МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА МЕТАЛУРГІЙНА АКАДЕМІЯ УКРАЇНИ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

до вивчення дисципліни «Організація та проведення наукових досліджень у сталеплавильному виробництві» для студентів спеціальності 136 – Металургія

(магістерський рівень)

Друкується за Планом видань навчальної та методичної літератури,
затвердженим Вченою радою НМетАУ
Протокол № 1 від 22.01.2021

Дніпро НМетАУ 2021

УДК 669.18
Конспект лекцій до вивчення дисципліни «Організація та проведення наукових досліджень у сталеплавильному виробництві» для студентів спеціальності 136 – Металургія (магістерський рівень) / Укл.: В.С. Мамешин, Є.В. Синегін, С.В. Суховецький, С.В. Журавльова. – Дніпро: НМетАУ, 2021. – 85 с.

Викладено конспект лекцій дисципліни «Організація та проведення наукових досліджень у сталеплавильному виробництві», освітлені питання організації і планування експерименту, аналізу його результатів та перевірки адекватності математичних моделей.

Призначена для для студентів спеціальності 136 – Металургія (магістерський рівень).

Укладачі: В.С. Мамешин, канд. техн. наук, доцент
Є.В. Синегін, канд. техн. наук, доцент
С.В. Суховецький, аспірант
С.В. Журавльова, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск К.Г. Нізяєв, д-р техн. наук, проф.

Рецензенти: Н.В. Полякова, канд. техн. наук, доц. (НМетАУ)
А.С. Коверя, канд. техн. наук, доц. (НТУ «ДП»)

ЗМІСТ

ВСТУП

Процеси, які відбуваються в ході плавки в металургійних агрегатах, являють собою складний комплекс одночасних і взаимопов’язаних явищ, пов’язаних як з фізико-хімічними, так і с тепло-масообмінними процесами, що дуже ускладнює їх вивчення і розуміння.

Тому дослідження цих процесів і вирішення різних прикладних задач пов’язаних з вдосконаленням існуючих технологій плавки і конструкції агрегатів, а також розробки нових можливо лише шляхом проведення наукових досліджень.

Однак, як зазначав Джон Бернал, часто наукові дослідження організовуються і проводяться настільки хаотично, що їх коефіцієнт корисної дії становить близько 2% і для того, щоб підвищити ефективність досліджень, необхідне застосування правильної організації наукових досліджень, що базується на теорії планування експерименту.

1 ВИЗНАЧЕННЯ І КЛАСИФІКАЦІЯ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Наукове дослідження – це цілеспрямована творча діяльність людини, спрямована на виявлення, вивчення, аналіз і пояснення закономірностей і зв’язків між явищами навколишнього світу.

Метою будь-якого наукового дослідження є – всебічне, достовірне вивчення об’єктів, процесів або явищ, їх структури, зв’язків і відносин на основі розроблених в науці принципів і методів пізнання, а також впровадження в промисловість отриманих результатів.

Наукові дослідження можуть бути класифіковані за різними ознаками:

1) за **цільовим призначенням** вони поділяються на *пошукові*, *фундаментальні*, *прикладні* і *розробки*:
   - *пошукові роботи* виконуються індивідуально вченими або групою вчених, які мають глибокі знання і великий досвід роботи і свободи у виборі напрямку досліджень і використання коштів;
   - *фундаментальні наукові дослідження* спрямовані на відкриття та вивчення нових явищ і законів природи, на створення нових

принципів і методів дослідження з метою розширення наукового знання і встановлення їх практичної придатності;

- *прикладні наукові дослідження* базуються на результатах фундаментальних і спрямованих на отримання нових закономірностей, на основі яких розробляють нове обладнання, машини, матеріали, способи виробництва і вдосконалюється організація праці;
- *розробки* полягають у впровадженні в практику результатів конкретних фундаментальних і прикладних досліджень;

2) за **методом дослідження**: наукові дослідження можуть бути *теоретичними, експериментальними, теоретично-експериментальними (змішаними)*;

3) за **видами зв'язку з виробництвом** розрізняють:

- наукові дослідження, спрямовані на створення нових процесів, машин і конструкцій, які використовуються для підвищення ефективності виробництва;
- наукові дослідження, що сприяють поліпшенню виробничих відносин і підвищенню рівня організації виробництва без створення нових засобів праці;
- наукові дослідження в галузі суспільних і гуманітарних наук, які призначені для вдосконалення суспільних відносин, підвищення духовного життя людей;

4) за **ступенем важливості** наукові дослідження поділяються на такі, що:

- виконуються за державним планом (зазвичай затверджується урядом);
- виконуються за планом міністерств, відомств або Академії Наук;
- виконуються за завданням місцевих органів влади (облрада, міськрада);
- виконуються з ініціативи науково-дослідницької організації;
- виконуються за договірними відносинами з комерційними організаціями, підприємствами, фірмами;

5) за **джерелом фінансування** наукові роботи поділяються на:

- *держбюджетні* – фінансування за кошт державного бюджету;
- *госпдоговірні* – фінансування за кошт замовників на підставі господарського договору;

- *безоплатні* – ведуться за особистою ініціативою дослідника за його рахунок;
- *грантові* або *стартапові* – фінансуються з благодійних фондів або приватних інвестицій;

6) за **складом досліджуваних якостей об’єкта** розрізняють:
- *комплексні дослідження*, які передбачають виконання низки незалежних за місцем і термінами, а також методами і засобами досліджень різних груп, якостей і характеристик певного об’єкта;
- *диференціальні дослідження*, спрямовані на вивчення однієї з якостей або групи однорідних якостей об’єкта;

7) за **місцем проведення** дослідження поділяються на:
- *лабораторні*;
- *виробничі*;

8) за **тривалістю** розрізняють:
- *короткострокові*, термін виконання до 1 року;
- *середньострокові*, термін виконання від 1 до 5 років;
- *довгострокові*, термін виконання понад 5 років.

2 СТРУКТУРА ТА ОСНОВНІ ЕТАПИ НАУКОВОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

Наукове дослідження використовується для отримання нових знань у всіх галузях науки і техніки, при цьому за поставленими цілями, використовуваними методами і необхідними ресурсами вони відрізняються великим різноманіттям. Однак, незалежно від їх кваліфікаційних ознак проведення наукових досліджень пов’язане з матеріальними, фінансовими і трудовитратами і для їх мінімізації необхідна правильна організація наукових досліджень.

Правильно організовані і сплановані наукові дослідження, як в фундаментальних, так і в прикладних напрямках, мають низку загальних особливостей і виконуються в певній послідовності, яка і становить структуру наукового дослідження.

Зазвичай виконуються наступні етапи науково-прикладного дослідження:

I. Постановка проблеми і формування теми дослідження

В ході реалізації даного етапу здійснюється вибір теми дослідження, визначення об’єкта і предмета дослідження.

Вибір теми наукового дослідження здійснюється відповідно до такого поняття як актуальність, тобто виходячи з потреб науки і техніки у виявленні та вирішенні будь-яких протиріч в теоретичній чи практичній діяльності. На підставі виявленого протиріччя формулюється наукова проблема.

Наукова проблема – це питання, що виникає в ході пізнання або практики і вимагає науково-практичного вирішення).

Слідом за проблемою необхідно усвідомити, що буде об’єктом і предметом дослідження.

Об’єкт дослідження – це процес або явище, що породжує появу проблеми та обрані для вивчення в цілому.

Предмет дослідження – це той аспект об’єкта дослідження, який розглядається в даному дослідженні.

Один і той самий об’єкт може бути предметом різних досліджень і навіть наукових напрямів. Але предмет цих досліджень буде різним у різних спеціалістів. Після цього складається попередній план досліджень, розробляється науково-технічне завдання, складається календарний план наукового дослідження, проводиться попередня оцінка очікуваних результатів.

II. Формування мети і завдання дослідження

Цілі дослідження – це те, що в кожному суспільстві необхідно або мають намір досягати за результатами роботи. Цілі і завдання дослідження формуються на основі детального аналізу сучасного стану досліджуваної проблеми. Для проведення аналізу необхідно ознайомитись з усіма публікаціями (монографіями, підручниками, статтями, звітами з НДР тощо) з досліджуваного питання, які опубліковані, за останні 10-15 років. Особливу увагу слід приділяти роботам за останні 5-6 років. Отримана інформація аналізується, порівнюється, критикується і узагальнюється у вигляді аналізу стану питання (літературного огляду) і грунтуючись на ньому уточнюються і ставляться конкретні цілі і завдання дослідження. На основі чітко сформульованої задачі дослідження та критичного аналізу зібраної інформації зазвичай висувається первісна гіпотеза. Крім того, в завершенні цього етапу розробляється загальна методика дослідження.

Загальна методика досліджень являє собою набір способів, які сприяють послідовному найбільш ефективному здійсненню наукового дослідження.

Гіпотеза – це наукове припущення, справжнє значення якого невизначено і для його підтвердження або спростування необхідні теоретичні та/або експериментальні дані.

III. Теоретичні дослідження

Вони передбачають вирішення поставлених завдань математичним або логічним шляхом, що має забезпечувати якомога більш глибоке розуміння суті досліджуваного об'єкта, процесу або явища.

Теоретичні дослідження включають в себе кілька підетапів. До них відносяться, перш за все, складання математичної моделі досліджуваного процесу на основі сформульованої гіпотези або використання готових моделей з урахуванням нових цілей і завдань досліджень. Далі здійснюється вибір методу вирішення (аналітичного або наближеного) з урахуванням необхідної точності, витраченого часу, матеріальних витрат та ін. Розрахунки, як правило, проводяться на ПК. В результаті теоретичних досліджень отримують розрахункові рівняння, графіки і номограми, що характеризують закономірності досліджуваного процесу.

Проте при будь-якому рівні теоретичних досліджень їх результати підлягають обов'язковій експериментальній перевірці.

IV. Експериментальні дослідження

Це найбільш складний і трудомісткий етап наукового дослідження. Основною метою експерименту є перевірка теоретичних досліджень (підтвердження або спростування гіпотези), а також більш широке і глибоке вивчення теми наукового дослідження. Воно може виконуватися на модельній установці або в натуральних умовах.

Виконання експерименту може здійснюватися у вигляді перебору впливаючих факторів або з використанням теорії планування експерименту. Після виконання всієї програми досліджень проводиться перевірка правильності отриманих результатів. Дані експерименту представляються у вигляді рівнянь, потім оцінюється похибка розрахунку за ними.

V. Аналіз і оформлення наукових досліджень

В рамках цього етапу проводять аналіз і зіставлення результатів теоретичних і експериментальних досліджень. Дається аналіз розбіжностей між ними і якщо розбіжність незначна, то гіпотеза вважається підтвердженою і перетворюється в теорію, якщо ж розбіжність значна, то гіпотезу необхідно видозмінити або відкинути і висунути нову, яка узгоджується з отриманими результатами досліджень.

На підставі отриманих результатів формулюються наукові та виробничі висновки. Конкретними результатами наукового дослідження можуть бути уточнення математичної або фізичної моделі явища чи процесу, розробка нової методики розрахунку, нової теорії, рекомендації щодо вдосконалення машин і установок, підготовка даних для виконання дослідно-конструкторських робіт. За підсумками досліджень оформляється звіт про науково-дослідну роботу. Для чисто теоретичних досліджень (найчастіше це фундаментальні роботи) цей етап є заключним, але для більшості завдань в галузі прикладних досліджень виникає наступний етап.

VI. Освоєння результатів і визначення економічної ефективності

Завершується науково-дослідницька робота впровадженням результатів досліджень у виробництво та визначенням економічної ефективності від їх використання.

Для доведення результатів наукового дослідження до впровадження виконуються дослідно-технологічні або дослідно-конструкторські розробки, які завершуються зазвичай держвипробування і запуском продукції в серію. Підводячи підсумок по структурі наукового дослідження необхідно відзначити, що загальний цикл робіт, починаючи з фундаментальних досліджень і закінчуючи серійним випуском продукції, складе від 5 до 10 років в залежності від масштабності роботи і рівня організації робіт.

3 ОСОБЛИВОСТІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Найбільш важливою, складовою частиною наукових досліджень є експерименти. Це один з основних способів отримати нові наукові знання при цьому більш 2/3 всіх трудових ресурсів науки витрачається на експерименти.

Експеримент – (походить від латинського *experimentum* – проба, досвід) його основою є науково поставлений досвід з точно врахованими і керованими умовами.

Основною метою експерименту є виявлення властивостей досліджуваних об'єктів, перевірка справедливості гіпотез і на цій основі широкого вивчення теми наукового дослідження. Постановка і організація експерименту визначається його призначенням. Експериментальні дослідження можуть бути класифіковані за низкою ознак.

1) За **способом формування умов** розрізняють *природні* і *штучні* експеріменти:
   - *природний експеримент* передбачає проведення дослідів в природних умовах існування об'єкта дослідження; найчастіше застосовуються при вивченні соціальних явищ у природній обстановці, наприклад, виробництва, побуту тощо;
   - *штучний експеримент* формується в штучних умовах, що дозволяє вивчати явища, ізольовані до необхідного ступеня, щоб оцінити їх в кількісному і якісному вигляді.
2) За **цілям дослідження** розрізняють експерименти, що перетворюють констатують, контролюють, пошукові та вирішальні:
   - *перетворюючий експеримент* включає активну зміну структури і функції об'єкта досліджень відповідно до висунутої гіпотези, формування нових зв'язків і відносин між компонентами об'єкта або між досліджуваним об'єктом і навколишнім середовищем;
   - *констатуючий експеримент* використовується для перевірки певних пропозицій. У його процесі констатується наявність певного зв'язку між впливом на об'єкт дослідження і результатом, виявляється наявність певних фактів;
   - *контролюючий експеримент* зводиться до контролю результатів зовнішніх впливів на об'єкт дослідження з урахуванням його стану, характеру впливу і очікуваного ефекту.
   - *пошуковий експеримент* проводиться в тому випадку, якщо утруднена класифікація факторів, що впливають на досліджуване явище внаслідок відсутності достатніх попередніх даних. За його

результатами встановлюється значимість параметрів, здійснюється відсіювання малозначущих;

- *вирішальний експеримент* ставиться для перевірки справедливості основних положень фундаментальних теорій в тому випадку, коли дві і декілька гіпотез однаково узгоджуються з багатьма явищами. Його мета – виявлення найбільш правильної гіпотези.

3) За **організацією проведення** експерименти діляться на *лабораторні* і *натуральні*:

- *лабораторні експерименти* мають на меті вивчення загальних закономірностей різних явищ і процесів, для перевірки наукових гіпотез і теорій. Вони проводяться в лабораторних умовах із застосуванням типових приладів, спеціальних моделюючих установок, стендів, устаткування тощо, при цьому, найчастіше, вивчається не сам об'єкт або процес, а його модель або зразок. Цей експеримент дозволяє вивчити вплив одних характеристик при варіюванні інших, отримати наукову інформацію з мінімальними витратами часу і ресурсів. Однак такий експеримент не завжди в повній мірі моделює реальний хід досліджуваного процесу, тому виникає потреба в проведенні натурального (виробничого) експерименту;
- *натуральний експеримент* проводиться в природних умовах і на реальних об'єктах при створенні нового виробу або процесу або оптимізації існуючих за даними лабораторних випробувань. Таким чином, основним завданням натурального експерименту є вивчення процесу або об'єкта в реальних умовах з урахуванням впливу різних чинників, оцінка ефективності функціонування об'єкта або процесу і перевірка його на відповідність заданим вимогам.

4) За **типом досліджуваних в експерименті моделей** виділяють *матеріальний* та *уявний* експерименти:

- у *матеріальному експерименті* використовуються матеріальні об'єкти дослідження;
- *уявний експеримент* оперує з уявними моделями досліджуваних об'єктів або явищ, зазвичай це можуть бути чуттєві образи, образно-знакові та знакові моделі. Його часто використовують в ролі

ідеального плану реального експерименту або використовують в тих випадках, коли проведення реальних дослідів виявляється неможливим.

5) За **характером отриманих результатів** експерименти поділяються на *якісний* і *вимірювальний*:
   - *якісний* проводиться з метою встановлення наявності або відсутності у об'єкта певних властивостей або характеристик;
   - *вимірювальний* проводиться з метою виявлення кількісних характеристик досліджуваного об'єкта, процесу або явищ.
6) За **кількістю варійованих факторів** існують *однофакторний* і *багатофакторний* експерименти:
   - *однофакторний* експеримент передбачає виключення малозначущих факторів, виділення істотних факторів і їх почергове варіювання.
   - суть *багатофакторного* експерименту полягає в тому, що варіюються всі змінні одночасно і вплив кожної оцінюється за результатами всіх дослідів, проведених в даній серії експериментів.
7) За **характером зовнішніх впливів на об'єкт** виділяють *речовинний*, *енергетичний* та *інформаційний* експеримент:
   - *речовий* розглядає ефект впливу фізичних тіл на стан об'єкта дослідження;
   - *енергетичний* експеримент застосовується для вивчення впливу на об'єкт дослідження різних видів енергії (електромагнітної, теплової, механічної та ін.);
   - *інформаційний* експеримент використовується для вивчення впливу певної інформації на об'єкт дослідження (найчастіше застосовується в біології, психології, кібернетиці тощо).
8) За **контрольованими величинам** експерименти поділяють на *пасивний* і *активний*:
   - *пасивний* експеримент є традиційним методом проведення експериментів. Він грунтується на реєстрації вхідних і вихідних параметрів, що характеризують об'єкт дослідження без втручання в його функціонування при нормальному технологічному режимі. Оцінка необхідних властивостей об'єкта дослідження здійснюється після закінчення експерименту за результатами обробки

багаторазових спостережень. При проведенні експерименту зазвичай змінюється тільки один фактор при фіксованих величинах всіх інших. Для обробки результатів пасивного експерименту зазвичай використовують дисперсійний, кореляційний і регресійний аналізи.

Пасивний експеримент має такі недоліки:

- діапазон змін факторів незначний і не перевищує нормативів обумовлених технологічною інструкцією;
- вплив збурюючих параметрів може виявитися істотнішим за зміни контрольованих факторів.

Зазначені недоліки знижують надійність результатів. Незважаючи на це пасивний експеримент широко застосовується для аналізу результатів роботи металургійних процесів і агрегатів, що пояснюється досить низькими витратами на його реалізацію і відсутністю необхідності відволікати обладнання і персонал для його проведення.

- *активний* експеримент припускає можливість організації активного впливу на хід експерименту шляхом цілеспрямованої зміни умов протікання досліджуваних процесів.

Активний експеримент дозволяє:

- мінімізувати загальне число дослідів;
- одночасно варіювати всі змінні і оптимально використовувати факторний простір;
- організувати експеримент так, щоб виконувалися багато вихідних передумов регресійного аналізу;
- використовувати математичний апарат і отримувати математичні моделі, які мають кращі властивості в порівнянні з моделями, побудованими за результатами пасивного експерименту;
- численні чинники, що заважають, перетворити у випадкові величини шляхом рандомізації умов дослідів.

Розрізняють такі різновиди активних експериментів:

- *Активний експеримент з програмою управління* проводиться за заздалегідь складеним планом. Відповідно до цього плану здійснюється вплив експериментатора на вхідні параметри і реєструються вихідні, що дозволяє з’ясувати природу процесів, які відбуваються в об’єкті.

- *Активний експеримент зі зворотним зв’язком* дозволяє, маючи результати експерименту на кожному кроці, обирати оптимальну стратегію управління експериментом.
- *Активно-пасивний експеримент* характеризується тим, що при його проведенні одна частина даних реєструється, а інша просто фіксується і обробляється в процесі експерименту. У такому типі експерименту є два види характеристик: одна частина змінюється під впливом керуючих сигналів, друга – не піддається керуючим впливам. Методи організації активного експериментування називають *методами планування експерименту*.

4 ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

До основних етапів становлення методів планування експерименту відносять:

- метод найменших квадратов (А. Лежандр, К. Гаусс кінець XVIII – початок XIX ст.);
- основи регресійного і кореляційного аналізу (Ф. Гальтон і К. Пірсон кінець XIX – початок XX ст.);
- концепція малих вибірок (Госсет, більш відомий як Стьюдент, початок XX ст.);
- основи математичного планування експерименту (Р. Фішер, середина XX ст.);
- розробка послідовної стратегії експериментування, крокова стратегія експериментування (Бокс, Вілсон, Хантер середина XX ст.).

Розвиток планування експерименту в СРСР відносять до 1960 рр. воно пов’язане з ім’ям В.В. Налимова і його учнів.

Планування експерименту полягає у виборі кількості і умов проведення дослідів, необхідних і достатніх для вирішення поставленого завдання з необхідною точністю.

Основна мета планування досліджень – отримати максимум достовірної інформації при мінімально можливих витратах на експериментування.

Планування експерименту дозволяє визначити методику, кількість і порядок проведення дослідів, а також вирішувати такі практичні завдання:

- відсіювати фактори при дослідженні процесів;
- оцінювати константи відомої моделі;
- відшукувати оптимум процесу або технології;
- описувати невідомий процес математичною моделлю і систематизувати експериментальний матеріал.

Планування особливо ефективно при дослідженні систем, що мають багато різнорідних чинників, які визначають різні за своєю природою, але тісно пов'язані один з одним процеси, до яких можна віднести більшість металургійних систем.

При плануванні експерименту досліджуваний об'єкт зазвичай представляють моделлю «чорної скрині» тобто такого об'єкта, в якому реєструються вхідні та вихідні величини, а внутрішня структура і характер зв'язку між ними можуть бути невідомі. Його схема представлена на рисунку 4.1.

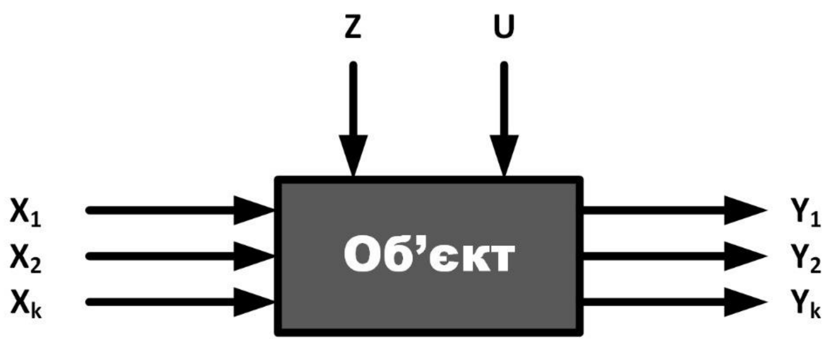


Рисунок 4.1 – Схема об'єкта активного експерименту

X_1, X_2,…X_k – вхідні змінні – контрольовані і керовані чинники, що впливають на об'єкт;

Y_1, Y_2…Y_m – вихідні змінні;

(Z і U) – сукупність контрольованих, але некерованих факторів і неконтрольованих чинників (перешкод). Де U – включає в себе контрольовані чинники, які не допускають цілеспрямованої зміни ходу дослідження, наприклад це умови навколишнього середовища; Z – характеризує збурення, що діють на об'єкт дослідження, які не можна виміряти кількісно, наприклад неконтрольовані домішки в сировині, старіння металу та ін.

Вхідні параметри (X_1, X_2 ... X_k), які можуть цілеспрямовано змінюватися експериментатором в процесі випробувань і чинять вплив на вихідні змінні, прийнято називати *факторами*. Кожен фактор може приймати певну кількість значень, які називаються рівнями факторів. При цьому розрізняють *нижній рівень фактора* – найменше значення, яке може приймати фактор в експерименті. *Верхній рівень фактора* – найбільше значення, яке фактор приймає в експерименті. *Нульовий рівень фактора* – середина діапазону зміни фактора. Сукупність усіх чисельних значень, які може приймати фактор, називається *областю його визначення*. Ці області можуть бути безперервними і дискретними, обмеженими і необмеженими.

Основними вимогами до факторів є:

- *незалежність* – тобто відсутність між факторами кореляційної зв'язку (взаємозв'язку);
- *операційність* – тобто має бути відомо в якій саме точці і яким приладом вони будуть вимірюватися;
- *сумісність* – при всіх поєднаннях величин факторів експерименту буде безпечно виконуватися;
- *керованість* – експериментатор встановлює величину рівня на свій розсуд;
- *точність* – встановлення факторів повинно бути вище (щонайменше на порядок) точності вихідних змінних;
- *однозначність* – означає безпосередність впливу фактора (або їх комбінації) на об'єкт дослідження;
- *кількісні* – фактор повинен вимірюватися.

Вихідні змінні (Y_1, Y_2, … Y_k) характеризують стан об'єкта дослідження в залежності від зміни факторів, тобто це ті параметри, які вивчаються або оптимізуються. У теорії планування експерименту їх прийнято називати змінними стану, залежними змінними, відгуками, <u>параметрами оптимізації</u>, виходами та ін.

Як параметри оптимізації зазвичай приймаються економічні величини (питомі витрати, собівартість, виробничі витрати тощо) або технічні показники (ККД, витрата, продуктивність, вихід придатного тощо).

До параметрів оптимізації висувають такі вимоги:

- Він повинен бути кількісним і чисельно оцінюватися. Для якісних показників використовуються рангові і умовні показники оцінки.
- Параметр повинен допускати проведення експерименту при будь-якому поєднанні факторів. Неприпустимо, щоб якесь із поєднань чинників призводило до аварійних або небезпечним для життя ситуацій.
- Кожному даному поєднанню факторів з точністю до похибки повинно відповідати одне значення параметра.
- Параметр повинен бути універсальним, тобто характеризувати об'єкт всебічно.
- Бажано, щоб параметр мав простий економічний або фізичний сенс.
- Бути ефективним, з точки зору досягнення мети.
- Бути статистично ефективним, тобто мати найменшу дисперсією при проведенні дослідів.
- Параметр оптимізації повинен бути єдиним.

Між входами і виходами об'єкта дослідження існує певний зв'язок і завдання дослідження зазвичай зводиться до постановки мінімально можливого числа дослідів, фіксації виходів, а потім побудови і аналізу математичних моделей, що пов'язують виходи з входами.

Отримуючи в дослідах вибіркові оцінки виходів Y_i експериментатор будує наближені рівняння функції відгуку:

$$Y_1 = F_1(X_1, X_2 \dots X_k)$$
$$Y_2 = F_2(X_1, X_2 \dots X_k)$$
$$Y_n = F_n(X_1, X_2 \dots X_k)$$

де Y – відгук, вихід процесу тобто параметр оптимізації; X – фактори, які варіюються при проведенні експерименту.

Діапазони зміни факторів задають область визначення Y. Якщо прийняти, що кожному фактору відповідає координатна вісь, то отриманий простір називається факторний простором (розмірність факторного простору дорівнює числу факторів і може бути одновимірним, двох- і багатовимірним). Геометричне представлення функції відгуку в факторному просторі X_1, X_2 ... X_k називається *поверхнею відгуку*. На рисунку 4.2 представлено поверхню відгуку для двовимірного факторного простору. Таким чином, математичне планування фактично пов'язано з вивченням форм поверхні відгуку і знаходження екстремуму функції відгуку або підтвердження відсутності такого.

Для більшості реальних задач вид поверхні відгуку заздалегідь не відомий тому при експериментальному пошуку оптимальних умов функцію Y представляють у вигляді ряду Тейлора:

$$y = \beta_o + \sum \beta_i x_i + \sum \beta_{ij} x_i x_j + \sum \beta_{ijk} x_i x_j x_k. \tag{4.1}$$

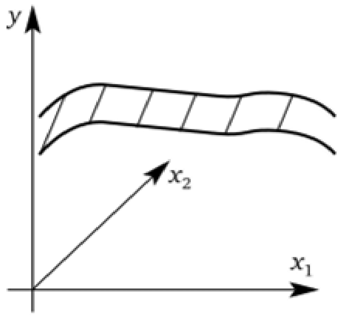


Рисунок 4.2 – Поверхня відгуку для двовимірного факторного простору

Точність подібної апроксимації визначається порядком ряду і діапазоном зміни факторів X_i. Члени вищого порядку зазвичай можна відкинути без особливої шкоди для точності внаслідок вузького інтервалу варіювання факторів.

Коефіцієнти ступеневого ряду β можна оцінити за допомогою вибіркових коефіцієнтів регресії b, які визначаються за результатами кінцевого числа дослідів. Тоді загальне рівняння регресії, що отримується на підставі результатів експериментів, набуває вигляду:

$$y = b_o + \sum b_i x_i + \sum b_{ij} x_i x_j + \sum b_{ijk} x_i x_j x_k. \tag{4.2}$$

Величина рівняння регресії визначається необхідною точністю і, наприклад, для двох факторів X_1 і X_2 можуть становити:

- поліном 0-го ступеня $y = b_o$;
- поліном 1-го ступеня $y = b_o + b_1 x_1 + b_2 x_2$ – *лінійна модель*;
- поліном 2-го ступеня $y = b_o + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2$ – *поліномна квадратична модель*.

Стратегія застосування планів полягає в принципі постійного планування-поступового ускладнення моделі. Починають з найпростішої моделі, знаходять для неї коефіцієнти, визначається її точність. Якщо точність не задовольняє, то планування і модель ускладнюють.

4.1 Планування і критерії оптимальності планів експерименту

План експерименту встановлює чисельні значення факторів і умови проведення дослідів.

Як зазначалося вище, фіксована величина фактора називається рівнем фактора. Безліч точок, які відображають чисельне значення факторів, можна представити таким чином:

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} \mathrm{x}_{11} & \mathrm{x}_{12} & \mathrm{x}_{13} & \ldots & \mathrm{x}_{1\mathrm{k}} \\ \mathrm{x}_{21} & \mathrm{x}_{12} & \mathrm{x}_{13} & \ldots & \mathrm{x}_{1\mathrm{k}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{x}_{11} & \mathrm{x}_{12} & \mathrm{x}_{13} & \ldots & \mathrm{x}_{1\mathrm{k}} \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Кількість рядків відповідає числу дослідів *N*. Кількість стовпців відповідає кількості факторів *k*.

План експерименту повинен бути оптимальним. Існують різні критерії оптимальності планів експерименту. Критерії оптимальності планів і способи організації активного експерименту можна розділити на три групи.

- До **першої групи** відносять критерії, пов’язані з точністю оцінок коефіцієнтів регресії.
  - *Ортогональність* дозволяє оцінювати всі коефіцієнти регресії незалежно один від одного і спрощувати або ускладнювати моделі, виключаючи або додаючи нові коефіцієнти без перерахунку вже знайдених. Ортогональність плану експерименту забезпечує мінімальне число обчислень.

    Математичний критерій ортогональності виражається в тому, що сума почленно творів будь-яких двох стовпців дорівнює нулю.

$$\textstyle\sum_{u=1}^{N} x_{iu}x_{ju} = 0,\ i \neq j. \tag{4.4}$$

У ортогональному плані напрямки головних осей еліпсоїда розсіювання збігаються з напрямками координатних осей у фронтальному просторі, а всі оцінки параметрів незалежні.

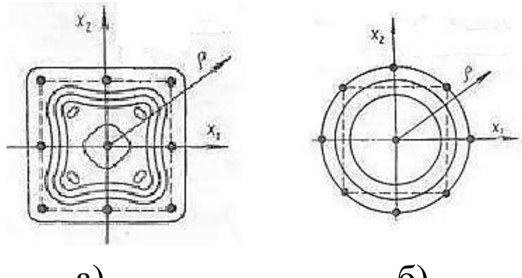
- *Д-оптимальність* забезпечує мінімум узагальненої дисперсії всіх оцінок коефіцієнтів.

  Планам, які оптимальні за цим критерієм, відповідають мінімальний об’єм еліпсоїда розсіювання оцінок параметрів оптимізації моделі, є багатовимірним аналогом довірчого інтервалу.
- *А-оптимальність* забезпечує мінімум середньої дисперсії оцінок коефіцієнтів. Еліпсоїд розсіювання має найменшу суму квадратів довжин осей.
- *Е-оптимальність* не дає можливості деяким оцінками коефіцієнтів мати занадто великі дисперсії. Цим планам відповідає найменша величина максимального від осі еліпсоїда розсіювання.

- До **другої групи** відносять критерії, які визначають точність передбачення відгуку за допомогою побудованої моделі.
  - *Ротатабельність* планів забезпечує однакову точність передбачення для точок, так само віддалених від центра плану у будь-якому напрямку, тобто сталість дисперсії передбачення на рівних відстанях від центра експерименту. Математично це виглядає ось так:

$$\sigma^2(Y)|_{r=R_o} = idem. \tag{4.5}$$

Ця властивість означає, що похибка у визначенні величин вихідного параметра на поверхні сфери довільного радіуса R_o повинна бути сталою і не залежати від напрямку руху. Графічно вплив ротатабельності представлений на рисунку 4.3.



а) б)

Рисунок 4.3 – Ізолінії дисперсії передбачення за відсутності (а) і наявності (б) ротатабельності

   - *G-оптимальні* плани мінімізують на численності планів максимальне значення дисперсії оцінки моделі й гарантують відсутність точок в області планування з низькою точністю оцінки моделі.
   - *Q-оптимальність* мінімізує в планах середню дисперсію оцінки моделі.
   - *Униформність* припускає сталість дисперсії передбачення в деякій області навколо центра експерименту, наприклад, з єдиним радіусом.
- До **третьої групи** відносять критерії, пов’язані зі стратегією експерименту.
   - *Насиченість плану* забезпечує мінімум числа дослідів. План називають насиченим для даної моделі, якщо число дослідів дорівнює числу параметрів моделі (числу коефіцієнтів моделі). На практиці зазвичай обирають плани з мінімальним числом дослідів, близьким до насиченого.
   - *Композиційність планів* дозволяє реалізувати експеримент частинами, тобто крок за кроком. Рішення про продовження експерименту й вибір методу на кожному наступному кроці приймають тільки за результатами попереднього. Композиційні плани припускають поступове ускладнення синтезованої моделі шляхом переходу від простих моделей до більш складних, використовуючи попередні спостереження.
   - *Рандомізація* являє собою випадковість у виборі порядку проведення дослідів, вимірів.
   - *Простота обробки*. Найчастіше практично важливо обирати такі плани, де всі результати експерименту обробляються вручну за найпростішими формулами.

5 ФАКТОРНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

5.1 Плани першого порядку

5.1.1 Планування повного факторного експерименту (ПФЕ)

Повним факторним називається такий експеримент, за якого реалізуються всі можливі неповторювані комбінації дослідів k незалежних керованих факторів, кожний з яких варіюється на n рівнях.

Таким чином для реалізації ПФЕ необхідно поставити дослідів:

$$N = n^k. \tag{5.1}$$

Найпоширенішими є експерименти, у яких фактори варіюються на двох рівнях: верхньому й нижньому, тобто $n = 2$. Такі експерименти звуться експериментами типу «2^k». У випадку якщо фактори варіюються на трьох рівнях, верхньому, нульовому (основному) і нижньому, то експеримент буде типу «3^k».

Планування, проведення й обробка результатів ПФЭ включає наступні етапи:

I. кодування факторів;
II. складання плану або плану-матриці експерименту;
III. рандомізація дослідів;
IV. реалізація плану експерименту;
V. перевірка відтворюваності дослідів;
VI. розрахунок і перевірка значущості коефіцієнтів регресії;
VII. перевірка адекватності регресійної моделі.

1) Фактори найчастіше неоднорідні й можуть мати різні одиниці виміру, а числа, що виражають величини факторів, можуть мати різні порядки. Тому при постановці й плануванні експерименту здійснюють перехід від натуральних (розмірних значень факторів до безрозмірних шляхом їхнього **кодування**). Кодування здійснюється за формулами:

$$\mathrm{X_{i\ осн.}} = \frac{\mathrm{X_{imax}} + \mathrm{X_{imin}}}{2}, \tag{5.2}$$

$$\Delta X_i = \frac{X_{imax} - X_{imin}}{2}, \tag{5.3}$$

$$X_i = \frac{X_i - X_{i\ \text{осн.}}}{X}, \tag{5.4}$$

де i – номер фактора; X_i – величина i-го фактора в натуральних одиницях; X_i – кодована величина i-го фактора; $X_{i\ осн.}$ – основний рівень i-го фактора; X_{imax}, X_{imin} – верхній і нижній рівень i-го фактора; ΔX_i – інтервал варіювання i-го фактора.

Приклад: витрата дуття при продувці змінюється від 300-400 м^3/хв.; значить X_{max} =400 м^3/хв.; X_{min}=300 м^3/хв.

Основний рівень $q_{\text{осн.}} = \frac{400+300}{2} = 350$ м^3/хв.

Інтервал варіювання $\Delta q = \frac{400-300}{2} = 50$ м^3/хв.

Кодовані значення:

верхній рівень $X_{1\text{в}} = \frac{400-350}{50} = +1;$

основний рівень $X_{1o} = \frac{350-350}{50} = 0;$

нижній рівень $X_{1\text{в}} = \frac{300-350}{50} = -1.$

У такий спосіб водять умовні позначення верхнього, нижнього й основного рівня факторів, відповідно +1; –1; 0. При побудові плану-матриці із цифри (одиниці) можна опускати й писати тільки їхні знаки «+»; «–».

2) Побудова плану-матриці експерименту зводиться до стандартної форми запису умов проведення дослідів у формі таблиці, у рядках якої записують дані дослідів, у стовпці – фактори (у кодованому вигляді «+» й «–») з реалізацією всіх можливих сполучень комбінації рівнів факторів.

Кожен стовпчик у матриці планування називається вектор-стовпцем, а кожен рядок вектор-рядком. Загальна кількість рядків у матриці плану для реалізації всіх можливих сполучень рівнів факторів визначається за формулою $N = 2^k$. Щоб уникнути повторень сполучень впливів факторів необхідно дотримуватися певних правил. Так в першому стовпці варто міняти значення по черзі, у другому – чергувати їх через два, у третьому – через чотири, у четвертому – через вісім і т.д. по ступенях двійки. Матриці повного факторного експерименту від 2^2 до 2^5 представлені в таблиці 5.1.

Геометричним аналогом матриці планування типу 2^2 є квадрат представлений на рисунку 5.1а.

Площа, обмежена квадратом, називається областю експерименту, центр квадрата – центром експерименту, а вершини квадрата задають умови проведення дослідів, номери вершин відповідають номерам дослідів в матриці планування.

За аналогією з ПФЕ типу 2^2 можна дати геометричну інтерпретацію ПФЕ 2^3 представлену на рисунку 5.1б.

Таблиця 5.1 – Матриці повного факторного експерименту від 22 до 25

План	№ досліда	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Вихідний параметр		
							Y_{1U}	Y_{2U}	Y_U
2^2	1	+	+	+	+	+	Y_{11}	Y_{21}	Y_1
	2	–	+	+	+	+	Y_{12}	Y_{22}	Y_2
	3	+	–	+	+	+	Y_{13}	Y_{23}	Y_3
	4	–	–	+	+	+	Y_{14}	Y_{24}	Y_4
2^3	5	+	+	–	+	+	Y_{15}	Y_{25}	Y_5
	6	–	+	–	+	+	Y_{16}	Y_{26}	Y_6
	7	+	–	–	+	+	Y_{17}	Y_{27}	Y_7
	8	–	–	–	+	+	Y_{18}	Y_{28}	Y_8
2^4	9	+	+	+	–	+	Y_{19}	Y_{29}	Y_9
	10	–	+	+	–	+	Y_{110}	Y_{210}	Y_{10}
	11	+	–	+	–	+	Y_{111}	Y_{211}	Y_{11}
	12	–	–	+	–	+	Y_{112}	Y_{212}	Y_{12}
	13	+	+	–	–	+	Y_{113}	Y_{213}	Y_{13}
	14	–	+	–	–	+	Y_{114}	Y_{214}	Y_{14}
	15	+	–	–	–	+	Y_{115}	Y_{215}	Y_{15}
	16	–	–	–	–	+	Y_{116}	Y_{216}	Y_{16}
2^5	17	+	+	+	+	–	Y_{117}	Y_{217}	Y_{17}
	18	–	+	+	+	–	Y_{118}	Y_{218}	Y_{18}
	19	+	–	+	+	–	Y_{119}	Y_{219}	Y_{19}
	20	–	–	+	+	–	Y_{120}	Y_{220}	Y_{20}
	21	+	+	–	+	–	Y_{121}	Y_{221}	Y_{21}
	22	–	+	–	+	–	Y_{122}	Y_{222}	Y_{22}
	23	+	–	–	+	–	Y_{123}	Y_{223}	Y_{23}
	24	–	–	–	+	–	Y_{124}	Y_{224}	Y_{24}
	25	+	+	+	–	–	Y_{125}	Y_{225}	Y_{25}
	26	–	+	+	–	–	Y_{126}	Y_{226}	Y_{26}
	27	+	–	+	–	–	Y_{127}	Y_{227}	Y_{27}
	28	–	–	+	–	–	Y_{128}	Y_{228}	Y_{28}
	29	+	+	–	–	–	Y_{129}	Y_{229}	Y_{29}
	30	–	+	–	–	–	Y_{130}	Y_{230}	Y_{30}
	31	+	–	–	–	–	Y_{131}	Y_{231}	Y_{31}
	32	–	–	–	–	–	Y_{132}	Y_{232}	Y_{32}

Y_{1U} і Y_{2U} – результати паралельних дослідів; Y_U – середнє значення результатів.

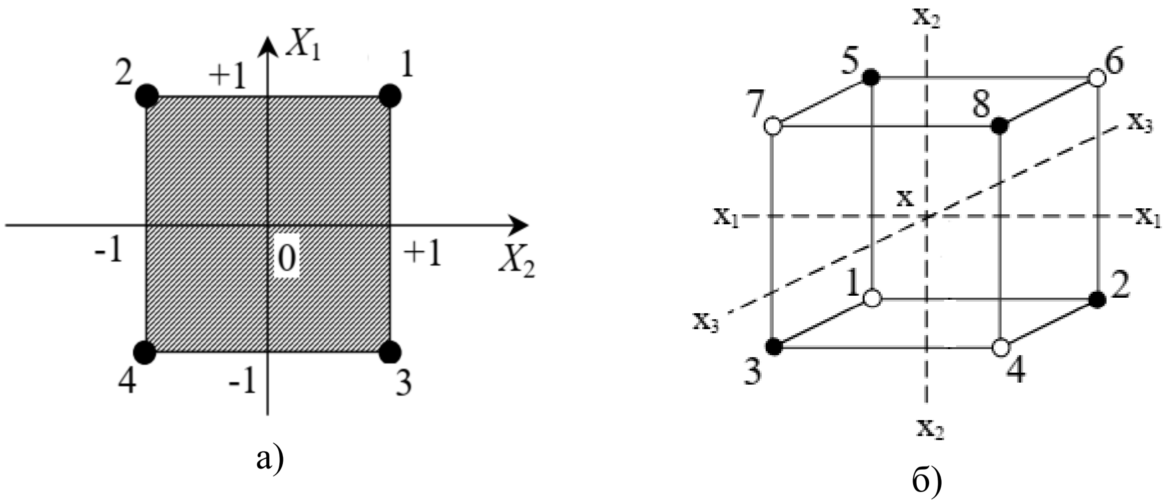


Рисунок 5.1 – Геометричний образ плана експерименту для а) двох і б) трьох факторів

Геометричним чином ПФЕ типу 2^3 є куб, координати вершин якого задають умови експерименту. Куб задає область експерименту, а центр куба є центром експерименту. Для k>3 фігура, що задає область експерименту, називається *гіперкубом*.

Користуючись результатами факторного експерименту, можна отримати опис досліджуваної системи у вигляді поліноміального рівняння лінійної регресії:

$$Y_o = b_o + b_1X_1 + b_2X_2 + \cdots + b_kX_k, \tag{5.5}$$

де вибіркові коефіцієнти b_o, b_1, b_2, b_k є статистичними оцінками теоретичних коефіцієнтів β_o, β_1, β_2, β_3 і т.д. Y – оцінка математичного очікування вихідного параметра.

Однак план матриці ПФЕ, представленої в табл. 5.1, недостатньо для отримання рівняння лінійної регресії оскільки відсутні відомості для оцінки коефіцієнта b_o. Тому, щоб отримати повний план ПФЕ, необхідно додати в план-матрицю ще один стовпець – фіктивну змінну X_o для оцінки вільного члена b_o. Кодоване значення X_o завжди однакове у всіх рядках плану і дорівнює «+1». План матриця для отримання рівняння лінійної регресії, наприклад для плану 2^2 буде мати вигляд, наведений в таблиці 5.2.

Таблиця 5.2 – План матриця для плану 2^2

Номер досліду (u)	Величина факторів			Величина параметрів оптимізації		
	X_0	X_1	X_2	Y_{14}	Y_{24}	$Y_{ср.u}$
1	+	+	+	Y_{11}	Y_{21}	$Y_1 = \frac{Y_{11}+Y_{21}}{2}$
2	+	–	+	Y_{12}	Y_{22}	$Y_2 = \frac{Y_{12}+Y_{22}}{2}$
3	+	+	–	Y_{13}	Y_{23}	$Y_3 = \frac{Y_{13}+Y_{23}}{2}$
4	+	–	–	Y_{14}	Y_{24}	$Y_4 = \frac{Y_{14}+Y_{24}}{2}$

Якщо точності лінійної моделі недостатньо або вона неадекватно описує досліджуваний процес, то вона добудовується до нелінійної.

Одна з найчастіших причин нелінійності математичної моделі полягає в тому, що ефект (вплив на вихідний параметр) одного фактора залежить від рівнів, на яких перебувають інші фактори. У такому випадку говорять, що має місце взаємодія між факторами.

Так при двох факторах X_1 і X_2 є лише одна взаємодія, яку прийнято записувати X_1X_2 (вона називається *парною* або *взаємодією другого порядку*). Між трьома факторами може бути вже чотири взаємодії три другого порядку й одна третього порядку (X_1X_2; X_1X_3; X_2X_3; и $X_1X_2X_3$).

Взагалі число можливих взаємодій знаходять за формулою:

$$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}, \tag{5.6}$$

де k – число факторів; m – число елементів у взаємодії.

Приклад: для двох факторів: $C_2^2 = \frac{2!}{2!(2-2)!} = \frac{1\cdot2}{1\cdot2\cdot0!} = \frac{1\cdot2}{1\cdot2\cdot1!} = \frac{2}{2} = 1$

Для обліку ефектів взаємодії факторів користуються правилом перемножування стовпчиків, одержуючи стовпчик добутку двох, трьох і т.д. (залежно від порядку взаємодії) факторів, що включають у математичну модель.

Так для трьох факторів нелінійна математична модель має вигляд:

$$\hat{Y} = b_oX_o + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_{12}X_1X_2 + b_{13}X_1X_3 + b_{23}X_2X_3 +$$

$$+b_{123}X_1X_2X_3, \qquad (5.7)$$

яка може бути знайдена при реалізації ПФЕ виду 2^3 й описується розширеною планом-матрицею.

Таблиця 5.3 – Розширена план-матриця для описання трьохфакторної нелінійної математичної моделі

№ досліду (u)	Величина фактору				Комбінації добутків факторів				Величина вихідного параметра		
	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	Y_{1U}	Y_{2U}	$\overline{Y_U}$
1	+	+	+	+	+	+	+	+	Y_{11}	Y_{21}	$\overline{Y_1}$
2	+	–	+	+	–	–	+	–	Y_{12}	Y_{22}	$\overline{Y_2}$
3	+	+	–	+	–	+	–	–	Y_{13}	Y_{23}	$\overline{Y_3}$
4	+	–	–	+	+	–	–	+	Y_{14}	Y_{24}	$\overline{Y_4}$
5	+	+	+	–	+	–	–	–	Y_{15}	Y_{25}	$\overline{Y_5}$
6	+	–	+	–	–	+	–	+	Y_{16}	Y_{26}	$\overline{Y_6}$
7	+	+	–	–	–	–	+	+	Y_{17}	Y_{27}	$\overline{Y_7}$
8	+	–	–	–	+	+	+	–	Y_{18}	Y_{28}	$\overline{Y_8}$

В таблиці 5.3 в рамці представлено власно план експерименту 2^3. Решта даних необхідних для підрахунку коефіцієнтів рівняння регресії.

Після побудови будь-якого плану-матриці він перевіряється на:

- **симетричність** відносно центра експерименту. Алгебраїчна сума елементів стовпця кожного фактора, крім стовпця X_0, має дорівнювати 0 $\sum_{u=1}^{N} X_{iu} = 0$;
- **нормування** суми квадратів елементів, кожного стовпчика має дорівнювати числу рядків плану-матриці $\sum X_{iu}^2 = N$;
- **ортогональність** – сума порядкових добутків будь-яких двох стовпчиків плану-матриці має дорівнювати 0 $\sum X_{iu} \cdot X_{ju} = 0$, де X_{iu} і X_{ju} – комбінація факторів в u-ому рядку.

Якщо план-матриця відповідає всім трьом властивостям, то вона автоматично має властивість *ротатабельності*.

3) Перед реалізацією плану експерименту на об'єкті, досліди, передбачені в матриці планування, треба **рандомізувати**, тобто встановити порядок їхнього проведення у випадковій послідовності. Порядок проведення дослідів у випадковій послідовності варто обирати з таблиці рівномірно розподілених випадкових чисел або іншим способом. Наприклад, потрібно провести 8 дослідів. При цьому встановлений випадковий порядок реалізації дослідів може бути, наприклад 1, 6, 5, 8, 2, 7, 4, 3 або 2, 5, 1, 6, 4, 8, 3, 7.

4) На наступному етапі здійснюють **реалізацію дослідів** відповідно до плану-матриці й прийнятої рандомізації. Результати дослідів заносять у відповідні рядки плану-матриці й за результатами паралельних дослідів вираховують середнє значення відгуку для кожного з факторів, представлених у плані-матриці за формулою:

$$Y_u = \sum_{j=1}^{m} \frac{Y_{uj}}{m}, \tag{5.8}$$

де Y_u – середнє арифметичне з m паралельних вимірів у рядку з номером m;

Y_{uj} – j-а величина параметра Y при вимірах у рядку плану з номером u.

5) Перевірка відтворюваності дослідів й однорідності дисперсії. Обчислюють рядкові дисперсії параметра оптимізації S_u^2 за даними m паралельних вимірів у кожному рядку плану-матриці за формулою:

$$S_u^2 = \frac{\sum_{j=1}^{m}\left(\overline{Y_u} - Y_{uj}\right)^2}{m-1} = \frac{\left(\overline{Y_u} - Y_{u1}\right)^2 + \left(\overline{Y_u} - Y_{u2}\right)^2 + \cdots + \left(\overline{Y_u} - Y_{um}\right)^2}{m-1}. \tag{5.9}$$

Знаходять максимальну дисперсію S_{umax}^2 серед порядкових дисперсій, а всі порядкові дисперсії підсумовують, тобто визначають $\sum S_u^2$.

Для перевірки відтворюваності дослідів й однорідності дисперсії можна не проводити паралельних дослідів у всіх рядках матриці планування, а провести окрему серію досвідів (наприклад, 3 досліди в центрі плану експерименту) і за ними обчислити величину дисперсії відтворюваності й рівну їй дисперсію дослідів:

$$S_0^2 = \frac{\sum_{g=1}^{m_0}\left(Y_{g0}-\overline{Y_0}\right)^2}{m_0-1}, \qquad (5.10)$$

де $\overline{Y_0}$ – середнє арифметичне за результатами m_0 дослідів у центрі плану; Y_{g0} – величина параметра Y з порядковим номером g.

Після чого пропускається перевірка за *критерієм Кохрена* (див. нижче) і відразу переходимо до обчислення і перевірки значущості коефіцієнта регресії.

Для перевірки гіпотези однорідності дисперсій і відтворюваності вимірів при однаковому числі паралельних вимірювань m в кожному рядку плану слід користуватися *критерієм Кохрена* G, який обчислюють як відношення максимальної дисперсії серед знайдених порядкових до загальної суми всіх порядкових дисперсій:

$$G_{\text{розр.}} = \frac{S_{u\,max}^2}{S_1^2+S_2^2+S_3^2+\cdots+S_N^2} = \frac{S_{u\,max}^2}{\sum_{u+1}^{N} S_u^2}. \qquad (5.11)$$

Задавши рівень значущості критерію Кохрена, найчастіше знаходять табличне значення критерію Кохрена $G_{0,05f1f2}$, де f_1 – число ступенів свободи ($f_1 = m - 1$), а $f_2 = N$ – число рядків (дослідів) в план-матриці. Наприклад, для розширеної план-матриці ПФЕ виду 2^3 представленої в таблиці 5.3 $G_{0,05;1;8} = 0,680$. Після чого вони порівнюються і якщо $G_{\text{розр.}} < G_{0,05;f1f2}$, то гіпотеза про однорідність дисперсій і відтворюваності результатів вимірювань приймається. Якщо перевірка дала негативний результат, то слід збільшити число паралельних дослідів, і за можливості, підвищити точність вимірювань при їх виконанні. Наприклад, якщо при варіюванні якогось фактора зміна досліджуваного параметра співставна з похибкою експерименту, то інтервал варіювання необхідно збільшити приблизно на порядок.

У разі якщо число паралельних вимірювань в окремих дослідах різне (наприклад, в результаті видалення грубих помилок), то однорідність дисперсій і відтворюваність вимірювань здійснюється за допомогою критерію Фішера. Для цього визначають ставлення максимально побудованої дисперсії до мінімальної.

$$F_{\text{розр.}} = \frac{S_{u\,max}^2}{S_{u\,min}^2}. \qquad (5.12)$$

Гіпотеза про однорідність дисперсій приймається при виконанні умови:

$$F_{\text{розр.}} \leq F_{\text{табл.}\alpha, f_{umax}, f_{umin}}, \quad (5.13)$$

де $F_{\text{табл.}}$ – значення критерію Фішера визначене за рівня значущості α і

$$f_{umax} = m_{umax} - 1, f_{umin} = m_{umin} - 1, \quad (5.14)$$

де m_{umax} і m_{umin} – числа паралельних вимірювань в рядках плану-матриці, яким відповідають $S_{u\,max}^2$ і $S_{u\,min}^2$.

Якщо умова (5.13) виконується, то за аналогією з перевіркою за критерієм Кохрена, досліди вважаються відтворюваними, а оцінки дисперсій – однорідними. Виходячи з цієї умови можна усереднити і знайти помилку дослідів S_o^2 і рівну їй дисперсію відтворюваності S_y^2 за формулою:

$$S_0^2 = S_y^2 = \frac{\sum S_u^2}{N}, \quad (5.15)$$

де N – число окремих серій дослідів.

6) Обчислення і перевірка значущості коефіцієнтів регресії.

Коефіцієнти лінійної регресії визначаються множенням Y_u на X_{iu} в кодованих позначеннях з наступним розподілом суми отриманих добутків на загальне число рядків в план-матриці, тобто за формулою:

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^{N} X_{iu} \cdot \overline{Y_u}}{N}, \quad (5.16)$$

де b_i – коефіцієнт регресії ($i = 0, 1, 2 \ldots k$); X_{iu} – кодована порядкова величина фактора в i-му стовпчику план-матриці; Y_u – середнє арифметичне за результатами m дослідів в u-му рядку план-матриці; N – загальна кількість дослідів або рядків в план-матриці.

Наприклад, для експериментального плану 2^2 наведеного в табл. 5.2 коефіцієнти b_1, b_2, і b_0 будуть визначатися за формулами*:

---

* Знаки перед значеннями $\overline{Y}$ беруть у стовпчиках план-матриці.

$$b_1 = \sum_{u=1}^{N} \frac{X_{1u} \cdot \overline{Y_u}}{N} = \frac{\overline{Y_1} - \overline{Y_2} + \overline{Y_3} - \overline{Y_4}}{4}, \tag{5.17}$$

$$b_2 = \sum_{u=1}^{N} \frac{X_{2u} \cdot \overline{Y_u}}{N} = \frac{\overline{Y_1} + \overline{Y_2} - \overline{Y_3} - \overline{Y_4}}{4}, \tag{5.18}$$

$$b_0 = \sum_{u=1}^{N} \frac{\overline{Y_u}}{N} = \frac{\overline{Y_1} + \overline{Y_2} + \overline{Y_3} + \overline{Y_4}}{4}. \tag{5.19}$$

У разі, якщо план-матриця включає ефекти взаємодії, коефіцієнти регресії розраховують за рівнянням:

при парних взаємодіях: $$b_{ij} = \sum_{u=1}^{N} \frac{X_{iu} \cdot X_{ju} \cdot \overline{Y_u}}{N}, \tag{5.20}$$

при взаємодії 3-го порядку: $$b_{ij\nu} = \sum_{u=1}^{N} \frac{\left(X_i \cdot X_j \cdot X_\nu\right)_u \cdot \overline{Y_u}}{N}, \tag{5.21}$$

при взаємодії 4-го порядку: $$b_{ij\nu\eta} = \sum_{u=1}^{N} \frac{\left(X_i \cdot X_j \cdot X_\nu \cdot X_\eta\right)_u \cdot \overline{Y_u}}{N}. \tag{5.22}$$

Наприклад, для експериментального плану 2^3 представленого в табл. 5.3 коефіцієнтів b_{123}, b_{12}, b_{23}, b_{13}, b_3, b_2, b_1, b_0.

$$b_{123} = \frac{Y_1 - Y_2 - Y_3 + Y_4 - Y_5 + Y_6 + Y_7 - Y_8}{8}, \tag{5.23}$$

$$b_{12} = \frac{Y_1 - Y_2 - Y_3 + Y_4 + Y_5 - Y_6 - Y_7 + Y_8}{8}, \tag{5.24}$$

$$b_{23} = \frac{Y_1 + Y_2 - Y_3 - Y_4 - Y_5 - Y_6 + Y_7 + Y_8}{8}, \tag{5.25}$$

$$b_{13} = \frac{Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4 - Y_5 + Y_6 - Y_7 + Y_8}{8}, \tag{5.26}$$

$$b_3 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 - Y_5 - Y_6 - Y_7 - Y_8}{8}, \tag{5.27}$$

$$b_2 = \frac{Y_1 + Y_2 - Y_3 - Y_4 + Y_5 + Y_6 - Y_7 - Y_8}{8}, \tag{5.28}$$

$$b_1 = \frac{Y_1 - Y_2 + Y_3 - Y_4 + Y_5 - Y_6 + Y_7 - Y_8}{8}, \qquad (5.29)$$

$$b_0 = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7 + Y_8}{8}. \qquad (5.30)$$

Отримані коефіцієнти при незалежних змінних вказують на силу впливу фактора. Чим більша абсолютна величина коефіцієнта, тим сильніше впливає він на вихідний параметр. Знак вказує на напрямок впливу. Знак «+» означає, що зі збільшенням величини фактора вихідний параметр також збільшується, і навпаки.

Величина коефіцієнта відповідає внеску даного фактора в величину параметра оптимізації при переході його з нульового рівня на верхній.

Якщо ж необхідно оцінювати фактор при переході його з нижнього рівня на верхній, то тоді він чисельно дорівнює подвоєному коефіцієнту. Цей внесок називається *ефектом фактора* або *головним ефектом*.

Оскільки коефіцієнти моделі b_0, b_1 … b_k знайдені лише за обмеженою кількістю дослідів, (яка мізерно мала порівняно з генеральною сукупністю), то вони визначені з деякою похибкою до відповідних генеральних коефіцієнтів і, власне, є лише їх оцінкою. Їх точність і надійність оцінки залежать від властивостей вибірки і тому потребують статистичної перевірки.

Перевірка значущості кожного коефіцієнта проводиться методом регресійного аналізу незалежно один від одного.

Перевірку можна здійснювати двома рівноцінними способами: за *t-критерієм Стьюдента* і за *довірчим інтервалом*.

Для цього передусім знаходять дисперсію коефіцієнтів регресії:

$$S_{b_i}^2 = \frac{S_Y^2}{N \cdot m}, \qquad (5.31)$$

де $S_Y^2 = \frac{S_u^2}{N}$ – дисперсія параметра оптимізації (дисперсія відтворюваності); N – число дослідів або число рядків в план-матриці, m – число паралельних дослідів, якщо паралельні досліди не проводяться, то $m = 1$.

Середньоквадратичне відхилення коефіцієнтів регресії:

$$S_{b_i} = \sqrt{S_{b_i}^2}, \tag{5.32}$$

Потім знаходять розрахункові значення коефіцієнта Стьюдента:

$$t_{\text{розр.}} = \frac{|b_i|}{S_{b_i}},\ t_{ij} = \frac{|b_{ij}|}{S_{b_i}};\ t_{ii} = \frac{|b_{ii}|}{S_{b_i}}, \tag{5.33}$$

де $|b_i|$, $|b_{ij}|$, … – абсолютні величини розрахованих коефіцієнтів регресії.

Попередньо обчислені величини $t_{розр.}$ порівнюють з критичною (табличною) величиною критерію Стьюдента при заданому рівні значущості α (зазвичай 0,05, тобто достовірність 95%) і відповідає числу ступенів свободи $f = N(m-1)$, а якщо дублюючих дослідів немає то $f = N$. Якщо розрахункова величина критеріїв виявиться більшою за $t_{табл}$, то відповідний коефіцієнт вважають статистично значущим, в іншому випадку – незначущим.

<u>Схема перевірки за довірчим інтервалом</u>

Знаходимо Δb_i

$\Delta b_i = t_{0{,}05\text{f}_1}^{\text{табл.}} \cdot \sqrt{\frac{S_y^2}{N}}$. Для нашого прикладу $N = 4$, $f_1 = 4$) критерій Стьюдента дорівнює 2,7764.

$\Delta b_1 = 2{,}7764 \cdot \sqrt{\frac{S^2}{N}} = 2{,}7764 \cdot \sqrt{\frac{0{,}39}{4}} = 0{,}8669.$

Тепер порівняємо:

$|b_0| = 20$ $\quad$ $|b_0| > \Delta b_i$ – значущий;

$|b_1| = 5$ $\quad$ $|b_1| > \Delta b_i$ – значущий;

$|b_2| = 2$ $\quad$ $|b_2| > \Delta b_i$ – значущий;

$|b_{12}| = 0{,}5$ $\quad$ $|b_{12}| < \Delta b_i$ – не значущий.

Значить рівняння має вигляд $Y = 20 - 5X_1 - 2X_2$.

<u>Схема перевірки за *t*-критерієм Стьюдента</u>

Знаходимо дисперсію коефіцієнтів регресії:

$S_{bi}^2 = \frac{S_y^2}{N \cdot m} = \frac{0{,}39}{4 \cdot 2} = 0{,}0487.$

Середньоквадратичне відхилення коефіцієнта регресії:

$S_{b_i} = \sqrt{S_{b_i}^2} = \sqrt{0{,}0487} = 0{,}2207.$

Критична величина коефіцієнта Стьюдента за $f_1 = N(m-1) = 4(2-1) = 4$

$t_{0,05;f_1}^{\text{крит.}} = t_{0,05;4}^{\text{крит.}} = 2{,}7764.$

Знаходимо розрахункові величини критерію Стьюдента:

$$t_0^{\text{розр.}} = \frac{|b_0|}{S_{b_i}} = \frac{20}{0{,}2207} = 90{,}62;$$

$$t_1^{\text{розр.}} = \frac{|b_1|}{S_{b_i}} = \frac{5}{0{,}2207} = 22{,}65;$$

$$t_2^{\text{розр.}} = \frac{|b_2|}{S_{b_i}} = \frac{2}{0{,}2207} = 9{,}062;$$

$$t_{12}^{\text{розр.}} = \frac{|b_{12}|}{S_{b_i}} = \frac{0{,}5}{0{,}2207} = 2{,}265.$$

Тепер порівнюємо:

$t_0^{\text{розр.}} = 90{,}62$ $t_0^{\text{розр.}} > t_{0,05;4}^{\text{крит.}}$ $(90{,}62 > 2{,}7764)$ – значущий;

$t_1^{\text{розр.}} = 22{,}65$ $t_1^{\text{розр.}} > t_{0,05;4}^{\text{крит.}}$ $(22{,}65 > 2{,}7764)$ – значущий;

$t_2^{\text{розр.}} = 9{,}062$ $t_2^{\text{розр.}} > t_{0,05;4}^{\text{крит.}}$ $(9{,}062 > 2{,}7764)$ – значущий;

$t_{12}^{\text{розр.}} = 2{,}265$ $t_{12}^{\text{розр.}} < t_{0,05;4}^{\text{крит.}}$ $(2{,}265 < 2{,}7764)$ – не значущий.

Значить рівняння має вигляд $Y = 20 - 5X_1 - 2X_2$.

Якщо якийсь коефіцієнт виявляється статистично незначущим, то він має бути відкинутий без перерахунку інших коефіцієнтів.

При використанні перевірки за довірчим інтервалом він розраховується за формулою:

$$\Delta b_i = \pm t_{\text{табл.}\alpha,f} \cdot \sqrt{\frac{S_Y^2}{N}} = \pm t_{\text{табл.}} \cdot S_{b_i}, \tag{5.34}$$

і коефіцієнт вважається статистично значимим. Коли його абсолютна величина більше довірчого інтервалу тобто

$$|b_i| \geq \Delta b_1 \text{ або } |\mathrm{b_i}| \geq \mathrm{t}_{\text{табл.}\alpha,f} \cdot \mathrm{S_{b_i}} \tag{5.35}$$

Сенс останньої нерівності в тому, що абсолютна величина коефіцієнта має бути в t разів більша за помилку його визначення S_{b_i}. Незначущі коефіцієнти так само відкидаються, як і при перевірці за t-критерієм Стьюдента.

До поліноміальної математичної моделі включаються лише доданки зі значущими коефіцієнтами. Статистична незначущість коефіцієнтів регресії b_i може бути обумовлена наступними причинами:

1) основний рівень фактора $X_{iосн.}$ близький до точки часного екстремуму;
2) обрано занадто малий інтервал варіювання фактора ΔX_i;
3) дана змінна (або добуток змінних) не має статистичного зв'язку з параметром Y;
4) велика помилка експерименту внаслідок наявності некерованих і неконтрольованих чинників.

Для усунення зазначених причин:

- в 1-му випадку значення i-го фактора слід стабілізувати на певному рівні (не виходячи за межі варіювання);
- в 2-му випадку необхідно збільшити інтервал варіювання на 5-30%;
- в 3-му випадку замінити змінну іншою, що має статистичний зв'язок з параметром Y;
- в 4-му випадку необхідно зменшити помилки експерименту.

7) Перевірки адекватності регресійної моделі

Після обчислення коефіцієнтів регресії і перевірки їх значущості, здійснюють перевірку адекватності отриманого регресійного рівняння тобто шукають відповідь на питання, чи можна використовувати отримане рівняння або необхідно підвищувати складність математичної моделі.

Гіпотезу про адекватність найчастіше перевіряють за допомогою *F-критерію Фішера*. Для цього обчислюється величина, яка зветься *розрахунковим критерієм Фішера* $F_{\alpha,f_1,f_2}^{\text{розр.}}$ за формулою:

$$F_{\alpha,f_1,f_2}^{\text{розр.}} = \frac{S_{\text{ад}}^2}{S_y^2}, \tag{5.36}$$

де $S_{\text{ад}}^2$ – дисперсія адекватності моделі; S_y^2 – дисперсія відтворюваності визначення з f_2 – числом свободи ($f_2 = N(m-1)$, а якщо паралельних дослідів немає, то $f_1 = N$).

Дисперсія адекватності $S^2_{ад}$ (іноді зустрічаються назви *залишкова дисперсія* $S^2_{зал.}$ або *дисперсія неадекватності* $S^2_{неад.}$) розраховується за формулами.

- За відсутності паралельних дослідів

$$S^2_{ад} = \frac{1}{N-l} \cdot \sum\left(\hat{Y}_u - Y_u\right)^2, \qquad (5.37)$$

де l – число значущих коефіцієнтів регресії, включаючи b_0; Y_u – виміряна в u-му досліді величина вихідного параметра; $\hat{Y}_u$ – розрахована за рівнянням регресії величина параметра Y для умов досвіду в u-му рядку плану-матриці; $N - l = f_1$ – число ступенів свободи дисперсії адекватності.

- При рівному числі m паралельних дослідів

$$S^2_{ад} = \frac{m}{N-l} \cdot \sum\left(\hat{Y}_u - \overline{Y}_u\right)^2, \qquad (5.38)$$

де m – кількість паралельних дослідів; $\overline{Y}_u$ – середнє значення вихідного параметра в u-ому досліді.

- При нерівномірному дублюванні дослідів

$$S^2_{ад} = \frac{\sum m_u(\hat{Y}_u - \mathrm{Y}_u)^2}{N-l}, \qquad (5.39)$$

де m_u – кількість паралельних вимірювань в u-ому досліді.

- При дублюванні одного досліду, наприклад в центрі плану

$$S^2_{ад} = \frac{m_0\left(\hat{Y}_0 - \overline{Y}_0\right)^2 + \sum_{u=1}^{N}(\hat{Y}_u - Y_u)^2}{N-l-1}, \qquad (5.40)$$

де m_0 – кількість паралельних дослідів в центрі плану; $\overline{Y}_0$ – середнє арифметичне за результатами m_0 дослідів в центрі плану; $(N - l - 1)$ – число ступенів свободи дисперсії адекватності.

Після обчислення розрахункової величини критерію Фішера $F_{\alpha,f_1,f_2}^{\text{розр.}}$ він порівнюється з табличним критерієм Фішера $F_{\alpha,f_1,f_2}^{\text{табл.}}$, яке знаходиться для відповідних ступенів свободи f_1 і f_2 та обраного рівня значущості α (зазвичай 95%). Якщо розрахункова величина критерію Фішера менша за табличне, тобто $F_{\alpha,f_1,f_2}^{\text{розр.}} \leq F_{\alpha,f_1,f_2}^{\text{табл.}}$, то гіпотіза про адекватність приймається.

Надалі в отримане і перевірене рівняння регресії підставляють натуральне значення змінних. Наприклад, якщо рівняння в кодованому вигляді $Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2$, то рівняння в натуральному вигляді $\hat{Y} = b_0 + b_1 \cdot \left(\frac{X_1 - X_{\text{осн.}}}{\Delta X_i}\right) + b_2 \cdot \left(\frac{X_i - X_{\text{осн.}}}{\Delta X_i}\right) \rightarrow \hat{Y} = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2$.

Примітка 1. Перевірка адекватності моделі можлива лише за $f_1 = (N - l) > 0$, тобто число значущих коефіцієнтів в рівняння регресії l має бути меншим за число рядків N в план-матриці. Якщо ж число значущих коефіцієнтів в рівнянні регресії дорівнює числу дослідів, тобто ступінь свободи дисперсії адекватності дорівнює нулю, то в цьому випадку необхідно поставити додатковий дослід на нульовому рівні. Результати дослідів заносять в план експерименту при цьому число дослідів (рядків в матриці планування) дорівнює $(N + 1)$. Перераховується дисперсія відтворюваності S_y^2 і дисперсію адекватності $S_{\text{ад}}^2$ з урахуванням нового рядка, знаходять розрахунковий критерій Фішера і порівнюють його з табличним критерієм Фішера.

Примітка 2. Вирішуючи поставлене завдання, слід обирати однаковий рівень значущості α при перевірці гіпотез за критеріями Кохрена, Стьюдента і Фішера.

5.1.2 Планування дробнофакторного експерименту (ДФЕ)

Дробовим факторним експериментом називається система дослідів, яка представляє собою частину ПФЕ, що дозволяє скоротити обсяг експериментальних даних. Ідея використання дробових реплік була вперше запропонована Фіннеєм в 1945 р. Вона ґрунтувалася на тому, що число дослідів в повнофакторному експерименті зазвичай перевищує число коефіцієнтів лінійної моделі. Це призводить до наднасиченності ПФЕ, яка зростає зі збільшенням числа факторів в геометричній прогресії, причому частина з них часто носить малоістотну інформацію, що призводить до появи незначних коефіцієнтів в рівняннях регресії, які описують досліджуваний об’єкт або явище.

Ґрунтуючись на тому, що певний коефіцієнт є незначним і змінною або змінними при ньому можна знехтувати, відповідний вектор-стовпець в матриці планування припустимо звільнити. У нього включають новий фактор. Найчастіше незначними є коефіцієнти при взаємодії факторів, тобто власне ефекти взаємодії. Зазвичай саме їх і замінюють на новий фактор.

Дробові факторні експерименти позначаються як:

$$N = k^{n-p}, \quad (5.41)$$

де k – число рівнів факторів (зазвичай 2 або 3); n – число факторів; p – число факторів прирівняних до незначущих ефектів взаємодії.

Зазвичай число рівнів факторів дорівнює 2 і в літературі ДФЕ позначають:

$$N = 2^{n-p}, \quad (5.42)$$

Для побудови план-матриці ДФЕ з наявних n факторів відбирають $n-p$ основних факторів, для яких будують матрицю планування ПФЕ. Цю матрицю потім доповнюють p стовпцями, що відповідають факторам, які залишились, та вносять їх замість незначущих ефектів взаємодії. Значення нових факторів в умовах дослідів визначають за знаками, які наведені у відповідному стовпці незначного ефекту взаємодії.

При $p = 1$ отримують $1/_2$ ПФЕ, при $p = 2$ отримують $1/_4$ ПФЕ, при $p = 3$ отримують $1/_8$ ПФЕ і т.д. за ступенями двійки. Прийнято говорити, що отримують дробові репліки від ПФЕ, тобто відповідно напіврепліки, чверть-репліку та ін. Приклад можливих дробових реплік представлений в таблиці 5.4.

Розберемо принцип побудови матриці планування ДФЕ на найпростішому випадку. Запишемо план-матрицю для ПФЕ 2^2 → ДФЕ 2^{3-1}.

Користуючись даною план-матрицею (табл. 5.5) можна обчислити 4 коефіцієнта моделі і отримати рівняння виду

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_{12} \cdot X_1 \cdot X_2, \quad (5.43)$$

Таблиця 5.4 – Приклад можливих дробових реплік

Кількість факторів (n)	Дробная репліка	Умовне позначення ДФЕ	Кількість дослідів	
			для ДФЕ	для ПФЕ
3	½ репліка від 2^3	$2^{3–1}$	4	8
4	½ репліка від 2^4	$2^{4–1}$	8	16
5	½ репліка від 2^5	$2^{5–1}$	16	32
	¼ репліка від 2^5	$2^{5–1}$	8	
6	½ репліка від 2^6	$2^{6–1}$	32	64
	¼ репліка від 2^6	$2^{6–2}$	16	
	1/8 репліка від 2^6	$2^{6–3}$	8	
7	½ репліка від 2^7	$2^{7–1}$	64	128
	¼ репліка від 2^7	$2^{7–2}$	32	
	1/8 репліка від 2^7	$2^{7–3}$	16	
	1/16 репліка від 2^7	$2^{7–4}$	8	

Однак якщо є підстави вважати істинний коефіцієнт перед ефектом змішування ($\beta_{12} = 0$) дорівнює 0 і відповідно b_{12} – незначний, то для опису досліджуваної системи необхідно знайти 3 коефіцієнта b_0, b_1, b_2, а ступінь свободи, що лишилась, можна використовувати для мінімізації числа дослідів з отриманням матриці планування ДФЕ виду 2^{3-1}. Для цього достатньо вектор-стовпець X_1X_2 використовувати для нового фактора X_3, тоді матриця планування ДФЕ 2^{3-1} матиме вигляд представлений в табл. 5.6 або можна реалізувати (другу) іншу репліку, де прийнято ($X_3 = -X_1X_2$), а рівняння, яке його описує, буде мати вигляд $Y = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_3 \cdot X_3$.

Таблиця 5.5 – Розширена план-матриця ПФЕ 2^2

№ опыта	X_0	X_1	X_2	X_1X_2	Y_{1u}	Y_{2u}	$\overline{Y}_u$
1	+	+	+	+	Y_{11}	Y_{21}	$\overline{Y}_1$
2	+	–	+	–	Y_{12}	Y_{22}	$\overline{Y}_2$
3	+	+	–	–	Y_{13}	Y_{23}	$\overline{Y}_3$
4	+	–	–	+	Y_{14}	Y_{24}	$\overline{Y}_4$

Таблиця 5.6 – Матриця планування ДФЕ виду 2^{3-1} з генеруючим співвідношенням ($X_3 = X_1X_2$).

№ опыта	X_0	X_1	X_2	$X_3 = X_1X_2$	Y_{1u}	Y_{2u}	$\overline{Y}_u$
1	+	+	+	+	Y_{11}	Y_{21}	$\overline{Y}_1$
2	+	–	+	–	Y_{12}	Y_{22}	$\overline{Y}_2$
3	+	+	–	–	Y_{13}	Y_{23}	$\overline{Y}_3$
4	+	–	–	+	Y_{14}	Y_{24}	$\overline{Y}_4$

Таблиця 5.7 – Матриця планування ДФЕ виду 2^{3-1} з генеруючим співвідношенням ($X_3 = -X_1X_2$).

№ опыта	X_0	X_1	X_2	$X_3 = -X_1X_2$	Y_{1u}	Y_{2u}	$\overline{Y}_u$
1	+	+	+	–	Y_{11}	Y_{21}	$\overline{Y}_1$
2	+	–	+	+	Y_{12}	Y_{22}	$\overline{Y}_2$
3	+	+	–	+	Y_{13}	Y_{23}	$\overline{Y}_3$
4	+	–	–	–	Y_{14}	Y_{24}	$\overline{Y}_4$

Таким чином, для оцінки дії трьох факторів на досліджуваний процес замість постановки ПФЕ виду 2^3 і проведення восьми дослідів можна поставити ДФЕ виду 2^{3-1} і обмежитися чотирма дослідами.

Однак скорочення числа дослідів і заміна одного з ефектів взаємодії на новий фактор призводить до появи кореляції між деякими стовпцями матриці планування. Ця обставина не дозволяє роздільно оцінювати ефекти факторів і ефекти змішування. Утворюються так звані змішані оцінки, в яких оцінки коефіцієнтів регресії змішані з оцінками коефіцієнтів взаємодії.

Так, наприклад, для план-матриці представленої в таблиці 5.6, навіть якщо X_1X_2 незначний і замінений на X_3, цей ефект взаємодії все одно впливає на процес і в цьому випадку одержаний коефіцієнт b_3 відображатиме вплив не лише фактора X_3, але й взаємодії X_1X_2. Тоді кажуть, що головний ефект X_3 буде змішаний з ефектом взаємодії X_1X_2, що записують у вигляді $b_3 \rightarrow \beta_3 + \beta_{12}$*.

При введенні фактора X_3 з'являється можливість і інших взаємодій: це парні X_1X_3 і X_2X_3 і потрійні $X_1X_2X_3$, але оскільки знаки в цих стовпцях збігаються зі знаками в основних стовпцях, то ці стовпчики не вносять в план,

* Тут перед коефіцієнтом β_{12} використали знак «+» оскільки до фактора X_3 застосували стовпець, що належить взаємодії $+X_1X_2$, тобто прийнято $X_3 = +X_1X_2$.

щоб не порушилася ортогональность. Отже, і коефіцієнти b_1 та b_2 матимуть змішані оцінки. Ця обставина записується в такий спосіб $b_1 \to \beta_1 + \beta_{23}$, $b_2 \to \beta_2 + \beta_{13}$, $b_0 \to \beta_0 + \beta_{123}$.

Чому береться $b_1 \to \beta_1 + \beta_{23}$, а не наприклад $b_1 \to \beta_1 + \beta_{123}$? Тому, що знаки в стовпчику X_1 повністю збігаються зі знаками у фіктивному стовпчику взаємодій X_2X_3 і т.д.

Якщо ж взята друга напівренліка ДФЕ 2^{3-1}, в якій X_3 прирівняний до X_1X_2, то змішані оцінки матимуть вигляд $b_1 \to \beta_1 - \beta_{23}$, $b_2 \to \beta_2 - \beta_{13}$, $b_3 \to \beta_3 - \beta_{12}$, $b_0 \to \beta_0 - \beta_{123}$.

Матриці ПФЕ ділять на репліки не довільно, а таким чином, що властивості ортогональності і рототабельності зберігаються і у ДФЕ. Для побудови дрібних реплік використовують спеціальні алгебраїчні співвідношення: генеруюючі і такі, що визначають контрасти.

Генерують співвідношення показує, яка з взаємодій прийнята незначною, і тому замінена в матриці планування новим незалежним фактором.

Так для нашого прикладу ДФЕ 2^{3-1} можна записати $X_3 = X_1X_2$ і $X_3 = -X_1X_2$ отже X_1X_2 і $-X_1X_2$ – є генеруючими співвідношеннями для першої і другої напівреплікі ПФЕ 2^3. Для реплік більш високих порядків типу 2^{5-2} буде 2 генеруючих співвідношення, для 2^{6-3} буде 3 генеруючих співвідношення і т.д.

З генеруючими співвідношеннями можна виробляти алгебраїчні операції, зокрема множити обидві частини рівності. Якщо фактор зустрічається в квадраті або іншому парному степені, його замінюють на 1.

Визначальним контрастом називають співвідношення, що дорівнює 1 або –1, отримане при порядковому перемноженні стовпців з незалежними факторами (в нашому випадку це $X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 = 1$ в першій репліці і $X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 = -1$ у другій). Визначальний контраст зазвичай отримують шляхом множення обох частин генеруючого співвідношення на той фактор, що внесений в матрицю. Так, наприклад

1а $X_3 \cdot X_3 = X_1X_2 \cdot X_3 \to X_3^2 = X_1X_2X_3 \to 1 = X_1X_2X_3$ або

1б $X_3 \cdot X_3 = -X_1X_2 \cdot X_3 \to X_3^2 = -X_1X_2X_3 \to 1 = -X_1X_2X_3$

У випадку наявності кількох генеруючих співвідношень отримують узагальнюючий контраст шляхом їх множення:

Наприклад, є ДФЕ типу 2^{5-2} і прийнято, що $X_4 = -X_1X_2$, а $X_5 = X_1X_2X_3$, значить, визначальні контрасти дорівнюватимуть:

$X_4 \cdot X_4 = -X_1X_2 \cdot X_4 \to X_4^2 = -X_1X_2X_4 \to 1 = -X_1X_2X_4,$

$X_5 \cdot X_5 = X_1X_2X_3 \cdot X_5 \to X_5^2 = X_1X_2X_3X_5 \to 1 = X_1X_2X_3X_5.$

Узагальнений визначальний контраст буде:

$1 = -(X_1X_2X_4) \cdot X_1X_2X_3X_5 \to 1 = -X_1^2X_2^2X_3X_4X_5 \to 1 = -X_3X_4X_5.$

Визначальні контрасти використовують для визначення всіх змішаних оцінок для даної репліки. Для цього кожен незалежний фактор множиться на визначальний контраст. Для нашого прикладу ДФЕ 2^{3-1} для першої напіврепліки визначальний контраст $1 = X_1X_2X_3$ для:

- X_1: $X_1 \cdot 1 = X_1X_2X_3 \cdot X_1 \to X_1 = X_1^2X_2X_3 \to X_1 = X_2X_3$, значить $b \to \beta_1 + \beta_{23}$;
- X_2: $X_2 \cdot 1 = X_1X_2X_3 \cdot X_2 \to X_2 = X_1X_2^2X_3 \to X_2 = X_1X_3$, значить $b_2 \to \beta_2 + \beta_{13}$;
- X_3: $X_3 \cdot 1 = X_1X_2X_3 \cdot X_3 \to X_3 = X_1X_2X_3^2 \to X_3 = X_1X_2$, значить $b_3 \to \beta_3 + \beta_{12}$

Для визначення ефектів змішаня складемо алгебраїчну суму з одиниці і <u>правих</u> частин ефектів змішування:

$S = 1 - X_1X_2X_4 + X_1X_2X_3X_5 - X_3X_4X_5.$

Тепер множимо кожен з факторів на S і, замінивши фактори відповідними коефіцієнтами, знаходимо змішані оцінки:

- X_1: $S \cdot X_1 = X_1 - X_2X_4 + X_2X_3X_5 - X_1X_3X_4X_5 \to b_1 \to \beta_1 - \beta_{24} + \beta_{235} - \beta_{1345},$
- X_2: $S \cdot X_2 = X_2 - X_1X_4 + X_1X_3X_5 - X_2X_3X_4X_5 \to b_2 \to \beta_2 - \beta_{14} + \beta_{135} - \beta_{2345},$
- X_3: $S \cdot X_3 = X_3 - X_1X_2X_3X_4 + X_1X_2X_5 - X_4X_5 \to b_3 \to \beta_3 - \beta_{123} + \beta_{125} - \beta_{45},$
- X_4: $S \cdot X_4 = X_4 - X_1X_2 + X_1X_2X_3X_4X_5 - X_3X_5 \to b_4 \to \beta_4 - \beta_{12} + \beta_{12345} - \beta_{35},$
- X_5: $S \cdot X_5 = X_5 - X_1X_2X_4X_5 + X_1X_2X_3 - X_3X_4 \to b_5 \to \beta_5 - \beta_{1245} + \beta_{123} - \beta_{34}.$

Для прикладу 2^{3-1}

$S = 1 + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3,$

- X_1: $S \cdot X_1 = X_1 + X_2 \cdot X_3 - b_1 - \beta_1 + \beta_{23},$
- X_1: $S \cdot X_2 = X_2 + X_1 \cdot X_3 - b_2 - \beta_2 + \beta_{13},$
- X_1: $S \cdot X_3 = X_3 + X_1 \cdot X_2 - b_3 - \beta_3 + \beta_{12},$
- X_1: $S \cdot X_0 = X_0 + X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 - b_0 - \beta_0 + \beta_{123}.$

Роздільна здатність матриці визначається за кількістю факторів, які входять в визначальний контраст. Для нашого прикладу ДФЕ 2^{3-1} визначальний контраст $X_1X_2X_3 = 1$ число факторів 3 і відповідно роздільна здатність III і план записується як 2_{III}^{3-1}.

У випадку вибору напіврепліки для 2^{4-1} можливо 8 рішень:

1) $X_4 = X_1 X_2$; **2)** $X_4 = -X_1 X_2$; **3)** $X_4 = X_1 \cdot X_3$; **4)** $X_4 = -X_1 \cdot X_5$; **5)** $X_4 = X_2 \cdot X_3$; **6)** $X_4 = -X_2 \cdot X_3$; **7)** $X_4 = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$; **8)** $X_4 = -X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$.

Роздільна здатність цих рішень різна. Так репліки 1-6 містять по 3 фактора в генеруючому співвідношенні і мають роздільну здатність III, а репліки 7-8 – по 4 і роздільна здатність IV. Що більше це число, тим вища роздільна здатність репліки. Отже, репліки 7 і 8 мають найбільшу роздільну здатність і називаються головними.

Після отримання матриці ДФЕ переходять до його проведення. При ДФЕ стандартизація масштабів факторів, порядок постановки дослідів, перевірка відтворюваності дослідів, розрахунок оцінок коефіцієнтів регресійного рівняння і перевірка їх значущості, перевірка адекватності отриманої математичної моделі і перехід до фізичних змінних проводиться точно так само як і для ПФЕ.

5.2 Плани другого порядку

Найчастіше досліджуваний процес не вдається адекватно описати за допомогою лінійних рівнянь регресії, що пов’язано з тим, що поверхня відгуку поблизу області оптимуму має значну кривизну (цю область прийнято називати *майже стаціонарною областю*).

Тому для отримання регресійних моделей, які адекватно описують *майже стаціонарну область* прийнято використовувати поліноми більш високих порядків виду:

$$Y = b_0 + \sum b_i X_i + \sum b_{ij} X_i X_j + \sum b_{ii} X_i^2 + \cdots. \tag{5.44}$$

Найчастіше обмежуються поліномами другого порядку, поліноми більш високих порядків використовують вкрай рідко.

Оскільки для отримання поліноміальної математичної моделі необхідно, щоб число рівнів варіювання кожного з незалежних факторів було мінімум на одиницю більше ступеня шуканого полінома, то для полінома другого ступеня число рівнянь варіювання фактора має бути не менше трьох.

Реалізація подібних систем можлива при використанні планів типу $N = 3^k$, в яких кожен фактор варіюється на трьох рівнях. Однак в цьому випадку, повний факторний експеримент містить занадто велику кількість дослідів. Так при $k = 2$, $N = 9$, а число коефіцієнтів $b = 6$; при $k = 3$, $N = 27$; $b = 10$, при $k = 5$, $N = 243$, $b = 21$. У зв'язку з цим здійснення ПФЕ для планів другого порядку є не лише складним, а й пов'язане зі значними часовими і матеріальними витратами.

Скоротити число дослідів можна, скориставшись планами розробленими Боксом і Вілсоном, які довели, що доповнивши дворівневий план званий *ядром* деякою кількістю спеціальним чином розташованих точок (точки розташовуються на осях факторного простору і їх прийнято називати *зоряними*) можна отримати регресивні моделі другого порядку.

Такі плани прийнято називати *центральними і композиційними (ЦКП)*. *Центральні* означає, що всі точки розташовані симетрично відносно центра плану, *композиційні* – можливість покрокової реалізації дослідів, тобто коли до *ядра* утвореного плануванням для лінійної моделі додають *зіркові точки*.

Загальна кількість дослідів N при такому плануванні залежить від числа факторів, а отже, вибору ядра плана:

- при $k < 5$ в якості ядра беремо ПФЕ 2^k

$$N = 2^k + 2k + N_0 \, , \tag{5.45}$$

- при $k \geq 5$ в якості ядра беремо ДФЕ 2^{k-p} (зазвичай 2^{k-1})

$$N = 2^k + 2k + N_0 \, , \tag{5.46}$$

де 2^k і 2^{k-p} – число дослідів в *ядрі* плану; $2k$ – число зіркових точок; k – число факторів; N_0 – число нульових точок тобто дослідів в центрі плану.

Таким чином за рахунок додаткових зіркових і нульових точок при побудові планів 2-го порядку область експерименту розширюється. Графічно схема розташування точок факторного простору в ЦКП другого порядку, що базується на ПФЕ 2^2, представлена на рисунку 5.2. Матриця планування для ЦКП на базі ПФЕ 2^2 буде мати вигляд таблиці 5.8.

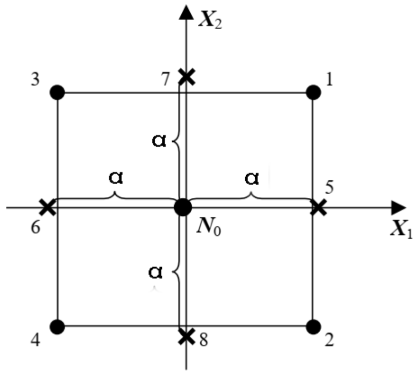


Рисунок 5.2 – Розташування точок факторного простору в композиційних планах 2-го порядку: точки 1-4 – досліди ядра плану (ПФЕ 2^2), точки 5-8 – зіркові точки плану 2-го порядку, які мають координати ($+\alpha$, 0, 0); ($-\alpha$, 0, 0); (0; $+\alpha$; 0); (0; $-\alpha$; 0); α – відстань від центра плану до зоряної точки звана *зоряним плечем*; N_0 – досліди в центрі плану (0; 0; ... 0)

Таблиця 5.8 – Матриця планування для ЦКП на базі ПФЕ 2^2

№ досліду	X_0	X_1	X_2	X_1X_2	X_1^2	X_2^2	Y_j
Ядро плану	+1	–1	–1	+1	+1	+1	Y_1
	+1	+1	–1	–1	+1	+1	Y_2
	+1	–1	+1	–1	+1	+1	Y_3
	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_4
Зоряні точки	+1	$+\alpha$	0	0	α^2	0	Y_5
	+1	$-\alpha$	0	0	α^2	0	Y_6
	+1	0	$+\alpha$	0	0	α^2	Y_7
	+1	0	$-\alpha$	0	0	α^2	Y_8
Центр плану	+1	0	0	0	0	0	Y_9

Однак використання матриці планування в такому вигляді не дозволяє одночасно проводити незалежну один від одного оцінку коефіцієнтів моделі і мати однакову дисперсію передбачення. Це пов'язано з тим, що подібна матриця не може одночасно мати необхідні властивості оптимальності: ортогональність і ротатабельність. Відсутність ортогональності пояснюється тим, що стовпчики X_0, X_1^2 і X_2^2 неортогональні $\sum_{u=1}^{N} X_{0u} X_{iu}^2 \neq 0$ і $\sum_{u=1}^{N} X_{iu}^2 \cdot X_{ju}^2 \neq 0$, а відсутність рототабельності пов'язана з тим, що зазвичай $\pm\alpha \neq \pm 1$ і відповідно точки експерименту не однаково віддалені від центра експерименту і мають різну дисперсію передбачення. Таким чином для планів 2-го порядку не можна забезпечити одночасне дотримання обох властивостей оптимальності.

Тому вибір плеча зоряних точок і числа нульових точок N_0 залежить від обраного критерію оптимальності плану експерименту.

Зоряне плече α можна обрати таким чином, щоб план був *ортогональним* (тобто сума почленних добутків, будь-яких двох стовпців в матриці планування дорівнювала 0), або таким чином, щоб план відповідав *ротатабельності*.

Виходячи з цих міркувань поширення набули такі види планів 2-го порядку: *центральні композиційні ортогональні плани (ЦКОП)* і *центральні композиційні ротатабельні плани (ЦКРП)*. Розглянемо їх більш детально.

5.2.1 Центральні композиційні ортогональні плани 2-го порядку (ЦКОП)

Ідея побудови *ортогонального плану 2-го порядку (ЦКОП)* полягає в тому, що для забезпечення умов симетрії ортогональності матриці планування необхідно перетворити стовпці квадратичних змінних X_1^2, X_2^2, X_i^2, а також спеціальним чином обрати величину зоряного плеча α.

Перетворення квадратичних змінних здійснюють за рівнянням:

$$X'^2_i = X_i^2 - \varphi, \tag{5.47}$$

де i – номер рядка; φ – параметр зсуву.

Величина φ залежить від числа досліджуваних факторів k, прийнятої кількості дослідів в центрі плану n_0 і величини зоряного плеча α. Число досліджуваних факторів k в експерименті задається спочатку і визначає число дослідів в ядрі плану (яке становить для ПФЕ 2^k, а для ДФЕ 2^{k-p}). Кількість дослідів в центрі плану обирається виходячи з необхідної точності експерименту і зручності обчислення дисперсії відтворюваності $S^2_{\text{від.}}$ При цьому n_0 має бути не менше 1 і часто в ЦКОП його приймають за 1. Якщо вибір величини зоряного плеча α в центральних композиційних планах (ЦКП) Бокса-Вілсона може бути довільним, то для центральних композиційних ортогональних планів вибір зоряного плеча α здійснюється виходячи з плану, прийнятого в якості ядра матриці і умови забезпечення ортогональності стовпців квадратичних змінних:

- при $k < 5$ ядро матриці базується на ПФЕ

$$\alpha^4 + 2^k\alpha^2 - 2^{k-1}(k + 0{,}5n_0) = 0, \tag{5.48}$$

- при $k > 5$ ядро матриці базується на ДФЕ

$$\alpha^4 + 2^{k-1}\alpha^2 - 2^{k-2}(k + 0{,}5n_0) = 0, \tag{5.49}$$

або в спрощеному вигляді:

$$\alpha^2 = \frac{\sqrt{(N_1+2k+n_0)\cdot N_1 - N_1}}{2}, \tag{5.50}$$

де N_1 – число дослідів в ядрі плану; k – число факторів; n_0 – число дослідів в центрі плану (0 дослідів).

Після визначення величини зоряного плеча переходимо до обчислення величини параметра зсуву φ:

$$\varphi = \frac{N_1+2\alpha^2}{N}, \tag{5.51}$$

де N_1 – число дослідів в ядрі плану; N – загальне число дослідів:

- для планів виду 2^k (ПФЕ) $N_1 = 2^k$ $N = 2^k + 2k + n_0$,
- для планів виду 2^{k-p} (ДФЕ) $N_1 = 2^{k-p}$ $N = 2^{k-p} + 2k + n_0$.

Розрахункові величини α^2, α і φ для різного числа факторів і нульових точок представлені в таблиці 5.8.

Таблиця 5.9 – Розрахункові величини α^2, α і φ

N_0	Кількість факторів k											
	2			3			4			5^{-1} ($X_5 = X_1X_2X_3X_4$)		
	α^2	α	φ	α^2	α	φ	α^2	α	φ	α^2	α	φ
1	1,00	1,00	0,6667	1,476	1,215	0,7303	2,00	1,414	0,8	2,392	1,546	0,7698
2	1,160	1,077	0,6324	1,650	1,285	0,7071	2,164	1,471	0,7844	2,58	1,606	0,7559
3	1,317	1,148	0,603	1,831	1,353	0,686	2,39	1,546	0,7698	2,77	1,664	0,7427
4	1,475	1,214	0,5773	2,00	1,414	0,6666	2,58	1,606	0,756	2,95	1,718	0,7303
5	1,606	1,267	0,5547	2,164	1,471	0,6488	2,77	1,664	0,7427	3,14	1,772	0,7184
6	1,742	1,320	0,5345	2,325	1,525	0,6324	2,95	1,718	0,7303	3,31	1,819	0,7071
7	1,873	1,369	0,5163	2,481	1,575	0,6172	3,140	1,772	0,7184	3,49	1,868	0,6963
8	2,00	1,414	0,5	2,633	1,623	0,603	3,310	1,819	0,7071	3,66	1,913	0,6859
9	2,113	1,454	0,485	2,782	1,688	0,5897	3,490	1,868	0,6963	3,830	1,957	0,6761
10	2,243	1,498	0,4714	2,928	1,711	0,5773	3,66	1,913	0,686	4,00	2,00	0,666

Після обчислення величин параметра зсуву φ, зоряного плеча α і вибору кількості точок в центрі плану складається ортогональна матриця планування, приклад якої для ЦКОП 2^3 наведено в таблиці 5.10.

Таблиця 5.10 – Приклад ортогональної матриці планування для ЦКОП 2^3

Дослід	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1^2-\varphi$	$X_2^2-\varphi$	$X_3^2-\varphi$	Y_u
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	0,2697	0,2697	0,2697	Y_1
2	+1	–1	+1	+1	–1	–1	+1	0,2697	0,2697	0,2697	Y_2
3	+1	+1	–1	+1	–1	+1	–1	0,2697	0,2697	0,2697	Y_3
4	+1	–1	–1	+1	+1	–1	–1	0,2697	0,2697	0,2697	Y_4
5	+1	+1	+1	–1	+1	–1	–1	0,2697	0,2697	0,2697	Y_5
6	+1	–1	+1	–1	–1	+1	–1	0,2697	0,2697	0,2697	Y_6
7	+1	+1	–1	–1	–1	–1	+1	0,2697	0,2697	0,2697	Y_7
8	+1	–1	–1	–1	+1	+1	+1	0,2697	0,2697	0,2697	Y_8
9	+1	+1,215	0	0	0	0	0	0,7459	–0,7303	–0,7303	Y_9
10	+1	–1,215	0	0	0	0	0	0,7459	–0,7303	–0,7303	Y_{10}
11	+1	0	+1,215	0	0	0	0	–0,7303	0,7459	–0,7303	Y_{11}
12	+1	0	–1,215	0	0	0	0	–0,7303	0,7459	–0,7303	Y_{12}
13	+1	0	0	+1,215	0	0	0	–0,7303	–0,7303	0,7459	Y_{13}
14	+1	0	0	–1,215	0	0	0	–0,7303	–0,7303	0,7459	Y_{14}
15	+1	0	0	0	0	0	0	–0,7303	–0,7303	–0,7303	Y_{15}

Отримавши план-матрицю, що відповідає умовам симетричності і ортогональності, необхідно перевірити правильність вибору основного рівня факторів і інтервалу їх варіювання в натуральному вираженні факторів. Це пов'язано з тим, що нижній рівень фактора в натуральному вираженні, який відповідає зоряної точці, може вийти від'ємним або відгук вихідного параметра, при такому рівні фактора буде меншим за величину похибки експерименту. У разі наявності таких невідповідностей необхідно на інтервал варіювання такого фактора або на його основний рівень накласти обмеження виходячи з логічних міркувань і потім перерахувати величини верхнього та нижнього рівнів у ядрі планування. Розберемо це на прикладі.

Приклад. При проведенні 4-факторного планування другого порядку було прийнято 3 точки в центрі плану, а по одному з факторів були задані такі значення $X_u = 0{,}1$; $X_b = 0{,}6$ відповідно нульовий рівень $X_0 = 0{,}35$ і інтервал варіювання $\Delta X = 0{,}25$. Оскільки для плану виду $k = 4$ і $n_0 = 3$ зоряне плече $\alpha = 1{,}546$, то нижній рівень фактора в натуральному вираженні в зоряній точці становитиме $X_{-\alpha} = X_0 - \alpha \cdot \Delta X = 0{,}35 - 0{,}25 \cdot 1{,}546 = -0{,}036$, що не має сенсу. Виходячи з логічних міркувань і меж точності вимірювань накладемо обмеження у вигляді граничного значення фактора у вигляді $[X] = 0{,}05$. Таким чином отримуємо нерівність:

$X_{-\alpha} = X_0 - \alpha\Delta X \geq [X]$.

Вирішуємо цю нерівність відносно інтервалу варіювання ΔX:

$X_0 - \alpha\Delta X \geq [X] \rightarrow \Delta X = \frac{X_0 - [X]}{\alpha} \rightarrow \frac{0{,}35 - 0{,}05}{1{,}546} = 0{,}194$.

Тепер уточнимо верхнього і нижнього рівнів фактора:

$X_u = X_0 – \Delta X = 0{,}35 – 0{,}194 = 0{,}156$,

$X_b = X_0 + \Delta X = 0{,}35 + 0{,}194 = 0{,}544$

І відповідно величини факторів в зіркових точках становитимуть:

$X - \alpha = X_0 - \alpha \cdot \Delta X = 0{,}35 - 1{,}546 \cdot 0{,}194 = 0{,}05$,

$X + \alpha = X_0 + \alpha \cdot \Delta X = 0{,}35 + 1{,}546 \cdot 0{,}194 = 0{,}649$.

Після перевірки правильності вибору рівнів факторів і інтервалів їх варіювання в натуральній формі проводять досліди відповідно до умов, прийнятих в матриці планування. При цьому, щоб виключити вплив систематичних помилок, викликаних впливом зовнішнього середовища і неконтрольованих чинників, досліди проводять в рандомній (випадковій) послідовності.

Обробку результатів дослідів здійснюють в наступному порядку:

1) Визначають дисперсію відтворюваності дослідів (за критерієм Кохрена).

2) Знаходять коефіцієнти регресії їх дисперсії і середньоквадратичного відхилення.

3) Перевіряють значущість коефіцієнтів регресії (за критерієм Стьюдента).

4) Перевіряють отримане рівняння регресії на адекватність (за критерієм Фішера).

5) Декодують рівняння регресії.

Розберемо етапи обробки дослідів більш докладно:

1) Визначення дисперсії відтворюваності може проводиться декількома способами в залежності від прийнятої стратегії проведення ЦКОП.

а) Дисперсія відтворюваності S_y^2 визначається заздалегідь, наприклад:

- на стадії відпрацьовування методики експерименту;
- при проведенні початкової серії дослідів, які використовуються для отримання лінійної моделі, тобто ядра експерименту;

За такої стратегії паралельні досліди вході проведення ЦКОП зазвичай не проводяться і кількість дослідів в центі плану зазвичай дорівнює 1, тобто $n_0 = 1$. Методика визначення S_y^2 аналогічна тій, що використовується при проведенні факторних експериментів 1-го порядку.

б) Апріорі вважають, що експеримент відтворюваний і дублювання дослідів здійснюють лише в одній з точок плану, найчастіше в центрі плану тобто на 0 рівні факторів.

б1) При цьому дублюючі досліди можуть бути внесені в якості окремих рядків в план-матрицю експерименту і в цьому випадку $n_0 > 1$ (кількість дублюючих дослідів зазвичай не менше 3). При цьому кожен з дублюючих дослідів є окремим і дисперсія відтворюваності визначається наступним чином.

Знаходять середню величину дублюючих дослідів в центрі плану

$$\overline{Y}_0 = \frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0} Y_{a1}. \tag{5.52}$$

Потім визначають дисперсії дослідів S_0^2 і рівну їй дисперсію відтворюваності (число ступенів свободи для S_y^2 розраховують за формулою $f_1 = n_0 - 1$)

$$S_y^2 = S_0^2 = \frac{1}{n_0 - 1}\sum_{i=1}^{n_0}\left(Y_{0i} - \overline{Y}_0\right)^2. \tag{5.53}$$

б2) Дублюючі досліди не внесені в якості окремих рядків в матрицю і в цьому випадку $n_0 = 1$. При цьому всі дублюючі досліди виходять паралельні, і дисперсію відтворюваності знаходять наступним чином.

Визначають середнє значення відгуку для рядка з дублюючими дослідами

$$\overline{Y}_0 = \frac{Y_{1u} + Y_{2u} + \cdots + Y_{mu}}{m}, \tag{5.54}$$

і визначають дисперсію дослідів і рівну їй дисперсію відтворюваності (число ступенів свободи розраховують за формулою $f_1 = m - 1$)

$$S_{0n}^2 = S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(Y_{iu} - \overline{Y}_0\right)^2}{m-1}. \quad (5.55)$$

в) У всіх точках матриці планування проводять дублюючі елементи. В цьому випадку кількість дослідів в центральній точці зазвичай дорівнює 1 ($n_0 = 1$), число ступенів свободи S_y^2 розраховують за формулою $f_1 = N(m-1)$. Методика визначення дисперсії відтворюваності аналогічна тій, що використовується при проведенні факторних експериментів.

2) Знаходимо коефіцієнти рівняння регресії. Завдяки дотриманню умов ортогональності матриці планування всі коефіцієнти в рівнянні регресії знаходять незалежно один від одного за рівняннями:

- вільний член рівняння регресії

$$b'_0 = \frac{\sum_{u=1}^{n} X_{0u} \cdot Y_u}{N} = \frac{\sum_{u=1}^{n} X_{0u} Y_u}{\sum_{u=1}^{n} X_{0u}^2}, \quad (5.56)$$

- коефіцієнти для членів1-го порядку

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^{n} X_{iu} \cdot Y_u}{\sum_{u=1}^{n} X_{iu}^2}, \quad (5.57)$$

- коефіцієнти для членів ефектів зміщення

$$b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^{n} X_{iu} \cdot X_{ju} \cdot Y_u}{\sum_{u=1}^{n}\left(X_{iu} \cdot X_{ju}\right)^2}, \quad (5.58)$$

- коефіцієнтів для членів 2-го порядку

$$b_{ii} = \frac{\sum_{u=1}^{n} X'^2_{iu} \cdot Y_u}{\sum_{u=1}^{n}\left(X'^2_{iu}\right)^2} = \frac{\sum_{u=1}^{n}\left(X_{iu}^2 - \varphi\right) \cdot Y_u}{\sum_{u=1}^{n}\left(X_{iu}^2 - \varphi\right)^2}, \quad (5.59)$$

де *N* – загальне число дослідів; *i, j* – номери стовпців в матриці планування; *u* – номер рядка.

Оскільки коефіцієнти регресії, які отримують за допомогою ортогональних планів другого порядку внаслідок відсутності рототабельності матриці планування, визначають з різною точністю, то формули для розрахунку дисперсії коефіцієнтів рівняння регресій будуть наступні:

- для вільного члена рівняння регресії

$$S_{b'0}^2 = \frac{S_y^2}{N}, \tag{5.60}$$

- для членів рівняння регресії 1-го порядку

$$S_{bi}^2 = \frac{S_y^2}{\sum X_{iu}^2}, \tag{5.61}$$

- для членів рівнянь регресії ефектів змішування

$$S_{bij}^2 = \frac{S_y^2}{\sum\left(X_i \cdot X_j\right)^2}, \tag{5.62}$$

- для членів рівнянь регресії 2-го порядку

$$S_{bij}^2 = \frac{S_y^2}{\sum\left(X_i^2 - \varphi\right)^2}, \tag{5.63}$$

де S_y^2 – дисперсія відтворюваності.

Середньоквадратичні відхилення визначають добуваючи корінь квадратний з дисперсій:

$$\mathrm{S}_{\mathrm{b'}_0} = \sqrt{\mathrm{S}_{\mathrm{b'}_0}^2}, \tag{5.64}$$

$$\mathrm{S}_{\mathrm{b}_i} = \sqrt{\mathrm{S}_{\mathrm{b}_\mathrm{i}}^2}, \tag{5.65}$$

$$S_{b_{ij}} = \sqrt{S_{b_{ij}}^2}, \tag{5.66}$$

$$S_{b_{ii}} = \sqrt{S_{b_{ii}}^2}. \qquad (5.67)$$

3) Перевірку значущості знайдених коефіцієнтів регресії здійснюємо з використанням критерію Стьюдента. Методика перевірки за критерієм Стьюдента аналогічна тій, що використовується для перевірки значущості коефіцієнтів регресії факторних експериментів 1-го порядку (ПФЕ і ДФЕ).

4) Після відсіювання незначущих коефіцієнтів отримуємо рівняння регресії, але оскільки було проведено перетворення квадратичної змінної, то рівняння регресії матиме вигляд:

$$Y_i = b'_0 + \sum b_i X_i + \sum b_{ij} X_i X_j + \sum b_{ii} \left(X_i^2 - \varphi\right), \qquad (5.68)$$

і щоб перейти до звичайної форми запису розкриваємо дужки з квадратичними факторами і знаходимо величину вільного члена ():

$$b_0 = b'_0 - \varphi \sum b_{ii}. \qquad (5.69)$$

Дисперсія b_0 дорівнює

$$\mathrm{S}_{\mathrm{b}_0}^2 = \mathrm{S}_{\mathrm{b'}_0}^2 + \sum \varphi^2 \cdot \mathrm{S}_{\mathrm{b}_{\mathrm{ii}}}^2. \qquad (5.70)$$

В результаті отримуємо рівняння:

$$\hat{Y} = b_0 + \sum b_i X_i + \sum b_{ij} X_i X_j + \sum b_{ii} X_{ii}^2 + \cdots, \qquad (5.71)$$

Перевірка адекватності отриманого рівняння здійснюється за допомогою критерію Фішера за методикою аналогічно тій, що використовується для перевірки адекватності 1-го порядку.

5) Якщо отримане рівняння виявиться адекватним, то проводиться **декодування рівняння регресії** з отриманням факторів в натуральному вираженні.

Розберемо приклад ЦКОП.

За результатами ультразвукового контролю було встановлено, що на ураженість листів сталі дефектом розшарування (%) найбільш істотно впливають такі фактори, як швидкість вигоряння вуглецю в період рудного кипіння X_1 %/год. і час наповнення виливниці X_2, хв., тобто число факторів $k = 2$. При цьому рівні варіювання факторів наступні $X_1 = 0{,}2 - 0{,}5$ %/год., $X_2 = 3{,}5 - 7{,}5$ хв. Перед початком моделювання проведемо кодування факторів.

Для X_1:

- основний рівень $X_1^0 = \frac{X_1^{max}+X_1^{min}}{2} = \frac{0{,}5+0{,}2}{2} = 0{,}35$,
- інтервал варіювання $\Delta X_1 = \frac{X_1^{max}-X_1^{min}}{2} = \frac{0{,}5-0{,}2}{2} = 0{,}15$,
- верхній рівень $X_1^{в} = \frac{X_1^{max}-X_1^0}{\Delta X_1} = \frac{0{,}5-0{,}35}{0{,}15} = +1$,
- нижній рівень $X_1^{н} = \frac{X_1^{min}-X_1^0}{\Delta X_1} = \frac{0{,}2-0{,}35}{0{,}15} = -1$.

Таким чином кодоване значення для $X_1 = \frac{\mathrm{X}_1-0{,}35}{0{,}15}$.

Для X_2:

- основний рівень $X_2^0 = \frac{X_2^{max}+X_2^{min}}{2} = \frac{7{,}5+3{,}5}{2} = 5{,}5$,
- інтервал варіювання $\Delta X_2 = \frac{X_2^{max}-X_2^{min}}{2} = \frac{7{,}5-3{,}5}{2} = 2$,
- верхній рівень $X_2^{в} = \frac{X_2^{max}-X_2^0}{\Delta X_2} = \frac{7{,}5-5{,}5}{2} = +1$;
- нижній рівень $X_2^{н} = \frac{X_2^{min}-X_2^0}{\Delta X_2} = \frac{3{,}5-5{,}5}{2} = -1$.

Кодоване значення для $X_2 = \frac{\mathrm{X}_2-5{,}5}{2}$.

Приймемо, що при проведенні ЦКОП у нас буде 3 досліди в центрі плану $n_0 = 3$.

У цьому випадку загальна кількість дослідів

$N_1 = 2^k + 2k + n_0 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 3 = 11$.

Число дослідів в ядрі плану $N_1 = 2^k = 2^2 = 4$.

Величина зоряного плеча становитиме

$\alpha^2 = \frac{\sqrt{(N_1+2k+n_0)N_1}-N_1}{2} = \frac{\sqrt{(4+2\cdot 2+3)\cdot 4}-4}{2} = 1{,}316625$,

$\alpha = \sqrt{1{,}316625} = 1{,}1474$.

Параметр зсуву $\varphi = \frac{N_1+2\alpha^2}{N} = \frac{4+2\cdot 1{,}316625}{11} = 0{,}603$.

Перевіримо правильність вибору рівнів факторів і інтервалів їх варіювання.

Для X_1:

$X_{1;+\alpha} = X^0 + \alpha\Delta X_1 = 0{,}35 + 1{,}1474 \cdot 0{,}15 = 0{,}522;$

$X_{1;-\alpha} = X_1^0 - \alpha\Delta X_1 = 0{,}1778.$

Для X_2:

$X_{2;+\alpha} = X_2^0 + \alpha\Delta X_2 = 5{,}5 + 1{,}1474 \cdot 2 = 7{,}794;$

$X_{2;-\alpha} = X_2^0 - \alpha\Delta X_2 = 3{,}205.$

Матриця планування матиме вигляд (табл. 5.11).

Таблиця 5.11 – Приклад матриці планування (Y_u – результати експерименту)

	Номер досліда	Порядок проведення	X_0	X_1		X_2		X_1X_2	$X_1^2-\varphi$	$X_2^2-\varphi$	Y_u	$\hat{Y}_{\text{розр.}}$
				кодована величина	натуральна величина	кодована величина	натуральна величина					
Ядро плана 2^k	1	10	+1	–1	0,2	–1	3,5	+1	0,3969	0,3969	0,36	0,3504
	2	3	+1	+1	0,5	–1	3,5	–1	0,3969	0,3969	0,51	0,5157
	3	5	+1	–1	0,2	+1	7,5	–1	0,3969	0,3969	1,33	0,3388
	4	7	+1	+1	0,5	+1	7,5	+1	0,3969	0,3969	1,51	1,5041
Зоряні точки $2k$	5	8	+1	1,1474	0,522	0	5,5	0	0,7136	-0,603	0,50	0,5002
	6	11	+1	–1,1474	0,1778	0	5,5	0	0,7136	-0,603	0,31	0,3106
	7	2	+1	0	0,35	1,1474	7,794	0	–0,603	0,7136	1,59	1,5874
	8	9	+1	0	0,35	–1,1474	3,205	0	–0,603	0,7136	0,45	0,4533
Центр плана n_0	9	4	+1	0	0,35	0	5,5	0	–0,603	–0,603	0,30	0,2998
	10	6	+1	0	0,35	0	5,5	0	–0,603	–0,603	0,29	0,2998
	11	1	+1	0	0,35	0	5,5	0	–0,603	–0,603	0,31	0,2998

*Величини X_1 і X_2 в натуральному вигляді зазвичай не наводяться в матриці планування і тут наведені для наочності.

Знайдемо дисперсію відтворюваності за дослідами в центрі плану.

У нас 3 досліди в центральній точці плану і значить $Y_0 = \frac{1}{n_0}\sum_l^{n_0} Y_{oi}$.

Середня величина $Y_0 = \frac{1}{3}(0{,}3 + 0{,}29 + 0{,}31) = 0{,}3$.

Число ступенів свободи $f_1 = n_0 - 1 = 3 - 1 = 2$.

Дисперсія відтворюваності

$$S_0^2 = S_y^2 = \frac{1}{n_0-1}\sum_{i=1}^{n_0}\left(Y_{0i} - \overline{Y}_0\right)^2 = \frac{(0{,}3-0{,}3)^2+(0{,}29-0{,}3)^2+(0{,}31-0{,}3)^2}{3-1} = 0{,}0001.$$

Знайдемо коефіцієнти рівняння регресії. Для наочності складемо дві додаткові таблиці (табл. 5.12 і 5.13). Наявність цих двох таблиць не обов’язкова. Вони наведені для наочності розрахунків.

Таблиця 5.12 – Таблиця творів кодованих значень факторів на значення відгуку

№ досліду	$X_0{\cdot}Y_u$	$X_1{\cdot}Y_u$	$X_2{\cdot}Y_u$	$X_1X_2{\cdot}Y_u$	$\left(X_1^2-\varphi\right)\cdot Y_u$	$\left(X_2^2-\varphi\right)\cdot Y_u$
1	0,36	–0,36	–0,36	0,36	0,1429	0,1429
2	0,51	0,51	–0,51	–0,51	0,2024	0,2024
3	1,33	–1,33	1,33	–1,33	0,5279	0,5279
4	1,51	1,51	1,51	1,51	0,5994	0,5994
5	0,5	0,5737	0	0	0,3568	–0,3015
6	0,31	–0,3557	0	0	0,2212	–0,1869
7	1,59	0	1,8244	0	–0,9588	1,1346
8	0,45	0	–0,5163	0	–0,2713	0,3211
9	0,30	0	0	0	–0,1809	–0,1809
10	0,29	0	0	0	–0,1748	–0,1748
11	0,31	0	0	0	–0,1869	–0,1869
Сума	7,46	0,548	3,278	0,03	0,2779	1,8973

Таблиця 5.13 – Величина квадратів кодованих значень факторів

№ досліду	X_0^2	X_1^2	X_2^2	$(X_1X_2)^2$	$\left(X_1^2-\varphi\right)^2$	$\left(X_2^2-\varphi\right)^2$
1	1	1	1	1	0,1576	0,1576
2	1	1	1	1	0,1576	0,1576
3	1	1	1	1	0,1576	0,1576
4	1	1	1	1	0,1576	0,1576
5	1	1,3166	0	0	0,5092	0,3636
6	1	1,3166	0	0	0,5092	0,3636
7	1	0	1,3166	0	0,3636	0,5092
8	1	0	1,3166	0	0,3636	0,5092
9	1	0	0	0	0,3636	0,3636
10	1	0	0	0	0,3636	0,3636
11	1	0	0	0	0,3636	0,3636
Сума	11	6,6332	6,6332	4	3,4670	3,4670

Тепер розраховуємо коефіцієнти рівняння регресії, їх дисперсії і стандартне відхилення.

$$b'_0=\frac{\sum X_0{\cdot}Y_u}{N}=\frac{7{,}46}{11}=0{,}678182;\ S^2_{b'_0}=\frac{S^2_{\text{від.}}}{N}=\frac{0{,}0001}{11}=9{,}09091\cdot 10^{-6};$$

$$S_{b'_0}=\sqrt{S^2_{b'_0}}=\sqrt{9{,}09\cdot\ 10^{-6}}=0{,}003015;$$

$$b_1=\frac{\sum X_1{\cdot}Y_u}{\sum X_1^2}=\frac{0{,}548}{6{,}6332}=0{,}08261;\ S^2_{b_1}=\frac{S_y^2}{2X_1^2}=\frac{0{,}0001}{6{,}6332}=1{,}508\cdot 10^{-6};$$

$$S_{b_1}=\sqrt{S^2_{b_1}}=\sqrt{1{,}508\cdot\ 10^{-6}}=0{,}003882;$$

$$b_2=\frac{\sum X_2{\cdot}Y_u}{\sum X_2^2}=\frac{3{,}278}{6{,}6332}=0{,}49412;\ S^2_{b_2}=\frac{S_y^2}{\sum X_2^2}=\frac{0{,}0001}{6{,}6332}=1{,}508\cdot 10^{-6};$$

$$S_{b_2}=\sqrt{S^2_{b_2}}=\sqrt{1{,}508\cdot\ 10^{-6}}=0{,}003882;$$

$b_{12} = \frac{\sum(X_1X_2)\cdot Y_u}{\sum(X_1\cdot X_2)^2} = \frac{0,03}{4} = 0,0075$; $S^2_{b_{12}} = \frac{S_y^2}{\sum(X_1X_2)^2} = \frac{0,0001}{4} = 2,5\cdot 10^{-5}$;

$S_{b_{12}} = \sqrt{S^2_{b_{12}}} = \sqrt{2,5\cdot\ 10^{-5}} = 0,005$;

$b_{11} = \frac{\sum(X_1^2-\varphi)\cdot Y_u}{\sum(X_1^2-\varphi)^2} = \frac{0,2779}{3,4670} = 0,08016$; $S^2_{b_{11}} = \frac{S_y^2}{\sum(X_1^2-\varphi)^2} = \frac{0,0001}{3,467} = 2,884\cdot 10^{-5}$;

$S_{b_{11}} = \sqrt{S^2_{b_{11}}} = \sqrt{2,884\cdot\ 10^{-5}} = 0,00537$;

$b_{22} = \frac{\sum(X_2^2-\varphi)\cdot Y_u}{\sum(X_2^2-\varphi)^2} = \frac{1,8973}{3,4670} = 0,54726$; $S^2_{b_{22}} = \frac{S_y^2}{\sum(X_2^2-\varphi)^2} = \frac{0,0001}{3,467} = 2,884\cdot 10^{-5}$;

$S_{b_{22}} = \sqrt{S^2_{b_{22}}} = \sqrt{2,884\cdot 10^{-5}} = 0,00537$.

Перевіримо значущість отриманих коефіцієнтів регресії за допомогою критерію Стьюдента. Задамося достовірністю 95% (значимість 0,05). Число ступенів свободи для визначення критерію Стьюдента відповідає числу ступенів свободи для дисперсії відтворення S_y^2 $f_1 = n_0 - 1 = 3 - 1 = 2$. Критичне значення критерію Стьюдента для умов прикладу становитиме $t^{\text{кр.}}_{0,05;2} = 4,3026$. Розрахуємо величини критеріїв Стьюдента для знайдених коефіцієнтів регресії.

$t_{b'_0} = \frac{b'_0}{S_{b'_0}} = \frac{0,678182}{0,003015} = 224,927$;

$t_{b_1} = \frac{b_1}{S_{b_1}} = \frac{0,08261}{0,003882} = 21,2779$;

$t_{b_2} = \frac{b_2}{S_{b_2}} = \frac{0,49412}{0,003882} = 127,279$;

$t_{b_{12}} = \frac{b_{12}}{S_{b_{12}}} = \frac{0,0075}{0,005} = 1,5$;

$t_{b_{11}} = \frac{b_{11}}{S_{b_{11}}} = \frac{0,08016}{0,00537} = 14,9258$;

$t_{b_{22}} = \frac{b_{22}}{S_{b_{22}}} = \frac{0,54726}{0,00537} = 101,899$.

Порівняємо розрахункові величини критерію Стьюдента з критичним значенням і якщо розрахункова величина більша за критичну, визнаємо коефіцієнт значущим, якщо менша – коефіцієнт є незначущим і ним можна знехтувати. Значущими є всі коефіцієнти крім b_{12}. Тобто рівняння регресії матиме вигляд:

$\hat{Y} = 0,678182 + 0,08261\cdot X_1 + 0,49412\cdot X_2 + 0,08016(X_1^2 - 0,603) +$
$0,54726(X_2^2 - 0,603)$.

Перейдемо до звичайної форми запису.

$b_0 = b'_0 - \varphi \sum b_{ii} = 0{,}678182 - 0{,}603 \cdot (0{,}08016 + 0{,}54726) = 0{,}2998.$

$\hat{Y} = 0{,}2998 + 0{,}08261 \cdot X_1 + 0{,}49412 \cdot X_2 + 0{,}08016 \cdot X_1^2 + 0{,}54726 \cdot X_2^2.$

Число коефіцієнтів в рівнянні $l = 5$.

Для перевірки адекватності отриманого рівняння розрахуємо з його допомогою величини параметра оптимізації і занесемо отримані величини в табл. 5.11. Наприклад, для рядка 1

$\hat{Y}_1 = 0{,}2998 + 0{,}08261 \cdot (-1) + 0{,}49412 \cdot (-1) + 0{,}08016 \cdot (-1)^2 + 0{,}54726 \cdot (-1)^2 = 0{,}3504.$

Співставляючи отримані величини $\hat{Y}_i$ з експериментальними даними Y_u, знаходимо дисперсію адекватності, враховуючи, що число значущих коефіцієнтів з урахуванням вільного члену в рівнянні регресії $l = 5$. Враховуючи, що паралельних дослідів у нас немає, то $S^2_{\text{ад.}} = \frac{1}{N-l}\sum_{u-1}^{N}\left(\hat{Y}_u - Y_u\right)$ при цьому число ступенів свободи $f_2 = N - l = 11 - 5 = 6$.

$S^2_{\text{ад.}} = \frac{1}{11-5}[(0{,}3504 - 0{,}36)^2 + (0{,}5157 - 0{,}51)^2 + (1{,}3388 - 1{,}33)^2 + (1{,}5041 - 1{,}51)^2 + (0{,}5002 - 0{,}5)^2 + (0{,}3106 - 0{,}31)^2 + (1{,}5874 - 1{,}59)^2 + (0{,}4533 - 0{,}45)^2 + (0{,}2998 - 0{,}3)^2 + (0{,}2998 - 0{,}29)^2 + (0{,}2998 - 0{,}31)^2] = \frac{0{,}00035}{6} = 5{,}8566 \cdot 10^{-5}.$

Адекватність рівняння перевіряємо за розрахунковим критерієм Фішера

$F_{\text{розр.}} = \frac{S^2_{\text{ад}}}{S^2_{\text{від.}}} = \frac{5{,}8566\cdot 10^{-5}}{0{,}0001} = 0{,}58566.$

Порівнюємо його з табличною величиною критерія Фішера. Для визначення $F_{\text{табл.}}$ задаємося достовірністю 95% і з огляду на число ступенів свободи для $S^2_{\text{ад.}} = N - l = 6$ і $S^2_{\text{від.}} = n_0 - 1 = 3 - 1 = 2$, $F_{0,05}^{\text{табл.}} = 19{,}329$.

Оскільки $F_{\text{розр.}} = 0{,}58566 < F_{0,05}^{\text{табл.}} = 19{,}329$, то рівняння регресії є адекватним.

Проведемо декодування рівняння регресії підставляючи величини коефіцієнтів рівняння, координат центра плану і інтервалів варіювання факторів

$y = 0{,}2998 + 0{,}08261 \cdot \left(\frac{x_1 - 0{,}35}{0{,}15}\right) + 0{,}49412\left(\frac{x_2 - 5{,}5}{2}\right) + 0{,}08016 \cdot \left(\frac{x_1 - 0{,}35}{0{,}15}\right)^2 + 0{,}54726 \cdot \left(\frac{x_2 - 5{,}5}{2}\right)^2.$

Розкриваючи дужки, приводячи подібні члени, отримаємо рівняння регресії в натуральному вигляді факторів:

$y = 3{,}3233 - 1{,}9431x_1 - 1{,}2579x_2 + 3{,}5626x_1^2 + 0{,}136815x_2^2.$

Проаналізуємо отримане рівняння на екстремум відностно X_1 и X_2

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = -1{,}9431 + 2 \cdot 3{,}5626 \cdot x_1 = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = -1{,}2579 + 2 \cdot 0{,}136815 \cdot x_2 = 0$$

Вирішуючи отримані співвідношення знаходимо, що екстремум досягатиметься при $X_1 = 0{,}272$ і $X_1 = 4{,}59$.

Отже, за швидкості вигоряння вуглецю в період рудного кипіння 0,272 %/год. і часі наповнення виливниці 4,59 хв., ураження листів дефектом «розшарування» буде мінімальним і складе:

$y^{min} = 3{,}3233 \cdot 1{,}9431 \cdot 0{,}272 - 1{,}2579 \cdot 4{,}59 + 3{,}5626 \cdot 0{,}272^2 + 0{,}136815 \cdot 4{,}59^2 = 0{,}167\%.$

На закінчення необхідно відзначити, що через неоднакову дисперсію коефіцієнтів рівняння регресії критерій ортогональності є недостатньо сильним критерієм оптимальності для планування 2-го порядку. Тому точність передбачення вихідної величини в різних напрямках факторного простору неоднакова.

5.2.2 Центральні композиційні ротатабельні плани другого порядку (ЦКРП)

Кращим методом планування є такий метод, який забезпечує однакову точність у всіх напрямках на однаковій відстані від центра. Такий метод в 1957 році запропонували Бокс і Хантер. Центральний композиційний ротатабельний план дозволяє побудувати матрицю, що забезпечує отримання моделі, передбачає величину відгуку з однаковою дисперсією у всіх точках факторного простору, що знаходяться на однаковій відстані від центра плану. Використання його найзручніше в тих випадках, коли експеримент проводиться в області екстремуму, точні координати якого мають буди знайдені. В цьому випадку ротатабельність забезпечує рівні можливості для пошуку екстремуму. Крім того, ротатабельні плани мінімізують систематичну помилку, що виникає внаслідок неадекватності функцій відгуку, коли поліном другого порядку застосовується для апроксимації поверхні, що є насправді поверхнею третього порядку.

Ротатабельні плани, як і ортогональні, є композиційними. Вони дозволяють зберегти експериментальну інформацію, отриману за допомогою ПФЕ і ДФЕ, прийняти ці досліди в якості ядра плану і доповнити його дослідами в «зоряних точках» і в центрі плану. Таким чином композиційні центральні ротатабельні плани складаються з трьох сфер:

- сфера нульового радіуса (центральні точки);
- сфера точок правильного багатокутника (куба або гіперкуба);
- сфера «зоряних точок».

Типовими прикладами ротатабельних планів є плани, що подаються вершинами і щонайменше однією центральною точкою будь-якого $(n-1)$-мірного правильного багатокутника, який можна вписати в коло.

При 2 факторах $k=2$ точки можуть розміщуватися в вершинах правильного п’ятикутника, шестикутника і т.д. і, додаючи до них суворо певну кількість центральних точок, можна отримати ротатабельні плани 2-го порядку. Графічне представлення ЦРКП наведено на рисунку 5.3.

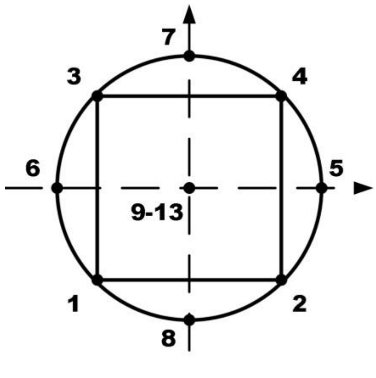


Рисунок 5.3 – Ротатабельний план 2-го порядку (цифри біля точок – номер досліду): 1-4 – точки правильного багатокутника; 5-8 – «зоряні точки»; 9-13 – центральні точки

При $k=3$ умова ротатабельності виконується для ікосаедра $(n=12)$ і додекаедр $(n=20)$ проте їх використання призводить до виродження матриці. Але якщо їх скомбінувати з певними кількостями центральних точок, то можна отримати ротатабельні плани другого порядку. При $k=4$ правильні фігури будуть лише для $n=24; 120; 600$. Останні дві фігури є нецікавими оскільки n

занадто велике, а для $n = 24$ матимуть місце комбінація чотиривимірного октаедра з гіперкубом.

Таким чином ЦКРП дозволяє отримати більш точний математичний опис, що досягається завдяки збільшенню числа дослідів в центрі плану та спеціальному вибору величини «зоряного плеча» α.

Загальна кількість дослідів для ЦКРП визначається так само, як і для всіх композиційних планів.

$$N = N_1 + N_\alpha + N_0 , \tag{5.72}$$

де N_1 – число дослідів в ядрі плану; N_α – число дослідів в зоряних точках; N_0 – число дослідів в центрі плану.

Або в розгорнутому вигляді:

- при $k < 5$ в якості ядра беремо ПФЕ 2^k $N = 2^k + 2k + N_0$;
- при $k \geq 5$ в якості ядра беремо ДФЕ 2^{k-p} $N = 2^{k-p} + 2k + N_0$.

Таким чином число точок в ядрі плану і в зоряних точках визначається числом досліджуваних факторів, при цьому координати точок в ядрі плану будуть (± 1; ± 1; .... ± 1), а для зоряних точок (0; ±α; 0 ... 0); (±α; 0; 0 ... 0); (0; 0; ±α; 0).

Величина зоряного плану для ЦКРП може бути визначена за допомогою співвідношень:

- при $k < 5$ $\qquad 2^k + 2\alpha^4 = 3 \cdot 2^k \to \alpha = 2^{k/4}$;
- при $k \geq 5$ $\qquad 2^{k-p} + 2\alpha^4 = 3 \cdot 2^{k-p} \to \alpha = 2^{k-p/4}$.

Для ротатабельного планування 2-го порядку важливе значення має вибір числа дослідів в центрі плану, оскільки їх число визначає характер розподілу одержуваної інформації про поверхні відгуку, і воно <u>не може</u>, на відміну від ОЦКП, <u>обиратися довільно</u>.

Число дослідів в центрі плану (n_0) визначається виходячи з величини безрозмірного комплексу λ. Можливо кілька підходів до вибору величини λ. Один підхід вимагає виконання так званої *уніформності планування*. *Уніформність* передбачає, що дисперсія передбачення порівняно слабко змінюється або зовсім не змінюється в обсязі факторного простору радіусом від 0 до ± 1, тобто інформаційний потенціал залишається приблизно постійним на ділянці $0 \leq \rho \leq 1$.

Для того, щоб повністю дотриматись умови уніформності, величину безрозмірного комплексу λ слід брати у вигляді додатного кореня рівняння:

$$\lambda^2(2k+4) - \lambda(k+3) - (k-1) = 0, \qquad (5.73)$$

і число дослідів в центрі плану становитиме:

$$n_0 = \lambda \cdot \left(N_1 + 4\sqrt{N_1} + 4\right) - N_1 - 2 \cdot k. \qquad (5.74)$$

Однак розрахунок числа дослідів за рівнянням (5.74) часто дає дробове число n_0 тому, їх необхідно округлити до найближчого цілого числа n'_0, дещо порушуючи умови уніформності. Перераховану величину λ^* можна розрахувати за рівнянням:

$$\lambda^* = \frac{N_1 \cdot (N_1 + 2k + n'_0)}{(N_1 + 4\sqrt{N_1} + 4) \cdot N_1} \text{ або } \lambda^* = \frac{k \cdot N}{(k+2) \cdot (N - n'_0)}, \qquad (5.75)$$

де N_1 – число дослідів в ядрі; n'_0 – округлене до цілого числа, число дослідів в центрі плану.

Інший підхід дозволяє зробити ротатабельні плани майже ортогональними. Для цього необхідно щоб виконувалася умова:

$$\lambda = 1, \qquad (5.76)$$

Таким чином число дослідів центра плану n_0 для майже ортогональних ротатабельних планів отримують за формулою:

$$n_0 = 4\sqrt{N_1} - 2k + 4, \qquad (5.77)$$

За такого підходу загальне число дослідів дещо збільшується, що підвищує ресурсо- і трудовитрати при проведенні моделювання.

Характеристики найбільш поширених симетричних ротатабельних композиційних планів наведені в табл. 5.14.

Таблиця 5.14 – Характеристики найбільш поширених ЦКРП

Число факторів k	Число дослідів в ядрі плану $N_1 = 2^k$	Зоряне плече $\alpha = 2^{\frac{k-p}{4}}$	Число зоряних точок $N_\alpha = 2 \cdot k$	Безрозмірний комплекс λ	Число дослідів в центрі плану (розрахункове) n_0	Округлене число дослідів в центрі плану n'_0	Уточнений безрозмірний комплекс λ^*	Загальна кількість дослідів N	
2	4	1,4142	4	0,7844	4,54983	5	0,8125	13	УЦРКП
				1	8	–	–	16	ОЦРКП
3	8	1,6818	6	0,8385	5,5489	6	0,8571	20	УЦРКП
				1	9,313	9	0,98654	23	ОЦРКП
4	16	2	8	0,87051	7,3383	7	0,86111	31	УЦРКП
				1	12	–	–	36	ОЦРКП
5^{-1} $1 \equiv X_1X_2X_3X_4X_5$	16	2	10	0,8918	6,1048	6	0,8888	32	УЦРКП
				1	10	–	–	36	ОЦРКП
6^{-1} $1 \equiv X_1X_2X_3X_4X_5X_6$	32	2,3784	12	0,907	9,1768	9	0,90401	53	УЦРКП
				1	14,627	14	0,98929	58	ОЦРКП

*УЦКРП – уніформний центральний композиційний ротатабельний план; ОЦКРП – ортогональний центральний композиційний ротатабельний план.

Після знаходження величин зоряного плеча і числа точок в центрі плану переходять до побудови матриці планування.

Приклад складання матриці планування для уніформного центрального ротатабельного плану при $k = 2$ і $\lambda^* = 0{,}8125$ наведено в табл. 5.15.

Після складання план-матриці проводять нормування і кодування факторів. Потім відповідно до умов, прийнятих в матриці планування, проводять досліди в рандомному порядку. Обробка результатів моделювання здійснюється в наступній послідовності.

1) Визначаємо дисперсію відтворюваності дослідів.

2) Знаходимо коефіцієнти регресії, їх дисперсії і середньо-квадратичне відхилення.
3) Перевіряємо коефіцієнти регресії на значущість.
4) Перевіряємо отримане рівняння регресії на адекватність.
5) Декодуємо рівняння регресії.

Таблиця 5.15 – Приклад матриці планування для уніформного ЦКРП

№ досліду	X_0	X_1	X_2	$X_1 \cdot X_2$	X_1^2	X_2^2	
1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Ядро плану $N_1 = 2^k = 4$
2	+1	–1	+1	–1	+1	+1	
3	+1	+1	–1	–1	+1	+1	
4	+1	–1	–1	+1	+1	+1	
5	+1	+1,4142	0	0	2	0	Зоряні точки $N_\alpha = 2k = 4$
6	+1	–1,4142	0	0	2	0	
7	+1	0	+1,4142	0	0	2	
8	+1	0	–1,4142	0	0	2	
9	+1	0	0	0	0	0	Точки в центрі плану $n'_0 = 5$
10	+1	0	0	0	0	0	
11	+1	0	0	0	0	0	
12	+1	0	0	0	0	0	
13	+1	0	0	0	0	0	

Розберемо етапи обробки дослідів більш докладно.

1) Дісперсія відтворюваності S_y^2 при проведенні ЦКРП визначається за дослідами в центрі плану за методикою аналогічною для ЦКОЛ. Знаходимо середнє значення для дослідів в центрі плану $\overline{Y_0} = \frac{1}{n_0}\sum_{i=1}^{n_0} Y_{0-1}$ потім визначаємо дисперсію дослідів S_0^2 і рівну їй дисперсію відтворюваності $S_y^2 = S_0^2 = \frac{1}{n_0-1}\sum_{i=1}^{n_0}(Y_{oi} - \overline{Y_0})^2$. Число ступенів свободи для S_y^2 дорівнює $f = n_0 - 1$.

2) Визначення коефіцієнтів рівняння регресії для ЦКРП. Можливі два методи знаходження коефіцієнтів рівняння регресії.

а) попередньо визначаємо наступні константи:

$$\lambda^* = \frac{N \cdot k}{(k+2) \cdot (N - n_0)}, \tag{5.78}$$

$$A = \frac{1}{2\lambda^*[(k+2) \cdot \lambda^* - k]}, \tag{5.79}$$

$$C = \frac{N}{\sum X_{ij}^2}, \tag{5.80}$$

де N – загальне число дослідів; k – число факторів; n_0 – число дослідів в центрі плану; $\sum X_{ij}^2$ – сума одного з квадратичних стовпців в матриці планування.

Розрахунок коефіцієнтів рівняння регресії здійснюється за формулами:

$$b_0 = \frac{2 \cdot A \cdot \lambda^*}{N} \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} X_{0j} \cdot Y_j \cdot \lambda^*(k+2) - C \cdot \sum_{i=1}^{K} \cdot \sum_{j=1}^{N} X_{ij}^2 \cdot Y_j\right], \tag{5.81}$$

$$b_i = \frac{C}{N} \cdot \sum_{j=1}^{N} X_{ij} \cdot Y_j, \tag{5.82}$$

$$b_{iu} = \frac{C^2}{N \cdot \lambda^*} \cdot \sum_{j=1}^{N} X_{ij} \cdot X_{iu} \cdot Y_j, \tag{5.83}$$

$$b_{ii} = \frac{A \cdot C}{N}\left\{C \cdot [(k+2) \cdot \lambda^* - k] \cdot \sum_{j=1}^{N} X_{ij}^2 \cdot Y_j + C \cdot (1 - \lambda^*) \cdot \sum_{i=1}^{k} \cdot \sum_{j=1}^{N} X_{ij}^2 \cdot Y_j - 2 \cdot \lambda^* \cdot \sum_{j=1}^{N} X_{0j} \cdot Y_j\right\}, \tag{5.84}$$

Розрахунок дисперсій у визначенні коефіцієнтів регресії обчислюють за наступними формулами:

$$S_{b_0}^2 = \frac{2 \cdot A \cdot \lambda^*(k+2)}{N} \cdot S_{\text{від.}}^2, \tag{5.85}$$

$$S_{b_i}^2 = \frac{S_{\text{від.}}^2}{N - n_0} \text{ або } S_{b_i}^2 = \frac{C}{N} \cdot S_{\text{від.}}^2, \tag{5.86}$$

$$S_{b_{iu}}^2 = \frac{C^2}{\lambda^* \cdot N} \cdot S_{\text{від.}}^2, \tag{5.87}$$

$$S_{b_{ii}}^2 = \frac{A \cdot C^2}{N} \cdot [\lambda^*(k+1) - (k-1)] \cdot S_{\text{від.}}^2. \tag{5.88}$$

Середньоквадратичне відхилення знаходимо, добуваючи корінь квадратний з дисперсії коефіцієнтів регресії:

$$S_{b_0} = \sqrt{S_{b_0}^2}, \tag{5.89}$$

$$S_{b_i} = \sqrt{S_{b_i}^2}, \tag{5.90}$$

$$S_{b_{iu}} = \sqrt{S_{b_{iu}}^2}, \tag{5.91}$$

$$S_{b_{ii}} = \sqrt{S_{b_{ii}}^2}, \tag{5.92}$$

б) Другий метод знаходження коефіцієнтів рівняння регресії при ЦКРП заснований на використанні заздалегідь розрахованих табличних коефіцієнтів. Деякі з них, що використовуються при розрахунку уніформних ЦКРП, наведені в табл. 5.16.

Таблиця 5.16 – Табличні коефіцієнти для ЦКРП

ядро плану	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
2^2	0,2	0,1	0,125	0,25	0,125	0,01875	0,44721	0,35355	0,5	0,37914
2^3	0,16634	0,0568	0,07322	0,125	0,0625	0,00689	0,40786	0,27059	0,35355	0,26342
2^4	0,14286	0,03511	0,04167	0,0625	0,03125	0,00372	0,37798	0,20413	0,25	0,18702

Коефіцієнти регресії розраховуються за формулами:

$$b_0 = C_1 \cdot \sum Y_j - C_2 \cdot \sum_{i=1}^{k} \cdot \sum X_{ij}^2 \cdot Y_j, \tag{5.93}$$

$$b_i = C_3 \cdot \sum X_{ij}^2 \cdot Y_j, \tag{5.94}$$

$$b_{iu} = C_4 \cdot \sum (X_i \cdot X_u) \cdot Y_j, \tag{5.95}$$

$$b_{ii} = C_5 \cdot \sum X_{ij}^2 \cdot Y_j + C_6 \cdot \sum_{i=1}^{k} \cdot \sum X_{ij}^2 \cdot Y_j - C_2 \cdot \sum Y_j. \tag{5.96}$$

Дисперсії коефіцієнтів регресії знаходимо за формулами:

$$S_{b_0}^2 = C_1 \cdot S_y^2, \tag{5.97}$$

$$S_{b_i}^2 = C_3 \cdot S_y^2, \tag{5.98}$$

$$S_{b_{iu}}^2 = C_4 \cdot S_y^2, \tag{5.99}$$

$$S_{b_{ii}}^2 = (C_5 + C_6) \cdot S_y^2. \tag{5.100}$$

Середньоквадратичні відхилення знаходимо за формулами:

$$S_{b_0} = C_7 \cdot S_y, \tag{5.101}$$

$$S_{b_i} = C_8 \cdot S_y, \tag{5.102}$$

$$S_{b_{iu}} = C_9 \cdot S_y, \tag{5.103}$$

$$S_{b_{ii}} = C_{10} \cdot S_y, \tag{5.104}$$

або просто добуваючи квадратні корені з дисперсії коефіцієнтів регресії.

3) Значущість знайдених коефіцієнтів визначають за критерієм Стьюдента порівнюючи його розрахункові величини для кожного коефіцієнта з табличною величиною, яку зазвичай беруть з надійністю 0,95 і числом ступенів свободи $f_1 = n_0 - 1$. У разі якщо незначним виявляється будь-який з коефіцієнтів 1-го порядку, або ефект змішання, то вони просто виключаються з рівняння регресії без перерахунку інших коефіцієнтів. Але якщо незначущим виявився один з квадратичних коефіцієнтів, то після його виключення коефіцієнти рівняння регресії b_0 і b_{ii}, що залишилися, разом з їх дисперсіями необхідно перерахувати.

Це пов’язано з тим, що навіть при використанні майже ортогональних центральних композиційних ротатабельних планів (ОЦКРП) ($\lambda = 1$), відмінною від нуля виявляється ковариация $COV_{b_0,b_{ii}} \neq 0$, тобто вільний член корелює з квадратичними ефектами. А у разі моделювання з використанням уніформних центральних композиційних ротатабельних планів (УЦКРП) виконання умови сталості інформаційного потенціалу плану в якомога більшому обсязі факторного простору ($0 \leq \rho \leq 1$) вимагає, щоб величина λ була трохи менше одиниці. Це призводить до подальшої втрати ортогональності – відмінною від 0 стає коваріація $COV_{b_{ii},b_{uu}} \neq 0$, тобто квадратичні ефекти починають корелювати не лише з вільним членом, але й між собою.

4) Перевірка адекватності отриманого рівняння регресії здійснюється за допомогою критерію Фішера за стандартною методикою аналогічною тій, що використовується при перевірці адекватності рівняння 1-го порядку.

5) Якщо перевірка адекватності дає позитивний результат, то **здійснюється декодування рівняння регресії** з отриманням рівняння регресії, що містить фактори в натуральному вигляді.

Розберемо приклад ЦКРП.

Потрібно дослідити вплив трьох виробничих факторів на якість виробництва магнітних дисків за умов варіювання факторів: $X_1 - 27 - 33B$; $X_2 - 16 - 20A$ и $X_3 - 200 - 240$°C.

Перед початком моделювання проведемо кодування факторів.

Для X_1. Основний рівень $X_1^0 = \frac{X_1^{max}+X_1^{min}}{2} = \frac{33+27}{2} = 30$; інтервал варіювання $\Delta X_1 = \frac{X_1^{max}+X_1^{min}}{2} = \frac{33+27}{2} = 30$; верхній рівень $X_1^{в} = \frac{X_1^{max}-X_1^0}{\Delta X_1} = \frac{33-30}{3} = +1$; нижній рівень $X_1^{н} = \frac{X_1^{min}-X_1^0}{\Delta X_1} = \frac{27-30}{3} = -1$.

Кодована величина для $X_1 = \frac{X_1-30}{3}$.

Для X_2 Основний рівень $X_2^0 = \frac{X_2^{max}+X_2^{min}}{2} = \frac{16+20}{2} = 18$; інтервал варіювання $\Delta X_2 = \frac{X_2^{max}-X_2^{min}}{2} = \frac{20-16}{2} = 2$; верхній рівень $X_2^{в} = \frac{X_2^{max}-X_2^0}{\Delta X_2} = \frac{20-18}{2} = +1$; нижній рівень $X_2^{н} = \frac{X_2^{min}-X_2^0}{\Delta X_2} = \frac{16-18}{2} = -1$.

Кодована величина для $X_2 = \frac{X_2-18}{2}$.

Для X_3. Основний рівень $X_3^0 = \frac{X_3^{max}+X_3^{min}}{2} = \frac{200+240}{2} = 220$; інтервал варіювання $\Delta X_3 = \frac{X_3^{max}-X_3^{min}}{2} = \frac{240-200}{2} = 20$; верхній рівень $X_3^{в} = \frac{X_3^{max}-X_3^0}{\Delta X_3} = \frac{240-220}{20} = +1$; нижній рівень $X_3^{н} = \frac{X_3^{min}-X_3^0}{\Delta X_3} = \frac{200-220}{20} = -1$.

Кодована величина для $X_3 = \frac{X_3 - 220}{20}$.

Приймемо, що для проведення дослідження буде використаний уніформний ЦКРП. Розрахуємо його параметри. Загальна кількість дослідів в УЦКРП: $N = N_1 + N_\alpha + n_0$.

Число дослідів в ядрі плану: $N_1 = 2^k = 2^3 = 8$ дослідів.

Число дослідів в зоряних точках: $N_\alpha = 2 \cdot k = 2 \cdot 3 = 6$ дослідів.

Для розрахунку числа дослідів в центрі плану розрахуємо безрозмірний комплекс λ з рівняння:

$\lambda^2(2k+4) - \lambda(k+3) - (k-1) = 0,$

$\lambda^2(2 \cdot 3 + 4) - \lambda(3+3) - (3-1) = 0,$

$10\lambda^2 - 6\lambda - 2 = 0,$

$Д = 6^2 + 4 \cdot 20 \cdot 2 = 36 + 80 = 116,$

$\lambda = \frac{-(-6)+\sqrt{116}}{2 \cdot 10} = 0{,}8385.$

Розрахункове число дослідів: $n_0 = \lambda\left(2^k + 4\sqrt{2^k} + 4\right) - 2^k - 2 \cdot k = 0{,}8385\left(2^3 + 4\sqrt{2^3} + 4\right) - 2^3 - 2 \cdot 3 = 5{,}5489$. Оскільки число дослідів вийшло дробовим, то округлимо його до цілого числа $n_0 = 6$. Таким чином загальне число дослідів: $N = N_1 + N_\alpha + n_0 = 8 + 6 + 6 = 20$

Перерахуємо величину безрозмірного комплексу: $\lambda^* = \frac{k \cdot N}{(k+2)\cdot(N-n_0)} = \frac{3 \cdot 20}{(3+2)\cdot(20-6)} = \frac{60}{5 \cdot 14} = 0{,}8571.$

Знайдемо величину зоряного плеча: $\alpha = 2^{k/4} = 2^{3/4} = 1{,}6818.$

Натуральні значення факторів в зіркових точках складуть:

Для X_1: $X_{+\alpha}^1 = X_1^0 + \alpha \cdot \Delta X_1 = 30 + 1{,}6818 \cdot 3 = 35{,}0454;$

$X_{-\alpha}^1 = X_1^0 - \alpha \cdot \Delta X_1 = 30 - 1{,}6818 \cdot 3 = 24{,}9546.$

Для X_2: $X_{+\alpha}^2 = X_2^0 + \alpha \cdot \Delta X_2 = 18 + 1{,}6818 \cdot 2 = 21{,}3636;$

$X_{-\alpha}^2 = X_2^0 - \alpha \cdot \Delta X_2 = 18 - 1{,}6818 \cdot 2 = 14{,}6364.$

Для X_3: $X_{+\alpha}^3 = X_3^0 + \alpha \cdot \Delta X_3 = 220 + 1{,}6818 \cdot 20 = 253{,}636$

$X_{-\alpha}^3 = X_3^0 - \alpha \cdot \Delta X_3 = 220 - 1{,}6818 \cdot 20 = 186{,}364.$

Складемо УЦКРП матрицю планування (табл. 5.17).

Таблиця 5.17 – Приклад УЦКРП матриці планування

№ дослідy		X_0	X_1		X_2		X_3		X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	X_1^2	X_2^2	X_3^2	Y_u	$\hat{Y}_{розр.}$
			код.	натур.	код.	натур.	код.	натур.								
1	4	+1	-1	27	-1	16	-1	200	+1	+1	+1	+1	+1	+1	2,533	2,49
2	8	+1	+1	33	-1	16	-1	200	-1	-1	+1	+1	+1	+1	7,366	7,417
3	13	+1	-1	27	+1	10	-1	200	-1	+1	-1	+1	+1	+1	0,597	0,8166
4	18	+1	+1	33	+1	20	-1	200	+1	-1	-1	+1	+1	+1	8,47	8,166
5	20	+1	-1	27	-1	16	+1	240	+1	-1	-1	+1	+1	+1	4,683	4,898
6	15	+1	+1	33	-1	16	+1	240	-1	+1	-1	+1	+1	+1	6,193	5,886
7	19	+1	-1	27	+1	20	+1	240	-1	-1	+1	+1	+1	+1	0,346	0,204
8	1	+1	+1	33	+1	20	+1	240	+1	+1	+1	+1	+1	+1	3,663	3,615
9	11	+1	-1,6818	35,0454	0	18	0	220	0	0	0	2,8284	0	0	-0,6	-0,79
10	6	+1	+1,6816	24,9606	0	18	0	220	0	0	0	2,8284	0	0	5,903	6,221
11	17	+1	0	30	-1,6818	14,6364	0	220	0	0	0	0	2,8284	0	7,13	7,136
12	14	+1	0	30	+1,6818	21,3636	0	220	0	0	0	0	2,8284	0	3,696	3,817
13	16	+1	0	30	0	18	-1,6818	186,36	0	0	0	0	0	2,8284	5,326	5,306

*Досліди №1-8 – ядро плану; №9-14 – зоряні точки; №15-20 – центр плану.

Величини X_1, X_2, X_3 в натуральному вигляді зазвичай не вносять в матрицю планування. Величини Y_u вносимо в таблицю після проведення дослідів, а $\hat{Y}_u$ – після знаходження рівняння регресії.

Знайдемо дисперсію відтворюваності за дослідами в центрі плану. У нас 6 дослідів в центральній точці плану $\overline{Y_0} = \frac{1}{n_0} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} Y_{oi}$.

Середня величина: $\overline{Y_0} = \frac{1}{6}(4{,}633 + 4{,}223 + 4{,}453 + 4{,}39 + 4{,}186 + 4{,}52) = 4{,}401$.

Число ступенів свободи: $f_1 = n_0 - 1 = 6 - 1 = 5$.

Дисперсія відтворюваності: $S_y^2 = \frac{1}{n_0 - 1} \cdot \sum_{i=1}^{n_0} \left(Y_{oi} - \overline{Y_0}\right)^2 = \frac{1}{6-1} \cdot \left((4{,}633 - 4{,}401)^2 + (4{,}223 - 4{,}401)^2 + (4{,}453 - 4{,}401)^2 + (4{,}39 - 4{,}401)^2 + (4{,}186 - 4{,}401)^2 + (4{,}52 - 4{,}401)^2\right) = 0{,}029701$.

Знайдемо коефіцієнти рівняння регресії. Попередньо складемо допоміжну таблицю і знайдемо константи A і C.

Таблиця 5.17 – Допоміжна таблиця

№ досліду	$X_0 \cdot Y_u$	$X_1 \cdot Y_u$	$X_2 \cdot Y_u$	$X_3 \cdot Y_u$	$X_1 X_2 \cdot Y_u$	$X_1 X_3 \cdot Y_u$	$X_2 X_3 \cdot Y_u$	$X_1^2 \cdot Y_u$	$X_2^2 \cdot Y_u$	$X_3^2 \cdot Y_u$
1	2,533	–2,533	–2,533	–2,533	2,533	2,533	2,533	2,533	2,533	2,533
2	7,366	7,366	–7,366	–7,366	–7,366	–7,366	7,366	7,366	7,366	7,366
3	0,5976	–0,5976	0,5976	–0,597	–0,597	0,5976	–0,597	0,5976	0,5976	0,5976
4	8,47	8,47	8,47	–8,47	8,47	–8,47	–8,47	8,47	8,47	8,47
5	4,6833	–4,6833	–4,683	4,6833	4,6833	–4,683	–4,683	4,6833	4,6833	4,6833
6	6,1933	6,1933	–6,193	6,1933	–6,193	6,1933	–6,193	6,1933	6,1933	6,1933
7	0,3466	–0,3466	0,3466	0,3466	–0,346	–0,346	0,3466	0,3466	0,3466	0,3466
8	3,6633	3,6633	3,6633	3,6633	3,6633	3,6633	3,6633	3,6633	3,6633	3,6633
9	–0,6	1,009	0	0	0	0	0	–1,697	0	0
10	5,9033	9,9281	0	0	0	0	0	16,697	0	0
11	7,13	0	–11,99	0	0	0	0	0	20,166	0
12	3,6966	0	6,2170	0	0	0	0	0	10,4357	0
13	5,3266	0	0	–8,958	0	0	0	0	0	15,066
14	3,4033	0	0	5,7237	0	0	0	0	0	9,6260
15	4,6333	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	4,2233	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	4,4533	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	4,39	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	4,1866	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	4,52	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Сума	85,121	28,4695	–13,47	–7,315	4,8456	–7,879	–6,034	48,854	64,4767	58,546

Константа $A = \frac{1}{2\cdot\lambda^*[(k+2)\cdot\lambda^*-k]} = \frac{1}{2\cdot 0{,}8571[(3+2)\cdot 0{,}8571-3]} = \frac{1}{2{,}204081} = 0{,}453703.$

Константа $C = \frac{N}{\sum X_{ii}^2} = \frac{20}{13{,}6568} = 1{,}46446.$

Розрахуємо коефіцієнти регресії:

$$b_0 = \frac{2\cdot A\cdot\lambda^*}{N}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\cdot X_{oj}\cdot Y_j\cdot\lambda^*\cdot(k+2) - C\cdot\sum_{i=1}^{k}\cdot\sum_{i=1}^{N}\cdot X_{ij}^2\cdot Y_i\right]$$

$$b_0 = \frac{2\cdot 0{,}453703\cdot 0{,}8571}{20}\cdot[85{,}121\cdot 0{,}8571\cdot(3+2) - 1{,}4644\cdot(48{,}8544+64{,}4767+58{,}5465)] = 4{,}3981$$

$$b_i = \frac{C}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}\cdot X_i\cdot Y_i$$

$b_1 = \frac{1{,}4644}{20}\cdot 28{,}4695 = 2{,}0846;$

$b_2 = \frac{1{,}4644}{20}\cdot(-13{,}4731) = -0{,}9865;$

$b_3 = \frac{1{,}4644}{20}\cdot(-7{,}3156) = -0{,}5356.$

$$b_{iu} = \frac{C^2}{N\cdot\lambda^*}\cdot\sum_{i=1}^{N}\cdot X_i\cdot X_u\cdot Y_i$$

$b_{12} = \frac{1{,}4644^2}{20\cdot 0{,}3571}\cdot 4{,}8456 = 0{,}6062;$

$b_{13} = \frac{1{,}4644^2}{20\cdot 0{,}8571}\cdot(-7{,}879) = -0{,}9857;$

$b_{23} = \frac{1{,}4644^2}{20\cdot 0{,}8571}\cdot(-6{,}0343) = -0{,}7549.$

$$b_{ii} = \frac{A\cdot C}{N}\cdot\left\{C\cdot[(k+2)\cdot\lambda^*-k]\cdot\sum_{i=1}^{N}\cdot X_{ii}^2\cdot Y_i + C\cdot(1-\lambda^*)\cdot\sum_{i=1}^{k}\cdot\sum_{i=1}^{N}\cdot X_{ii}^2\cdot Y_i - 2\lambda^*\cdot\sum_{i=1}^{N}\cdot X_{oi}\cdot Y_i\right\}$$

$b_{11} = \frac{0{,}4537\cdot 1{,}4644}{20}\cdot\{1{,}4644\cdot[(3+2)\cdot 0{,}8571-3]\cdot 48{,}8544 + 1{,}4644\cdot(1-0{,}8571)\cdot(48{,}8544+64{,}4767+58{,}5465) - 2\cdot 0{,}8571\cdot 85{,}121\} = -0{,}59719.$

$b_{22} = \frac{0{,}4537 \cdot 1{,}4644}{20} \cdot \{1{,}4644 \cdot [(3+2) \cdot 0{,}8571 - 3] \cdot 64{,}4767 + 1{,}4644 \cdot (1 - 0{,}8571) \cdot (48{,}8544 + 64{,}4767 + 58{,}5465) - 2 \cdot 0{,}8571 \cdot 85{,}121\} = 0{,}38.$

$b_{33} = \frac{0{,}4537 \cdot 1{,}4644}{20} \cdot \{1{,}4644 \cdot [(3+2) \cdot 0{,}8571 - 3] \cdot 58{,}5465 + 1{,}4644 \cdot (1 - 0{,}8571) \cdot (48{,}8544 + 64{,}4767 + 58{,}5465) - 2 \cdot 0{,}8571 \cdot 85{,}121\} = 0{,}00907.$

Знайдемо дисперсії коефіцієнтів регресії:

$S_{b_0}^2 = \frac{2 \cdot A \cdot X^2 \cdot (k+2)}{N} \cdot S_{\text{від.}}^2 = \frac{2 \cdot 0{,}453703 \cdot 0{,}8571^2 \cdot (3+2)}{20} \cdot 0{,}029701 = 0{,}00495.$

$S_{b_i}^2 = \frac{C}{N} \cdot S_{\text{від.}}^2 = \frac{1{,}4644}{20} \cdot 0{,}029701 = 0{,}00212 \leftarrow S_{b_1}^2 = S_{b_2}^2 = S_{b_3}^2;$

$S_{b_{iu}}^2 = \frac{C^2}{\lambda^* \cdot N} \cdot S_{\text{від.}}^2 = \frac{1{,}4644^2}{0{,}8571 \cdot 20} \cdot 0{,}029701 = 0{,}003715 \leftarrow S_{b_{12}}^2 = S_{b_{13}}^2 = S_{b_{23}}^2;$

$S_{b_{ii}}^2 = \frac{A \cdot C}{N} [\lambda^*(k+1) - (k-1)] \cdot S_{\text{від.}}^2 = \frac{0{,}453703 \cdot 1{,}4644^2}{20} [0{,}8571 \cdot (3+1) - (3-1)] \cdot 0{,}029701 = 0{,}00206 \leftarrow S_{b_{12}}^2 = S_{b_{13}}^2 = S_{b_{23}}^2.$

Знайдемо середньоквадратичне відхилення:

$S_{b_0} = \sqrt{S_{b_0}^2} = \sqrt{0{,}00495} = 0{,}07035;$ $S_{b_{iu}} = \sqrt{S_{b_{iu}}^2} = \sqrt{0{,}003715} = 0{,}06095$

$S_{b_i} = \sqrt{S_{b_i}^2} = \sqrt{0{,}00212} = 0{,}04606;$ $S_{b_{ii}} = \sqrt{S_{b_{ii}}^2} = \sqrt{0{,}00206} = 0{,}04538.$

Розрахуємо величини критерію Стьюдента для коефіцієнтів рівняння регресії:

$t_{b_0} = \frac{|b_0|}{S_{b_0}} = \frac{4{,}3981}{0{,}07035} = 62{,}511;$

$t_{b_1} = \frac{|b_1|}{S_{b_1}} = \frac{2{,}0846}{0{,}04606} = 45{,}259;$

$t_{b_2} = \frac{|b_2|}{S_{b_2}} = \frac{0{,}9865}{0{,}04606} = 21{,}418;$

$t_{b_3} = \frac{|b_3|}{S_{b_3}} = \frac{0{,}5356}{0{,}04606} = 11{,}63;$

$t_{b_{12}} = \frac{|b_{12}|}{S_{b_{12}}} = \frac{0{,}6062}{0{,}06095} = 9{,}945;$

$t_{b_{13}} = \frac{|b_{13}|}{S_{b_{13}}} = \frac{0{,}9857}{0{,}06095} = 16{,}170;$

$t_{b_{23}} = \frac{|b_{23}|}{S_{b_{23}}} = \frac{0{,}7549}{0{,}06095} = 12{,}384;$

$t_{b_{11}} = \frac{|b_{11}|}{S_{b_{11}}} = \frac{0{,}59719}{0{,}04538} = 13{,}144;$

$t_{b_{22}} = \frac{|b_{22}|}{S_{b_{22}}} = \frac{0{,}38}{0{,}04538} = 8{,}364;$

$t_{b_{33}} = \frac{|b_{33}|}{S_{b_{33}}} = \frac{0{,}00907}{0{,}04538} = 0{,}1996.$

Користуючись табличними даними, знайдемо критичну величину критерію Стьюдента приймаючи значимість 0,05 і число ступенів свободи $f_1 = n_0 - 1 = 6 - 1 = 5$. Критична величина критерію Стьюдента для умов прикладу $t_{0,05}^{\text{кр.}} = 2{,}57058$.

Порівняємо розрахункові величини критерію Стьюдента з критичною величиною і якщо розрахункові величини більші за критичну, то визнаємо коефіцієнт значущим, якщо менші, то коефіцієнт визнається не значущим. При цьому необхідно пам'ятати, що при ротатабельному ЦКП оцінки коефіцієнтів при лінійних членах і парних взаємодіях не корелюють з оцінками інших коефіцієнтів і за їх незначущості вони можуть бути просто виключені, а оцінки при квадратичних членах корельовані між собою і оцінкою вільного члена. Тому якщо незначущим виявилися один або більше квадратичних ефектів, то після їх виключення коефіцієнти b_0 і залишкові коефіцієнти b_{ii}, а також їх дисперсії необхідно перерахувати.

Порівнюючи отримані величини критерію Стьюдента з його критичною величиною бачимо, що незначущим виявився квадратичний коефіцієнт b_{33} $\left(t_{b_{33}} = 0{,}1996 < t_{0,05}^{\text{крит.}} = 2{,}5708\right)$. Значить виключаємо коефіцієнт b_{33}, визнаємо коефіцієнти $b_1, b_2, b_3, b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{11}, b_{22}$ і b_0 значущими, але величини коефіцієнтів b_0, b_{11}, b_{22} потребують перерахунку.

Для перерахунку величин коефіцієнтів складемо систему нормальних рівнянь:

$$b_0 \cdot \sum X_0 + b_1 \cdot \sum X_1 + b_2 \cdot \sum X_2 + b_3 \cdot \sum X_3 + b_{12} \cdot \sum X_1 X_2 + b_{13} \cdot \sum X_1 X_3 + b_{23} \cdot \sum X_2 X_3 + b_{11} \cdot \sum X_1^2 + b_{12} \cdot \sum X_2^2 = \sum X_0 \cdot Y_u$$

$$b_0 \cdot \sum X_1 + b_1 \cdot \sum X_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot \sum X_2 \cdot X_1 + b_3 \cdot \sum X_3 \cdot X_1 + b_{12} \cdot \sum X_1 X_2 \cdot X_1 + b_{13} \cdot \sum X_1 X_3 \cdot X_1 + b_{23} \cdot \sum X_2 X_3 \cdot X_1 + b_{11} \cdot \sum X_1^2 \cdot X_1 + b_{12} \cdot \sum X_2^2 \cdot X_1 = \sum X_1 \cdot Y_u$$

$$b_0 \cdot \sum X_2 + b_1 \cdot \sum X_1 \cdot X_2 + b_2 \cdot \sum X_2 \cdot X_2 + b_3 \cdot \sum X_3 \cdot X_2 + b_{12} \cdot \sum X_1 X_2 \cdot X_2 + b_{13} \cdot \sum X_1 X_3 \cdot X_2 + b_{23} \cdot \sum X_2 X_3 \cdot X_2 + b_{11} \cdot \sum X_1^2 \cdot X_2 + b_{12} \cdot \sum X_2^2 \cdot X_2 = \sum X_2 \cdot Y_u$$

$$b_0 \cdot \sum X_3 + b_1 \cdot \sum X_1 \cdot X_3 + b_2 \cdot \sum X_2 \cdot X_3 + b_3 \cdot \sum X_3 \cdot X_3 + b_{12} \cdot \sum X_1X_2 \cdot X_3$$
$$+ b_{13} \cdot \sum X_1X_3 \cdot X_3 + b_{23} \cdot \sum X_2X_3 \cdot X_3 + b_{11} \cdot \sum X_1^2 \cdot X_3 + b_{12}$$
$$\cdot \sum X_2^2 \cdot X_3 = \sum X_3 \cdot Y_u$$

$$b_0 \cdot \sum X_1X_2 + b_1 \cdot \sum X_1 \cdot X_1X_2 + b_2 \cdot \sum X_2 \cdot X_1X_2 + b_3 \cdot \sum X_3 \cdot X_1X_2 + b_{12}$$
$$\cdot \sum X_1X_2 \cdot X_1X_2 + b_{13} \cdot \sum X_1X_3 \cdot X_1X_2 + b_{23}$$
$$\cdot \sum X_2X_3 \cdot X_1X_2 + b_{11} \cdot \sum X_1^2 \cdot X_1X_2 + b_{12} \cdot \sum X_2^2 \cdot X_1X_2$$
$$= \sum X_1X_2 \cdot Y_u$$

$$b_0 \cdot \sum X_1X_3 + b_1 \cdot \sum X_1X_1 \cdot X_3 + b_2 \cdot \sum X_2X_1 \cdot X_3 + b_3 \cdot \sum X_3X_2 \cdot X_3 + b_{12}$$
$$\cdot \sum X_1X_2 \cdot X_2X_3 + b_{13} \cdot \sum X_1X_3 \cdot X_2X_3 + b_{23}$$
$$\cdot \sum X_2X_3 \cdot X_2X_3 + b_{11} \cdot \sum X_1^2 X_1 \cdot X_3 + b_{12} \cdot \sum X_2^2 X_1 \cdot X_3$$
$$= \sum X_1X_3 \cdot Y_u$$

$$b_0 \cdot \sum X_1^2 + b_1 \cdot \sum X_1 \cdot X_1^2 + b_2 \cdot \sum X_2 \cdot X_1^2 + b_3 \cdot \sum X_3 \cdot X_1^2 + b_{12} \cdot \sum X_1X_2$$
$$\cdot X_1^2 + b_{13} \cdot \sum X_1X_3 \cdot X_1^2 + b_{23} \cdot \sum X_2X_3 \cdot X_1^2 + b_{11} \cdot \sum X_1^2 \cdot X_1^2$$
$$\cdot \sum X_2^2 \cdot X_1^2 = \sum X_1^2 \cdot Y_u$$

$$b_0 \cdot \sum X_2^2 + b_1 \cdot \sum X_1 \cdot X_2^2 + b_2 \cdot \sum X_2 \cdot X_2^2 + b_3 \cdot \sum X_3 \cdot X_2^2 + b_{12} \cdot \sum X_1X_2$$
$$\cdot X_2^2 + b_{13} \cdot \sum X_1X_3 \cdot X_2^2 + b_{23} \cdot \sum X_2X_3 \cdot X_2^2 + b_{11} \cdot \sum X_1^2 \cdot X_2^2 + b_{12}$$
$$\cdot \sum X_2^2 \cdot X_2^2 = \sum X_2^2 \cdot Y_u$$

$$b_0 \cdot \sum X_2 + b_1 \cdot \sum X_1 \cdot X_2 + b_2 \cdot \sum X_2 \cdot X_2 + b_3 \cdot \sum X_3 \cdot X_2 + b_{12} \cdot \sum X_1X_2 \cdot X_2$$
$$+ b_{13} \cdot \sum X_1X_3 \cdot X_2 + b_{23} \cdot \sum X_2X_3 \cdot X_2 + b_{11} \cdot \sum X_1^2 \cdot X_2 + b_{12}$$
$$\cdot \sum X_2^2 \cdot X_2 = \sum X_2 \cdot Y_u$$

Розраховуємо додаткові величини $\sum X_1^4 = 20$; $\sum X_2^4 = 20$; $\sum (X_1X_2)^2 = 8$; $\sum (X_1X_3)^2 = 8$; $\sum (X_2X_3)^2 = 8$; $\sum X_1^2 \cdot X_2^2 = 8$; $\sum X_2^2 \cdot X_1^2 = 8$.

Таким чином система рівнянь матиме вигляд:

$$20 \cdot b_0 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 0 \cdot b_{12} + 0 \cdot b_{13} + 0 \cdot b_{23} + 13{,}6586 \cdot b_{11} + 13{,}6586 \cdot b_{22} = 85{,}121$$

$$20 \cdot b_0 + 13{,}6586 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 0 \cdot b_{12} + 0 \cdot b_{13} + 0 \cdot b_{23} + 13{,}6586 \cdot b_{11} + 0 \cdot b_{22} = 28{,}4695$$

$$20 \cdot b_0 + 0 \cdot b_1 + 13{,}6568 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 0 \cdot b_{12} + 0 \cdot b_{13} + 0 \cdot b_{23} + 13{,}6586 \cdot b_{11} + 0 \cdot b_{22} = -13{,}4731$$

$$20 \cdot b_0 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 13{,}6586 \cdot b_3 + 0 \cdot b_{12} + 0 \cdot b_{13} + 0 \cdot b_{23} + 13{,}6586 \cdot b_{11} + 0 \cdot b_{22} = -7{,}3156$$

$$20 \cdot b_0 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 8 \cdot b_{12} + 0 \cdot b_{13} + 0 \cdot b_{23} + 0 \cdot b_{11} + 0 \cdot b_{22} = 4{,}8456$$

$$20 \cdot b_0 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 0 \cdot b_{12} + 8 \cdot b_{13} + 0 \cdot b_{23} + 0 \cdot b_{11} + 0 \cdot b_{22} = -7{,}879$$

$$20 \cdot b_0 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 0 \cdot b_{12} + 0 \cdot b_{13} + 8 \cdot b_{23} + 0 \cdot b_{11} + 0 \cdot b_{22} = -6{,}0343$$

$$13{,}6568 \cdot b_0 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 0 \cdot b_{12} + 0 \cdot b_{13} + 0 \cdot b_{23} + 24 \cdot b_{11} + 8 \cdot b_{22} = 48{,}8544$$

$$13{,}6568 \cdot b_0 + 0 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + 0 \cdot b_{12} + 0 \cdot b_{13} + 0 \cdot b_{23} + 8 \cdot b_{11} + 24 \cdot b_{22} = 64{,}4767$$

Вирішуємо отриману систему рівнянь матричним методом і отримуємо перелічені значення коефіцієнтів регресії:

$b_0 = 4{,}4052$; $b_1 = 2{,}0846$; $b_2 = -0{,}9865$; $b_3 = -0{,}5356$; $b_{12} = 0{,}6062$; $b_{13} = -0{,}9857$; $b_{23} = -0{,}7549$; $b_{11} = -0{,}5974$; $b_{22} = 0{,}3789$.

Дисперсії, середньоквадратичні відхилення та розрахункові критерії Стьюдента, уточнених коефіцієнтів регресії складуть:

$S_{b_0}^2 = 0{,}005775$; $S_{b_0} = 0{,}07599$; $t_{b_0} = 62{,}6131$;

$S_{b_1}^2 = 0{,}002121$; $S_{b_1} = 0{,}046059$; $t_{b_1} = 45{,}2596$;

$S_{b_2}^2 = 0{,}002121$; $S_{b_2} = 0{,}046059$; $t_{b_2} = 21{,}4189$;

$S_{b_3}^2 = 0{,}002121$; $S_{b_3} = 0{,}046059$; $t_{b_3} = 11{,}63$;

$S_{b_{12}}^2 = 0{,}003184$; $S_{b_{12}} = 0{,}05643$; $t_{b_{12}} = 10{,}7328$;

$S_{b_{13}}^2 = 0{,}003184$; $S_{b_{13}} = 0{,}05643$; $t_{b_{13}} = 17{,}4515$;

$S_{b_{23}}^2 = 0{,}003184$; $S_{b_{23}} = 0{,}05643$; $t_{b_{23}} = 13{,}3769$;

$S_{b_{11}}^2 = 0{,}002064$; $S_{b_{11}} = 0{,}04543$; $t_{b_{11}} = 13{,}1501$;

$S_{b_{22}}^2 = 0{,}002064;\ S_{b_{22}} = 0{,}04543;\ t_{b_{22}} = 8{,}3401.$

Оскільки всі значення розрахункового значення критерію Стьюдента, для уточнених коефіцієнтів, виявилися більше критичного значення критерію Стьюдента ($t_{0,05}^{\text{крит.}} = 2{,}5708$), то всі коефіцієнти є значущими і їх загальне число, включаючи вільний член дорівнює 9 (l = 9). Рівняння регресії в кодованих значеннях факторів буде мати вигляд:

$$Y = 4{,}4052 + 2{,}0846 \cdot X_1 - 0{,}9865 \cdot X_2 - 0{,}5356 \cdot X_3 + 0{,}6062 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0{,}9857 \cdot X_1 \cdot X_3 - 0{,}7549 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}5974 \cdot X_1^2 + 0{,}3789 \cdot X_2^2.$$

Перевіримо отримане рівняння на адекватність.

Розраховуємо, за допомогою отриманого рівняння регресії, значення відгуків для всіх точок матриці планування і вносимо їх в табл.

Наприклад, для рядка 1 $\widehat{Y_1} = 4{,}4052 + 2{,}0846 \cdot (-1) - 0{,}9865 \cdot (-1) - 0{,}5356 \cdot (-1) + 0{,}6062 \cdot (+1) - 0{,}9857 \cdot (+1) - 0{,}7549 \cdot (+1) - 0{,}5974 \cdot (+1)^2 + 0{,}3789 \cdot (+1)^2 = 2{,}49023.$

Порівняємо отримані значення $\widehat{Y_i}$ з експериментальними даними, знаходимо дисперсію адекватності за формулою: $S_{a\text{д}}^2 = \frac{1}{N-l-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(\widehat{Y_i} - Y_u\right)^2.$

$$S_{a\text{д}}^2 = \frac{1}{20-9-1} \cdot \Big((2{,}4902 - 2{,}533)^2 + (7{,}417 - 7{,}366)^2 + (0{,}8166 - 0{,}5976)^2 + (8{,}166 - 8{,}47)^2 + (4{,}898 - 4{,}683)^2 + (5{,}886 - 6{,}193)^2 + (0{,}204 - 0{,}346)^2 + (3{,}615 - 3{,}663)^2 + \left(-0{,}7905 - (-0{,}6)\right)^2 + (6{,}221 - 5{,}903)^2 + (7{,}136 - 7{,}13)^2 + (3{,}817 - 3{,}696)^2 + (5{,}306 - 5{,}326)^2 + (3{,}504 - 3{,}403)^2 + (4{,}405 - 4{,}633)^2 + (4{,}405 - 4{,}223)^2 + (4{,}405 - 4{,}453)^2 + (4{,}405 - 4{,}39)^2 + (4{,}405 - 4{,}186)^2 + (4{,}405 - 4{,}52)^2\Big) = 0{,}047028.$$

Адекватність рівняння регресії перевіряємо за допомогою розрахункового критерію Фішера ($F = \frac{S_{a\text{д}}^2}{S_{\text{воспр.}}^2} = \frac{0{,}047028}{0{,}029701} = 1{,}583$) порівнюючи його з табличними значеннями числа Фішера.

Для визначення $F^{\text{табл.}}$ задаємося значимістю 0,05 і з огляду на, що число ступенів свободи для $S_{a\text{д}}^2 = N - l - 1 = 20 - 9 - 1 = 10$ і для $S_y^2 = n_0 - 1 = 6 - 1 = 5$. $F_{0,05}^{\text{табл.}} = 4{,}735$.

Оскільки $F^{\text{расч.}} = 1{,}583 < F_{0{,}05}^{\text{табл.}} = 4{,}735$, то рівняння регресії є адекватним.

Проведемо декодування рівняння регресії підставляючи в нормоване рівняння координати центра плану і інтервалів варіювання факторів отримуємо:

$$y = 4{,}4052 + 2{,}0846 \cdot \left(\frac{X_1 - 30}{3}\right) - 0{,}9865 \cdot \left(\frac{X_2 - 18}{2}\right) - 0{,}5356 \cdot \left(\frac{X_3 - 220}{20}\right) + 0{,}6057 \cdot \left(\frac{X_1 - 30}{3}\right) \cdot \left(\frac{X_2 - 18}{2}\right) - 0{,}9848 \cdot \left(\frac{X_1 - 30}{3}\right) \cdot \left(\frac{X_3 - 220}{20}\right) - 0{,}7549 \cdot \left(\frac{X_2 - 18}{2}\right) \cdot \left(\frac{X_3 - 220}{20}\right) - 0{,}5974 \cdot \left(\frac{X_1 - 30}{3}\right)^2 + 0{,}3789 \cdot \left(\frac{X_2 - 18}{2}\right)^2.$$

Після розкриття дужок і приведення подібних членів рівняння отримуємо рівняння регресії в натуральному вигляді факторів:

$$y = -159{,}2837 + 6{,}4721 \cdot X_1 - 2{,}78 \cdot X_2 + 0{,}8053 \cdot X_3 + 0{,}1009 \cdot X_1 \cdot X_2 - 0{,}0164 \cdot X_1 \cdot X_3 - 0{,}0188 \cdot X_2 \cdot X_3 - 0{,}0663 \cdot X_1^2 + 0{,}0947 \cdot X_2^2.$$

5.3 Прийняття рішень по планам 2-го порядку

При оцінці математичної моделі, яка описує область оптимуму, в першу чергу визначають, адекватна або неадекватна отримана модель досліджуваного об’єкта.

Якщо нелінійна модель об’єкта дослідження **неадекватна.**

В цьому випадку можна здійснити перехід до планування більш високого порядку, наприклад до моделі, представленої поліномом 3-го порядку, однак, таке моделювання пов’язане зі значними труднощами при проведенні експериментів, складнощами при аналізі та інтерпретації отриманих результатів, що робить таке моделювання низько ефективним.

Інший підхід, що дозволяє встановити **неадекватність** нелінійної моделі, полягає у введенні в план нових чинників у складі від кинутих на попередньому етапі досліджень. При цьому необхідно повторювати експерименти з великим числом дослідів.

Якщо нелінійна модель об’єкта дослідження **адекватна.**

В цьому випадку поставлене на даному етапі досліджень завдання виконано і подальше дослідження залежать від самого початку поставлених цілей. Якщо метою було отримання інтерполяційної моделі, яка описує область оптимуму, то на цьому етапі дослідження об’єкта закінчується. В екстремальному експерименті стає завдання пошуку по одержуваної моделі координат оптимуму (max або min).

Для цього використовують різні методи оптимізації. Найчастіше застосовуються такі методи: Гаусса-Зейдліца, випадкового пошуку, метод симплексів, найшвидшого спуску і т.д.

Найчастіше стає завдання детального вивчення області оптимуму по її математичній моделі. У цьому випадку використовується перетворення рівняння до канонічного виду і будуються стандартизовані поверхні відгуку (використовуються при двох факторах). Графічне зображення поверхонь відгуку дозволяє краще орієнтуватися при пошуку оптимуму.

Таким чином, при отриманні **адекватної** моделі 2-го порядку дослідник може прийняти рішення пошуку координати оптимуму, детального вивчення області оптимуму, а потім використовувати отримані дані при дослідженні та управлінні аналогічних об’єктів навіть іншого масштабу.

На закінчення необхідно відзначити, що використання критеріїв ротатабельності або ортогональности є досить поширеним при проведенні моделювання 2-го порядку, проте в сучасній математичній теорії експерименту розглядається значно більша кількість видів планів.

До них відносяться:

- симетричні композиційні плани типу BR, які відповідають умовам D-оптимальності; A-оптимальності; G-оптимальності; Q-оптимальності; максимальної точності оцінки координат екстремуму і інші (найкращими вважаються D-оптимальні). Всі ці критерії визначаються головним чином будовою і властивостями інформаційної матриці;
- симетричні некомпозиційні квазі D-оптимальні плани;
- симетричні некомпозиційні плани Боксу-Беннена;
- несиметричні майже або повністю насичені плани, до яких відносяться:
  a) плани Хартлі;
  b) плани Рехтшафнера;
  c) плани Боксу-Дрейпера.

Таким чином вибір плану досліджень визначається поставленими завданнями і цілями досліджень, необхідною точністю, і наявністю достатніх матеріальних ресурсів і підготовки кваліфікованого персоналу.

ДОДАТОК А

Таблиця *G*-розподілу

G – випадкова величина, що розподілена по закону Кохрена з числом ступенів свободи $f_1 = n_1$ і $f_2 = n_2$. Таблиця містить величини ε, отримані з умови $P(|G| < \varepsilon) = 0{,}95$ (чисельник) і $P(|G| < \varepsilon) = 0{,}99$ (знаменник).

n_2	n_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	10
2	0,998 0,999	0,975 0,995	0,94 0,99	0,91 0,98	0,86 0,96	0,85 0,94	0,83 0,92	0,82 0,90	0,79 0,88
3	0,966 0,991	0,87 0,94	0,80 0,88	0,75 0,83	0,71 0,79	0,68 0,76	0,65 0,71	0,63 0,69	0,60 0,67
4	0,91 0,97	0,77 0,96	0,68 0,78	0,63 0,72	0,59 0,68	0,56 0,64	0,54 0,61	0,52 0,58	0,49 0,55
5	0,84 0,93	0,68 0,79	0,60 0,70	0,54 0,63	0,51 0,59	0,48 0,55	0,46 0,52	0,44 0,50	0,41 0,47
6	0,78 0,88	0,62 0,72	0,53 0,63	0,48 0,56	0,45 0,52	0,42 0,49	0,40 0,46	0,38 0,44	0,36 0,40
7	0,73 0,84	0,56 0,66	0,48 0,57	0,43 0,51	0,39 0,47	0,37 0,44	0,36 0,46	0,34 0,39	0,32 0,36
8	0,68 0,79	0,52 0,62	0,44 0,52	0,39 0,46	0,36 0,43	0,34 0,39	0,32 0,37	0,30 0,35	0,28 0,33
9	0,64 0,75	0,48 0,57	0,40 0,48	0,36 0,43	0,33 0,39	0,31 0,36	0,29 0,34	0,28 0,32	0,26 0,30
10	0,60 0,72	0,45 0,54	0,37 0,45	0,33 0,39	0,30 0,36	0,28 0,33	0,27 0,31	0,25 0,30	0,24 0,27
12	0,54 0,65	0,39 0,48	0,33 0,39	0,29 0,34	0,26 0,31	0,24 0,29	0,23 0,27	0,22 0,25	0,21 0,23
15	0,47 0,57	0,33 0,41	0,28 0,33	0,24 0,29	0,22 0,26	0,20 0,24	0,19 0,22	0,18 0,21	0,17 0,19
20	0,39 0,48	0,27 0,33	0,22 0,27	0,19 0,23	0,17 0,20	0,16 0,19	0,15 0,17	0,14 0,16	0,130 0,150
24	0,34 0,42	0,24 0,29	0,19 0,23	0,17 0,20	0,15 0,18	0,14 0,16	0,13 0,15	0,116 0,142	0,111 0,133
30	0,29 0,36	0,20 0,24	0,16 0,19	0,14 0,16	0,12 0,15	0,11 0,13	0,106 0,123	0,100 0,116	0,092 0,105
40	0,24 0,29	0,16 0,19	0,13 0,15	0,11 0,13	0,10 0,11	0,089 0,103	0,083 0,095	0,078 0,090	0,071 0,082
60	0,17 0,22	0,11 0,14	0,09 0,11	0,08 0,09	0,068 0,080	0,062 0,072	0,058 0,067	0,055 0,063	0,050 0,057
120	0,10 0,13	0,06 0,08	0,05 0,06	0,042 0,049	0,037 0,043	0,034 0,039	0,030 0,036	0,029 0,033	0,027 0,030

ДОДАТОК Б

Таблиця *t*-розподілу

t – випадкова величина, що розподілена по закону Стьюдента з числом ступенів свободи $f = n$. Таблиця містить величини ε, отримані з умови $P(|t| < \varepsilon) = 1 - q$.

n	**1– q**					
	0,99	**0,95**	**0,90**	**0,80**	**0,50**	**0,20**
1	63,657	12,706	6,314	3,078	0,727	0,325
2	9,935	4,303	2,920	1,886	0,617	0,289
3	5,841	3,182	2,353	1,638	0,584	0,277
4	4,604	2,776	2,132	1,533	0,569	0,271
5	4,032	2,571	2,015	1,476	0,559	0,267
6	3,707	2,447	1,943	1,440	0,553	0,265
7	3,499	2,365	1,895	1,415	0,549	0,263
8	3,355	2,306	1,860	1,397	0,546	0,262
9	3,250	2,262	1,833	1,383	0,543	0,261
10	3,169	2,228	1,812	1,372	0,542	0,260
11	3,106	2,201	1,796	1,363	0,540	0,260
12	3,055	2,119	1,782	1,356	0,539	0,259
13	3,012	2,160	1,771	1,350	0,538	0,259
14	2,977	2,145	1,761	1,345	0,537	0,258
15	2,947	2,131	1,753	1,341	0,536	0,258
16	2,921	2,120	1,746	1,337	0,535	0,258
18	2,878	2,101	1,734	1,330	0,534	0,257
20	2,845	2,086	1,725	1,325	0,533	0,257
23	2,807	2,069	1,714	1,319	0,532	0,256
25	2,787	2,060	1,708	1,316	0,531	0,256
30	2,750	2,042	1,697	1,310	0,530	0,256
40	2,704	2,021	1,684	1,303	0,529	0,255
60	2,660	2,000	1,671	1,296	0,527	0,254
100	2,617	1,980	1,658	1,289	0,526	0,254
∞	2,576	1,960	1,645	1,282	0,524	0,253

ДОДАТОК В

Таблиця *F*-розподілу

F – випадкова величина, що розподілена по закону Фішера з числом ступенів свободи $f_1 = n_1$ і $f_2 = n_2$. Таблиця містить величини ε, отримані з умови $P(|G| < \varepsilon) = 0{,}95$ (чисельник) і $P(|G| < \varepsilon) = 0{,}99$ (знаменник).

n_2	n_1							
	2	**3**	**4**	**6**	**9**	**12**	**24**	**> 24**
1	199,5 / 4999	215,7 / 5403	224,0 / 5625	234,0 / 5859	241,0 / 6022	244,9 / 6106	249,0 / 6235	254,3 / 6366
2	19,00 / 99,00	19,16 / 99,17	19,25 / 99,25	19,33 / 99,33	19,38 / 99,39	19,41 / 99,42	19,55 / 99,46	19,50 / 99,50
3	9,55 / 30,82	9,28 / 29,46	9,12 / 28,71	8,94 / 27,99	8,81 / 27,34	8,74 / 27,05	8,64 / 26,60	8,53 / 26,12
4	6,94 / 18,00	9,59 / 16,69	6,39 / 15,98	6,16 / 15,21	6,00 / 14,66	5,91 / 14,37	5,77 / 13,93	5,63 / 13,46
5	5,79 / 13,27	5,41 / 12,06	5,19 / 11,39	4,95 / 10,67	4,77 / 10,16	4,68 / 9,89	4,53 / 9,47	4,36 / 9,02
6	5,14 / 10,52	4,76 / 9,78	4,53 / 9,15	4,28 / 8,47	4,10 / 7,98	4,00 / 7,72	3,84 / 7,31	3,67 / 6,88
7	4,74 / 9,55	4,35 / 8,45	4,12 / 7,85	3,87 / 7,19	3,68 / 6,72	3,57 / 6,49	3,41 / 6,07	3,23 / 6,65
8	4,46 / 8,65	4,07 / 7,59	3,84 / 7,01	3,58 / 6,37	3,39 / 5,91	3,28 / 5,67	3,12 / 5,28	2,93 / 4,86
9	4,26 / 8,02	3,86 / 6,99	3,63 / 6,42	3,37 / 5,80	3,18 / 5,35	3,07 / 5,11	2,90 / 4,73	2,71 / 4,31
10	4,10 / 7,56	3,71 / 6,55	3,48 / 5,99	3,22 / 5,39	3,02 / 4,94	2,91 / 4,71	2,74 / 4,33	2,54 / 3,91
11	3,98 / 7,21	5,59 / 6,22	3,36 / 5,76	3,09 / 5,07	2,90 / 4,63	2,79 / 4,40	2,51 / 4,02	2,40 / 3,60
12	3,88 / 6,93	3,49 / 5,95	3,26 / 5,41	3,00 / 4,82	2,80 / 4,39	2,69 / 4,16	2,50 / 3,78	2,30 / 3,36
13	3,80 / 6,70	3,41 / 5,74	3,18 / 5,21	2,92 / 4,62	2,71 / 4,19	2,60 / 3,96	2,42 / 3,59	2,21 / 3,17
14	3,74 / 6,51	3,34 / 5,56	3,11 / 5,04	2,85 / 4,46	2,65 / 4,03	2,53 / 3,80	2,35 / 3,43	2,13 / 3,00
16	3,63 / 6,23	3,24 / 5,29	3,01 / 4,77	2,74 / 4,20	2,54 / 3,78	2,42 / 3,55	2,24 / 3,18	2,01 / 2,75
18	3,55 / 6,01	3,16 / 5,09	2,93 / 4,58	2,66 / 4,01	2,46 / 3,60	2,34 / 3,37	2,15 / 3,00	1,92 / 2,57

Продовження додатка В

n_2	n_1							
	2	**3**	**4**	**6**	**9**	**12**	**24**	**> 24**
20	3,49 5,85	3,10 4,94	2,87 4,43	2,60 3,87	2,39 3,46	2,28 3,23	2,08 2,86	1,84 2,42
24	3,40 5,61	3,01 4,72	2,78 4,22	2,51 3,67	2,30 3,26	2,18 3,03	1,98 2,66	1,37 2,21
32	3,29 5,34	2,90 4,46	2,67 3,97	2,40 3,43	2,19 3,02	2,07 2,80	1,86 2,42	1,59 1,96
48	3,19 5,08	2,80 4,22	2,57 3,74	2,30 3,20	2,08 2,80	1,96 2,58	1,75 2,20	1,45 1,70
> 48	2,99 4,61	2,60 3,78	2,37 3,32	2,09 2,80	1,88 2,41	1,75 2,18	1,52 1,79	1,00 1,00

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Организация эксперимента. В.И. Баптизманский, Д.Н. Яковлев, Ю.С. Паниотов и др. К. : УМКВО, 1992. 244 с.
2. Организация эксперимента при моделировании и оптимизации технических систем. С.И. Пинчук. Днепр ООО Независимая издательская организация «Дива», 2008. 248 с.
3. Постановка инженерного эксперимента. В.Н. Ковшов Киев, Донецк: Высшая школа, 1982. 120 с.
4. Введение в планирование эксперимента Ю.П. Адлер М. : Металлургия, 1968. 155 с.
5. Техніка металургійного експерименту І.Ф. Червоний, С.Г. Єгоров, І.Є. Лупашніков Запоріжжя ЗДІА, 2011. 190 с.
6. Теория инженерного эксперимента. А.Х. Бояршинова, Л.С. Фишер, Челябинск ЮУрГУ, 2006. 85 с.
7. Статистические методы управления качеством металлопродукции. В.И. Белокопытов. Красноярск Сиб федер. Унт., 2011. 108 с.
8. Физическое моделирование процессов внепечной обработки и разливки стали. С.П. Еронько, С.В. Боковених, К. : Техника, 1983. 136 с.
9. Техника металлургического эксперимента. Б.В. Линчевский М. : «Металлургия», 1979. 256 с.
10. Modeling of Steelmaking processes D. Mazumdar, James W. Evans CRC Press 2009. 348 p.
11. High Temperature experiments in Chemistry and Materials Science Ketil Motzfeldt, 2012. 348 p.
12. Основы планирования научно-исследовательского эксперимента. М. : Агумбаев, Ташкент, Улитувчи, 2004. 336 с.

Навчальне видання

Мамешин Валерій Сергійович
Синегін Євген Володимирович
Суховецький Сергій Васильович
Журавльова Світлана Валеріївна

ОРГАНІЗАЦІЯ ТА ПРОВЕДЕННЯ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ У СТАЛЕПЛАВИЛЬНОМУ ВИРОБНИЦТВІ

Конспект лекцій

Тем. план 2021, поз. № 3

Підписано до друку 20.10.2021. Формат 60×84 1/10. Папір друк. Друк плоский.
Облік.-вид. арк. 5,00. Умов. друк. арк 4,93. Замовлення № 137.

Національна металургійна академія України
49005, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 4
Редакційно-видавничий відділ НМетАУ