

МАТЕМАТИКА ДЛЯ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА ПРОГРАМУВАННЯ

методичні рекомендації до виконання
індивідуальних завдань із інтегрального числення,
диференціальних рівнянь, рядів,
основ теорії функції комплексної змінної
та операційного числення

Запоріжжя 2024



УДК 519.6:311.2(072)
МЗЗ

Рекомендовано Науково-методичною радою
ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»
(протокол № 1 від 27.09.2024 р.)

Укладачі

Грудкіна Н.С., д-р техн. наук, доцент,
Дмитришин І.С.

МЗЗ

Математика для комп'ютерних наук та програмування : методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань із інтегрального числення, диференціальних рівнянь, рядів, основ теорії функції комплексної змінної та операційного числення (для студентів спеціальностей 122 та 174 усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти) / уклад.: Н. С. Грудкіна, І. С. Дмитришин. Запоріжжя : ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА». 2024. 34 с.

Методичні вказівки містять відомості щодо формування кейсу задач та критеріїв оцінювання індивідуальних завдань та приклади їх розв'язання з наведенням основних формул, етапів розв'язання та геометричної ілюстрації в обсязі, необхідному для виконання індивідуальних завдань за матеріалом з інтегрального числення, диференціальних рівнянь, рядів, теорії функції комплексної змінної та операційного числення. Матеріал навчального посібника має на меті підвищити якість виконання роботи, виробити навички розв'язання задач прикладного спрямування, в тому числі з використанням системи комп'ютерної математики Maple. Рекомендовано для студентів спеціальностей 122 та 174 усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти.

УДК 519.6:311.2(072)

© ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА», 2024



ЗМІСТ

ВСТУП	4
1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ	5
1.1 Відомості щодо формування кейсу задач та критеріїв оцінювання індивідуальних завдань	5
1.2 Кейс задач індивідуальних завдань	6
2 РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТУ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ	14
2.1 Приклад розв'язання завдання 1	14
2.2 Приклад розв'язання завдання 2	17
2.3 Приклад розв'язання завдання 3	19
2.4 Приклад розв'язання завдання 4	21
2.5 Приклад розв'язання завдання 5	22
2.6 Приклад розв'язання завдання 6	23
2.7 Приклад розв'язання завдання 7	25
2.8 Приклад розв'язання завдання 8	26
2.9 Приклад розв'язання завдання 9	27
2.10 Приклад розв'язання завдання 10	28
2.11 Приклад розв'язання завдання 11	29
2.12 Приклад розв'язання завдання 12	30
ЛІТЕРАТУРА	32



ВСТУП

Математика для комп'ютерних наук та програмування – базовий курс, який належить до циклу математичної, природничо-наукової підготовки та присвячений формуванню у студентів здатності застосовувати основні теоретичні знання та методи при розв'язуванні математично формалізованих задач, аналізу і моделювання пристроїв, процесів і явищ, пошуків оптимальних рішень, що є необхідним підґрунтям вирішення складних спеціалізованих задач та практичних проблем під час професійної діяльності у галузі автоматизації виробничих процесів та у сфері комп'ютерних наук. При навчанні за освітніми програмами спеціальностей 122 та 174 цей освітній компонент є обов'язковим та допоможе у формуванні науково-технічного погляду на навколишній світ та професійну сферу, набути переваг конкурентоспроможного на ринку праці фахівця, який вільно володіє професією з акцентами на сучасних технологіях, актуальних напрямках і перспективах їх розвитку та орієнтується в суміжних галузях діяльності, засвідчує готовність до постійного професійного зростання, соціальної й професійної мобільності.

У другому семестрі курс присвячений вивченню основних положень інтегрального числення, диференціальних рівнянь та їх систем, числових та функціональних рядів, основ теорії функції комплексної змінної та операційного числення. Особливістю курсу є фокус на прикладну направленість математичної підготовки із використанням комп'ютерно-інформаційних технологій та пакетів математичних прикладних програм для глибокого розуміння та критичного осмислення теорій, принципів, методів і понять у сфері професійної діяльності.

Представлені методичні рекомендації містять відомості щодо формування кейсу задач та критеріїв оцінювання індивідуальних завдань «Розв'язування прикладних задач з інтегрального числення та диференціальних рівнянь та їх систем, наближених обчислень за допомогою рядів» та «Розв'язування задач з теорії функцій комплексної змінної та операційного числення» та приклади їх розв'язання з наведенням основних формул, етапів розв'язання та геометричної ілюстрації в обсязі, необхідному для виконання індивідуальних завдань, в тому числі з використанням системи комп'ютерної математики Maple.



1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1.1 Відомості щодо формування кейсу задач та критеріїв оцінювання індивідуальних завдань

Під час виконання індивідуальних завдань кожен студент отримає однаковий за кількістю та змістовністю кейс задач згідно варіанту, який визначається його порядковим номером в списку академічної групи та пропонується викладачем в рамках відповідного освітнього компонента та змістовного модуля. Заохочується використання системи комп'ютерної математики Maple, в тому числі під час розв'язання задач прикладного спрямування як у вигляді інструменту спрощення розрахунків чи побудови графіків, так і для створення модуля автоматизованого розрахунку формалізованої задачі.

Індивідуальні завдання виконуються самостійно у зручний для студента час в межах терміну подачі роботи, передбачених у розділі «Розподіл балів за контрольними точками та графік їх виконання» та розміщується у відповідному розділі на платформі Moodle. Розв'язання завантажується у вигляді файлу з розширенням .docx або .pdf, або .jpg, або .png, або .txt (за наявності розробленого розрахункового модуля у MS Excel та/або у системі комп'ютерної математики Maple у форматах .xls, .xlsx, .mw завантажується додатково).

Максимальна кількість балів вказується за кожне окреме завдання та визначається в залежності від обґрунтування ходу розв'язання, рівня формалізації задачі, правильності отриманого розв'язку та аналізу результату, необхідності геометричної інтерпретації та/або побажання використовувати можливості MS Excel та/або системи комп'ютерної математики Maple.

Використання штучного інтелекту (ШІ) не забороняється, оскільки пропозиції відомих застосунків ШІ суттєво залежать від обміркованої постановки питання і уточнюючих питань; однак в разі, якщо відповідь, отримана з використанням ШІ, містить суттєві похибки або не є комплексною, або не відповідає за усталеним оформленням, термінологією, або іншим вимогам до завдання, то оцінка за виконання знижується.

Перевірка індивідуального завдання виконується протягом тижня після завершення терміну подачі роботи. За бажанням студента при наявності похибок або виконання індивідуального завдання не в повному обсязі допускається доопрацювання до передостаннього тижня навчання.

1.2 Кейс задач індивідуальних завдань

Завдання 1. На мапі обрано сектор спостереження у вигляді пласкої замкненої фігури D . Після вибуху, зона ураження шкідливими речовинами має форму пласкої замкненої фігури D^* . Знайти площу неураження шкідливими речовинами в межах сектора спостереження.

Таблиця 1 – Дані до завдання 1

№		№	
1	D : прямокутник з вершинами в точках $(0;0)$, $(0;4)$, $(2;4)$, $(2;0)$; D^* : коло з центром у точці $(1;5)$ та радіусом, що дорівнює $\sqrt{2}$.	2	D : квадрат з вершинами в точках $(0;0)$, $(0;4)$, $(4;4)$, $(4;0)$; D^* : коло з центром у точці $(2;5)$ та радіусом, що дорівнює $\sqrt{5}$.
3	D : прямокутний трикутника з вершинами в точках $(0;0)$, $(3;3)$, $(3;0)$; D^* : коло з центром у точці $(3;3)$ та радіусом, що дорівнює $\sqrt{2}$.	4	D : прямокутний трикутника з вершинами в точках $(0;0)$, $(0;3)$, $(3;0)$; D^* : коло з центром у точці $(0;0)$ та радіусом, що дорівнює $\sqrt{2}$.
5	D : прямокутник з вершинами в точках $(0;0)$, $(0;4)$, $(2;4)$, $(2;0)$; D^* : еліпс з центром у точці $(1;6)$ з меншою піввіссю, що є паралельною осі абсцис та дорівнює 1 та більшою піввіссю, що паралельна осі ординат та дорівнює $\sqrt{2}$.	6	D : квадрат з вершинами в точках $(0;0)$, $(0;4)$, $(4;4)$, $(4;0)$; D^* : еліпс з центром у точці $(1;4)$ з більшою піввіссю, що є паралельною осі абсцис та дорівнює 4 та меншою піввіссю, що паралельна осі ординат та дорівнює $\sqrt{2}$.
7	D : квадрат з вершинами в точках $(0;0)$, $(0;5)$, $(5;5)$, $(5;0)$; D^* : коло з центром у точці $(2;6)$ та радіусом, що дорівнює $\sqrt{3}$.	8	D : прямокутник з вершинами в точках $(0;0)$, $(0;4)$, $(3;4)$, $(3;0)$; D^* : коло з центром у точці $(2;5)$ та радіусом, що дорівнює $\sqrt{5}$.
9	D : прямокутний трикутника з вершинами в точках $(0;0)$, $(0;4)$, $(3;0)$; D^* : коло з центром у точці $(0;0)$ та радіусом, що дорівнює $\sqrt{3}$.	10	D : прямокутний трикутника з вершинами в точках $(0;0)$, $(5;3)$, $(5;0)$; D^* : коло з центром у точці $(5;4)$ та радіусом, що дорівнює $\sqrt{3}$.
11	D : прямокутник з вершинами в точках $(0;0)$, $(0;5)$, $(2;5)$, $(2;0)$; D^* : еліпс з центром у точці $(1;6)$ з меншою піввіссю, що є паралельною осі абсцис та дорівнює 2 та більшою піввіссю, що паралельна осі ординат та дорівнює $\sqrt{5}$.	12	D : квадрат з вершинами в точках $(0;0)$, $(0;4)$, $(4;4)$, $(4;0)$; D^* : еліпс з центром у точці $(2;4)$ з більшою піввіссю, що є паралельною осі абсцис та дорівнює 3 та меншою піввіссю, що паралельна осі ординат та дорівнює $\sqrt{3}$.

13	D : прямокутник з вершинами в точках (0;0), (0;6), (2;6), (2;0); D^* : коло з центром у точці (2;7) та радіусом, що дорівнює $\sqrt{8}$.	14	D : квадрат з вершинами в точках (0;0), (0;8), (8;8), (8;0); D^* : коло з центром у точці (2;9) та радіусом, що дорівнює $\sqrt{5}$.
15	D : прямокутний трикутника з вершинами в точках (0;0), (5;5), (5;0); D^* : коло з центром у точці (5;5) та радіусом, що дорівнює $\sqrt{5}$.	16	D : прямокутний трикутника з вершинами в точках (0;0), (0;5), (5;0); D^* : коло з центром у точці (0;0) та радіусом, що дорівнює $\sqrt{5}$.
17	D : квадрат з вершинами в точках (0;0), (0;3), (3;3), (3;0); D^* : коло з центром у точці (2;4) та радіусом, що дорівнює $\sqrt{5}$.	18	D : прямокутник з вершинами в точках (0;0), (0;3), (2;3), (2;0); D^* : коло з центром у точці (1;4) та радіусом, що дорівнює $\sqrt{5}$.
19	D : прямокутник з вершинами в точках (0;0), (0;4), (2;4), (2;0); D^* : еліпс з центром у точці (1;6) з меншою піввіссю, що є паралельною осі абсцис та дорівнює 1 та більшою піввіссю, що паралельна осі ординат та дорівнює $\sqrt{5}$.	20	D : квадрат з вершинами в точках (0;0), (0;4), (4;4), (4;0); D^* : еліпс з центром у точці (1;4) з більшою піввіссю, що є паралельною осі абсцис та дорівнює 4 та меншою піввіссю, що паралельна осі ординат та дорівнює $\sqrt{3}$.

Завдання 2.1 Знайти шлях, пройдений матеріальною точкою при прямолінійному русі із швидкістю, що описується функцією $v=v(t)$ за перші t_1 с після початку руху. Вважаємо, що швидкість руху вимірюється у $\frac{m}{c}$, а шлях – у m .

Зауваження 1. Завдання 2.1 виконується для варіантів 1, 4, 7, 10 та 13, 16 та 19.

Таблиця 2 – Дані до завдання 2.1

№	$v = v(t)$	t_1
1	$v(t) = 0,05(4t^3 + 1)$	1
4	$v(t) = 0,015(3t^2 - t)$	2
7	$v(t) = 0,025(t^2 + t)$	2
10	$v(t) = 0,005(3t^2 + 2t)$	4
13	$v(t) = 0,02(4t^3 + 2t)$	2
16	$v(t) = 0,01(4t + 1)$	3
19	$v(t) = 0,03(4t^3 + 2)$	1



Завдання 2.2. Знайти середні витрати при виготовленні від a до b одиниць продукції для відомої функції витрат $P(x)$.

Зауваження 2. Завдання 2.2 виконується для варіантів 2, 5, 8, 11, 14, 17 та 20.

Таблиця 3 – Дані до завдання 2.2

№	$P = P(x)$	a	b
2	$P(x) = 3x\sqrt{x} + 2$	1	25
5	$P(x) = x\sqrt{x} + 5$	9	16
8	$P(x) = 2x\sqrt{x} + 1$	25	100
11	$P(x) = 3x\sqrt{x} + 4$	4	64
14	$P(x) = x\sqrt{x} + 2$	1	9
17	$P(x) = 2x\sqrt{x} + 2$	36	81
20	$P(x) = 4x\sqrt{x} + 1$	16	100

Завдання 2.3. Стиск x гвинтової пружини пропорційний прикладеній силі F . Обчислити роботу сили F при стисканні пружини на Δx м, якщо для стискання її на Δx_1 м потрібна сила F_1 Н.

Зауваження 3. Завдання 2.3 виконується для варіантів 3, 6, 9, 12, 15 та 18.

Таблиця 4 – Дані до завдання 2.3

№	Δx	Δx_1	F_1
3	0,03	0,02	12
6	0,04	0,05	18
9	0,01	0,04	20
12	0,04	0,03	15
15	0,03	0,02	10
18	0,04	0,06	24



Завдання 3. Виконати чисельне визначення інтегралу $\int_a^{a+1} f(x)dx$ за формулою лівих, правих або середніх прямокутників на вибір (інтервал інтегрування ділити на 10 рівних відрізків).

Таблиця 5 – Дані до завдання 3

№	$f(x)$	a	№	$f(x)$	a
1	$f(x) = \frac{2x}{\ln(x+2)}$	1	11	$f(x) = \frac{2x}{e^{\sqrt{x}}}$	0
2	$f(x) = \sqrt{x^3 + 16}$	0	12	$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x+4}$	9
3	$f(x) = \frac{e^x}{x}$	3	13	$f(x) = \sqrt{x^3 + 9}$	5
4	$f(x) = \sqrt{x^3 + 32}$	4	14	$f(x) = \frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}}$	4
5	$f(x) = \frac{x}{\ln(x+3)}$	2	15	$f(x) = \sqrt{x^3 + 5}$	2
6	$f(x) = \sqrt{x^3 + 2}$	1	16	$f(x) = \frac{e^{x-1}}{x}$	3
7	$f(x) = \frac{e^x}{x+2}$	2	17	$f(x) = \frac{1}{e^{x^2}}$	2
8	$f(x) = \sqrt{x^3 + 3}$	3	18	$f(x) = \sqrt{x^3 + 1}$	1
9	$f(x) = \frac{x}{\ln(x+5)}$	7	19	$f(x) = \sqrt{x^3 + 36}$	4
10	$f(x) = \sqrt{x^3 + 8}$	5	20	$f(x) = \frac{x}{e^{\sqrt{x^3}}}$	5

Завдання 4. Нехай заготовки певної температури T_0 °C охолоджується до температури цеху T_1 °C. Відомо, що через t_1 годин температура заготовки опустилася до $T(t_1)$ °C. Знайти закон охолодження заготовки та її температуру через t_2 годин.

Таблиця 6 – Дані до завдання 4

№	T_0	T_1	t_1	$T(t_1)$	t_2	№	T_0	T_1	t_1	$T(t_1)$	t_2
1	455	22	2	112	4	11	320	25	2	78	3
2	580	18	3	180	5	12	290	20	3	80	4
3	350	25	2	90	3	13	415	22	2	95	5

4	290	20	3	80	5	14	585	19	2	260	4
5	405	21	3	90	4	15	360	23	2	100	3
6	585	19	3	180	4	16	275	20	2	105	3
7	360	23	2	90	3	17	530	18	3	135	4
8	270	20	2	70	3	18	355	25	3	80	4
9	560	18	3	130	5	19	350	19	2	170	3
10	355	25	2	90	3	20	295	20	3	80	4

Завдання 5.1. Використовуючи розвинення в ряд Маклорена відомих функцій виконати обчислення значення функції $f(x)$ в точці x_0 із точністю до третього знаку після коми.

Зауваження 4. Завдання 5.1. виконується для непарних варіантів.

Таблиця 7 – Дані до завдання 5.1

№	$f(x)$	x_0	№	$f(x)$	x_0
1	$e^{-\sqrt{x}}$	0,1	11	$\sin(2\sqrt[3]{x})$	0,5
3	$\ln(1 - 2x)$	0,1	13	$\cos(x^4)$	0,4
5	$\sin(2x^2)$	0,3	15	e^{-x^3}	0,6
7	$e^{-\sqrt[3]{x}}$	0,7	17	$\cos(2x^2)$	0,3
9	$\cos(5\sqrt{x})$	0,5	19	$\ln(1 + x^2)$	0,2

Завдання 5.2. Використовуючи розвинення в ряд Маклорена відомих функцій виконати обчислення значення визначеного інтегралу $\int_0^a f(x)dx$ із точністю до третього знаку після коми.

Зауваження 5. Завдання 5.2. виконується для парних варіантів.

Таблиця 8 – Дані до завдання 5.2

№	$f(x)$	a	№	$f(x)$	a
2	$\sqrt{x}e^x$	1	12	$\sin(2\sqrt[3]{x})$	0,008
4	$\sqrt{x} \arctg x$	2	14	$x \cdot \cos(x^4)$	0,5
6	$\frac{\sin 2x}{x}$	0,5	16	$x \cdot e^{-x^3}$	6
8	$e^{-\sqrt[3]{x}}$	2	18	$\cos^2(2x^2)$	3
10	$\cos(5\sqrt{x})$	5	20	$\ln(1 + \sqrt{x})$	0,25

Завдання 6. З'ясувати, чи є аналітичною функція $\omega = f(z)$. У випадку аналітичності цієї функції знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту при відображенні за допомогою функції $\omega = f(z)$ в точці z_0 .

Таблиця 9 – Дані до завдання 6

№	$f(z)$	z_0	№	$f(z)$	z_0
1	ze^z	$i\frac{\pi}{4}$	11	$z^3 + 2z^2 - z$	$1 + i$
2	z^2e^z	$i\frac{\pi}{2}$	12	$z^3 + 2e^z$	$i\frac{\pi}{2}$
3	$2 + e^{-z}$	$\ln 4 - i\frac{\pi}{3}$	13	$z - 4e^z$	$-i\frac{\pi}{4}$
4	$2z - \sin z$	$\frac{\pi}{2}$	14	$z^3 + z^2$	$1 - i$
5	$2 + z - \cos z$	$\frac{3\pi}{2}$	15	e^{-5z}	$\ln 2 + i\frac{\pi}{5}$
6	$z^2 + e^z$	$i\frac{\pi}{3}$	16	$z - 2\cos z$	π
7	z^3	i	17	$z^2 + e^z$	$i\frac{\pi}{3}$
8	$z^3 + z^2 - z + 2$	$1 - i$	18	$\sin z + 2z - 1$	π
9	$(z + 1)^3$	i	19	$z + e^z$	$-i\frac{\pi}{2}$
10	$z + e^{-z}$	$i\frac{\pi}{4}$	20	$(z - 2)^2$	$2i$

Завдання 7. Обчислити інтеграл $I = \int_{(L)} f(z) dz$, якщо крива (L): радіус-вектор точки z_0 .

Таблиця 10 – Дані до завдання 7

№	$f(z)$	z_0	№	$f(z)$	z_0
1	$z \operatorname{Im} z + \operatorname{Re}(z - 1)$	$2 - i$	11	$(z + 2) \operatorname{Im} \bar{z}$	$1 - 3i$
2	$\bar{z} \operatorname{Im} z^2 - 3$	$1 - 2i$	12	$\bar{z} \operatorname{Im} z^3$	$3 + i$
3	$z \operatorname{Re} z$	$1 + i$	13	$\bar{z} \operatorname{Re} z + 3$	$2 + i$
4	$z^2 \operatorname{Im} z$	$1 - i$	14	$z^3 \operatorname{Im} z$	$4 + i$
5	$\bar{z} \operatorname{Re} z - 3$	$3 - i$	15	$\bar{z} \operatorname{Re} \bar{z}$	$1 - 6i$
6	$z \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z$	$2 - i$	16	$5 + z \operatorname{Im} \bar{z}$	$1 - 3i$
7	$\bar{z} \operatorname{Im} z^2$	$1 - 2i$	17	$\bar{z} \operatorname{Im} z^3$	$3 + i$
8	$z \operatorname{Re}(z + 2)$	$1 + i$	18	$\bar{z} \operatorname{Re} z$	$2 + i$
9	$z^2 \operatorname{Im} z$	$1 - i$	19	$z^3 \operatorname{Im} z$	$2 + i$
10	$\bar{z} \operatorname{Re}(2z - 5)$	$2,5 - i$	20	$\bar{z} \operatorname{Re} \bar{z}$	$1 - 2i$



Завдання 8. Знайти лишки відносно усіх ізольованих особливих точок функції $f(z) = \frac{e^z}{a+z}$, де a – номер варіанту студента.

Завдання 9. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші: $\oint_{|z-b|=a} \frac{z^2 e^{\pi z} dz}{z^2 + a + b}$, де a – номер варіанту студента, а значення b обчислюється по формулі $b = a + 1$.

Завдання 10. Знайти зображення функції $f(t)$, заданої графічно на рисунку 1.

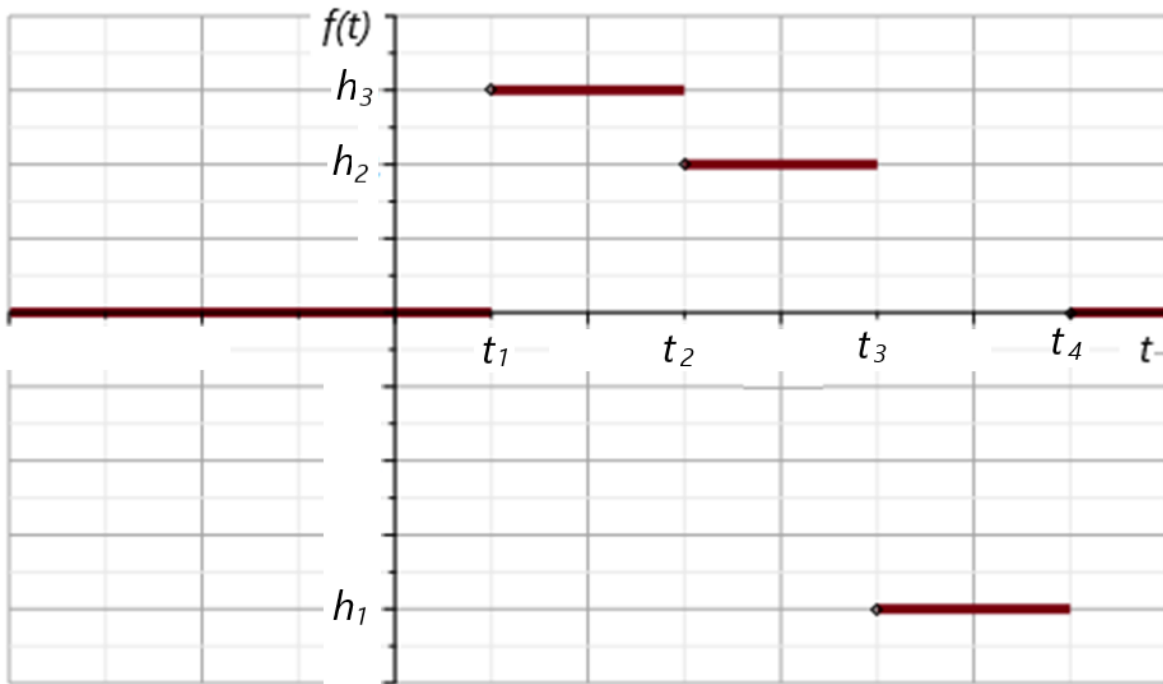


Рисунок 1 – Графік функції $f(t)$

Таблиця 11 – Дані до завдання 10

№	h_1	h_2	h_3	t_1	t_2	t_3	t_4	№	h_1	h_2	h_3	t_1	t_2	t_3	t_4
1	-1	2	4	1	2	4	7	11	-5	1	3	3	5	6	7
2	-2	3	6	6	8	9	12	12	-3	2	6	2	5	9	12
3	-3	4	5	4	5	7	9	13	-1	3	6	4	6	7	8
4	-4	5	9	3	4	5	8	14	-5	5	6	1	2	5	8
5	-5	1	6	2	6	7	9	15	-6	4	5	2	4	7	8
6	-6	3	5	3	5	8	9	16	-3	2	3	1	3	5	6
7	-1	3	6	2	3	5	7	18	-7	1	5	1	3	4	6
8	-2	5	7	1	2	4	7	18	-1	2	3	1	5	6	7
9	-5	2	3	2	3	5	6	19	-7	3	4	2	4	5	8
10	-2	1	2	4	5	6	9	230	-4	1	4	1	5	7	9

Завдання 11.

Розв'язати операторним методом задачу Коші для системи диференціальних рівнянь операторним методом $\begin{cases} x' = ax + by; \\ y' = cx + dy; \end{cases}$ при заданих початкових умовах $x(0) = x_0, y(0) = y_0$.

Таблиця 12 – Дані до завдання 11

№	a	b	c	d	x_0	y_0	№	a	b	c	d	x_0	y_0
1	1	-1	1	1	0	1	11	4	-1	1	4	0	-1
2	2	-2	0.5	2	-2	3	12	1	-2	0.5	1	2	-3
3	1	3	-3	1	-4	2	13	-1	3	-3	-1	4	-2
4	3	2	-2	3	1	0	14	5	2	-2	5	1	0
5	4	4	-1	4	2	1	15	2	4	-1	2	2	-1
6	1	-1	4	1	5	-1	16	-1	-1	4	-1	5	1
7	4	16	-1	4	3	2	17	3	16	-1	3	-3	2
8	5	5	-5	5	-2	4	18	-5	5	-5	-5	2	-4
9	6	3	-3	6	1	3	19	2	3	-3	2	-1	3
10	7	-4	1	7	2	-1	20	8	-4	1	8	2	1

Завдання 12.

Розв'язати інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = x - \int_0^x \operatorname{sh}(ax - t) \varphi(t) dt$$

де a – номер варіанту студента.



РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТУ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ 1

2.1. Приклад розв'язання завдання 1

Завдання 1. На мапі обрано сектор спостереження у вигляді квадрату з вершинами в точках $(0;0)$, $(0;2)$, $(2;2)$, $(2;0)$. Після влучення снаряду у точку $(3;3)$, зона ураження уламками має форму кола з центром у заданій точці радіуса $\sqrt{5}$. Знайти площу неураження шкідливими речовинами в межах сектора спостереження. [3, 4].

Розв'язання.

Зробимо побудову у прямокутній системі координат квадрата $OABC$ та кола з центром у точці $M(3;3)$ (рис. 2).

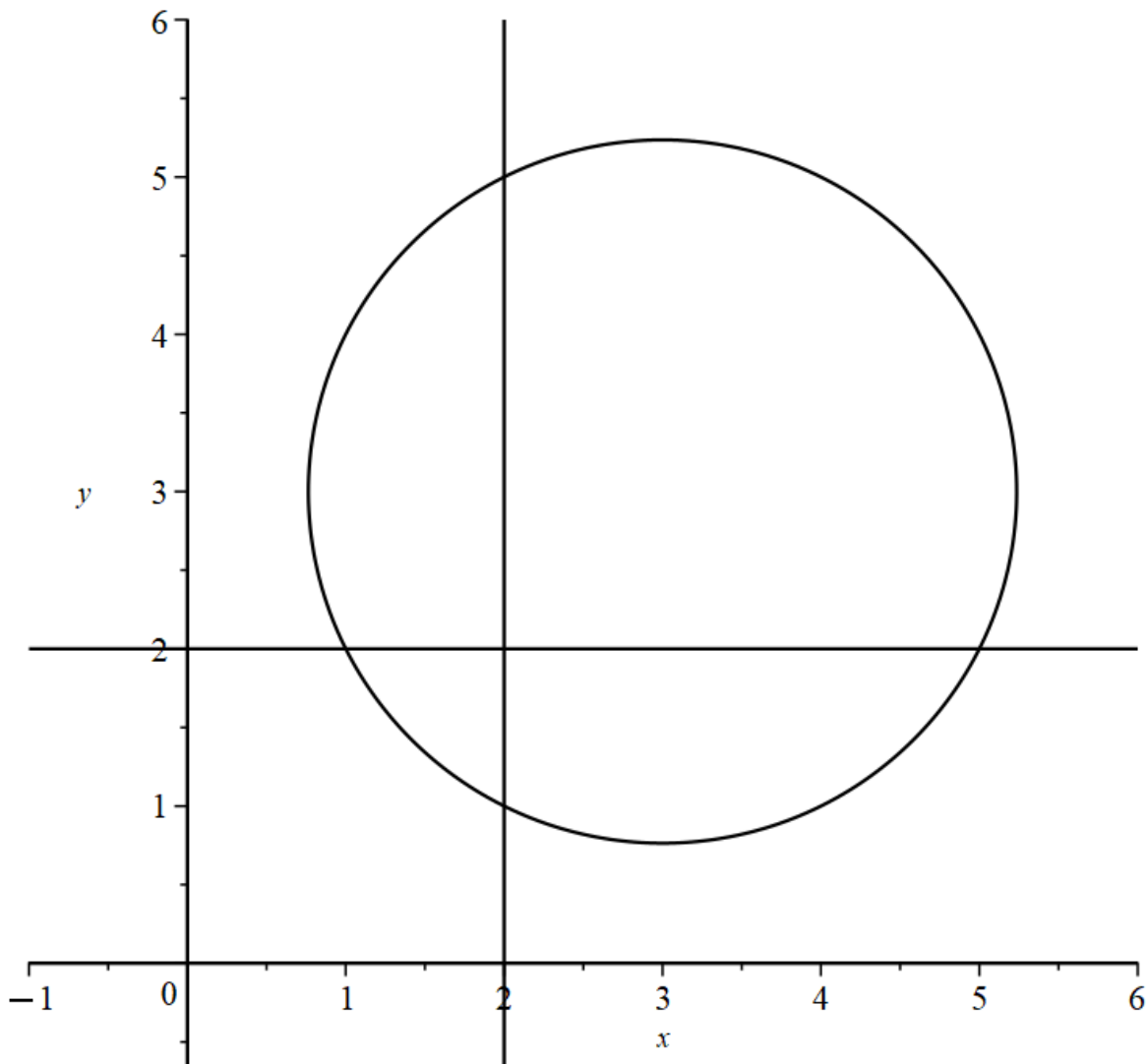


Рисунок 2 – Геометрична інтерпретація умов завдання 1

Для визначення площі замальованої фігури знайдемо точку



перетину кола та прямої $y=2$:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-3)^2 = 5; \\ y = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)^2 = 4; \\ y = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-3| = 2; \\ y = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1; \\ y_1 = 2; \\ x_2 = 5; \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

Звідси отримали дві точки перетину даних кривих: $N(1;2)$ та $P(5;2)$.

Площу S^* отримаємо як різницю площі квадрату зі стороною 2 та площі фігури NBK:

$$\begin{aligned} S^* &= 4 - \int_1^2 \left(2 - \left(3 - \sqrt{5 - (x-3)^2} \right) \right) dx = \\ &= 4 - \int_1^2 \left(\sqrt{5 - (x-3)^2} - 1 \right) dx = 4 + x \Big|_1^2 + \int_1^2 \left(\sqrt{5 - (x-3)^2} \right) dx = \\ &= \left[x-3 = \sqrt{5} \sin t, \quad dx = -\sqrt{5} \cos t dt, \right. \\ &\quad \left. t_1 = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \quad t_2 = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right] = 5 - 5 \int_{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}^{\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)} \cos^2 t dt = \\ &= 5 - \frac{5}{2} \int_{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}^{\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)} (1 + \cos 2t) dt = 5 - \frac{5}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}^{\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)} = \\ &= 5 - \frac{5}{2} \left(\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right) \approx 3,391. \end{aligned}$$

Звідси отримаємо:

$$S^* \approx 3,391 \text{ (од.кв.)}$$

Відповідь: площа неураження шкідливими речовинами в межах сектора спостереження становить наближено 3,391 од.кв.

Приклад реалізації розв'язання завдання 1 з використанням СКМ Maple (рис.3, рис.4).

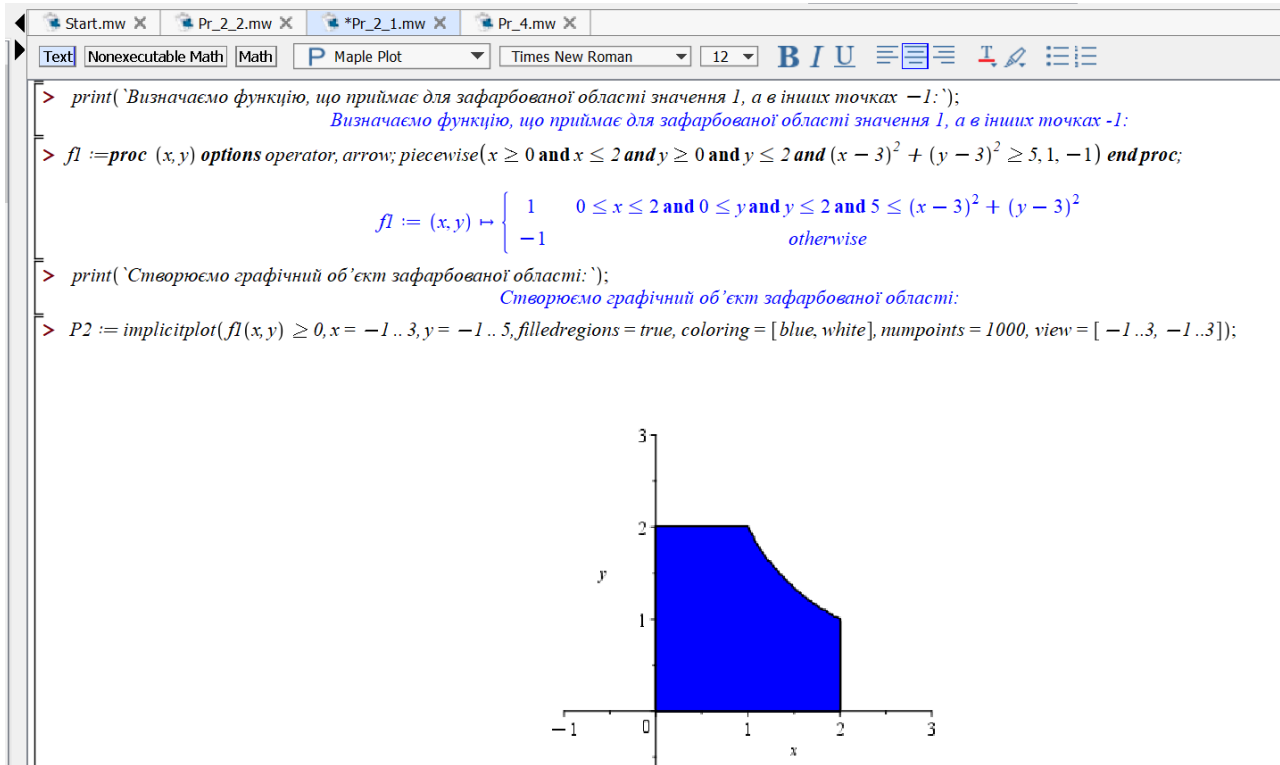


Рисунок 3 – Побудова зафарбованої області в СКМ Maple

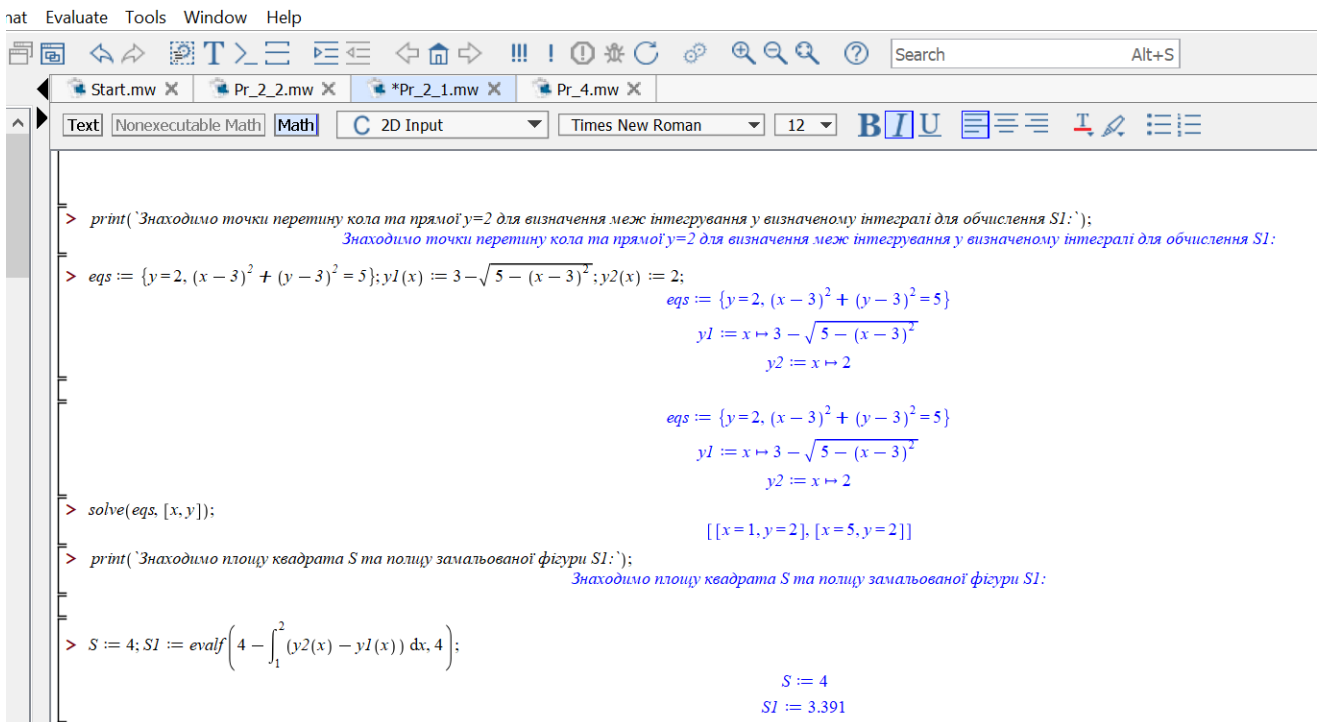


Рисунок 4 – Реалізація розрахунку шуканої площі в СКМ Maple

2.2. Приклад розв'язання завдання 2

Завдання 2.1. Знайти шлях, пройдений матеріальною точкою при прямолінійному русі із швидкістю, що описується функцією $v(t) = 0,05 \cdot (2t + 3)$ за перші 3 с після початку руху. Вважаємо, що швидкість руху вимірюється у $\frac{м}{с}$, а шлях – у м.

Розв'язання.

Шлях, пройдений матеріальною точкою, визначається за формулою:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

В даному випадку

$$v(t) = 0,05 \cdot (2t + 3), \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 3,$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 0,05 \cdot (2t + 3) dt = 0,05 \cdot \left(2 \cdot \frac{t^2}{2} + 3t \right) \Big|_0^3 = 0,05 \cdot (t^2 + 3t) \Big|_0^3 = \\ &= 0,05 \cdot (3^2 + 3 \cdot 3 - 0 - 0) = 0,9 \text{ (м)}. \end{aligned}$$

Відповідь: 0,9 м.

Приклад реалізації розв'язання завдання 2.1 з використанням СКМ Maple (рис. 5).

```
> Приклад 2.1 • Знайти шлях, пройдений матеріальною точкою прямолінійно зі швидкістю  $v = v(t)$  за час з  $t_1$  до  $t_2$ .
> restart;
t1 := 0; t2 := 3; v(t) := 0.05*(2*t + 3); S := ∫_{t1}^{t2} v(t) dt;
t1 := 0
t2 := 3
v := t ↦ 0.05*(2*t + 3)
S := 0.9000000000
> Відповідь: 0,9 од.
>
```

Рисунок 5 – Реалізація розрахунку завдання 2.1 в СКМ Maple

Завдання 2.2. Знайти середні витрати при виготовленні від початку виробництва до випуску 100 одиниць для відомої функції витрат $P(x) = x\sqrt{x} + 2$.

Розв'язання.

Скористаємось теоремою про середнє:

$$f_{\text{сеп}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Маємо:

$$a = 0, b = 100, f(x) = P(x) = x\sqrt{x} + 2,$$

$$\begin{aligned} P_{\text{сеп}} &= \frac{1}{100-0} \int_0^{100} (x\sqrt{x} + 2) dx = \frac{1}{100} \int_0^{100} (x^{3/2} + 2) dx = \\ &= \frac{1}{100} \left(\frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} + 2x \right) \Big|_0^{100} = \frac{1}{100} \left(\frac{x^{5/2}}{5/2} + 2x \right) \Big|_0^{100} = \frac{1}{100} \left(\frac{2}{5} \sqrt{x^5} + 2x \right) \Big|_0^{100} = \\ &= \frac{1}{100} \left(\frac{2}{5} \sqrt{100^5} + 2 \cdot 100 \right) - 0 = \frac{1}{100} \left(\frac{2}{5} \cdot 10^5 + 200 \right) = 402 \text{ (од. прод.)}. \end{aligned}$$

Відповідь: 402 од. прод.

Приклад реалізації розв'язання завдання 2.2 з використанням СКМ Maple (рис. 6).

```

> Приклад 2.2 • Знайти середнє значення витрат при виготовленні продукції від a одиниць продукції до b одиниць, якщо витрати мають вигляд P = P(x) :
> restart;
a := 0; b := 100; P(x) := x*sqrt(x) + 2;
                                     a := 0
                                     b := 100
                                     P := x -> x*sqrt(x) + 2
> Pсеп := 1/(b-a) * int(P(x), x=a..b);
                                     Pсеп := 402
> evalf(Pсеп, 6);
                                     402.
> Відповідь: 402 од.

```

Рисунок 6 – Реалізація розрахунку завдання 2.2 в СКМ Maple

Завдання 2.3. Стиск x гвинтової пружини пропорційний прикладеній силі F . Обчислити роботу сили F при стисканні пружини на 0,04 м, якщо для стискання її на 0,01 м потрібна сила 10 Н.

Розв'язання.

Оскільки $x=0,01$ м при $F=10$ Н, то підставляючи ці значення в закон Гука, дістанемо:

$$10 = k \cdot 0,01,$$

звідки отримаємо:

$$k = 1000 \text{ Н/м.}$$

Підставивши тепер у цю ж рівність значення k , знаходимо:

$$F=1000x.$$

Шукану роботу знайдемо за формулою, поклавши, що $a=0$, $b=0,04$:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{0,04} 1000x dx = 1000 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,04} = 500 \cdot x^2 \Big|_0^{0,04} = \\ &= 500 \cdot (0,04^2 - 0^2) = 0,8 \text{ (Дж)}. \end{aligned}$$

Відповідь: 0,8 Дж.

2.3. Приклад розв'язання завдання 3

Завдання 3. Виконати чисельне визначення інтегралу $\int_2^3 \frac{x}{\ln x} dx$ за формулою лівих прямокутників шляхом розбиття інтервалу інтегрування на 10 рівних відрізків ($n=10$).

Розв'язання.

При $n = 10$, $b = 3$, $a = 2$ маємо:

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{3 - 2}{10} = 0,1.$$

Визначимо точки поділу відрізка інтегрування на часткові та значення підінтегральної функції в точках поділу. Результати розрахунків представимо в допоміжній таблиці 13.

Таблиця 13 – Допоміжна таблиця

i	x_i	$y_i = f(x_i)$	$x_i + \frac{h}{2}$	$f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)$
0	2,0	2,885	2,05	2,856
1	2,1	2,83	2,15	2,8
2	2,2	2,8	2,25	2,77
3	2,3	2,76	2,35	2,75
4	2,4	2,74	2,45	2,73
5	2,5	2,728	2,55	2,73
6	2,6	2,72	2,65	2,74
7	2,7	2,72	2,75	2,72
8	2,8	2,72	2,85	2,72
9	2,9	2,72	2,95	2,72
10	3,0	2,73		2,73

Маємо за методом лівих прямокутників:

$$\int_2^3 \frac{x}{\ln x} dx \approx h \sum_{i=0}^9 y_i,$$

де $S_h = h \sum_{i=0}^9 y_i = 0,1 \cdot 27,623 = 2,7623$.

Знаходимо:

$$S_{2h} = \sum_{i=1}^5 S_i = 2h \cdot (y_0 + y_2 + y_4 + y_6 + y_8) = 0,2 \cdot 13,865 = 2,773.$$

Похибка обчислення визначеного інтегралу за методом лівих прямокутників:

$$\Delta_{\text{лп}} = \frac{|S_h - S_{2h}|}{3} = \frac{|2,7623 - 2,773|}{3} = 0,00357.$$

Відповідь: $\int_2^3 \frac{x}{\ln x} dx \approx 2,7623$.

Приклад реалізації розв'язання завдання 3 з використанням СКМ Maple (рис. 7).

```

Приклад 3: Виконати чисельне визначення інтегралу  $\int_2^3 \frac{x}{\ln x} dx$  за формулою лівих прямокутників шляхом розбиття інтервалу інтегрування на 10 рівних відрізків (n=10).
restart;
y0 := evalf( $\frac{2}{\ln(2)}, 4$ );
y1 := evalf( $\frac{2.1}{\ln(2.1)}, 4$ );
y2 := evalf( $\frac{2.2}{\ln(2.2)}, 4$ );
y3 := evalf( $\frac{2.3}{\ln(2.3)}, 4$ );
y4 := evalf( $\frac{2.4}{\ln(2.4)}, 4$ );
y5 := evalf( $\frac{2.5}{\ln(2.5)}, 4$ );
y6 := evalf( $\frac{2.6}{\ln(2.6)}, 4$ );
y7 := evalf( $\frac{2.7}{\ln(2.7)}, 4$ );
y8 := evalf( $\frac{2.8}{\ln(2.8)}, 4$ );
y9 := evalf( $\frac{2.9}{\ln(2.9)}, 4$ );
y10 := evalf( $\frac{3}{\ln(3)}, 4$ );
Sh := 0.1 * (y0 + y1 + y2 + y3 + y4 + y5 + y6 + y7 + y8 + y9);
S2h := 2 * 0.1 * (y0 + y2 + y4 + y6 + y8);
Delta :=  $\frac{|S_h - S_{2h}|}{3}$ ;
Відповідь : 2,762

```

Рисунок 7 – Реалізація розрахунку завдання 3 в СКМ Maple

2.4. Приклад розв'язання завдання 4

Завдання 4. Нехай тіло температури 600°C охолоджується до температури навколишнього середовища 20°C . Відомо, що через 1 годину температура тіла становила 560°C . Знайти закон охолодження тіла та температуру тіла через 3 години.

Розв'язання.

Нехай $T(t)$ – температура тіла в момент часу t ,

$$T'(t) = \frac{dT}{dt} - \text{швидкість охолодження.}$$

З умови відомо, що $T(0)=600$, $T_1=20$, $T(1)=560$.

1) Закон охолодження тіла можна описати диференціальним рівнянням

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - 20).$$

Розділимо змінні і проінтегруємо диференціальне рівняння:

$$\frac{dT}{T(t) - 20} = -k dt, \quad \int \frac{dT}{T(t) - 20} = -k \int dt,$$

$$\ln|T(t) - 20| = -kt + \ln C, \quad \ln|T(t) - 20| = \ln e^{-kt} + \ln C.$$

Звідси отримуємо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$T(t) = 20 + Ce^{-kt}.$$

2) Використовуємо початкову умову:

$$T(0) = 600 \Rightarrow 600 = 20 + Ce^0, \quad C + 20 = 600, \quad C = 580,$$

$$T(t) = 20 + 580e^{-kt}.$$

3) Використовуємо додаткову умову:

$$T(1) = 560 \Rightarrow 560 = 20 + 580e^{-k \cdot 1}, \quad 580e^{-k} = 540, \\ e^{-k} = \frac{540}{580} = \frac{27}{29}.$$

Закон охолодження тіла має вид:

$$T(t) = 20 + 580 \cdot \left(\frac{27}{29}\right)^t.$$

4) $T(3) = 20 + 580 \cdot \left(\frac{27}{29}\right)^3 \approx 488^{\circ}\text{C}$ – температура тіла через 3 години.

Відповідь: $T(t) = 20 + 580 \cdot \left(\frac{27}{29}\right)^t$; $T(3) \approx 488^{\circ}\text{C}$.

Приклад реалізації розв'язання завдання 4 з використанням СКМ Maple (рис. 8).

Приклад 4. Нехай заготовки температури 600 °C охолоджуються в цеху з температурою 20 °C. Відомо, що через 1 годину температура заготовки становила 560 °C. Знайти закон охолодження заготовки та її температуру через 3 години.

1) $T(t)$ - температура заготовки в момент часу t ,

$\frac{dT}{dt}$ - швидкість охолодження,

restart; $T(0) := 600; T_1 := 20; T(1) := 560;$

$T(0) := 600$

$T_1 := 20$

$T(1) := 560$

$$\frac{dT}{dt} = (-k(T(t) - T_1)) \xrightarrow{\text{solve DE}} T(t) = 20 + e^{-kt} c,$$

2) Використовуємо початкову умову:

$$T(0) = T_1 + C \cdot e^0 \xrightarrow{\text{isolate for c}} c = 580 \xrightarrow{\text{assign}}$$

$$T(t) := T_1 + c \cdot e^{-kt}$$

$T(t) := 20 + 580 e^{-kt}$

3) Використовуємо додаткову умову:

$$T(1) = T_1 + c \cdot e^{-k \cdot 1} \xrightarrow{\text{isolate for exp(-k \cdot 1)}}$$

$$T(3) := 20 + 580 \cdot \left(\frac{27}{29}\right)^3; \text{evalf}(T(3));$$

$T(3) := \frac{410480}{841}$

488.0856124

Відповідь: $T(t) = 20 + 580 \left(\frac{27}{29}\right)^t$ - закон охолодження тіла, температура заготовки через 3 години ≈ 488 °C.

Рисунок 8 – Реалізація розрахунку завдання 4 в СКМ Maple

2.5. Приклад розв'язання завдання 5

Завдання 5.1. Використовуючи розвинення в ряд Маклорена відомих функцій, виконати обчислення значення функції $f(x) = e^{-x^2}$ в точці $x=0,3$ із точністю до третього знаку після коми.

Розв'язання.

Застосуємо стандартне розвинення функції

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

в якому зробимо підстановку $x \rightarrow -x^2$.

Маємо наступне розвинення:

$$f(x) = e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots$$

Обчислимо значення функції $f(x) = e^{-x^2}$ в точці $x=0,3$ із точністю до третього знаку після коми (що означає точність $\varepsilon = 0,001$):

$$\begin{aligned} e^{-0,09} = f(0,3) &= 1 - \frac{0,3^2}{1!} + \frac{0,3^4}{2!} - \frac{0,3^6}{3!} + \frac{0,3^8}{4!} - \dots = \\ &= 1 - \frac{0,09}{1} + \frac{0,0081}{2} - \frac{0,000729}{6} + \frac{0,00006561}{24} - \dots = \end{aligned}$$

$$= 1 - 0,045 + 0,00405 - 0,0001215 + \dots =$$

$$= 1 - 0,045 + 0,0041 = 0,959 \pm 0,001.$$

Відповідь: $e^{-0,09} \approx 0,959$ або $e^{-0,09} = 0,959 \pm 0,001$.

Завдання 5.2. Використовуючи розвинення в ряд Маклорена відомих функцій виконати обчислення значення визначеного інтегралу $\int_0^2 \frac{\sin x dx}{x}$ із точністю до третього знаку після коми.

Розв'язання.

Застосуємо стандартне розвинення функції

$$f(x) = \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Запишемо підінтегральну функцію у вигляді:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \dots$$

Обчислимо визначений інтеграл від степеневих функцій:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{\sin x dx}{x} &= \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \dots \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \dots \right) dx = \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \frac{x^9}{9 \cdot 9!} - \dots \right) \Big|_0^2 = \\ &= 2 - \frac{2^3}{3 \cdot 3!} + \frac{2^5}{5 \cdot 5!} - \frac{2^7}{7 \cdot 7!} + \frac{2^9}{9 \cdot 9!} - \dots = \\ &= 2 - \frac{8}{18} + \frac{32}{600} - \frac{128}{35280} + \frac{512}{3265920} - \dots = 1,605 \pm 0,001. \end{aligned}$$

Відповідь: $\int_0^2 \frac{\sin x dx}{x} \approx 1,605$ або $\int_0^2 \frac{\sin x dx}{x} = 1,605 \pm 0,001$.

2.6. Приклад розв'язання завдання 6

Завдання 6. З'ясувати, чи є аналітичною функція $\omega = e^z$. У випадку аналітичності цієї функції знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту при відображенні за допомогою функції $\omega = f(z)$ в точці $z_0 = \ln 2 + i \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання.

Оскільки $\omega = f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$, знайдемо дійсну $U(x, y)$ і уявну $V(x, y)$ частини функції $\omega = f(z)$.

Маємо:

$$\omega = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y;$$

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \omega = e^x \cos y;$$

$$V(x, y) = \operatorname{Im} \omega = e^x \sin y.$$

Доведемо, що функція $\omega = f(z) = e^z$ аналітична. Перевіримо виконання умов Коші-Рімана:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} = e^x \cos y \\ \frac{\partial V}{\partial y} = e^x \cos y \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y};$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial y} = -e^x \sin y \\ \frac{\partial V}{\partial x} = e^x \sin y \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Умови Коші-Рімана виконуються в будь-якій точці комплексної площини, отже функція $\omega = f(z) = e^z$ є аналітичною функцією на всій комплексній площині.

Знайдемо похідну функції комплексної змінної:

$$f'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^z.$$

Знайдемо коефіцієнт розтягу $k = |f'(z_0)|$ та кут повороту $\varphi = \arg f'(z_0)$ при відображенні за допомогою функції $f(z) = e^z$ в точці $z_0 = \ln 2 + i \frac{\pi}{4}$. Обчислимо окремо значення похідної в точці z_0 :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= e^{z_0} = e^{\ln 2 + i \frac{\pi}{4}} = e^{\ln 2} \cdot e^{i \frac{\pi}{4}} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} + i \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Тоді маємо коефіцієнт розтягу:

$$k = |f'(z_0)| = 2.$$

Знаходимо кут повороту при відображенні $\omega = e^z$ в точці z_0 :

$$\varphi = \arg f'(z_0) = \arctg \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Відповідь: функція є аналітичною, $k = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2.7. Приклад розв'язання завдання 7

Завдання 7. Обчислити інтеграл $I = \int_{(L)} z \cdot \operatorname{Im} z^2 dz$, якщо крива (L): радіус-вектор точки $1+2i$.

Розв'язання.

Побудуємо радіус-вектор точки $1+2i$ (рис. 9).

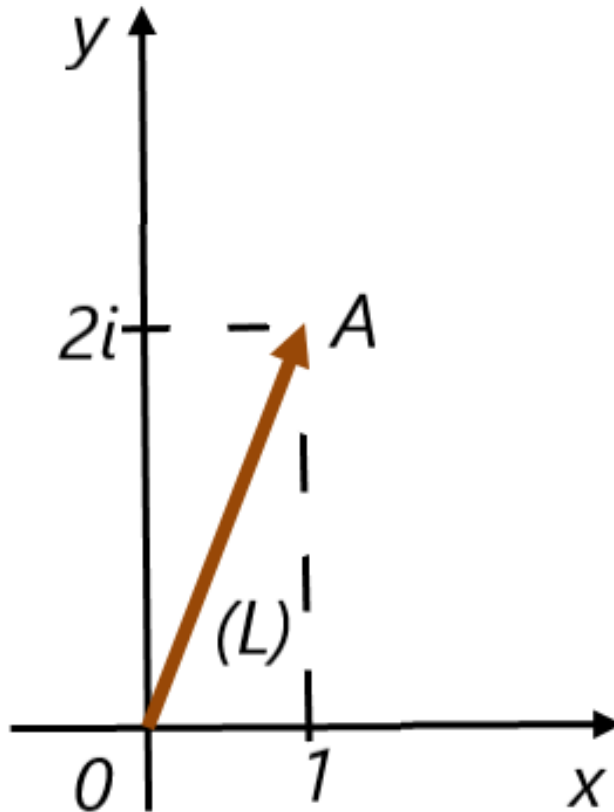


Рисунок 9 – Радіус-вектор точки $1+2i$.

Радіус-вектор \overline{OA} точки A міститься на прямій $y=2x$.
Запишемо параметричне рівняння відрізка OA:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t, \end{cases} 0 \leq t \leq 1.$$

Оскільки $z = x + iy$, то комплексне рівняння (L) буде мати вигляд:

$$L: z=z(t)=t+2ti=(1+2i)t, 0 \leq t \leq 1.$$

Тоді

$$\int_{(L)} z \cdot \operatorname{Im} z^2 dz = \left| \begin{array}{l} z^2 = (1+2i)^2 t^2 = (1+4i-4)t^2 = (-3+4i)t^2 \\ \operatorname{Im} z^2 = 4t^2, dz = (1+2i)dt, 0 \leq t \leq 1 \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 (1 + 2i)t \cdot 4t^2(1 + 2i)dt = 4(1 + 2i)^2 \int_0^1 t^3 dt = \\
&= (-3 + 4i) \cdot t^4 \Big|_0^1 = -3 + 4i.
\end{aligned}$$

Відповідь: $\int_{(L)} z \cdot \operatorname{Im} z^2 dz = -3 + 4i$.

2.8. Приклад розв'язання завдання 8

Завдання 8. Знайти лишки відносно усіх ізольованих особливих точок функції $f(z) = \frac{e^z}{1+z}$.

Розв'язання.

Знайдемо нулі знаменника: $1+z=0$, тоді $z=-1$ - простий полюс
Знайдемо лишок в простому полюсі згідно формули:

$$\operatorname{res} [f(z), z=a] = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \cdot f(z),$$

а тому

$$\operatorname{res} [f(z), z = -1] = \lim_{z \rightarrow -1} (z + 1) \cdot \frac{e^z}{1+z} = \lim_{z \rightarrow -1} e^z = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Дослідимо нескінченно віддалену особливу точку $z = \infty$:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{e^z}{1+z} = (\text{застосуємо правило Лопіталя}) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{e^z}{1} = \infty.$$

Отже, $z = \infty$ - полюс.

Дослідимо також особливу точку $z=0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{1+z} = 1,$$

тому маємо, що $z=0$ -скінченна усувна особлива точка, бо лишок функції в такій точці дорівнює нулю:

$$\operatorname{res} [f(z), z=0]=0.$$

Тоді за теоремою про повну суму лишків

$$\operatorname{res} [f(z), z_k] + \operatorname{res} [f(z), z = \infty] = 0,$$

знаходимо лишок функції в нескінченно віддаленій особливій точці:

$$\operatorname{res} [f(z), z = \infty] = -\frac{1}{e}.$$

Відповідь: $\operatorname{res} [f(z), z = \infty] = -\frac{1}{e}$.

2.9. Приклад розв'язання завдання 9

Завдання 9. Обчислити інтеграл за допомогою інтегральної формули Коші: $\oint_{|z-1|=4} \frac{z^4 e^{\pi z} dz}{z^2+1}$.

Розв'язання.

Запишемо інтегральну формулу Коші:

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \sum \text{res}[f(z), a].$$

Знайдемо особливі точки функції $f(z)$:

$$z^2 + 1 = 0,$$

тоді $z = \pm i$ – прості полюси, які лежать всередині області кола $|z - 1| = 4$ (рис. 10).

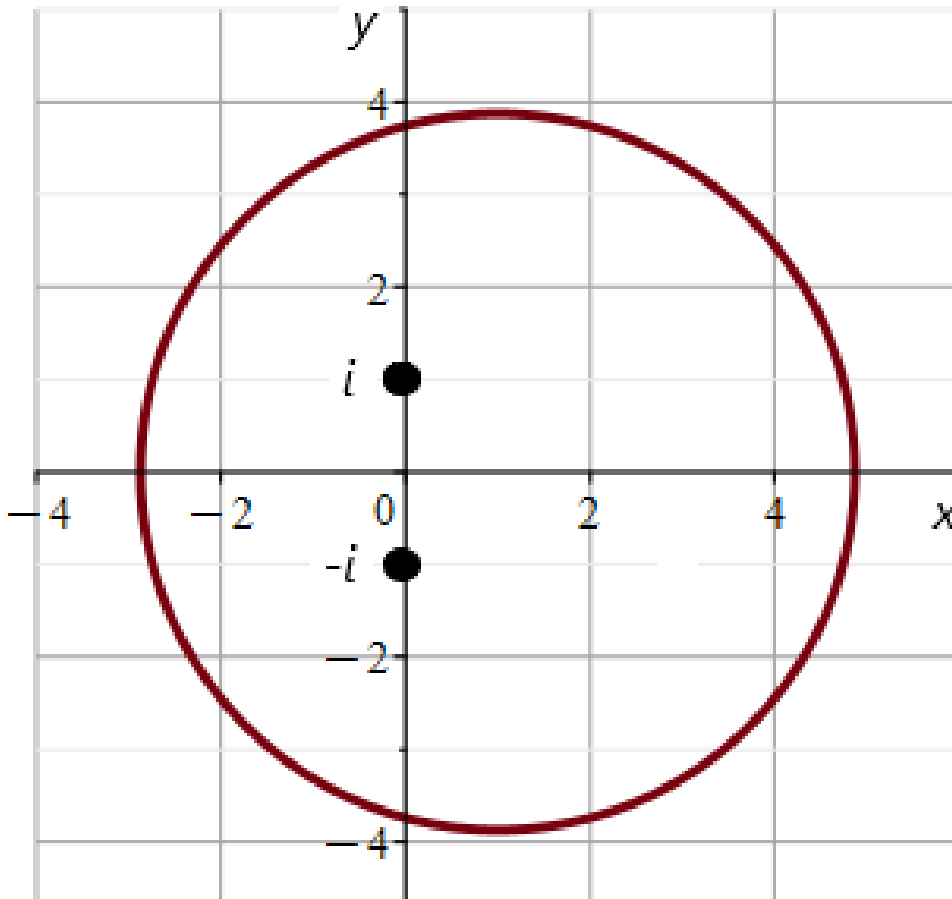


Рисунок 10 – Контур інтегрування $|z - 1| = 2$

Знайдемо лишки в них згідно формули

$$\text{res}[f(z), z = a] = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \cdot f(z),$$

тоді

$$\begin{aligned} \operatorname{res} [f(z), z=-i] &= \lim_{z \rightarrow -i} (z+i) \cdot \frac{z^4 e^{\pi z}}{(z+i)(z-i)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^4 e^{\pi z}}{(z-i)} = \frac{(-i)^4 e^{-\pi i}}{-2i} = \frac{e^{-\pi i} \cdot i}{-2i \cdot i} = \frac{e^{-\pi i} \cdot i}{2}; \end{aligned}$$

$$\operatorname{res} [f(z), z=i] = \lim_{z \rightarrow i} (z-i) \cdot \frac{z^4 e^{\pi z}}{(z+i)(z-i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^4 e^{\pi z}}{(z+i)} = \frac{(i)^4 e^{\pi i}}{2i} = \frac{e^{\pi i} \cdot i}{2i \cdot i} = -\frac{e^{\pi i} \cdot i}{2}.$$

Отже, за інтегральною формулою Коші, інтеграл дорівнює:

$$\oint f(z) dz = 2\pi i \left(\frac{e^{-\pi i} \cdot i}{2} - \frac{e^{\pi i} \cdot i}{2} \right) = 2\pi i h \pi i.$$

Відповідь: $\oint f(z) dz = 2\pi i h \pi i$.

2.10. Приклад розв'язання завдання 10

Завдання 10. Знайти зображення функції $f(t)$, заданої графічно на рисунку 11.

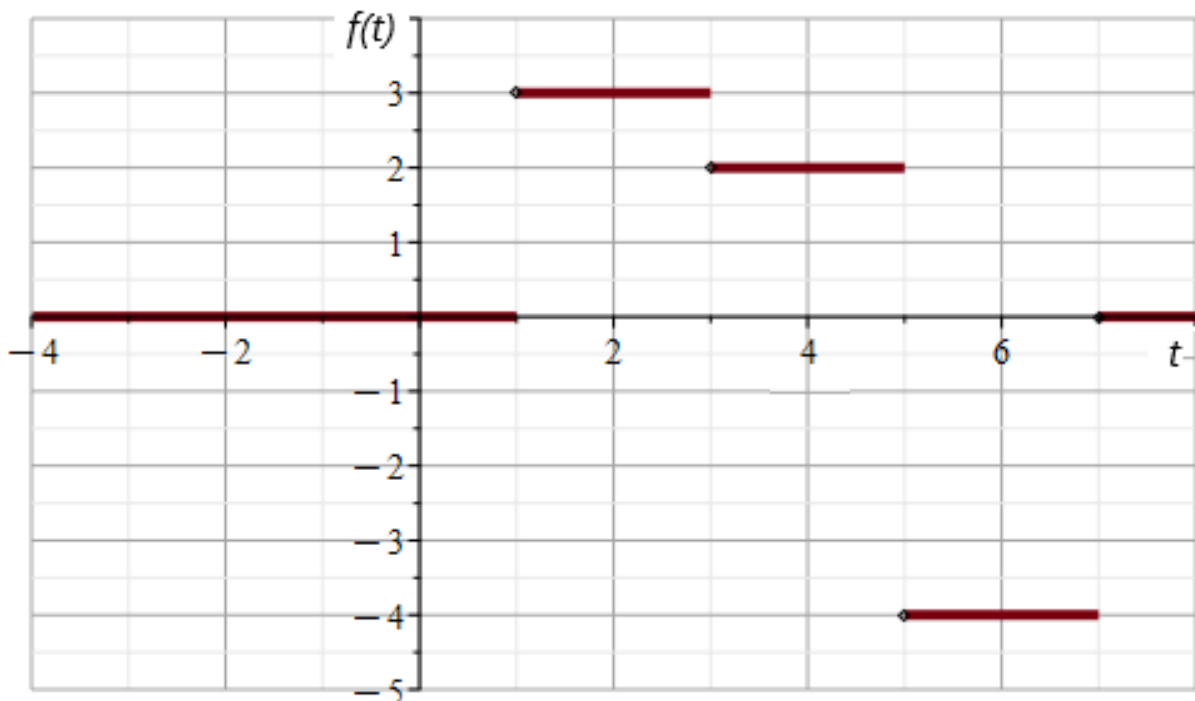


Рисунок 11 – Графік функції $f(t)$

Аналітичний вигляд функції $f(t)$:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ 3, & 1 \leq t < 3, \\ 2, & 3 \leq t < 5, \\ -4, & 5 \leq t < 7, \\ 0, & t \geq 7. \end{cases}$$

Використовуючи одиничну функцію Хевісайда, представимо функцію $f(t)$ у вигляді одного аналітичного виразу:

$$f(t) = 3 \cdot (\eta(t-1) - \eta(t-3)) + 2(\eta(t-3) - \eta(t-5)) - 4(\eta(t-5) - \eta(t-7)) = 3 \cdot \eta(t-1) - \eta(t-3) - 6\eta(t-5) + 4\eta(t-7).$$

Оскільки $\eta(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}$, то за теоремою загалювання отримаємо:

$$f(t) \leftrightarrow F(p) = \frac{3}{p} e^{-p} - \frac{1}{p} e^{-3p} - \frac{6}{p} e^{-5p} + \frac{4}{p} e^{-7p}.$$

Таким чином, $F(p) = \frac{1}{p} (3e^{-p} - e^{-3p} - 6e^{-5p} + 4e^{-7p})$.

Відповідь: $F(p) = \frac{1}{p} (3e^{-p} - e^{-3p} - 6e^{-5p} + 4e^{-7p})$.

2.11. Приклад розв'язання завдання 11

Завдання 11. Розв'язати операторним методом систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y + 10e^{2t}; \\ y' = 2x - y + 7e^{2t}; \end{cases}$$

при заданих початкових умовах $x(0) = 1, y(0) = 3$.

Розв'язання.

Нехай $x(t) \leftrightarrow X(p), y(t) \leftrightarrow Y(p)$, тоді за теоремою диференціювання оригінала маємо:

$$x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x(0) = pX(p) - 1;$$

$$y'(t) \leftrightarrow pY(p) - y(0) = pY(p) - 3;$$

$$e^{2t} \leftrightarrow \frac{1}{p-2}.$$

Якщо в системі диференціальних рівнянь замінити оригінали їх зображеннями, то перейдемо до системи двох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} pX(p) = -2X(p) - 2Y(p) + \frac{10}{p-2} + 1; \\ pY(p) = 2X(p) - Y(p) + \frac{7}{p-2} + 3; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (p+2)X(p) + 2Y(p) = \frac{p+8}{p-2}; \\ -2X(p) + (p-1)Y(p) = \frac{3p+1}{p-2}; \end{cases}$$

Отриману систему розв'яжемо методом Крамера:

$$X(p) = \frac{\Delta_x(p)}{\Delta(p)}, Y(p) = \frac{\Delta_y(p)}{\Delta(p)}.$$

Маємо:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p+2 & 2 \\ -2 & p+1 \end{vmatrix} = p^2 + 3p + 6;$$

$$\Delta_x(p) = \begin{vmatrix} \frac{p+8}{p-2} & 2 \\ \frac{3p+1}{p-2} & p+1 \end{vmatrix} = \frac{(p+8)(p+1) - 2(3p-1)}{p-2} = \frac{p^2 + 3p + 6}{p-2};$$

$$\Delta_Y(p) = \begin{vmatrix} p+2 & \frac{p+8}{p-2} \\ -2 & \frac{3p+1}{p-2} \end{vmatrix} = \frac{(p+2)(3p+1) + 2(p+8)}{p-2} = \frac{3(p^2 + 3p + 6)}{p-2}.$$

Отже отримали:

$$X(p) = \frac{\Delta_x(p)}{\Delta(p)} = \frac{p^2 + 3p + 6}{(p-2)(p^2 + 3p + 6)} = \frac{1}{p-2}; \quad X(p) = \frac{1}{p-2} \leftrightarrow e^{2t} = x(t);$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_Y(p)}{\Delta(p)} = \frac{3(p^2 + 3p + 6)}{(p-2)(p^2 + 3p + 6)} = \frac{3}{p-2}; \quad Y(p) = \frac{3}{p-2} \leftrightarrow 3e^{2t} = y(t).$$

Звідси отримали розв'язок задачі Коші для системи диференціальних рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t}; \\ y(t) = 3e^{2t}. \end{cases}$$

Відповідь: $\begin{cases} x(t) = e^{2t}; \\ y(t) = 3e^{2t}. \end{cases}$

2.12. Приклад розв'язання завдання 12

Завдання 12. Розв'язати інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) \varphi(t) dt$$

Розв'язання.


Нехай $\varphi(x) \leftrightarrow \Phi(p)$, $\operatorname{sh}x \leftrightarrow \frac{1}{p^2-1}$, $x \leftrightarrow \frac{1}{p^2}$.

Тоді

$$\operatorname{sh}x * \varphi(x) = \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) \varphi(t) dt;$$

$$\operatorname{sh}x * \varphi(x) \leftrightarrow \frac{1}{p^2-1} \Phi(p).$$

Тоді заданому інтегральному рівнянню буде відповідати наступне операторне рівняння:


$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2-1} \Phi(p) \Rightarrow \Phi(p) \left(1 + \frac{1}{p^2-1}\right) = \frac{1}{p^2};$$

$$\Phi(p) = \frac{p^2-1}{p^4} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{3!} \frac{3!}{p^4}.$$

Знайдемо оригінал отриманого зображення:

$$\Phi(p) \leftrightarrow \varphi(x) = x - \frac{1}{6}x^3.$$

Відповідь: $\varphi(x) = x - \frac{1}{6}x^3$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Грудкіна Н. С., Самойленко Д. О., Міняйло Д. О. Використання системи комп'ютерної математики MAPLE для розв'язання задач інженерної математики з автоматизованим розрахунком. *Наукові відкриття та фундаментальні наукові дослідження: світовий досвід* : матеріали III Міжнародної наукової конференції, м. Вінниця, 24 листопада, 2023 р. Вінниця, 2023. С. 402-403.
2. Грудкіна Н. С., Колесников С. О., Старов Д. В., Чехута О. В. Впровадження ІКТ під час викладання математичних дисциплін здобувачам технічних, економічних та ІТ-спеціальностей. *Сучасні інформаційні технології, засоби автоматизації та електропривод* : матеріали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції, 18–20 квітня 2024 р. Краматорськ – Тернопіль, 2024. С. 204-206.
3. Задерей П. В., Лагода О. А., Нестеренко О. Б., Харитоновна М. О. Інтегральне числення : навч. посіб. Київ : КНУТД, 2021. 216. URL: https://er.knutd.edu.ua/bitstream/123456789/19923/1/Integral_NP_2021.pdf.
4. Інженерна математика та статистика : методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань із застосування векторної та лінійної алгебри, диференціального та інтегрального числення, диференціальних рівнянь до розв'язування прикладних задач (для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти) / уклад. Н. С. Грудкіна. Запоріжжя : ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА». 2024. 26 с. URL: <https://dspace.mipolytech.education/handle/mip/1264>
5. Ічанська Н. В., Лозицький Д. Ю. Використання математичного апарату та ІКТ для розв'язання прикладних задач. *Науковий вісник Ужгородського університету*. Серія «Математика і інформатика». 2023. Т. 43. Вип. 2. С. 119-129. DOI: 10.24144/2616-7700.2023.43(2).
6. Михалевич В. М. Використання систем комп'ютерної математики у процесі навчання студентів ВНЗ : монографія. Вінниця : ВНТУ, 2016. 279 с.
7. Аршава О. О., Харченко А. П. Практикум з розділу вищої математики «Ряди» : навчальний посібник. Харків : ХНУБА, 2017. 76 с.
8. Пасічник Я. А. Вища математика : підручник. Острог : Вид-во НаУОА, 2021. 432 с. URL: <https://lib.oa.edu.ua/files/funds/vudavnutstvo/1-5,425-430,432.pdf>.
9. Скуратовський Р. В. Вища математика з прикладами і задачами : підручник. Київ : Національна академія управління, 2021. 232 с. URL: <https://nam.kyiv.ua/files/publications/matematika-2021.pdf>.
10. Теорія функцій комплексної змінної та інтегральні перетворення : навч.-метод. посіб. / Н. М. Ясницька та ін. Харків : Друкарня Мадрид, 2023. 246 с.



11. Liengme B. V. Maple: A Primer. Morgan & Claypool Publishers, 2019. 171 p. DOI: <https://doi.org/10.1088/2053-2571/ab0bb3>.

12. Maple : веб-сайт. URL: <https://www.maplesoft.com/products/Maple/> (дата звернення: 15.09.24).



Навчально-методичне видання

Грудкіна Наталія Сергіївна

Дмитришин Ірина Сергіївна

МАТЕМАТИКА ДЛЯ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА ПРОГРАМУВАННЯ

**методичні рекомендації до виконання
індивідуальних завдань із інтегрального числення,
диференціальних рівнянь, рядів,
основ теорії функції комплексної змінної
та операційного числення**

Самостійне електронне мережеве видання

Публікується в авторській редакції