. Якщо натомість крива обмеження швидкості проникає, нехай (s_{lim}, \dot{s}_{lim}) буде точкою проникнення та переходьте до наступного кроку.
4. Виконайте двійковий пошук швидкості в діапазоні $[0, \dot{s}_{lim}]$, щоб знайти швидкість s' так, щоб крива інтегрування $\dot{s} = L(s, \dot{s})$ вперед від (s_{lim}, \dot{s}) торкалася кривої обмеження швидкості не проникаючи в нього. Двійковий пошук починається з $\dot{s}_{вел.} = \dot{s}_{lim}$ і $\dot{s}_{низька} = 0$.

(а) Встановіть тестову швидкість посередині між низькою та високою: $\dot{s}_{test} = (\dot{s}_{вел.} + \dot{s}_{низька})/2$. Тестовою точкою є $(s_{lim}, \dot{s}_{test})$.

(b) Якщо крива від контрольної точки проходить через криву обмеження швидкості, встановіть $\dot{s}_{\text{вел.}}$ рівним \dot{s}_{test} . Якщо натомість крива від тестової точки досягає $S = 0$, встановіть S_{low} рівним \dot{s}_{test} . Поверніться до кроку 4(a).

Продовжуйте двійковий пошук до досягнення заданого допуску. Нехай $(s_{\text{tan}}, \dot{s}_{\text{tan}})$ буде точкою, де результуюча крива торкається кривої обмеження швидкості по дотичній (або наближається до кривої, не торкаючись її). Конус руху в цій точці зводиться до одного вектора ($L(s, \dot{s}) = U(s, \dot{s})$), дотичного до кривої обмеження швидкості.

5. Проінтегруйте $\ddot{s} = L(s, \dot{s})$ у зворотному напрямку від $(s_{\text{tan}}, \dot{s}_{\text{tan}})$, поки він не перетне A_j . Збільште i , встановіть (s_i, \dot{s}_i) значення (s, \dot{s}) на перетині та позначте як A і сегмент кривої від (s_i, \dot{s}_i) до $(s_{\text{tan}}, \dot{s}_{\text{tan}})$. Додайте s_i до списку перемикачів S . Це перемикання від максимального прискорення до максимального уповільнення.

6. Збільште i та встановіть (s_i, \dot{s}_i) на $(s_{\text{tan}}, \dot{s}_{\text{tan}})$. Додайте s_i до списку перемикачів S . Це перемикання від максимального уповільнення до максимального прискорення. Перейдіть до кроку 3.

На малюнку 7.13 показано кроки 2-6 алгоритму масштабування часу. (Крок 2) Інтегрування $\ddot{s} = L(s, \dot{s})$ у зворотному напрямку від $(1,0)$ до досягнення кривої обмеження швидкості. (Крок 3) Інтегрування $s = U(s, \dot{s})$ вперед від $(0,0)$ до перетину $(s_{\text{lim}}, \dot{s}_{\text{lim}})$ з кривою обмеження швидкості. (Крок 4) Двійковий пошук для знаходження $(s_{\text{lim}}, \dot{s}')$, з якого $\ddot{s} = L(s, \dot{s})$, інтегроване вперед від $(s_{\text{lim}}, \dot{s}')$, торкається кривої обмеження швидкості тангенціально. (Крок 5) Інтегрування назад уздовж $L(s, \dot{s})$ від $(s_{\text{tan}}, \dot{s}_{\text{tan}})$, щоб знайти перше перемикання від прискорення до уповільнення. (Крок 6) Другий перемикач, від уповільнення до прискорення, знаходиться на $(s_2, \dot{s}_2) = (s_{\text{tan}}, \dot{s}_{\text{tan}})$. (Крок 3) Інтегрування вперед уздовж $U(s, \dot{s})$ від (s_2, \dot{s}_2) призводить до перетину з F у (s_3, \dot{s}_3) , де відбувається перемикання від прискорення до уповільнення. Оптимальне масштабування часу складається з перемикачів при $S = \{s_1, s_2, s_3\}$.

Варіація алгоритму масштабування часу

Пам'ятайте, що кожна точка (s, \dot{s}) нижче кривої обмеження швидкості має конус можливих рухів, тоді як кожна точка на кривій обмеження швидкості має один можливий вектор. Єдиними точками на кривій обмеження швидкості, які можуть бути частиною оптимального рішення, є ті, де можливий вектор руху є дотичним до кривої обмеження швидкості; це точки $(s_{\text{tan}}, \dot{s}_{\text{tan}})$, згадані вище. Визнаючи це, бінарний пошук на кроці 4 алгоритму масштабування часу, який, по суті, є пошуком точки $(s_{\text{tan}}, \dot{s}_{\text{tan}})$, може бути замінений явною побудовою кривої обмеження швидкості та пошуком точок на цій кривій що задовольняє умову дотику. Дивіться рисунок 7.14.

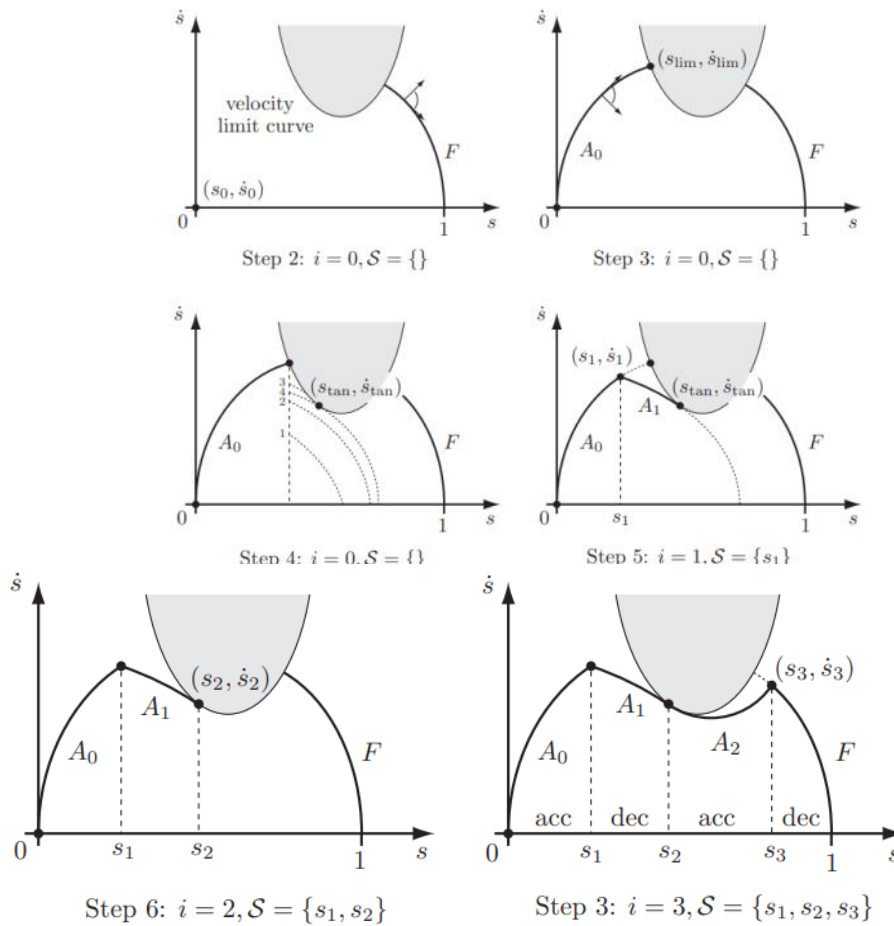


Рисунок 7.13 – Алгоритм масштабування часу

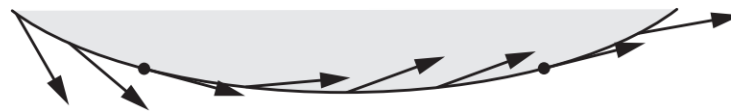



Рисунок 7.14 – Точка на кривій обмеження швидкості може бути лише частиною оптимального за часом масштабування часу, якщо можливий вектор руху в цій точці є дотичним до кривої

Пошук вздовж зображеної кривої обмеження швидкості показує, що на цій конкретній кривій є лише дві точки (позначені крапками), які можуть належати до оптимального для часу масштабування часу.

Припущення та застереження

Наведений вище опис охоплює основні моменти оптимального алгоритму масштабування часу. Кілька припущень було замовчено; вони стали явними зараз.

- Підтримання статичної постави. Алгоритм, як описано, припускає, що робот може підтримувати свою конфігурацію проти сили тяжіння в будь-якому стані ($s, \dot{s} = 0$). Це гарантує існування дійсних часових масштабів, а саме часових масштабів, які переміщують робота по шляху довільно повільно. Для деяких роботів і шляхів це припущення може бути порушено через слабкість приводів. Наприклад, деякі шляхи можуть ви-



магати певного імпульсу для перенесення руху через конфігурації, які робот не може підтримувати статично. Алгоритм можна змінити для обробки таких випадків.

- **Неприпустимі стани.** Алгоритм передбачає, що для кожного s існує унікальна межа швидкості $\dot{s}_{lim}(s) > 0$, що всі швидкості $\dot{s} < \dot{s}_{lim}(s)$ допустимі і всі швидкості $\dot{s} > \dot{s}_{lim}(s)$ неприпустимі. Для деяких моделей динаміки актуатора або тертя це припущення може порушуватися – можуть існувати окремі «острівці» неприпустимих станів. Алгоритм можна змінити для обробки цього випадку.


- **Точки нульової інерції.** Алгоритм передбачає відсутність нульових точок інерції (Рівняння (7.36)). Якщо $m_i(s) = 0$ у (7.36), то наданий приводом i не залежить від прискорення \ddot{s} , а обмеження i -го приводу в (7.35) безпосередньо визначає обмеження швидкості для \dot{s} . У точці s з одним або кількома нульовими компонентами в $m(s)$ крива обмеження швидкості визначається мінімумом (а) обмежень швидкості, визначених компонентами нульової інерції та (б) значень s , що задовольняють $L_i(s, \dot{s}) = U_i(s, \dot{s})$ для інших компонентів. Для описаного алгоритму особливі дуги точок нульової інерції на кривій обмеження швидкості можуть призвести до швидкого перемикавання між $\ddot{s} = U(s, \dot{s})$ і $\ddot{s} = L(s, \dot{s})$. У таких випадках вибір прискорення, дотичного до кривої обмеження швидкості, що лежить між $U(s, \dot{s})$ і $L(s, \dot{s})$, зберігає оптимальність часу, не викликаючи тріскотіння елементів керування.

Варто зазначити, що алгоритм масштабування часу генерує траєкторії з переривчастим прискоренням, що може призвести до вібрацій. Окрім цього, неточності в моделях інерційних властивостей робота та тертя роблять пряме застосування алгоритму масштабування часу непрактичним. Нарешті, оскільки масштабування часу за мінімальним часом завжди насичує принаймні один виконавчий механізм, якщо робот відходить від запланованої траєкторії, може не залишитися крутного моменту для коригувальних дій контролера зі зворотним зв'язком.

Незважаючи на ці недоліки, алгоритм масштабування часу забезпечує глибоке розуміння справжніх максимальних можливостей робота, що йде по шляху.

Контрольні запитання до теми 7

1. Що таке траєкторія робота і як вона визначається?
2. Які основні елементи складають траєкторію робота?
3. Чому важливо розділяти параметр шляху s від параметра часу t ?
4. Як визначається шлях $\theta(s)$?
5. Що таке масштабування часу $s(t)$ і для чого воно використовується?
6. Які основні вимоги до траєкторії робота щодо плавності руху та обмежень?

- 
7. Що таке прямолінійні траєкторії точка-точка в просторі суглобів?
 8. Як визначається пряма лінія в просторі суглобів?
 9. Які переваги мають прямолінійні шляхи в просторі суглобів?
 10. Які проблеми виникають при визначенні прямолінійного шляху в просторі завдань?
 11. Як визначається рух гвинта і для чого він використовується?
 12. Чому рух гвинта забезпечує "прямолінійний" рух у певному сенсі?
 13. Які обмеження можуть виникнути при використанні руху гвинта?
 14. Що таке поліноміальне масштабування часу і для чого воно використовується?
 15. Як визначається кубічний поліном часу $s(t)$?
 16. Які умови повинні задовольнятися для кубічного полінома часу?
 17. Що таке поліноми п'ятого порядку і які їх переваги?
 18. Чому поліноми п'ятого порядку використовуються для зменшення ривків?
 19. Як трапецієподібне масштабування часу відрізняється від поліноміального?
 20. Які основні етапи включає трапецієподібне масштабування часу?
 21. В яких випадках трапецієподібний профіль стає трикутником?
 22. Як вибрати параметри v і a для трапецієподібного профілю?
 23. Які обмеження накладаються на максимальні швидкості та прискорення робота?
 24. Як розрахувати мінімальний час руху для заданих обмежень?
 25. Які проблеми можуть виникати при генерації траєкторій для роботів і як їх вирішувати?

Використана література

1. Ceccarelli M. Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulation. Second Edition. Rome : Springer Cham, 2022. 381 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90848-5>.
2. Ковальов Ю. А., Кошель С. О., Манойленко О. П. Проектування промислових роботів та маніпуляторів : навчальний посібник. Київ : Центр учбової літератури, 2022. 256 с.



ТЕМА 8

ПЛАНУВАННЯ РУХУ РОБОТІВ

Метою вивчення теми є ознайомлення з плануванням руху роботів, проблемами пошуку руху робота від початкового стану до цільового стану, який уникає перешкод у навколишньому середовищі та задовольняє інші обмеження, такі як межі з'єднань або обмеження крутного моменту.

Завдання вивчення теми збігаються з переліком питань для розгляду, що наведений нижче.

Перелік питань до розгляду

- 8.1 Огляд планування руху
- 8.2 Фундаменти
- 8.3 Повні планувальники шляху
- 8.4 Методи сітки
- 8.5 Методи відбору проб
- 8.6 Віртуальні потенційні поля
- 8.7 Нелінійна оптимізація
- 8.8 Згладжування

8.1 Огляд планування руху

Вступ. Планування руху – це проблема пошуку руху робота від початкового стану до цільового стану, який уникає перешкод у навколишньому середовищі та задовольняє інші обмеження, такі як межі з'єднань або обмеження крутного моменту. Планування руху є однією з найактивніших підгалузей робототехніки, і їй присвячено цілі книги. Метою цієї лекції є надати практичний огляд кількох поширених методів із використанням роботизованих рук і мобільних роботів як основних прикладів систем (Рисунок 8.1).

Лекція починається з короткого огляду планування руху. Далі слідує базовий матеріал, включаючи перешкоди конфігураційного простору та пошук графів. Ми закінчуємо коротким описом кількох різних методів планування.

Ключовим поняттям у плануванні руху є простір конфігурації, або скорочено C -простір. Кожна точка в C -просторі C відповідає унікальній конфігурації q робота, і кожна конфігурація робота може бути представлена як точка в C -просторі. Наприклад, конфігурація руки робота з n суглобами може бути представлена у вигляді списку з n положень суглобів, $q = (\theta_1, \dots, \theta_n)$. Вільний C -простір C_{free} складається з конфігурацій, у яких робот не проникає через перешкоду та не порушує обмеження суглоба.

У цьому розділі, якщо не зазначено інше, ми припускаємо, що q є

n вектором і що $C \in \mathbb{R}^n$. З деяким узагальненням концепції цієї глави застосовуються до неевклідових C -просторів, таких як $C = SE(3)$.

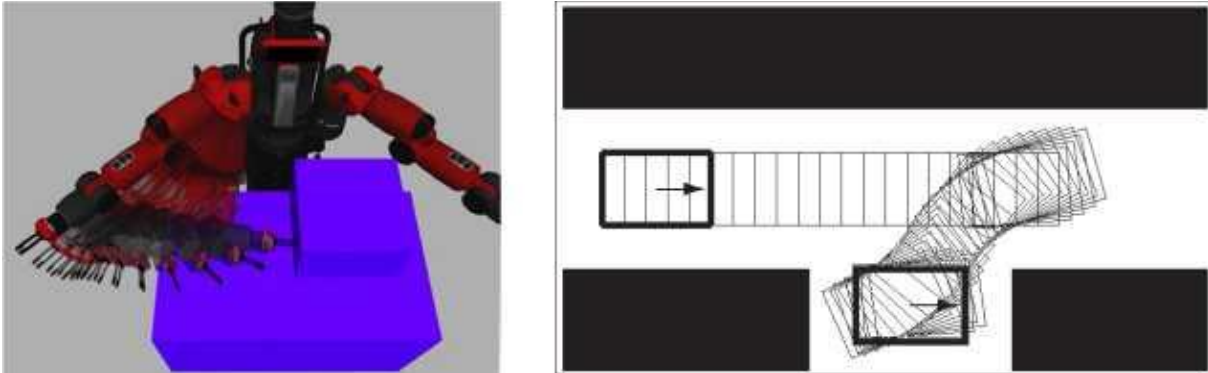


Рисунок 8.1 – (ліворуч) рука робота виконує план руху з уникненням перешкод. План руху було створено за допомогою MoveIt! та візуалізовано за допомогою rviz у ROS (операційна система роботів). (Праворуч) Автомобільний мобільний робот, який виконує паралельне паркування

Вхідні дані керування, доступні для керування роботом, записуються як m -вектор $u \in U \subset \mathbb{R}^m$, де $m = n$ для типової руки робота. Якщо робот має другу динаміку порядку, наприклад, для руки робота, а керуючими входами є сили (еквівалентно, прискорення), стан робота визначається його конфігурацією та швидкістю, $x = (q, \dot{q}) \in X$. Для $q \in \mathbb{R}^n$, зазвичай ми пишемо $v = \dot{q}$. Якщо ми можемо розглядати керуючі входи як швидкості, стан x є просто конфігурацією q . Позначення $q(x)$ вказує на конфігурацію q , що відповідає стану x , і $X_{\text{free}} = \{x \mid q(x) \in C_{\text{free}}\}$.

Записуються рівняння руху робота

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (8.1)$$

або в інтегральному вигляді

$$x(T) = x(0) + \int_0^T f(x(t), u(t)) dt. \quad (8.2)$$

Типи задач планування руху. З наведеними вище визначеннями досить широка специфікація проблеми планування руху виглядає наступним чином:

Задано початковий стан $x(0) = x_{\text{start}}$ і бажаний кінцевий стан x_{goal} , знайдіть час T і набір елементів керування $u : [0, T] \rightarrow U$, щоб рух (8.2) задовольняє $x(T) = x_{\text{goal}}$ і $q(x(t)) \in C_{\text{free}}$ для всіх $t \in [0, T]$.

Передбачається, що контролер зі зворотним зв'язком доступний, щоб забезпечити чітке дотримання запланованого руху $x(t)$, $t \in [0, T]$. Також передбачається, що точна геометрична модель робота та сере-



довища доступна для оцінки C_{free} під час планування руху.

Є багато варіацій основної проблеми; деякі з них обговорюються нижче.

Планування шляху проти планування руху. Задача планування шляху є підзавданням загальної задачі планування руху. Планування шляху — це суто геометрична задача пошуку шляху без зіткнень $q(s), s \in [0, 1]$ від початкової конфігурації $q(0) = q_{start}$ до цільової конфігурації $q(1) = q_{ціль}$, без турботи про динаміку, тривалість руху або обмеження на рух або на входи керування. Передбачається, що шлях, повернутий планувальником шляху, може бути масштабований у часі для створення здійсненої траєкторії. Цю проблему іноді називають проблемою переміщення піаніно, наголошуючи на геометрії захищених просторів.

Керуючі входи: $m = n$ проти $m < n$. Якщо керуючих вхідних сигналів m менше, ніж ступенів свободи n , тоді робот не зможе слідувати багатьма шляхами, навіть якщо вони без зіткнень. Наприклад, автомобіль має $n = 3$ (положення та орієнтація шасі в площині), але $m = 2$ (рух вперед-назад і рульове управління); він не може ковати прямо вбік на місце для паркування.

Онлайн проти офлайн. Проблема планування руху, яка вимагає негайного результату, можливо через те, що перешкоди з'являються, зникають або рухаються непередбачувано, потребує швидкого онлайн-планувальника. Якщо середовище є статичним, тоді може бути достатньо повільнішого автономного планувальника.

Оптимальний проти задовільного. Окрім досягнення цільового стану, нам може знадобитися, щоб план руху мінімізував (або приблизно мінімізував) вартість J , наприклад,

$$J = \int_0^T L(x(t), u(t)) dt.$$


Наприклад, мінімізація з $L = 1$ дає оптимальний за часом рух, а мінімізація з $L = u^T(t)u(t)$ дає рух з «мінімальним зусиллям».

Точне проти приблизного. Ми можемо бути задоволені кінцевим станом $x(T)$, який є достатньо близьким до x_{goal} , наприклад, $\|x(T) - x_{goal}\| < \epsilon$.

З перешкодами чи без. Проблема планування руху може бути складною навіть за відсутності перешкод, особливо якщо $m < n$ або бажана оптимальність.

Властивості планувальників руху. Планувальники повинні відповідати властивостям проблеми планування руху, як зазначено вище. Крім того, планувальники можна виділити за такими властивостями.

Планування з кількома запитами та плануванням з одним за-



питом. Якщо робота попросили розв'язати ряд проблем планування руху в незмінному середовищі, можливо, варто витратити час на створення структури даних, яка точно представляє S_{free} . У цій структурі даних можна здійснювати пошук для ефективного вирішення багатьох запитів планування. Планувальники з одним запитом вирішують кожен нову проблему з нуля.

Планування «у будь-який час». Планувальник у будь-який час – це той, хто продовжує шукати кращі рішення після того, як знайдено перше рішення. Планувальник можна зупинити в будь-який момент, наприклад, коли минув заданий ліміт часу, і повернути найкраще рішення.


Повнота. Планувальник руху вважається завершеним, якщо він гарантовано знайде рішення за кінцевий час, якщо воно існує, і повідомить про невдачу, якщо немає здійсненого плану руху. Слабшою концепцією є повнота роздільної здатності. Планувальник є завершеним рішенням, якщо він гарантовано знайде рішення, якщо воно існує при розв'язанні дискретизованого представлення проблеми, наприклад, розв'язання сіткового представлення S_{free} . Нарешті, планувальник є імовірно повним, якщо ймовірність знайти рішення, якщо воно існує, прагне до 1, оскільки час планування прямує до нескінченності.

Обчислювальна складність. Обчислювальна складність відноситься до характеристик кількості часу, необхідного планувальнику для виконання, або обсягу пам'яті, який йому потрібен. Вони вимірюються з точки зору опису проблеми планування, наприклад розміру S -простору або кількості вершин у представленні робота та перешкод. Наприклад, час роботи планувальника може бути експоненціальним у n , розмірності S -простору. Обчислювальна складність може бути виражена в термінах середнього або найгіршого випадку. Деякі алгоритми планування легко піддаються аналізу обчислювальної складності, а інші ні.

Методи планування руху. Немає єдиного планувальника, який можна застосувати до всіх проблем планування руху. Нижче це широкий огляд деяких із багатьох доступних планувальників руху. Деталі є ліворуч до вказаних розділів.

Повні методи. Ці методи зосереджені на точних представленнях геометрії або топології S_{free} , забезпечуючи повноту. Для всіх, окрім простих задач або проблем із низьким ступенем свободи, ці представлення математично чи обчислювально важко отримати.

Методи сітки. Ці методи дискретизують S вільний у сітку та шукають у сітці рух від початку q до точки сітки в цільовій області. Модифікації підходу можуть дискретизувати простір станів або простір керування, або вони можуть використовувати багатомасштабні сітки для уточнення представлення вільного S поблизу перешкод. Ці методи відносно прості у реалізації та можуть повертати оптимальні рішення, але для фіксованої роздільної здатності пам'яті, необхідна для зберігання сітки, і час для її пошуку зростають експоненціально зі збільшенням кі-



лькості вимірів простору. Це обмежує підхід до задач низької розмірності.

Методи відбору проб. Загальний метод вибірки покладається на випадкову або детерміновану функцію для вибору вибірки з S -простору або простору станів; функція для оцінки того, чи зразок є вільним у X ; функція визначення «найближчого» попереднього зразка вільного простору; і місцевий планувальник, щоб спробувати підключитися або рухатися до нового зразка з попереднього зразка. Цей процес створює графік або дерево, що відображає можливі рухи робота. Методи вибірки прості у застосуванні, мають тенденцію бути ймовірнісними повними і навіть можуть вирішувати проблеми планування руху з високим ступенем свободи. Рішення, як правило, задовільні, а не оптимальні, і може бути важко охарактеризувати обчислювальну складність.

Віртуальні потенційні поля. Віртуальні потенційні поля створюють на робота сили, які тягнуть його до мети та відштовхують від перешкод. Цей підхід відносно легко реалізувати, навіть для систем з високим ступенем свободи, і швидко оцінити, що часто дозволяє реалізацію онлайн. Недоліком є локальні мінімуми потенційної функції: робот може застрягти в конфігураціях, де сили тяжіння та відштовхування скасовуються, але робот не знаходиться в цільовому стані.

Нелінійна оптимізація. Задачу планування руху можна перетворити на задачу нелінійної оптимізації, представивши шлях або елементи керування кінцевою кількістю проектних параметрів, таких як коефіцієнти полінома або ряду Фур'є. Проблема полягає в розв'язанні параметрів проекту, які мінімізують функцію витрат, задовольняючи при цьому обмеження на елементи керування, перешкоди та мету. Хоча ці методи можуть дати майже оптимальні рішення, вони вимагають початкового припущення рішення. Оскільки цільова функція та простір можливих рішень зазвичай не є опуклими, процес оптимізації може застрягти далеко від можливого рішення, не кажучи вже про оптимальне рішення.

Згладжування. Часто рухи, знайдені планувальником, є різкими.

Алгоритм згладжування можна запустити на основі результату планувальника руху, щоб покращити плавність.

Основною тенденцією останніх років є методи вибірки, які прості у застосуванні та можуть обробляти проблеми великої розмірності.

8.2 Фундаменти

Перш ніж обговорювати алгоритми планування руху, ми визначимо концепції, які використовуються в багатьох із них: перешкоди в просторі конфігурації, виявлення зіткнень, графіки та пошук на графах.

Конфігурація Космічні перешкоди

Щоб визначити, чи зіткнувся робот із конфігурацією q із відомим середовищем, зазвичай потрібна складна операція із залученням CAD-



моделі середовища та робота. Існує ряд безкоштовних і комерційних пакетів програмного забезпечення, які можуть виконувати цю операцію, і ми не будемо тут заглиблюватися в них. Для наших цілей достатньо знати, що перешкоди робочого простору поділяють простір конфігурації C на два набори, вільний простір C вільний і простір перешкод C_{obs} , де $C = C_{free} \cup C_{obs}$. Обмеження суглобів розглядаються як перешкоди в просторі конфігурації.

З поняттями C_{free} і C_{obs} задача планування шляху зводиться до проблеми пошуку шляху для точкового робота серед перешкод C_{obs} . Якщо перешкоди розбивають C_{free} на окремі зв'язані компоненти, а q_{start} і q_{goal} не лежать в одній зв'язній компоненті, то шляху без зіткнень немає.

Явне математичне представлення C -перешкоди може бути надзвичайно складним, і з цієї причини C -перешкоди рідко представлені точно. Незважаючи на це, концепція C -перешкод дуже важлива для розуміння алгоритмів планування руху. Ідеї найкраще проілюструвати прикладами.

A 2R Planar Arm

На рисунку 8.2 показано планарну руку робота 2R із конфігурацією $q = (\theta_1, \theta_2)$ серед перешкод A , B і C у робочому просторі. C -простір робота представлений частиною площини з $0 < \theta_1 < 2\pi$, $0 < \theta_2 < 2\pi$. Пригадайте з розд 2, однак, що топологія C -простору є тором (або бубликом), оскільки край квадрата в $\theta_1 = 2\pi$ з'єднана з ребром $\theta_1 = 0$; аналогічно $\theta_2 = 2\pi$ пов'язано з $\theta_2 = 0$. Квадратна область R^2 отримана розрізанням поверхню бублика двічі, при $\theta_1 = 0$ і $\theta_2 = 0$, і поклавши його плазом на площину.

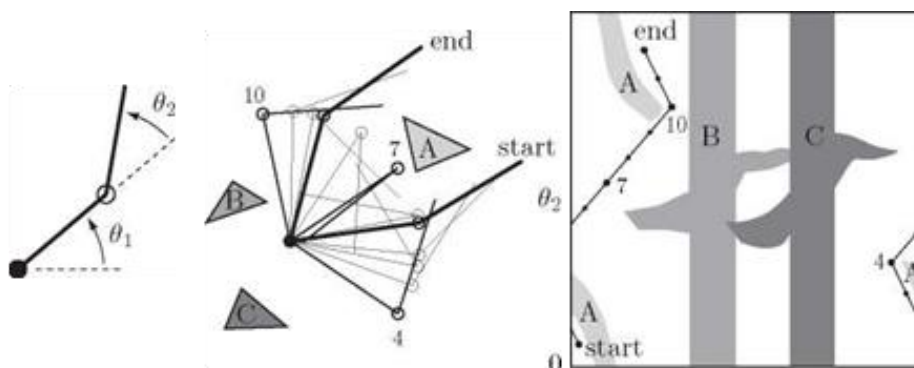


Рисунок 8.2 – (Ліворуч) кути з'єднання 2R-руки робота, (посередині) Рука, що рухається між перешкодами A , B і C та (праворуч) той самий рух у C -просторі

C -простір справа на рисунку 8.2 показує робочі перешкоди A , B і C , представлені як C -перешкоди. Будь-яка конфігурація, що лежить всередині C -перешкоди, відповідає проникненню перешкоди рукою робота в робочому просторі. Вільний шлях для руки робота від однієї конфігурації до іншої показано як у робочій області, так і в C -просторі.



Шлях і перешкоди ілюструють топологію С-простору. Зверніть увагу, що перешкоди розбивають С на три зв'язані компоненти.

Круговий плоский мобільний робот

На малюнку 8.3 показано вид зверху круглого мобільного робота, конфігурація якого визначається розташуванням його центру $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Робот транслюється (рухається без обертання) в площині з єдиною перешкодою. Відповідна С-перешкода виходить шляхом «вирощування» (збільшення) робочої перешкоди на радіус мобільного робота. Будь-яка точка за межами цієї С-перешкоди представляє вільну конфігурацію робота. Рисунок 8.4 показано робочий простір і С-простір для двох перешкод, вказуючи, що в цьому випадку мобільний робот не може пройти між двома перешкодами.

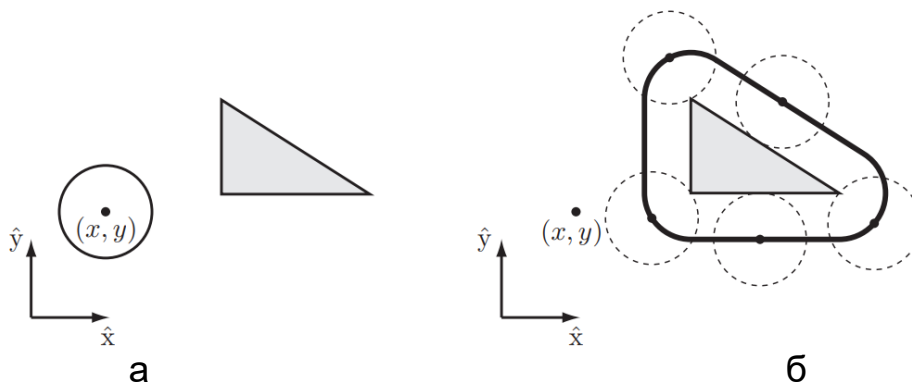


Рисунок 8.3 – Круглий мобільний робот (відкрите коло) і перешкода робочого простору (сірий трикутник): а) Конфігурація робота представлена (x, y) , центром робота. б) У С-просторі перешкода «збільшується» радіусом робота, і робот розглядається як точка; будь-яка (x, y) конфігурація за межами жирної лінії є безконфліктною

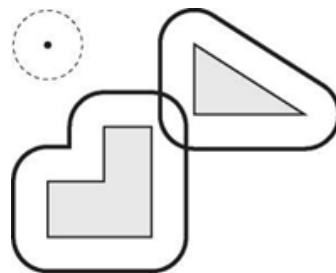


Рисунок 8.4 – «Вирощені» перешкоди С-простору, що відповідають двом перешкодам робочого простору та круглому мобільному роботу. Межі, що перекриваються, означають, що робот не може пересуватися між двома перешкодами

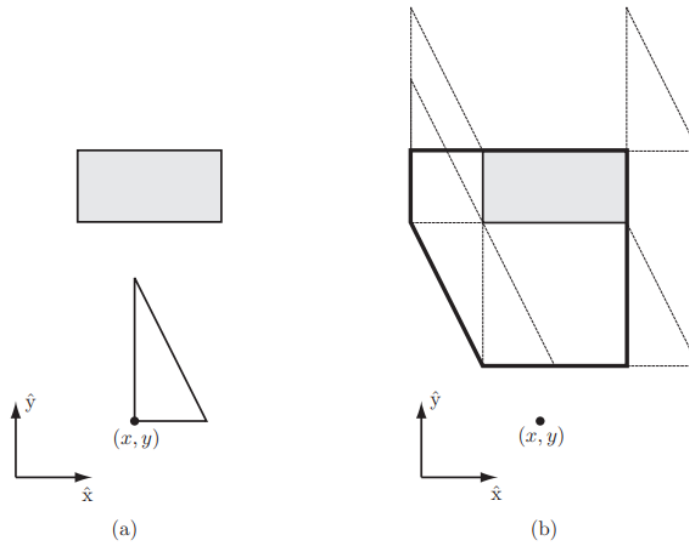


Рисунок 8.5 – Конфігурація трикутного мобільного робота, який може переміщатися, але не обертається, представлена (x, y) розташуванням контрольної точки: а) Також показано перешкоду робочого простору сірого кольору; б) Відповідна перешкода С-простору (жирний контур) отримується шляхом ковзання робота навколо межі перешкоди та відстеження положення контрольної точки

Полігональний плоский мобільний робот, який перекладає

На рисунку 8.5 показано С-перешкоду для багатокутного мобільного робота, який перекладається за наявності полігональної перешкоди. С-подібна перешкода отримується шляхом переміщення робота вздовж межі перешкоди та відстеження положення контрольної точки робота.

Полігональний планарний мобільний робот, який переміщується та обертається

На рисунку 8.6 показано С-перешкоду для перешкоди робочого простору та трикутного мобільного робота на рисунку 8.5, якщо роботу тепер дозволено обертається. С-простір тепер є тривимірним, визначеним $(x, y, \theta) \in \mathbb{R}^2 \times S^1$. Тривимірна С-перешкода – це об'єднання двовимірних зрізів С-перешкоди під кутами $\theta \in [0, 2\pi)$. Навіть для цього відносно низьковимірному С-простору точне представлення С-перешкоди є досить складним. З цієї причини С-перешкоди рідко описуються точно.

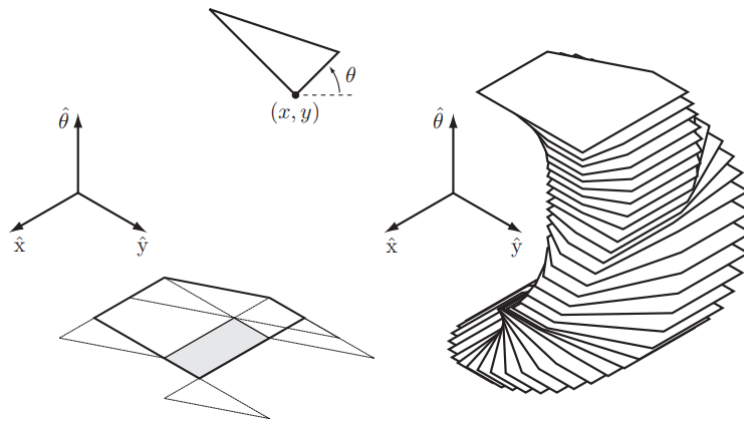


Рисунок 8.6 – (Вгорі) Трикутний мобільний робот, який може як обертатися, так і переміщатися, представлений конфігурацією (x, y, θ) . (Ліворуч) Перешкода С-простору з рисунка 8.5 (b), коли робот обмежений $\theta = 0$. (Праворуч) Повна тривимірна перешкода С-простору, показана зрізами з кроком 10°

Відстань до перешкод і виявлення зіткнень. Враховуючи С-перешкоду V і конфігурацію q , нехай $d(q, V)$ буде відстанню між роботом і перешкодою, де

$d(q, V) > 0$ (відсутність контакту з перешкодою),

$d(q, V) = 0$ (контакт),

$d(q, V) < 0$ (проникнення).

Відстань можна визначити як евклідову відстань між двома найближчими точками робота та перешкоди відповідно.

Алгоритм вимірювання відстані – це алгоритм, який визначає $d(q, V)$. Процедура виявлення зіткнень визначає, чи $d(q, V_i) < 0$ для будь-якої С-перешкоди V_i . Процедура виявлення зіткнень повертає двійковий результат і може використовувати або не використовувати в основі алгоритм вимірювання відстані.

Одним із популярних алгоритмів вимірювання відстані є алгоритм Гілберта-Джонсона-Кірти (GJK), який ефективно обчислює відстань між двома опуклими тілами, можливо представленими трикутними сітками. Будь-якого робота чи перешкоду можна розглядати як об'єднання кількох опуклих тіл. Розширення цього алгоритму є використовується в багатьох алгоритмах вимірювання відстані та процедурах виявлення зіткнень для робототехніки, графіки та механізмів ігрової фізики.

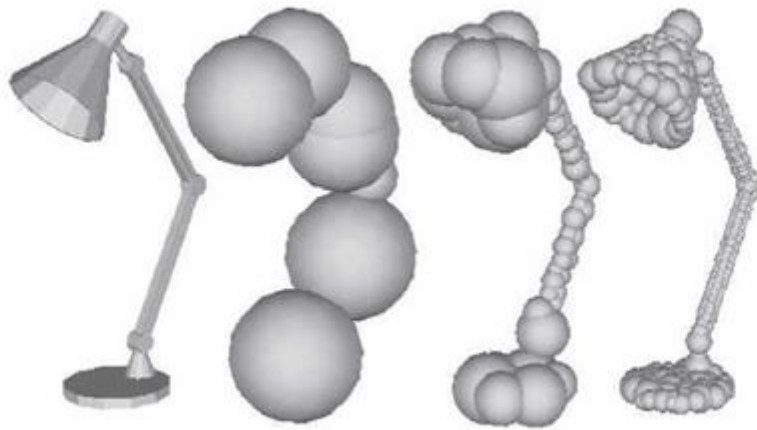


Рисунок 8.7 – Лампа, зображена сферами

Наближення покращується зі збільшенням кількості сфер, які використовуються для зображення лампи.

Більш простий підхід полягає в наближенні робота та перешкод як об'єднань сфер, що перекриваються. Апроксимації завжди повинні бути консервативними - апроксимація повинна охоплювати всі точки об'єкта - так що, якщо процедура виявлення зіткнень вказує на вільну конфігурацію q , ми гарантуємо, що фактична геометрія не зіткнеться. Чим більше сфер у зображенні робота та перешкод, тим ближче наближення наближаються до фактичної геометрії. Приклад показано на рисунку 8.7.

Дано робот у q , представлений k сферами радіуса R_i з центром у $r_i(q)$, $i = 1, \dots, k$, і перешкоду B , представлену i сферами радіуса B_j з центром у b_j , $j = 1, \dots, i$, відстань між роботом і перешкодою можна обчислити як

$$d(q, B) = \min \|r_j(q) - b_j\| - R_i - B_j.$$

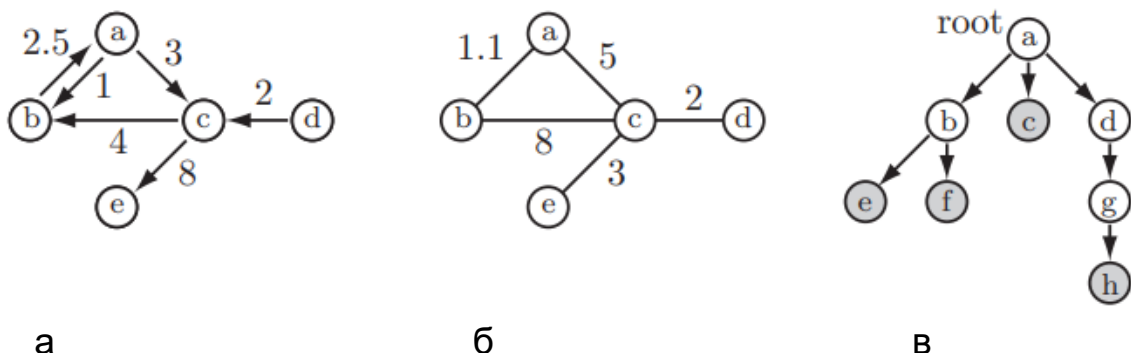


Рисунок 8.8 – Сфер у зображенні робота: а) зважений орграф; б) A Weighted; в) листя заштриховані сірим кольором

Об'єм, який змітає фактичний робот між двома конфігураціями,



також не має зіткнень.

Графіки та дерева. Окрім визначення того, чи зіткнулась конкретна конфігурація робота, ще одна корисна операція — визначити, чи зіткнувся робот під час певного сегмента руху. Хоча були розроблені точні рішення для конкретних геометрій об'єктів і типів руху, загальний підхід полягає у тому, щоб взяти вибірку траєкторії в тонко розташованих точках і «виростити» робота, щоб переконатися, що якщо дві послідовні конфігурації для вирощеного робота не зіткнуться, тоді

Багато планувальників руху явно чи неявно представляють С-простір або простір станів як граф. Граф складається з набору вузлів N і набору ребер E , де кожне ребро e з'єднує два вузли. У плануванні руху вузол зазвичай представляє конфігурацію або стан, тоді як ребро між вузлами n_1 і n_2 вказує на здатність рухатися від n_1 до n_2 , не проникаючи через перешкоду або не порушуючи інших обмежень.

Граф може бути спрямованим або неорієнтованим. У неорієнтованому графі кожне ребро є двонаправленим: якщо робот може рухатися від n_1 до n_2 , то він також може рухатися від n_2 до n_1 . У орієнтованому графі, або скорочено орграфі, кожне ребро допускає рух лише в одному напрямку. Ті самі два вузли можуть мати два ребра між собою, що дозволяє рухатися в протилежних напрямках.

Графіки також можуть бути зваженими або незваженими. У зваженому графі кожне ребро має додатну вартість, пов'язану з його проходженням. У незваженому графі кожне ребро має однакову вартість (наприклад, 1). Таким чином, найзагальнішим типом графа, який ми розглядаємо, є зважений орграф.

Дерево — це орграф, у якому (1) немає циклів і (2) кожен вузол має не більше одного батьківського вузла (тобто не більше одного ребра, що веде до вузла). Дерево має один кореневий вузол без батьків і декілька листових вузлів без дочірніх.

Орграф, неорієнтований граф і дерево зображені на рисунку 8.8.

За N вузлів будь-який граф може бути представлений матрицею $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, де елемент a_{ij} матриці представляє вартість ребра від вузла i до вузла j ; нульове або негативне значення вказує на відсутність краю між вузлами. Графіки і дерева можна представити більш компактно як список вузлів, кожен з яких має посилання на своїх сусідів.

Пошук по графіку. Коли вільний простір представлено у вигляді графіка, план руху можна знайти, шукаючи на графіку шлях від початку до мети. Одним із найпотужніших і найпопулярніших алгоритмів пошуку графів є пошук A^* (вимовляється як «зірка»).

A^* Пошук. Алгоритм пошуку A^* ефективно знаходить шлях із мінімальною вартістю на графіку, коли вартість шляху є просто сумою додатних витрат на краї вздовж шляху.

Дано граф, описаний набором вузлів $N = \{1, \dots, N\}$, де вузол 1 є початковим вузлом, і набором ребер E , алгоритм A^* використовує такі структури даних:



- відсортований список OPEN з вузлами, дослідження яких ще належить виконати, і список CLOSED вузлів, для яких дослідження вже відбулося;
- матриця $cost[node1,node2]$, що кодує набір ребер, де додатне значення відповідає вартості переходу від $node1$ до $node2$ (негативне значення вказує, що ребра не існує);
- масив $past_cost[вузол]$ мінімальної вартості, знайденої на даний момент для досягнення вузла з початкового вузла; і
- дерево пошуку, визначене масивом $parent[node]$, яке містить для кожного вузла посилання на вузол, що передує йому, у найкоротшому шляху, знайденому на даний момент від початкового вузла до цього вузла.

Щоб ініціалізувати пошук, вартість матриці створюється для кодування країв, список OPEN ініціалізується початковим вузлом 1, вартість досягнення початкового вузла ($past_cost[1]$) ініціалізується рівним 0, а $past_cost[node]$ для вузол $G \{2, \dots, N\}$ ініціалізується до нескінченності (або великого числа), що вказує на те, що наразі ми не маємо уявлення про вартість досягнення цих вузлів.

На кожному кроці алгоритму перший вузол у OPEN видаляється з OPEN і називається поточним. Поточний вузол також додається до CLOSED. Перший вузол у OPEN — це вузол, який мінімізує загальну оціночну вартість найкращого шляху до мети, який проходить через цей вузол. Орієнтовна вартість розраховується як


$$est_total_cost[вузол] = попередні_витрати[вузол] + heuristic_cost_to_go(вузол)$$

де $heuristic_cost_to_go(node) > 0$ — це оптимістична (занижена) оцінка фактичної вартості переходу до мети від вузла. Для багатьох проблем планування шляху відповідним вибором для евристики є відстань до мети по прямій лінії, ігноруючи будь-які перешкоди.

Оскільки OPEN — це список, відсортований відповідно до оціночної загальної вартості, вставлення нового вузла в правильному місці в OPEN тягне за собою невелику вартість обчислень.

Якщо поточний вузол входить до цільового набору, то пошук завершується, і шлях реконструюється з батьківських посилань. Якщо ні, для кожного сусіднього nbr поточного на графіку, який також не знаходиться в CLOSED, $tentative_past_cost$ для nbr обчислюється як $past_cost[current] + cost[current,nbr]$. Якщо орієнтовна_минула_вартість $<$ минула_вартість[nbr], тоді nbr можна досягти з меншими витратами, ніж було відомо раніше, тому $past_cost[nbr]$ встановлено на $tentative_past_cost$, а $parent[nbr]$ встановлено на $current$. Потім вузол nbr додається (або переміщується) у OPEN відповідно до його оціночної загальної вартості.

Потім алгоритм повертається до початку основного циклу, видаляючи перший вузол із OPEN і називаючи його $current$. Якщо OPEN порожній, рішення немає.



Алгоритм A^* гарантовано повертає шлях із мінімальною вартістю, оскільки вузли перевіряються на включення до набору цілей лише тоді, коли вони мають мінімальну загальну оціночну вартість усіх вузлів. Якщо поточний вузол входить до цільового набору, тоді $heuristic_cost_to_go(current)$ дорівнює нулю, і, оскільки всі граничні витрати додатні, ми знаємо, що будь-який шлях, знайдений у майбутньому, повинен мати вартість, більшу або рівну $past_cost[current]$. Тому шлях до струму має бути найкоротшим. (Можуть бути й інші шляхи з такою самою ціною.)

Якщо евристичний показник «вартість до роботи» розрахований точно з урахуванням перешкод, тоді A^* досліджуватиме мінімальну кількість вузлів, необхідних для вирішення проблеми. Звичайно, точний розрахунок витрат на дорогу еквівалентний вирішенню проблеми планування шляху, тому це непрактично. Замість цього, евристична собівартість повинна бути розрахована швидко і повинна бути якомога ближчою до фактичної вартості, щоб забезпечити ефективну роботу алгоритму. Використання оптимістичного прогнозу витрат гарантує оптимальне рішення.


Алгоритм A^* є прикладом загального класу пошуків першим найкращим, який завжди досліджує з вузла, який на даний момент вважається «найкращим» за деякими мірками.

Алгоритм пошуку A^* описано в псевдокодi в Алгоритмі 8.1.

Алгоритм 8.1 A^* пошук.

```
1: OPEN  $\leftarrow$  {1}
2: past_cost[1]  $\leftarrow$  0, past_cost[node]  $\leftarrow$  infinity for node  $\in$  {2, . . . , N}
3: while OPEN is not empty do
4: current  $\leftarrow$  first node in OPEN, remove from OPEN
5: add current to CLOSED
6: if current is in the goal set then
7: return SUCCESS and the path to current
8: end if
9: for each nbr of current not in CLOSED do
10: tentative_past_cost  $\leftarrow$  past_cost[current]+cost[current,nbr]
11: if tentative past cost < past_cost[nbr] then
12: past_cost[nbr]  $\leftarrow$  tentative_past_cost
13: parent[nbr]  $\leftarrow$  current
14: put (or move) nbr in sorted list OPEN according to
est_total_cost[nbr]  $\leftarrow$  past_cost[nbr] +
heuristic_cost_to_go(nbr)
15: end if
16: end for
17: end while
18: return FAILURE
```

Швидко, але, на відміну від випадку оптимістичної евристики витрат на використання, це рішення не буде гарантовано оптимальним.



Одна з можливостей полягає в тому, щоб запустити A^* із завищеними витратами, щоб знайти початкове рішення, а потім повторно запустити пошук із поступово меншими значеннями η , поки не закінчиться час, відведений на пошук, або не буде знайдено рішення з $\eta = 1$.

8.3 Повні планувальники шляху

Повні планувальники шляху покладаються на точне представлення вільного C -простору C_{free} . Ці методи, як правило, є математично та алгоритмічно складними та непрактичними для багатьох реальних систем, тому ми не заглиблюємося в них детально.

Один підхід до повного планування шляху, який ми побачимо в модифікованому вигляді в питанні 8.5, заснований на представленні складного високовимірнього простору C , вільного за допомогою одновимірної дорожньої карти R з такими властивостями:

(a) Досяжність. З кожної точки $q \in C_{free}$ вільний шлях до точки $q' \in R$ можна знайти тривіально (наприклад, прямий шлях).

(b) Підключення. Для кожної зв'язної компоненти C_{free} існує одна зв'язна компонента R .

За допомогою такої дорожньої карти планувальник може знайти шлях між будь-якими двома точками q_{start} і q_{goal} в тому самому пов'язаному компоненті C_{free} , просто знаходячи шляхи від q_{start} до точки $q_{start} \in R$, від точки $q_{goal} \in R$ до q_{goal} та від q_{start} до q_{goal} на дорожній карті R . Якщо між q_{start} і q_{goal} можна легко знайти шлях, дорожню карту можна навіть не використовувати.

Хоча побудова дорожньої карти C_{free} загалом складна, деякі проблеми допускають прості дорожні карти. Наприклад, розглянемо багатокутного робота, який пересувається між полігональними перешкодами на площині. Як видно на рисунку 8.5, C -перешкоди в цьому випадку також є багатокутниками. Відповідною дорожньою картою є зв'язаний неорієнтований граф видимості з вузлами у вершинах C -перешкод і ребрами між вузлами, які можуть «бачити» один одного (тобто відрізок лінії між вершинами не перетинає перешкоду). Вага, пов'язана з кожним ребром, є евклідовою відстанню між вузлами.

Це не тільки відповідна дорожня карта R , але й дозволяє нам використовувати пошук A^* для пошуку найкоротшого шляху між будь-якими двома конфігураціями в одному підключеному компоненті C_{free} , оскільки найкоротший шлях гарантовано буде прямою лінією від q початок до q мети або складатися з прямої лінії від q початку до вузла $q_{start} \in R$, прямої лінії від вузла $q_{goal} \in R$ до q мети та шляху вздовж прямих країв R від q_{start} до q_{goal} (рисунок 8.9). Зверніть увагу, що найкоротший шлях вимагає, щоб робот проходив перешкоди, тому ми неявно розглядаємо вільний C як такий, що включає його межу.

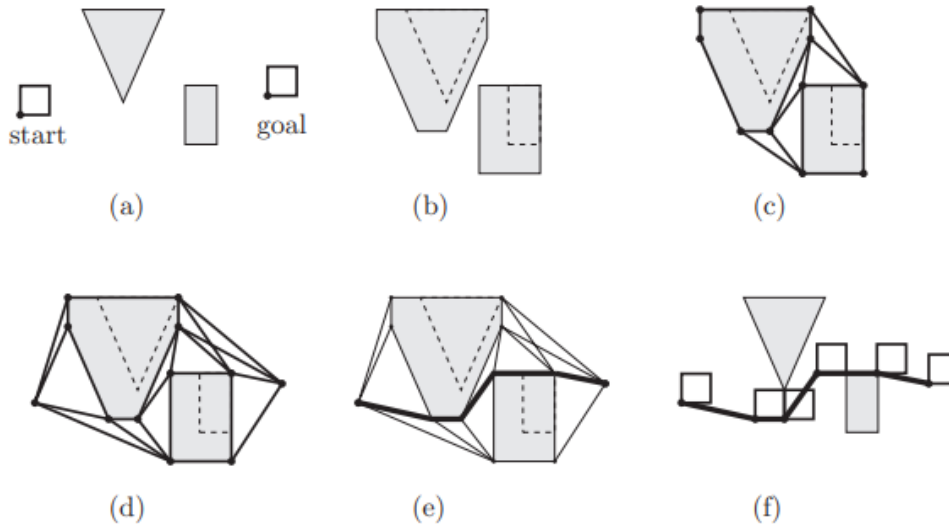


Рисунок 8.9 –Стартова та цільова конфігурації для квадратного мобільного робота: а) (показана контрольна точка) в середовищі з трикутною та прямокутною перешкодами; б) зрослі С-перешкоди; с) дорожня карта R графа видимості C free; d) повний граф складається з вузлів R плюс на початку q і меті q разом із зв'язками, що з'єднують ці вузли з видимими вузлами R; е) результати пошуку на графіку – найкоротший шлях, виділений жирним шрифтом; f) показано, що робот долає шлях

8.4 Методи сітки

Такий алгоритм пошуку, як A, вимагає дискретизації простору пошуку. Найпростішою дискретизацією С-простору є сітка. Наприклад, якщо конфігураційний простір є n-вимірним і ми бажаємо k точок сітки вздовж кожного виміру, С-простір представлений k n точок сітки.

Алгоритм A* можна використовувати як планувальник шляху для сітки С-простору з такими незначними модифікаціями.

Необхідно вибрати визначення «сусіда» точки сітки: чи обмежений робот рухатися в напрямках, вирівняних по осі, у просторі конфігурації чи він може рухатися в кількох вимірах одночасно? Наприклад, для двовимірного С-простору сусіди можуть бути 4-зв'язними (на сторонах світу компаса: північ, південь, схід і захід) або 8-зв'язними (діагоналі дозволені), як показано на малюнку 8.10 (а). Якщо діагональні рухи дозволені, вартість для діагональних сусідів повинна бути відповідним чином покарана. Наприклад, вартість для північного, південного, східного чи західного сусіда може становити 1, тоді як вартість для діагонального сусіда може бути $\sqrt{2}$. Якщо потрібні цілі числа, для ефективності реалізації можна використовувати приблизні витрати 5 і 7.

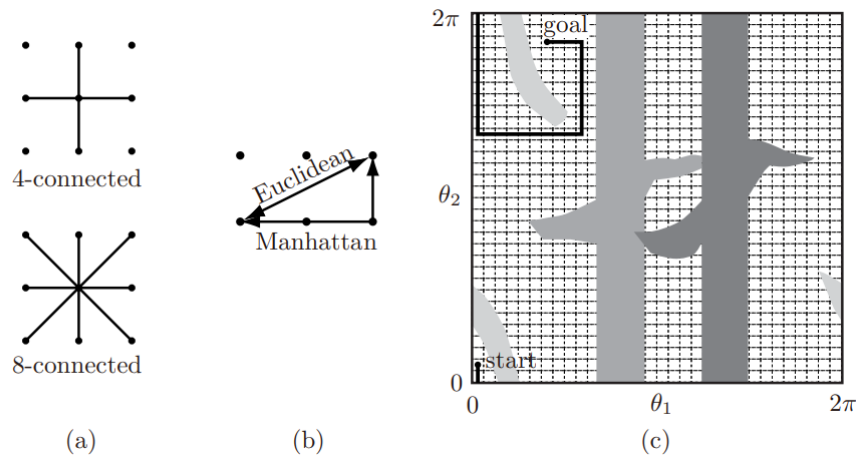


Рисунок 8.10 – 4-з'єднана точка сітки та 8-з'єднана точка сітки для простору $n = 2$: а) Точки сітки, розташовані на одиничних інтервалах; б) Евклідова відстань між двома зазначеними точками дорівнює $\sqrt{5}$, тоді як манхеттенська відстань дорівнює 3; с) Сіткове представлення С-простору та шлях мінімальної довжини Манхеттена для проблеми

- Якщо використовуються лише рухи, вирівняні по осі, евристична вартість руху повинна базуватися на відстані Манхеттена, а не на евклідовій відстані. Манхеттенська відстань враховує кількість «міських кварталів», які необхідно подолати, за правилом, що діагоналі через квартал неможливі (Рисунок 8.10 (b)).
- Вузол nbg додається до OPEN, лише якщо крок від поточного до nbg є безконфліктним. (Крок можна вважати без зіткнень, якщо доросла версія робота в nbg не перетинає жодних перешкод.)
- Інші оптимізації можливі завдяки відомій регулярній структурі сітки.

Планувальник шляху на основі сітки A^* є повним розв'язанням: він знайде рішення, якщо воно існує на рівні дискретизації С-простору. Шлях буде найкоротшим шляхом з урахуванням дозволених рухів.

Рисунок 8.10 (c) ілюструє планування шляху на основі сітки для прикладу робота 2R на рисунку 8.2. С-простір представлено у вигляді сітки з $k = 32$, тобто роздільна здатність $360^\circ/32 = 11,25^\circ$ для кожного з'єднання. Це дає загалом $32^2 = 1024$ точки сітки.

Планувальник на основі сітки, як описано, є планувальником одного запиту: він вирішує кожен запит планування шляху з нуля. Однак, якщо та сама ціль q буде використовуватися в одному середовищі для кількох запитів на планування шляху, можливо, варто попередньо обробити всю сітку, щоб увімкнути швидке планування шляху. Це планувальник хвильового фронту, показаний на малюнку 8.11.

Хоча планування шляху на основі сітки легко реалізувати, воно підходить лише для С-просторів низької розмірності. Причина полягає в тому, що кількість точок сітки, а отже, і обчислювальна складність планувальника шляху, експоненціально зростає зі збільшенням кілько-



сті вимірів n . Наприклад, роздільна здатність $k = 100$ у С-просторі з $n = 3$ вимірами призводить до $k n = 1$ мільйона вузлів сітки, тоді як $n = 5$ призводить до 10 мільярдів вузлів сітки, а $n = 7$ призводить до 100 трильйонів вузлів. Альтернативою є зменшення роздільної здатності k уздовж кожного виміру, але це призводить до грубого представлення С-простору, який може пропустити вільні шляхи.

10	9	8	7	6	5	4	3	4	5	6	7	8	9	10				
11					4	3	2	3				7	8	9				
12					13	14	3	2				1	2	6	7	8		
13					12	13	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7		
12					11	12	3	2	1	2						8		
11					10	4	3	2	3	9								
10					9	8	7	6	5	4	3	4						10
										10								

Рисунок 8.11 – Планувальник хвильового фронту на двовимірній сітці

Конфігурація цілі отримує оцінку 0. Тоді всі 4-сусідники без зіткнень отримують оцінку 1. Процес продовжується, спочатку вшир, причому кожному вільному сусідові (який ще не має оцінки) призначається оцінка його батьківський плюс 1. Після того, як кожній клітинці сітки у зв'язаному компоненті цільової конфігурації присвоєно оцінку, планування з будь-якого місця у зв'язаному компоненті є тривіальним: на кожному кроці робот просто рухається «вниз» до сусіда з нижчим рахунком. Точки сітки під час зіткнення отримують високий бал.

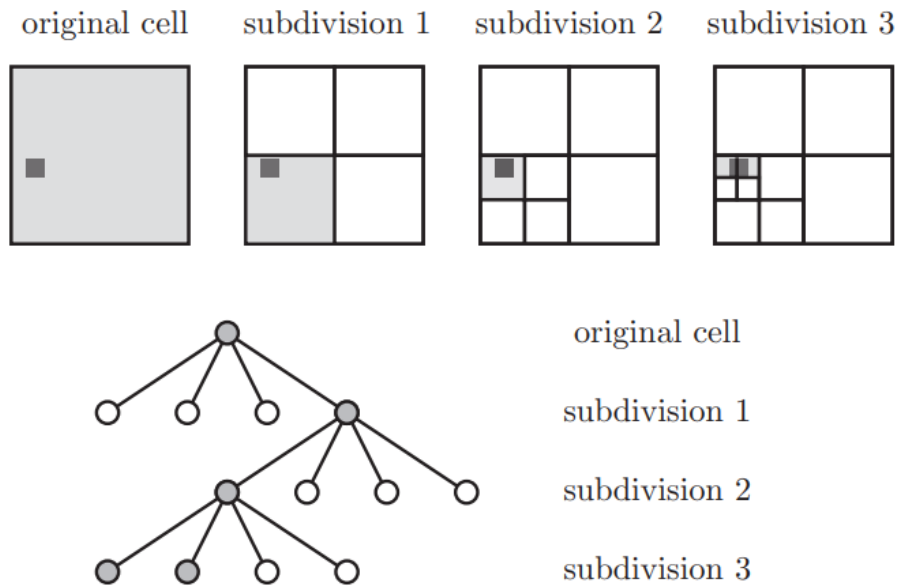


Рисунок 8.12 – При вихідній роздільній здатності комірки C -простору невелика перешкода (позначена темним квадратом) призводить до того, що вся комірка позначається перешкодою

Розбиття комірки один раз показує, що принаймні три чверті комірки фактично вільні. Три рівні підрозділу призводять до представлення з використанням десяти комірок: чотири на рівні підрозділу 3, три на рівні підрозділу 2 і три на рівні підрозділу 1. Клітини, затінені світло-сірим, є клітинками-перешкодами в остаточному представленні. Підрозділ вихідної комірки показано на нижній панелі у вигляді дерева, зокрема квадродерева, де листя дерева є останніми комірками у представленні.

Багатороздільна сітка

Одним із способів зменшити обчислювальну складність планувальника на основі сітки є використання представлення сітки з різною роздільною здатністю C free . Концептуально точка сітки вважається перешкодою, якщо будь-яка частина прямолінійної комірки з центром у точці сітки торкається C -перешкоди. Щоб уточнити представлення перешкоди, клітинку перешкоди можна розділити на менші клітинки. Кожен вимір вихідної комірки ділиться навпіл, у результаті чого утворюється 2^n підкомірок для n -вимірному простору. Будь-які клітини, які все ще контактують із C -перешкодою, потім поділяються далі до заданої максимальної роздільної здатності.

Перевага цього представлення полягає в тому, що лише частини C -простору поблизу перешкод уточнюються до високої роздільної здатності, тоді як ті, що знаходяться подалі від перешкод, представлені грубою роздільною здатністю. Це дозволяє планувальнику знаходити шляхи, використовуючи короткі кроки через захищені простори, одночасно роблячи великі кроки через широкий відкритий простір. Ця ідея проілюстрована на рисунку 8.12 , на якому використовується лише 10



клітинок для представлення перешкоди з такою ж роздільною здатністю, що й фіксована сітка, яка використовує 64 клітинки.

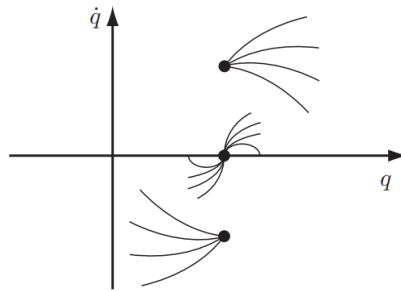


Рисунок 8.13 – Приклади траєкторій, що виходять із трьох початкових станів у фазовому просторі динамічної системи з $q \in \mathbb{R}$

Якщо початковий стан має $\dot{q} > 0$, траєкторія не може рухатися вліво (що відповідає негативному руху в q) миттєво. Подібним чином, якщо початковий стан має $\dot{q} < 0$, траєкторія не може рухатися вправо миттєво.

Для $n = 2$ це представлення з різною роздільною здатністю називається квадратним деревом, оскільки кожна клітинка перешкоди ділиться на $2^n = 4$ клітинки. Для $n = 3$ кожна клітинка перешкоди ділиться на $2^n = 8$ клітинок, і представлення називається октодеревом.

Багатороздільна репрезентація Cfree може бути створена перед пошуком або поступово під час виконання пошуку. В останньому випадку, якщо крок від поточного до nbg виявлено в конфлікті, розмір кроку можна зменшити вдвічі, поки крок не буде вільним або не буде досягнуто мінімального розміру кроку.

Методи сітки з обмеженнями руху

Наведені вище планувальники на основі сітки працюють за припущенням, що робот може переходити від однієї комірки до будь-якої сусідньої комірки у звичайній сітці C -простору. Це може бути неможливо для деяких роботів. Наприклад, автомобіль не може одним кроком дістатися до «сусідньої» комірки, яка знаходиться збоку від нього. Крім того, рухи для швидко рухомої руки робота слід планувати в просторі станів, а не лише в C -просторі, щоб врахувати динаміку руки. У просторі станів рука робота не може рухатися в певних напрямках (рисунок 8.13).

Грід-планувальники повинні бути адаптовані для врахування обмежень руху конкретного робота. Зокрема, обмеження можуть призвести до орієнтованого графа. Один із підходів полягає в тому, щоб дискретизувати елементи керування роботом, використовуючи при цьому сітку в C -просторі або просторі станів, залежно від обставин. Далі описані деталі мобільного робота на колесах і динамічної руки робота.

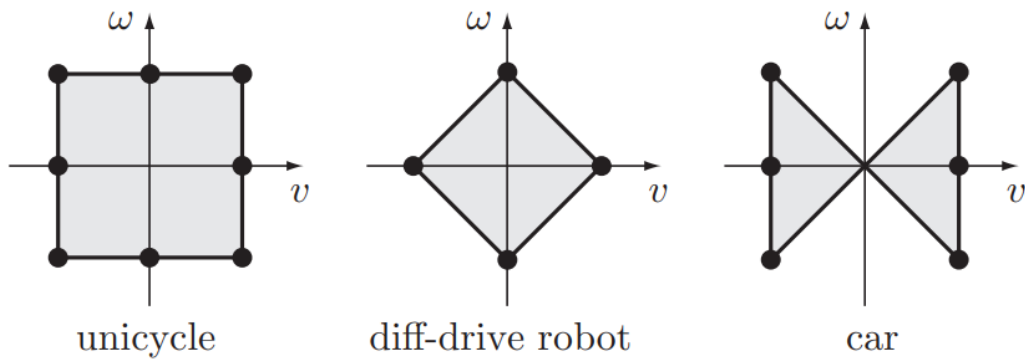


Рисунок 8.14 – Дискретизація наборів керування для моноколеса, диференціального приводу та подібних до автомобіля роботів

Планування шляху на основі сітки для колісного мобільного робота

Елементи керування для спрощених моделей одноколісного велосипеда, диференційованого приводу та подібних до автомобіля роботів є (v, ω) , тобто лінійна швидкість вперед-назад і кутова швидкість. Набори керування для цих мобільних роботів показано на малюнку 8.14. Також крапками показані запропоновані дискретизації елементів керування. Можуть бути обрані інші варіанти дискретизації.

Використовуючи дискретизацію керування, ми можемо використовувати варіант алгоритму Дейкстри для пошуку коротких шляхів (алгоритм 8.2).


Пошук розширюється з початку q шляхом інтеграції вперед кожного елемента керування на час Δt , створюючи нові вузли для шляхів, які не мають зіткнень. Кожен вузол відстежує контроль, який використовується для досягнення вузла, а також вартість шляху до вузла. Вартість шляху до нового вузла є сумою вартості попереднього вузла, поточного плюс вартість дії.

Інтеграція елементів керування не переміщує мобільного робота до точних точок сітки. Натомість сітка S -простору вступає в дію в лініях 9 і 10. Коли вузол розгортається, клітинка сітки, у якій він знаходиться, позначається як «зайнята». Згодом будь-який вузол у цій зайнятій клітинці буде видалено з пошуку. Це запобігає пошуку з розширення вузлів, які знаходяться поблизу вузлів, досягнутих з меншою ціною.

Під час пошуку враховується не більше MAXCOUNT вузлів, де MAXCOUNT є значенням, вибраним користувачем.

Час Δt слід вибирати так, щоб кожен крок руху був «малим». Розмір комірок сітки слід вибирати якомога більший, забезпечуючи, щоб інтеграція будь-якого керування протягом часу Δt перемістила мобільного робота за межі поточної комірки сітки.

Планувальник завершується, коли поточний перебуває в межах цільової області, або коли більше не залишилося вузлів для розширення (можливо, через перешкоди), або коли було розглянуто MAXCOUNT



вузлів. Будь-який знайдений шлях є оптимальним для вибору функції вартості та інших параметрів задачі. Насправді планувальник працює швидше в дещо захарашчених місцях, оскільки перешкоди допомагають керувати дослідженням.

Алгоритм 8.2 Планувальник Дейкстри на основі сітки для колісного мобільного робота.

```
1: OPEN ← {qstart}
2: past_cost[qstart] ← 0
3: counter ← 1
4: while OPEN is not empty and counter < MAXCOUNT do
5: current ← first node in OPEN, remove from OPEN
6: if current is in the goal set then
7: return SUCCESS and the path to current
8: end if
9: if current is not in a previously occupied C-space grid cell then
10: mark grid cell occupied
11: counter ← counter + 1
12: for each control in the discrete control set do
13: integrate control forward a short time  $\Delta t$  from current to qnew
14: if the path to qnew is collision-free then
15: compute cost of the path to qnew
16: place qnew in OPEN, sorted by cost
17: parent[qnew] ← current
18: end if
19: end for
20: end if
21: end while
22: return FAILURE
```

Деякі приклади планів руху автомобіля наведено на рисунку 8.15 .

Планування руху на основі сітки для руки робота

Один із методів планування руху руки робота полягає в тому, щоб розділити проблему на задачу планування шляху з подальшим масштабуванням шляху в часі:

(а) Застосуйте сітковий або інший планувальник шляху, щоб знайти шлях без перешкод у C-просторі.

(б) Масштабуйте шлях, щоб знайти найшвидшу траєкторію, яка поважає динаміку робота, або використовуйте будь-яке менш агресивне масштабування часу.

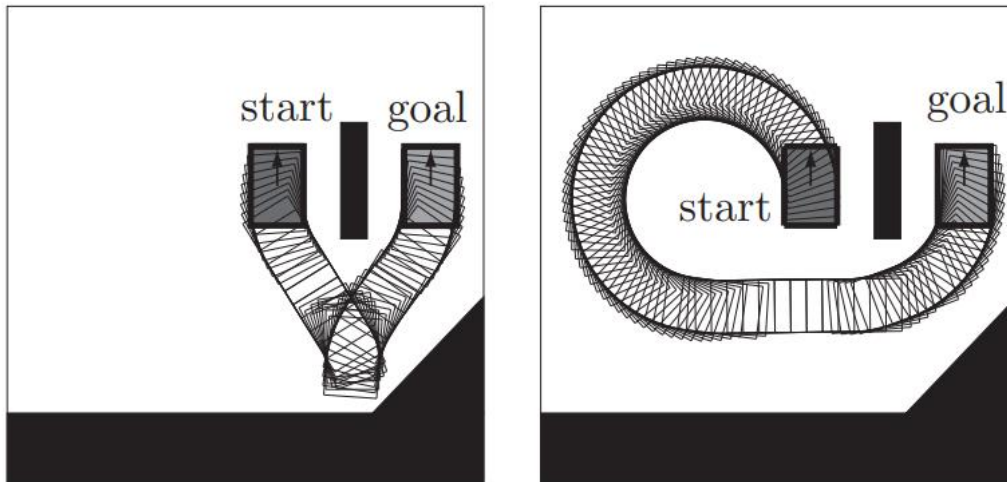


Рисунок 8.15 – (Ліворуч) Шлях з мінімальною вартістю для робота, схожого на автомобіль, де кожна дія має однакову вартість, надаючи перевагу короткому шляху. (Праворуч) Шлях з мінімальною вартістю, де скасування штрафуються. Покарання за скасування вимагає модифікації алгоритму 8.2

Оскільки завдання планування руху розбивається на два етапи (планування шляху з подальшим масштабуванням часу), результатний рух загалом не буде оптимальним за часом.

Інший підхід полягає в плануванні безпосередньо в просторі станів. Враховуючи стан (q, \dot{q}) руки робота, нехай $A(q, \dot{q})$ представляє набір прискорень, які є здійсненними на основі обмежених моментів з'єднання. Для дискретизації керувань множину $A(q, \dot{q})$ перетинають сіткою точок виду

$$\sum_{i=1}^n c a_i \hat{e}_i,$$

де c — ціле число, $a_i > 0$ — розмір кроку прискорення в \hat{e}_i - напрямку, а \hat{e}_i — одиничний вектор в \hat{e}_i -му напрямку (рис. 8.16).

Коли робот рухається, набір прискорень $A(q, \dot{q})$ змінюється, але сітка залишається фіксованою. Через це та припускаючи фіксований час інтегрування Δt на кожному «кроку» в плані руху, досяжні стани робота (після будь-якої цілої кількості кроків) обмежені сіткою в просторі станів. Щоб побачити це, розглянемо єдиний шарнірний кут робота, q_1 , і для простоти припустимо, що початкова швидкість дорівнює нулю, $\dot{q}_1(0) = 0$. Швидкість на кроці часу k набуває вигляду

$$\dot{q}_1(k) = \dot{q}_1(k-1) + c(k)a_1\Delta t,$$



де $s(k)$ — будь-яке значення в скінченному наборі цілих чисел. Відповідно до індукції, швидкість на будь-якому кроці часу повинна мати форму $a_1 k v \Delta t$, де $k v$ — ціле число. Позиція на етапі часу k набуває вигляду

$$q_1(k) = q_1(k-1) + \dot{q}_1(k-1)\Delta t + \frac{1}{2}c(k)a_1(\Delta t)^2.$$

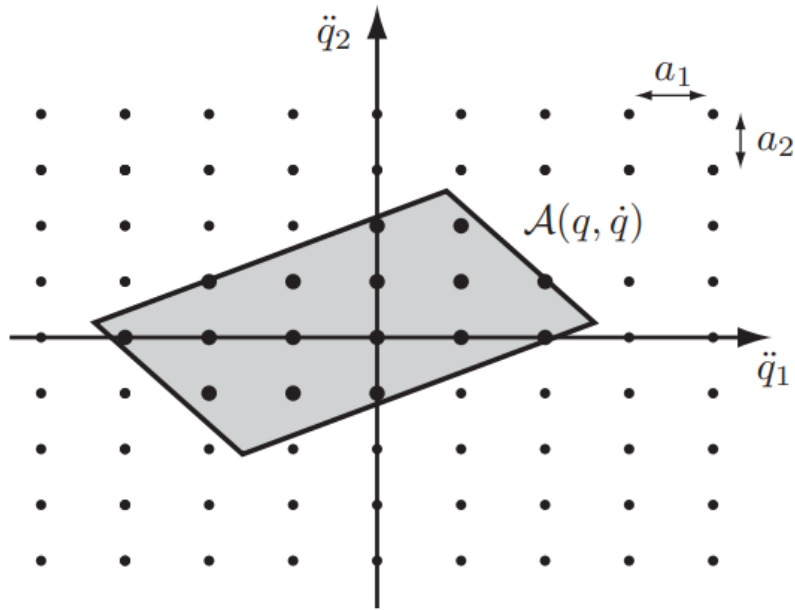



Рисунок 8.16 – Миттєво доступний набір прискорень $A(q, \dot{q})$ для двошарнірного робота, перетинається сіткою, розташованою на a_1 у \ddot{q}_1 та a_2 у \ddot{q}_2 дає дискретизовані керуючі дії (показані більшими крапками)

Підставляючи швидкість із попереднього рівняння, ми знаходимо, що позиція на будь-якому кроці часу має мати форму $a_1 k_p (\Delta t)^2 / 2 + q_1(0)$, де k_p — ціле число.

Щоб знайти траєкторію від початкового вузла до набору цілей, можна застосувати пошук у ширину, щоб створити дерево пошуку на вузлах простору станів. Коли дослідження виконується з вузла (q, \dot{q}) у просторі станів, набір $A(q, \dot{q})$ оцінюється, щоб знайти дискретний набір керуючих дій. Нові вузли створюються шляхом інтегрування керуючих дій для часу Δt . Вузол відкидається, якщо шлях до нього знаходиться в конфлікті або якщо він був досягнутий раніше (тобто траєкторією, що займає такий самий або менший час).

Оскільки спільні кути та кутові швидкості обмежені, сітка простору станів є кінцевою, і тому її можна шукати за кінцевий час. Планувальник має повну роздільну здатність і повертає оптимальну за часом траєкторію відповідно до роздільної здатності, заданої в контрольній сітці, і часового кроку Δt .

Розмір кроку контрольної сітки a_i повинен бути обраний достатньо



малим, щоб $A(q, \dot{q})$ для будь-якого можливого стану (q, \dot{q}) містив репрезентативний набір точок контрольної сітки. Вибір дрібнішої сітки для елементів керування або меншого кроку за часом Δt створює дрібнішу сітку в просторі станів і підвищує ймовірність знайти рішення серед перешкод. Це також дозволяє вибрати менший набір цілей, зберігаючи точки сітки простору станів усередині набору.

Більш тонка дискретизація вимагає обчислювальних витрат. Якщо роздільна здатність дискретизації керування збільшується на коефіцієнт r у кожному вимірі (тобто кожне a_i зменшується до a_i/r), а розмір кроку в часі ділиться на коефіцієнт τ , час обчислень, витрачений на зростання дерева пошуку для даного робота тривалість руху збільшується в рази r^{nT} , де n – кількість суглобів. Наприклад, збільшення роздільної здатності контрольної сітки на коефіцієнт $r = 2$ і зменшення кроку за часом на коефіцієнт $\tau = 4$ для робота з трьома суглобами призводить до того, що пошук, імовірно, займе в $2^{3 \times 4} = 4096$ разів більше часу. Висока обчислювальна складність планувальника робить його непрактичним за межі кількох ступенів свободи.


Наведений вище опис ігнорує одну важливу проблему: можливий контрольний набір $A(q, \dot{q})$ змінюється протягом часового кроку, тому керування, вибране на початку часового кроку, може більше не бути можливим до кінця часового кроку. З цієї причини замість цього слід використовувати консервативне наближення $A(q, \dot{q})$ $CA(q, \dot{q})$. Цей набір повинен залишатися здійсненним протягом часового кроку, незалежно від того, яку керуючу дію вибрано. Як визначити таке консервативне наближення $A(q, \dot{q})$ виходить за рамки цього розділу, але це пов'язано з обмеженнями того, як швидко матриця маси руки $M(q)$ змінюється з q і як швидко рухається робот. При малих швидкостях q і малих тривалостях Δt консервативна множина $A(q, \dot{q})$ дуже близька до $A(q, \dot{q})$.

8.5 Методи відбору проб

Кожен метод на основі сітки, розглянутий вище, надає оптимальні рішення за умови обраної дискретизації. Однак недоліком цих підходів є їх висока обчислювальна складність, що робить їх непридатними для систем, які мають більше ніж кілька ступенів свободи.

Інший клас планувальників, відомий як методи вибірки, покладається на випадкову або детерміновану функцію для вибору вибірки з S -простору або простору станів: функція для оцінки того, чи є вибірка або рух у X вільними; функція визначення найближчих попередніх зразків вільного простору; і простий місцевий планувальник, щоб спробувати підключитися до нового зразка або рухатися до нього. Ці функції використовуються для побудови графіка або дерева, що представляють можливі рухи робота.

Методи вибірки зазвичай відмовляються від оптимальних для роздільної здатності рішень пошуку сітки в обмін на здатність швидко



знаходити задовільні рішення у просторах станів великої розмірності. Зразки вибираються для формування дорожньої карти або дерева пошуку, яке швидко наближає вільний простір X_{free} , використовуючи меншу кількість зразків, ніж зазвичай вимагається для фіксованої сітки високої роздільної здатності, де кількість точок сітки експоненціально зростає з розміром простору пошуку. Більшість методів вибірки є імовірнісними повними: ймовірність знаходження рішення, якщо воно існує, наближається до 100%, оскільки кількість вибірок досягає нескінченності.

Два основні класи методів вибірки – швидке дослідження випадкових дерев (RRT) і ймовірнісні дорожні карти (PRM). Перші використовують деревовидне представлення для планування одного запиту в С-просторі або просторі станів, тоді як PRM є переважно планувальниками С-простору, які створюють дорожню карту для планування кількох запитів.

Алгоритм RRT

Алгоритм RRT шукає рух без зіткнень від початкового стану x_{start} до цільового набору X_{goal} . Його застосовують до кінематичних задач, де стан x є просто конфігурацією q , а також до динамічних задач, де стан включає швидкість. Базовий RRT вирощує одне дерево з початку x , як описано в алгоритмі 8.3.

Алгоритм 8.3 Алгоритм RRT.

- 1: initialize search tree T with x_{start}
- 2: while T is less than the maximum tree size do
- 3: $x_{samp} \leftarrow$ sample from X
- 4: $x_{nearest} \leftarrow$ nearest node in T to x_{samp}
- 5: employ a local planner to find a motion from $x_{nearest}$ to x_{new} in the direction of x_{samp}
- 6: if the motion is collision-free then
- 7: add x_{new} to T with an edge from $x_{nearest}$ to x_{new}
- 8: if x_{new} is in X_{goal} then
- 9: return SUCCESS and the motion to x_{new}
- 10: end if
- 11: end if
- 12: end while
- 13: return FAILURE

У типовій реалізації кінематичної задачі (де x є просто q), вибірка в лінії 3 вибирає x_{samp} випадковим чином із майже рівномірного розподілу по X , з невеликим ухилом у бік станів у меті X . Найближчий вузол x найближчий у дереві пошуку T (рядок 4) є вузлом, що мінімізує евклідову відстань до x_{samp} . Стан x новий (рядок 5) вибрано як стан на невеликій відстані d від x , найближчого на прямій до x_{samp} . Оскільки d є малим, дуже простий локальний планувальник, наприклад, той, який повертає прямолінійний рух, часто знайде рух, що з'єднує x найближче

до x_{new} . Якщо рух відбувається без зіткнень, новий стан x_{new} додається до дерева пошуку T .

Чистий ефект полягає в тому, що майже рівномірно розподілені зразки «тягнуть» дерево до себе, змушуючи дерево швидко досліджувати X_{free} . Приклад впливу цього витягування на дослідження показано на рисунку 8.17.

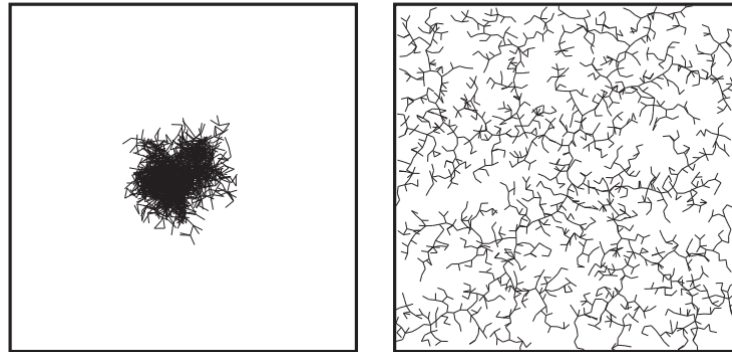


Рисунок 8.17 – (Ліворуч) Дерево, створене шляхом застосування рівномірно розподіленого випадкового руху від випадково вибраного вузла дерева, не досліджує дуже далеко. (Праворуч) Дерево, створене алгоритмом RRT з використанням вибірок, взятих випадковим чином із рівномірного розподілу. Обидва дерева мають 2000 вузлів

Базовий алгоритм залишає програмісту багато варіантів: як взяти вибірку з X (рядок 3) , як визначити «найближчий» вузол у T (лінія 4) і як спланувати рух, щоб просуватися до x_{samp} (рядок 5) . Навіть невелика зміна методу вибірки, наприклад, може призвести до різких змін у часі роботи планувальника. На основі цих варіантів та інших варіантів у літературі було запропоновано широкий вибір планувальників. Деякі з цих варіацій описано нижче.

Лінія 3: Пробник

Найбільш очевидний семплер – це той, який випадково відбирає вибірку з рівномірного розподілу по X . Це просто для евклідових C -просторів R^n , а також для n -об'єднаних C -просторів роботів $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ (n разів), де ми можемо вибрати рівномірний розподіл по кожному куту з'єднання, і для C -простору $R^2 \times S^1$ для мобільного робота в площині, де ми можемо вибрати рівномірний розподіл по R^2 і S^1 індивідуально. Поняття рівномірного розподілу на деяких інших викривлених C -просторах, наприклад $SO(3)$, є менш простим.

Для динамічних систем рівномірний розподіл у просторі станів можна визначити як перехресний добуток рівномірного розподілу в C -просторі та рівномірного розподілу в обмеженому наборі швидкостей.

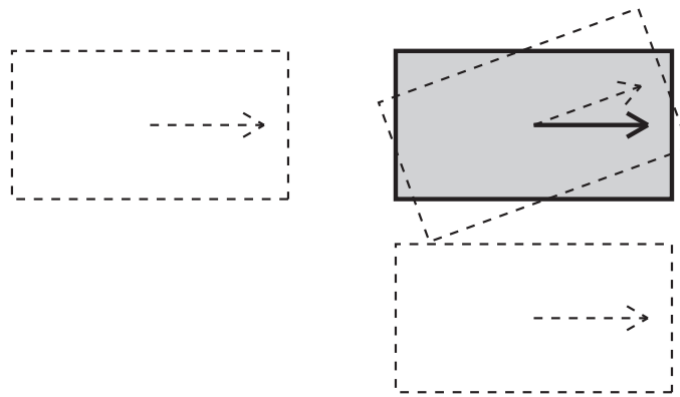


Рисунок 8.18 – Яка з трьох пунктирних конфігурацій автомобіля «найближча» до конфігурації сірого?

Хоча назва «випадкові дерева швидкого дослідження» походить від ідеї стратегії випадкової вибірки, насправді вибірки не обов'язково генерувати випадково. Наприклад, замість цього може бути використана детермінована схема вибірки, яка генерує дедалі дрібнішу сітку (з різною роздільною здатністю) на X . Щоб відобразити цей більш загальний погляд, підхід назвали швидким дослідженням щільні дерева (RDT), наголошуючи на ключовому моменті, що зразки повинні навіть остаточно стати щільними в просторі станів (тобто, коли кількість зразків досягає нескінченності, вибірки стають довільно близькими до кожної точки в X).

Лінія 4: Визначення найближчого вузла


Пошук «найближчого» вузла залежить від визначення відстані на X . Для необмеженого кінематичного робота на $C = R^n$ природним вибором відстані між двома точками є просто евклідова відстань. Для інших приміщень вибір менш очевидний.

Як приклад, для автомобіля, подібного до робота з C -простором $R^2 \times S^1$, конфігурація якого найближче до конфігурації x_{samp} : той, який повернуто на 20 градусів відносно x_{samp} , той, який знаходиться на 2 метри прямо позаду чи той, який знаходиться на 1 метр прямо в бік від нього (Рисунок 8.18)? Оскільки обмеження руху запобігають обертанню на місці або прямому переміщенню вбік, конфігурація, яка знаходиться на 2 метри прямо позаду, найкраще розташована для просування до x_{samp} . Таким чином, визначення поняття відстані вимагає, щоб

цю інформацію можна було використовувати для визначення найближчого вузла. У будь-якому випадку, найближчий вузол слід обчислити швидко. Пошук найближчого сусіда є поширеною проблемою в обчислювальній геометрії, і різні алгоритми, такі як kd-дерева та хешування, можна використовувати для її ефективного вирішення.

Лінія 5 : Місцевий планувальник

Робота локального планувальника полягає в тому, щоб знайти рух від x найближчої до деякої точки x_{new} , яка ближча до x_{samp} . Плану-



вальник має бути простим і працювати швидко. Ось три приклади.

Прямий планувальник. План — це пряма лінія до x_{new} , яка може бути обрана на x_{samp} або на фіксованій відстані d від x найближчої прямої до x_{samp} . Це підходить для кінематичних систем без обмежень руху.

Планувальник дискретизованих елементів керування. Для систем з обмеженнями руху, таких як колісні мобільні роботи або динамічні системи, елементи керування можуть бути дискретизовані в дискретний набір $\{u_1, u_2, \dots\}$, як у методах сітки з обмеженнями руху. Кожне керування інтегрується від x найближчого протягом фіксованого часу Δt за допомогою $x = f(x, u)$. Серед нових станів, досягнутих без зіткнення, стан, найближчий до x_{samp} , вибирається як x_{new} .

Колісні роботи-планувальники. Для колісного мобільного робота локальні плани можна знайти за допомогою кривих Рідса-Шеппа.

Можна розробити й інші місцеві планувальники, що стосуються роботи.

Інші варіанти RRT

Продуктивність базового алгоритму RRT значною мірою залежить від вибору методу вибірки, вимірювання відстані та місцевого планувальника. Окрім цих варіантів, нижче наведено два інших варіанти базового RRT.

Двонаправлений RRT. Двонаправлений RRT вирощує два дерева: одне «вперед» від x_{start} і одне «назад» від x_{goal} . Алгоритм чергує вирощування прямого дерева та вирощування зворотного дерева, і час від часу він намагається з'єднати два дерева, вибираючи x_{samp} з іншого дерева. Перевага цього підходу полягає в тому, що єдиний цільовий стан x_{goal} може бути досягнутий точно, а не просто набір цілей x_{goal} . Ще одна перевага полягає в тому, що в багатьох середовищах два дерева, швидше за все, знайдуть одне одного набагато швидше, ніж одне «пряме» дерево знайде поставлену ціль.

Основна проблема полягає в тому, що місцеві планувальники можуть не в змозі точно поєднати два дерева. Наприклад, планувальник дискретизованих елементів управління навряд чи створить рух саме до вузла в іншому дереві. У цьому випадку два дерева можна вважати більш-менш пов'язаними, якщо точки на кожному дереві достатньо близькі. «Зламана» розривна траєкторія може бути повернута та виправлена методом згладжування.

RRT*. Базовий алгоритм RRT повертає SUCCESS, коли знайдено рух до цілі X . Альтернативою є продовження виконання алгоритму та припинення пошуку лише тоді, коли досягається інша умова завершення (наприклад, максимальний час виконання або максимальний розмір дерева). Тоді можна повернути рух з мінімальними витратами. Таким чином, рішення RRT може продовжувати вдосконалюватися з часом. Оскільки ребра в дереві ніколи не видаляються або не змінюються, RRT зазвичай не збігається до оптимального рішення.

Алгоритм RRT* є різновидом однодеревного RRT, який постійно переналаштовує дерево пошуку, щоб воно завжди кодувало найкоротший шлях від початку x до кожного вузла в дереві. Базовий підхід працює для планування шляху С-простору без обмежень руху, дозволяючи точні шляхи від будь-якого вузла до будь-якого іншого вузла.

Щоб змінити RRT на RRT*, рядок 7 алгоритму RRT, який вставляє x_{new} в T із ребром від x найближчого до x_{new} , замінюється перевіркою всіх вузлів $x \in X$ поблизу в T , які є достатньо близькими до x_{new} . Ребро до x_{new} створюється з $x \in X$ поблизу локального планувальника, який (1) має рух без зіткнень і (2) мінімізує загальну вартість шляху від x_{start} до x_{new} , а не лише вартість доданого краю. Загальна вартість — це вартість досягнення кандидата $x \in X$ поблизу плюс вартість нового краю.

Наступним кроком є розгляд кожного $x \in X$ поблизу, щоб побачити, чи можна його досягти з меншою ціною шляхом руху через x_{new} . Якщо так, батьківський елемент x змінюється на x_{new} . Таким чином, дерево поступово змінюється, щоб усунути дорогі рухи на користь рухів з мінімальною вартістю, доступних досі.

Визначення X_{near} залежить від кількості зразків у дереві, деталей методу вибірки, розміру простору пошуку та інших факторів.

На відміну від RRT, рішення, надане RRT*, наближається до оптимального рішення зі збільшенням кількості вузлів вибірки. Як і RRT, алгоритм RRT* є імовірно повним. Рисунок 8.19 демонструє поведінку повторного підключення RRT* порівняно з RRT для простого прикладу в $C = R^2$.

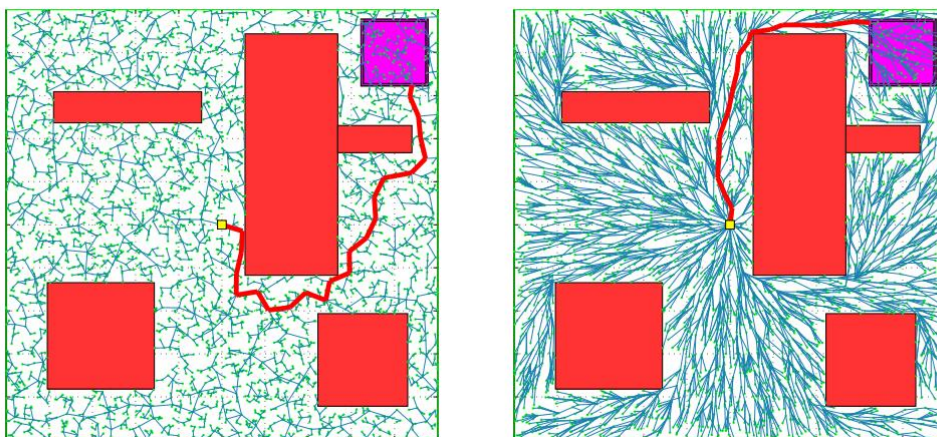



Рисунок 8.19 – (Ліворуч) дерево, створене RRT після 5000 вузлів.

Цільовою областю є квадрат у верхньому правому куті, де вказано найкоротший шлях. (праворуч) Дерево, створене RRT* після 5000 вузлів.

Алгоритм PRM



PRM використовує вибірку для побудови представлення дорожньої карти вільного C , перш ніж відповідати на будь-які конкретні запитання. Дорожня карта — це неорієнтований граф: робот може рухатися в будь-якому напрямку вздовж будь-якого краю точно від одного вузла до іншого. З цієї причини PRM в першу чергу застосовуються до кінематичних задач, для яких існує точний локальний планувальник, який може знайти шлях (ігноруючи перешкоди) від будь-якого q_1 до будь-якого іншого q_2 . Найпростіший приклад — прямолінійний планувальник для робота без кінематичних обмежень.

Після створення дорожньої карти певний початковий вузол q_{start} можна додати до графа, спробувавши підключити його до дорожньої карти, починаючи з найближчого вузла. Те саме робиться для цільового вузла q_{goal} . Потім у графіку шукається шлях, як правило, за допомогою A^* . Таким чином, на запит можна ефективно відповісти після того, як буде створено дорожню карту.

Використання PRM дозволяє швидко й ефективно побудувати дорожню карту порівняно з побудовою дорожньої карти з використанням сітки з високою роздільною здатністю. Причина полягає в тому, що об'ємна частка C -простору, яка «видима» місцевим планувальником із даної конфігурації, зазвичай не зменшується експоненціально зі збільшенням розмірності C -простору.

Алгоритм для побудови дорожньої карти R з N вузлами викладено в Алгоритмі 8.4 і показано на рисунку 8.20.

Ключовим вибором в алгоритмі побудови дорожньої карти PRM є вибірка

Алгоритм 8.4 Алгоритм побудови дорожньої карти PRM (неорієнтований граф).

```
1: for  $i = 1, \dots, N$  do
2:  $q_i \leftarrow$  sample from  $C_{free}$ 
3: add  $q_i$  to  $R$ 
4: end for
5: for  $i = 1, \dots, N$  do
6:  $N(q_i) \leftarrow$   $k$  closest neighbors of  $q_i$ 
7: for each  $q \in N(q_i)$  do
8: if there is a collision-free local path from  $q$  to  $q_i$  and
there is not already an edge from  $q$  to  $q_i$  then
9: add an edge from  $q$  to  $q_i$  to the roadmap  $R$ 
10: end if
11: end for
12: end for
13: return  $R$ 
```

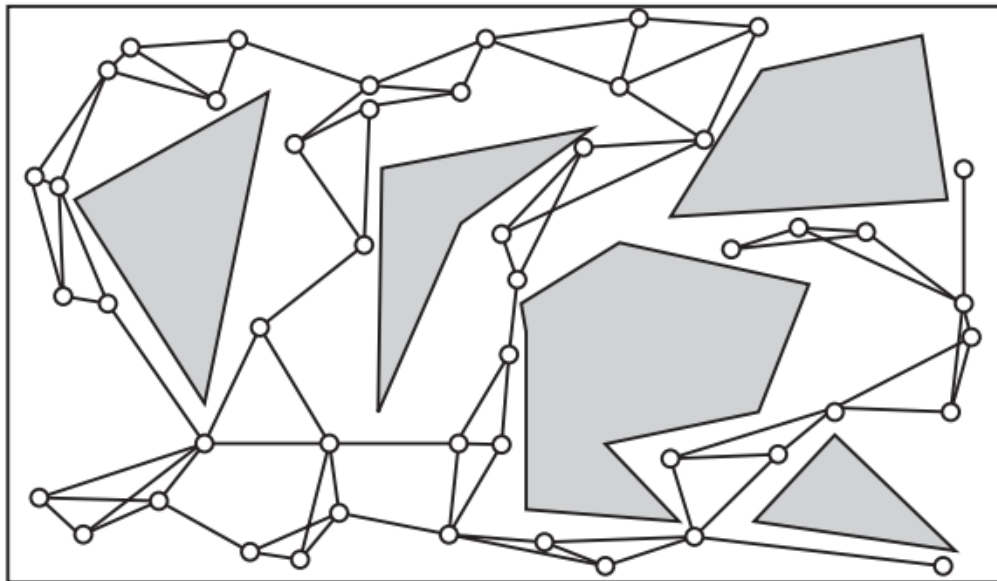


Рисунок 8.20 – Приклад дорожньої карти PRM для точкового робота в $C = R^2$. Для підключення до зразкового вузла q враховуються $k = 3$ найближчі сусіди

Ступінь вузла може бути більше трьох, оскільки він може бути близьким сусідом багатьох вузлів від C_{free} . Хоча за замовчуванням може бути вибірка випадковим чином із рівномірного розподілу на C та усунення конфігурацій у зіткненні, було показано, що вибірка з більшою щільністю поблизу перешкод може підвищити ймовірність пошуку вузьких проходів, таким чином значно зменшуючи кількість вибірок, необхідних для належного представлення підключення C_{free} . Іншим варіантом є детермінована вибірка з різною роздільною здатністю.

8.6 Віртуальні потенційні поля

Методи віртуального потенційного поля натхненні полями потенційної енергії в природі, такими як гравітаційне та магнітне поля. З фізики ми знаємо, що потенційне поле $P(q)$, визначене над C , індукує силу $F = -dP/dq$, яка рухає об'єкт від високого потенціалу до низького. Наприклад, якщо h — це висота над поверхнею Землі в однорідному гравітаційному потенційному полі ($g = 9,81 \text{ м/с}^2$), то потенціальна енергія маси m дорівнює $P(h) = mgh$, а сила, що діє на неї, $-F = -dP/dh = -mg$. Ця сила змусить масу впасти на поверхню Землі.

В управлінні рухом робота конфігурації цілі q_{goal} призначається низький віртуальний потенціал, а перешкодам призначається високий віртуальний потенціал. Прикладання до робота сили, пропорційної від'ємному градієнту віртуального потенціалу, природним чином штовхає робота до мети та від перешкод.

Віртуальне потенційне поле дуже відрізняється від планувальників, які ми бачили досі. Як правило, градієнт поля можна швидко обчис-

лити, тому рух можна розрахувати в режимі реального часу (реактивне керування), а не планувати заздалегідь. За допомогою відповідних датчиків метод може навіть впоратися з перешкодами, які рухаються або з'являються несподівано. Недоліком основного методу є те, що робот може застрягти в локальних мінімумах потенційного поля, далеко від цілі, навіть якщо існує можливий рух до цілі. У деяких випадках можна спроектувати потенціал, щоб гарантувати, що єдиний локальний мінімум досягає мети, усуваючи цю проблему.

Точка в С-просторі

Давайте почнемо з припущення, що точковий робот у своєму С-просторі. Конфігурація цілі q_{goal} зазвичай кодується квадратичною «чашею» потенційної енергії з нульовою енергією в цілі,

$$\mathcal{P}_{\text{goal}}(q) = \frac{1}{2}(q - q_{\text{goal}})^T K (q - q_{\text{goal}}),$$

де K — симетрична позитивно визначена вагова матриця (наприклад, одинична матриця). Сила, викликана цим потенціалом, дорівнює

$$F_{\text{goal}}(q) = -\frac{\partial \mathcal{P}_{\text{goal}}}{\partial q} = K(q_{\text{goal}} - q),$$

сила притягання, пропорційна відстані від цілі.

Потенціал відштовхування, викликаний С-перешкодою B , можна розрахувати з відстані $d(q, B)$ до перешкоди:

$$\mathcal{P}_B(q) = \frac{k}{2d^2(q, B)},$$

де $k > 0$ — коефіцієнт масштабування. Потенціал правильно визначено лише для точок поза межами перешкоди, $d(q, B) > 0$. Сила, викликана потенціалом перешкоди, дорівнює

$$F_B(q) = -\frac{\partial \mathcal{P}_B}{\partial q} = \frac{k}{d^3(q, B)} \frac{\partial d}{\partial q}. \quad (8.3)$$

Загальний потенціал отримується шляхом підсумовування потенціалу привабливої мети та потенціалу відштовхування перешкоди,

$$\mathcal{P}(q) = \mathcal{P}_{\text{goal}}(q) + \sum_i \mathcal{P}_{B_i}(q),$$



надаючи загальну силу

$$F(q) = F_{\text{goal}}(q) + \sum_i F_{B_i}(q).$$

Зверніть увагу, що сума потенціалів притягання та відштовхування може не давати мінімуму (нульової сили) саме в q_{goal} . Крім того, прийнято встановлювати обмеження на максимальний потенціал і силу, оскільки простий потенціал перешкоди інакше дав би необмежені потенціали та сили поблизу меж перешкод.

На рисунку 8.21 показано потенційне поле для точки в R^2 з трьома круглими перешкодами. На контурі потенційного поля чітко видно глобальний мінімум біля центру простору (біля цілі, позначеної +), локальний мінімум біля двох перешкод ліворуч, а також сідла (критичні точки, які максимум в одному напрямку і мінімум в іншому напрямку) поблизу перешкод. Сідла, як правило, не є проблемою, оскільки невелике збурення дозволяє продовжувати рух до мети. Однак локальні мінімуми далеко від цілі є проблемою, оскільки вони приваблюють сусідні держави.

Щоб фактично керувати роботом за допомогою обчисленого $F(q)$, у нас є кілька варіантів, два з яких:

- Застосуйте розраховану силу плюс демпфування,

$$u = F(q) + B\dot{q} \quad (8.4)$$

Якщо B позитивно визначений, він розсіює енергію для всіх $\dot{q} \neq 0$, зменшуючи коливання та гарантуючи, що робот зупиниться. Якщо $B = 0$, то робот продовжує рухатися, зберігаючи постійну повну енергію, яка є сумою початкової кінетичної енергії $1/2\dot{q}^T(0)M(q(0))\dot{q}(0)$ і початкової віртуальної потенційної енергії $P(q(0))$.

Рух робота за законом керування (8.4) можна візуалізувати як кулю, що котиться під дією сили тяжіння по потенційній поверхні на рисунку 8.21, де дисипативна сила є тертям кочення.

- Натомість розглядайте розраховану силу як задану швидкість:

$$\dot{q} = F(q).$$

Це автоматично усуває коливання.

Використовуючи потенціал простої перешкоди (8.3), навіть віддалені перешкоди мають ненульовий вплив на рух робота. Щоб прискорити оцінку умов відштовхування, віддалені перешкоди можна ігнорувати. Ми можемо визначити діапазон впливу перешкод $d_{\text{range}} > 0$ так, щоб потенціал дорівнював нулю для всіх $d(q, B) > d_{\text{range}}$:

$$U_{\mathcal{B}}(q) = \begin{cases} \frac{k}{2} \left(\frac{d_{\text{range}} - d(q, \mathcal{B})}{d_{\text{range}} d(q, \mathcal{B})} \right)^2 & \text{if } d(q, \mathcal{B}) < d_{\text{range}} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Інша проблема полягає в тому, що $d(q, \mathcal{B})$ та його градієнт, як правило, важко обчислити.

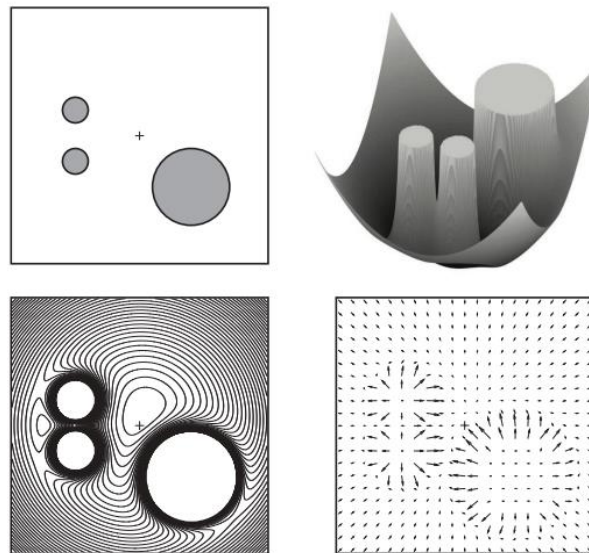



Рисунок 8.21 – (Вгорі ліворуч) Три перешкоди та точка воріт, позначені знаком +, у \mathbb{R}^2 . (Вгорі праворуч) Потенціальна функція, яка підсумовує потенціал у формі чаші, що тягне робота до мети, з потенціалами відштовхування трьох перешкод. Потенціальна функція насичується при заданому максимальному значенні. (Внизу ліворуч) Контурний графік потенційної функції, що показує глобальний мінімум, локальний мінімум і чотири сідла: між кожною перешкодою та межею робочого простору та між двома малими перешкодами. (Внизу праворуч) Сили, викликані потенціальною функцією

Функції навігації

Значною проблемою методу потенційного поля є локальні мінімуми. Хоча потенційні поля можуть бути доцільними для відносно незасмічених просторів або для швидкого реагування на несподівані перешкоди, вони, ймовірно, призведуть робота до локальних мінімумів для багатьох практичних застосувань.

Одним із методів, який дозволяє уникнути цієї проблеми, є планувальник хвильового фронту на рисунку 8.11. Алгоритм хвильового фронту створює функцію вільного потенціалу локального мінімуму шляхом обходу в ширину кожної комірки, доступної від цільової комірки, у сітковому представленні вільного простору. Тому, якщо існує рішення проблеми планування руху, то просте переміщення «вниз» на



кожному кроці гарантовано приведе робота до мети.

Інший підхід до відстеження градієнта без локального мінімуму базується на заміні функції віртуального потенціалу функцією навігації. Навігаційна функція $u(q)$ є типом віртуальної потенційної функції, яка

1. гладка (або принаймні двічі диференційована) на q ;
2. має обмежене максимальне значення (наприклад, 1) на межах усіх перешкод;
3. має один мінімум при q_{goal} ; і
4. має гессіан повного рангу $d^2\phi/dq^2$ у всіх критичних точках q , де $d\phi/dq = 0$ (тобто $\phi(q)$ є функцією Морзе).

Умова 1 гарантує, що Гессе $d^2\phi/dq^2$ існує. Умова 2 визначає верхню межу віртуальної потенційної енергії робота. Ключовими умовами є 3 і 4. Умова 3 гарантує, що з критичних точок $\phi(q)$ (включаючи мінімуми, максимуми та сідла) існує лише один мінімум при q_{goal} . Це гарантує, що q_{goal} є принаймні локально привабливим. Можуть існувати сідлові точки, які є мінімумами вздовж підмножини напрямків, але умова 4 гарантує, що набір початкових станів, які притягуються до будь-якої сідлової точки, має порожню внутрішню частину (нульова міра), і тому майже кожен початковий стан збігається до унікального мінімуму q мета .

Хоча побудова навігаційних потенціальних функцій лише з одним мінімумом є нетривіальною, показав, як побудувати їх для окремого випадку n -вимірної S вільної , що складається з усіх точок всередині n -сфери радіуса R та поза меншими сферичними перешкодами B^* радіуса r_i з центром у q_i , тобто $\{q \in \mathbb{R}^n \mid \|q\| < R \text{ і } \|q - q_i\| > r_i \text{ для всіх } i\}$. Це називається світ сфери. У той час як реальний S -простір навряд чи буде світом сфери, Рімон і Кодічек показали, що межі перешкод і пов'язану з ними навігаційну функцію можна деформувати до набагато ширшого класу зіркоподібних перешкод. Перешкода у формі зірки – це перешкода, яка має центральну точку, від якої відрізок лінії до будь-якої точки на межі перешкоди повністю міститься всередині перешкоди . Зоряний світ — це S -простір у формі зірки, який має перешкоди у формі зірки. Таким чином, пошук навігаційної функції для довільного зіркового світу зводиться до пошуку навігаційної функції для «модельного» сферичного світу, який має центри в центрах зіркоподібних перешкод, а потім розтягування та деформування цієї навігаційної функції до такої, яка відповідає зірковий світ. Рімон і Кодічек запропонували систематичну процедуру для досягнення цього.

На рисунку 10.22 показано деформацію навігаційної функції на модельному світі сфери до світу зірок для випадку $S \in \mathbb{R}^2$.

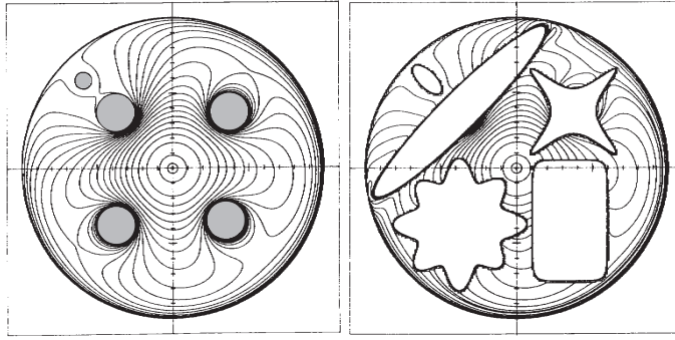


Рисунок 8.22 – (Ліворуч) Модель «світу сфери» з п'ятьма круглими перешкодами. Показано контурний графік навігаційної функції. Гол стоїть на $(0, 0)$. Зверніть увагу, що перешкоди створюють сідлові точки поблизу перешкод, але не створюють локальних мінімумів. (Праворуч) «Зірковий світ», отриманий шляхом деформації перешкод і потенціалу зі збереженням навігаційної функції

Потенціал робочого простору

Складність обчислення сили відштовхування від перешкоди полягає в отриманні відстані до перешкоди $d(q, V)$. Один із підходів, який уникає точного розрахунку, полягає в тому, щоб представити межу перешкоди як набір точкових перешкод і представити робота невеликим набором контрольних точок. Нехай декартове розташування контрольної точки i на роботі запишеться $f_i(q) \in \mathbb{R}^3$, а гранична точка j перешкоди — $c_j \in \mathbb{R}^3$. Тоді відстань між двома точками дорівнює $\|f_i(q) - c_j\|$, а потенціал у контрольній точці i через точку перешкоди j дорівнює

$$\mathcal{P}'_{ij}(q) = \frac{k}{2\|f_i(q) - c_j\|^2},$$

надаючи силу відштовхування в контрольній точці

$$F'_{ij}(q) = -\frac{\partial \mathcal{P}'_{ij}}{\partial q} = \frac{k}{\|f_i(q) - c_j\|^4} \left(\frac{\partial f_i}{\partial q} \right)^T (f_i(q) - c_j) \in \mathbb{R}^3.$$

Щоб перетворити лінійну силу $F'_{ij}(q) \in \mathbb{R}^3$ в узагальнену силу $F_{ij}(q) \in \mathbb{R}^n$, що діє на руку робота або мобільного робота, ми спочатку знаходимо якобіан $J_i(q) \in \mathbb{R}^n$, який пов'язує $F'_{ij}(q) \in \mathbb{R}^3$ з лінійним швидкістю контрольної точки f :

$$\dot{f}_i = \frac{\partial f_i}{\partial q} \dot{q} = J_i(q) \dot{q}.$$

За принципом віртуальної роботи узагальнена сила $F_{ij}(q) \in \mathbb{R}^n$ че-



рез лінійну силу відштовхування $F_{ij}(q) \in \mathbb{R}^3$ просто

$$F_{ij}(q) = J_i^T(q) F'_{ij}(q).$$

Тепер повна сила $F(q)$, що діє на робота, є сумою легко обчисленої сили притягання $F_{goal}(q)$ і сил відштовхування $F_{ij}(q)$ для всіх i, j .

Колісні мобільні роботи

Попередній аналіз передбачає, що керуюча сила $u = F(q) + B\dot{q}$ (закон керування (8.4)) або швидкість $\dot{q} = F(q)$ (закон керування (8.5)) можуть бути застосовані в будь-якому напрямку. Однак, якщо робот є колісним мобільним роботом із обмеженнями кочення $A(q)\dot{q} = 0$, розрахований $F(q)$ має бути спроектований на елементи керування $F_{proj}(q)$, які переміщують робота по дотичній до обмежень. Для кінематичного робота, який використовує закон керування $\dot{q} = F_{proj}(q)$, відповідною проекцією є

$$F_{proj}(q) = (I - A^T(q)(A(q)A^T(q))^{-1}A(q))F(q).$$

Для динамічного робота, який використовує закон керування $u = F_{proj}(q) + B\dot{q}$.

Використання потенційних полів у планувальниках

Потенційне поле можна використовувати в поєднанні з планувальником шляху. Наприклад, пошук «Спочатку найкращий», як-от A^* , може використовувати потенціал як оцінку вихідної вартості. Включення функції пошуку запобігає тому, щоб планувальник назавжди застряг у локальних мінімумах.

8.7 Нелінійна оптимізація

Проблема планування руху може бути виражена як загальна нелінійна оптимізація з обмеженнями рівності та нерівності з використанням ряду програмних пакетів для вирішення таких проблем. Проблеми нелінійної оптимізації можуть бути вирішені методами на основі градієнта, такими як послідовне квадратичне програмування (SQP), або неградієнтними методами, такими як моделювання відпалу, оптимізація Нелдера-Міда та генетичне програмування. Як і багато інших задач нелінійної оптимізації, ці методи, як правило, не гарантовано знайдуть можливе рішення, якщо воно існує, не кажучи вже про оптимальне. Однак для методів, які використовують градієнти цільової функції та обмежень, ми можемо очікувати локально оптимального рішення, якщо ми починаємо процес з припущення, яке є «близьким» до рішення.

Загальну проблему можна записати так:

знайти
мінімізацію
на тему

$$\begin{aligned}
 &u(t), q(t), T \\
 &J(u(t), q(t), T) \\
 &\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), & \forall t \in [0, T], \\
 &u(t) \in \mathcal{U}, & \forall t \in [0, T], \\
 &q(t) \in \mathcal{C}_{\text{free}}, & \forall t \in [0, T], \\
 &x(0) = x_{\text{start}}, \\
 &x(T) = x_{\text{goal}}.
 \end{aligned}$$

Щоб розв'язати цю задачу наближено шляхом нелінійної оптимізації, керування $u(t)$, траєкторія $q(t)$ і обмеження рівності та нерівності повинні бути дискретизовані. Зазвичай це робиться шляхом забезпечення виконання обмежень у фіксованій кількості точок, рівномірно розподілених на інтервалі $[0, T]$, і вибору кінцево-параметричного представлення позиції та/або історій керування. У нас є принаймні три варіанти параметризації позиції та елементів керування:

(а) Параметризуємо траєкторію $q(t)$. У цьому випадку ми розв'язуємо -безпосередньо параметри траєкторії. Управління $u(t)$ у будь-який момент часу розраховуються за допомогою рівнянь руху. Цей підхід не застосовується до систем з меншою кількістю елементів керування, ніж змінних конфігурації, $m < n$.


(б) Параметризуйте керування $u(t)$. Ми розв'язуємо $u(t)$ безпосередньо. Обчислення стану $x(t)$ вимагає інтегрування рівнянь руху.

(с) Параметризуйте як $q(t)$, так і $u(t)$. Ми маємо більшу кількість змінних, оскільки ми параметризуємо як $q(t)$, так і $u(t)$. Крім того, у нас є більша кількість обмежень, оскільки $q(t)$ і $u(t)$ повинні явно задовольняти динамічним рівнянням $\dot{X} = f(x, u)$, як правило, при фіксованій кількості точок, рівномірно розподілених на інтервалі $[0, T]$. Ми повинні бути обережними, вибираючи параметризації $q(t)$ і $u(t)$ узгодженими одна з одною, щоб динамічні рівняння могли бути задоволені в цих точках.

Траєкторію або історію керування можна параметризувати будь-якою кількістю способів. Параметрами можуть бути коефіцієнти полінома за часом, коефіцієнти усіченого ряду Фур'є, коефіцієнти сплайна, вейвлет-коефіцієнти, кусково-постійні сегменти прискорення або сили тощо. Наприклад, керування $u(t)$ може бути представлено як $p + 1$ коефіцієнти a_j полінома за часом:

$$u_i(t) = \sum_{j=0}^p a_j t^j.$$

На додаток до параметрів для стану або історії керування, загальний час T може бути ще одним параметром керування. Вибір пара-



метризації впливає на ефективність обчислення $q(t)$ і $u(t)$ у заданий момент часу t . Він також визначає чутливість стану та керування до параметрів і те, чи впливає кожен параметр на профілі в будь-який момент часу $[0, T]$ або лише на базі кінцевої підтримки часу. Це важливі фактори стабільності та ефективності чисельної оптимізації.

8.8 Згладжування

Вирівняні по осі рухи планувальника сітки та випадкові рухи планувальників вибірки можуть призвести до різкого руху робота. Один із підходів до вирішення цієї проблеми полягає в тому, щоб дозволити планувальнику виконати роботу глобального пошуку рішення, а потім виконати постобробку отриманого руху, щоб зробити його плавнішим.

Є багато способів зробити це; дві можливості описані нижче.

Нелінійна оптимізація Хоча нелінійна оптимізація на основі градієнта може не знайти рішення, якщо ініціалізована випадковою початковою траєкторією, вона може стати ефективним етапом постобробки, оскільки план ініціалізує оптимізацію за допомогою «розумного» рішення. Початковий рух має бути перетворений у параметризоване представлення елементів керування, а вартість $J(u(t), q(t), T)$ може бути виражена як функція $u(t)$ або $q(t)$. Наприклад, функція витрат


$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \dot{u}^T(t) \dot{u}(t) dt$$

карає за швидку зміну елементів керування. Це має аналогію з руховим контролем людини, де плавність рухів рук людини пояснюється мінімізацією швидкості зміни крутих моментів у суглобах.

Поділ і повторне з'єднання Локальний планувальник можна використати, щоб спробувати з'єднати дві віддалені точки на шляху. Якщо це нове з'єднання без конфліктів, воно замінює вихідний сегмент шляху. Оскільки локальний планувальник створений для створення коротких гладких шляхів, новий шлях, імовірно, буде коротшим і гладкішим за вихідний. Цю процедуру перевірки та заміни можна застосовувати ітеративно до випадково вибраних точок на шляху. Інша можливість полягає у використанні рекурсивної процедури, яка спочатку ділить шлях на дві частини та намагається замінити кожен частину коротшим шляхом; потім, якщо будь-яку частину не можна замінити коротшим шляхом, вона знову розбивається; і так далі.

Контрольні запитання до теми 8

1. Що таке планування руху в робототехніці?
2. Які основні задачі вирішуються при плануванні руху роботів?

- 
3. Що таке простір конфігурації (С-простір) у плануванні руху?
 4. Як визначається вільний С-простір (C free)?
 5. Які основні типи задач планування руху виділяються?
 6. У чому різниця між плануванням шляху та плануванням руху?
 7. Що таке керуючі входи і як вони використовуються при плануванні руху роботів?
 8. Які задачі планування руху вирішуються онлайн і офлайн?
 9. У чому полягає оптимальність планування руху?
 10. Що означає повнота планувальника руху?
 11. Як обчислюється обчислювальна складність планувальників руху?
 12. Які основні методи планування руху існують?
 13. Як працюють методи сітки в плануванні руху?
 14. Які переваги та недоліки методів відбору проб?
 15. Як застосовуються віртуальні потенційні поля в плануванні руху роботів?
 16. Що таке нелінійна оптимізація у контексті планування руху?
 17. Як згладжування впливає на результати планування руху?
 18. Які концепції використовуються для визначення перешкод у просторі конфігурації?
 19. Як виконується виявлення зіткнень у плануванні руху?
 20. Які особливості має конфігураційний простір для планарної руки робота 2R?
 21. Як представляються робочі перешкоди у просторі конфігурації?
 22. Що таке багатомасштабні сітки та як вони застосовуються у плануванні руху?
 23. Які переваги має використання CAD-моделей для планування руху роботів?
 24. У чому полягає різниця між повнотою та імовірнісною повнотою планувальників?
 25. Як забезпечується точність геометричної моделі робота та середовища при плануванні руху?

Використана література

1. Seccarelli M. Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulation. Second Edition. Rome : Springer Cham, 2022. 381 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-90848-5>.
2. Ковальов Ю. А., Кошель С. О., Манойленко О. П. Проектування промислових роботів та маніпуляторів : навчальний посібник. Київ : Центр учбової літератури, 2022. 256 с.



Навчально-методичне видання

Цимбал Богдан Михайлович

**СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ РОБОТОТЕХНІКИ
ТА МЕХАТРОНІКИ**

**курс лекцій з навчальної дисципліни
«Системний аналіз робототехніки
та мехатроніки»**

Самостійне електронне мережеве видання

Публікується в авторській редакції