



ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ:
НАУКОВІ ЗАПИСКИ

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ОСВІТІ

УДК 378.147:519.85

DOI <https://doi.org/10.5281/zenodo.13326522>

**Використання СКМ Maple при розв'язанні задач з обчислення
геометричної ймовірності**

Грудкіна Наталія Сергіївна

доктор технічних наук, доцент, професор кафедри природничо-наукових та загальноінженерних дисциплін ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА», 80, Південне шосе, м. Запоріжжя, 69008, Україна, <http://orcid.org/0000-0002-0914-8875>

Кайдан Наталія Володимирівна

кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри природничо-наукових та загальноінженерних дисциплін ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА», 80, Південне шосе, м. Запоріжжя, 69008, Україна, <https://orcid.org/0000-0002-4184-8230>

Колесников Сергій Олексійович

кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри природничо-наукових та загальноінженерних дисциплін ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА», 80, Південне шосе, м. Запоріжжя, 69008, Україна, <https://orcid.org/0000-0002-9538-8858>



Дмитришин Ірина Сергіївна

викладач кваліфікаційної категорії спеціаліст Відокремлений структурний підрозділ «Краматорський фаховий коледж промисловості, інформаційних технологій та бізнесу Донбаської державної машинобудівної академії», 13, вул.Нагірна, м. Вінниця, Вінницька область, 21019, Україна, <https://orcid.org/0000-0003-4828-2716>

Прийнято: 12.08.2024 | Опубліковано: 29.08.2024

***Анотація.** Упровадження сучасних інформаційно-комунікаційних технологій навчання під час викладання дисциплін з математичною складовою, у тому числі теорії ймовірностей та математичної статистики, є актуальною навчально-методичною задачею. Потужним інструментом її вирішення можна вважати систему комп'ютерної математики Maple, що надає широкі можливості використання інтелектуального середовища для математичних досліджень різного спектра та рівня складності. Однак, не зважаючи на наявні приклади використання системи комп'ютерної математики Maple для розв'язування задач з елементами векторної алгебри, теорії функцій, математичного аналізу, математичного моделювання, застосування цього потужного інструменту для розв'язування задач з обчислення геометричної ймовірності практично не досліджувалося. В даній роботі підкреслюється, що розробка матеріалів прикладного характеру із застосуванням систем комп'ютерної математики у навчанні теорії ймовірностей та статистики, які стосуються покращення наочності та алгоритмізації, сприятиме опануванню здобувачами вищої освіти основних етапів розв'язування типових ймовірносних задач, їх уніфікації, застосування елементів програмування. Метою роботи є вирішення питання використання*



системи комп'ютерної математики Maple у навчальному процесі при розв'язуванні задач з обчислення геометричної ймовірності різного рівня складності. У роботі продемонстровано можливості графічного пакету та пакету математичного аналізу системи комп'ютерної математики Maple з метою покращення наочності та спрощення розрахунків в задачах, що вимагають обчислення площі або об'єму фігур. Розроблені фрагменти коду в системі комп'ютерної математики Maple дозволяють в автоматизованому режимі будувати відповідні фігури, обчислювати визначені та кратні інтеграли під час розв'язування типових задач з обчислення геометричної ймовірності. Це дозволить використовувати запропоновані розробки при проектуванні задач нового типу.

***Ключові слова:** інформаційно-комунікаційні технології, система комп'ютерної математики Maple, теорія ймовірностей та математична статистика, геометрична ймовірність.*

The use of SCM Maple in solving problems on calculating geometric probability

Hrudkina Nataliia

Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Natural Sciences and General Engineering Disciplines «Technical University «METINVEST POLYTECHNIC», METINVEST HOLDING LLC, 80, Pivdenne Hwy, Zaporizhzhia, 69008, Ukraine, <http://orcid.org/0000-0002-0914-8875>

Kaidan Nataliia

Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Ph. D.), Docent, Associate Professor of the Department of Natural Sciences and General Engineering



**ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ:
НАУКОВІ ЗАПИСКИ**

Disciplines «Technical University «METINVEST POLYTECHNIC», METINVEST HOLDING LLC, 80, Pivdenne Hwy, Zaporizhzhia, 69008, Ukraine, <https://orcid.org/0000-0002-4184-8230>

Kolesnykov Sergiy

Candidate of Physical and Mathematical Sciences (Ph. D.), Docent, Associate Professor of the Department of Natural Sciences and General Engineering Disciplines «Technical University «METINVEST POLYTECHNIC», METINVEST HOLDING LLC, 80, Pivdenne Hwy, Zaporizhzhia, 69008, Ukraine, <https://orcid.org/0000-0002-9538-8858>

Dmytryshyn Iryna Serhiivna

teacher of the specialist qualification category Separate structural unit «Kramatorsk Vocational College of Industry, Information Technologies and Business of the Donbas State Machine Building Academy», 13, Nagirna Street, Vinnytsia, Vinnytsia Region, 21019, Ukraine, <https://orcid.org/0000-0003-4828-2716>

***Abstract.** The introduction of modern information and communication technologies in the teaching of disciplines with a mathematical component, including probability theory and mathematical statistics, is an urgent educational and methodological task. Maple, the computer mathematics system can be considered a powerful tool for solving it, as it provides a wide range of opportunities for using an intellectual environment for mathematical research of various spectrums and levels of complexity. However, despite the existing examples of using the Maple computer mathematics system to solve problems with elements of vector algebra, function theory, mathematical analysis, and mathematical modeling, the use of this powerful tool to solve problems in geometric probability has not been*



practically studied. This paper emphasizes that the development of applied materials with the use of computer mathematics systems in teaching probability theory and statistics, which relate to improving visibility and algorithmization, will help higher education students master the basic stages of solving typical probability problems, their unification, and the use of programming elements. The purpose of the work is to solve the problem of using the Maple computer mathematics system in the educational process when solving problems of calculating geometric probability of different levels of complexity. The paper demonstrates the capabilities of the graphical package and the mathematical analysis package of the Maple computer mathematics system in order to improve the visualization and simplify calculations in problems requiring the calculation of the area or volume of objects. The developed code snippets in the Maple computer mathematics system allow to build appropriate shapes in an automated mode, calculate definite and multiple integrals when solving typical problems of calculating geometric probability. This will make it possible to use the proposed developments in the design of new types of tasks.

Keywords: *information and communication technologies, epy Maple computer mathematics system, probability theory and mathematical statistics, geometric probability.*

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок з важливими науковими чи практичними завданнями (Вступ). Забезпечення соціального замовлення на підвищення якості математичної підготовки майбутніх фахівців різних галузей з урахуванням високого рівня розвитку комп'ютерних технологій вимагає постійного вдосконалення освітнього процесу у вищих навчальних закладах. При цьому в умовах інноваційної перебудови системи освіти актуальною є проблема пошуку та впровадження нових підходів до організації навчально-виховного процесу,



заснованих на широкому застосуванні інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) під час викладання дисциплін з математичною складовою [1, 2]. Зазначимо, що серед ІКТ важливе місце займають системи комп'ютерної математики (СКМ), які є одним з ефективних шляхів підвищення якості засвоєння студентами теорії та методів різних розділів вищої математики в першу чергу за рахунок забезпечення наочності та скорочення часу на розв'язання та аналіз отриманого результату [1-3]. Різноманіття СКМ надає можливості для порівняння доцільності використання кожної з них, виявлення обмежень та переваг їх використання для розв'язання певного кола задач [4]. Потужним представником СКМ можна вважати Maple (Corp. MapleSoft, Canada) [5, 6]. Однак, не зважаючи на наявні приклади її застосування для розв'язування широкого кола задач з елементами векторної алгебри, аналітичної геометрії, теорії функцій, математичного аналізу, математичного моделювання та математичної статистики застосування цього інструменту для розв'язування задач з теорії ймовірностей практично не досліджувалося та викликає інтерес.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Зважаючи на широке застосування систем комп'ютерної математики в процесах автоматизації та удосконалення наукових досліджень, постає задача створення навчальних задач з різних розділів вищої математики та теорії ймовірностей та математичної статистики, під час розв'язання яких використовуються сучасні ІКТ, зокрема СКМ [1, 3]. Незважаючи на певні складності від необхідності закупівлі ліцензій до необхідності опанування інструментами СКМ викладачами та підготовку якісного методичного матеріалу, впровадження СКМ у процес навчання з кожним роком зростає, як і якість навчально-методичних робіт, присвячених вказаним питанням [3, 4]. До визнаних світових лідерів серед універсальних математичних систем можна віднести



Derive (Corp. Texas Instruments Ins., USA), Maple (Corp. MapleSoft, Canada), Mathcad (MathSoft Ins., USA), Mathematica (Wolfram Research Ins., USA), Matlab (Mathworks Ins., USA). До загальних ознак систем цього класу можна віднести об'єднання аналітичних та чисельних методів обчислень та можливості використання мов високого рівня, візуалізацію результатів обчислень та можливість обміну інформацією між собою за допомогою різних форматів [1, 3, 4, 9]. Слід окремо зазначити, що графіка СКМ є ефективним засобом візуалізації математичних понять, що сприяє їхньому кращому сприйняттю та засвоєнню.

Однак, незважаючи на переваги використання, досвід впровадження СКМ Maple у процес навчання теорії ймовірностей та математичної статистики все ще є недостатнім, що, перш за все, пов'язане з широким використанням можливостей програмного середовища MS Excel. Зазначимо, що MS Excel забезпечує автоматизованість обчислення з елементами комбінаторики, ймовірності події, повної ймовірності події, за формулою Байєса, за схемою Бернуллі [10-12]. Окремо слід зазначити широкі можливості візуалізації випадкових величин із знаходженням їх числових характеристик, використання основних законів розподілу випадкових величин та статистичного аналізу. Однак до недоліків використання MS Excel слід віднести обмеженість цього програмного середовища щодо застосування для розв'язання задач, пов'язаних з необхідністю обчислень визначеного та кратних інтегралів, а також візуалізацією поверхонь та ліній їх перетинів або графіків функцій та точок їх перетинів. У вирішенні цього питання саме СКМ Maple може стати в нагоді з огляду на вже запропоновані розробки програмних кодів щодо автоматизації візуалізації в пакеті 3D та розрахунків в задачах, пов'язаних з обчисленням площ та об'ємів фігур [7, 13]. Таким чином, розширення кола задач з використанням можливостей СКМ Maple з



відповідною розробкою якісних методичних матеріалів сприятиме вирішенню проблем підвищення ІКТ-компетентності викладачів університету [14] та ефективної роботи студентів під час використання навчальних Maple тренажерів з розв'язування типових задач теорії ймовірностей та статистики [15]. А в подальшому сприятиме поглибленню здобувачем набутих знань та навичок щодо застосування СКМ Maple при розв'язанні більш складних задач прикладного спрямування [16] та вирішенні науково-практичних проблем в рамках своєї спеціалізації.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми.

Проведений аналіз робіт, присвячених використанню СКМ в процесі навчання математичних дисциплін в закладах вищої освіти, вказав на необхідність розробки якісних навчально-методичних матеріалів з різних розділів вищої математики та розширення кола задач, під час розв'язування яких використання СКМ є доречним. Недостатньо дослідженим є питання можливостей та раціональності використання СКМ Maple під час розв'язання типових задач курсу теорії ймовірностей та математичної статистики, в тому числі з обчислення геометричної ймовірності. Саме такі задачі на площині та у просторі вимагають знань з побудови областей та обчислення визначеного та кратних інтегралів в різних системах координат та викликають значні труднощі у студентів під час «ручного» розв'язування. Таким чином, розробка задач даного типу з автоматизованим розрахунком в СКМ Maple дозволить спростити опанування матеріалу студентами з можливістю відслідковувати кожен етап під час розв'язування із забезпеченням контролю розрахунків згідно наведеної геометричної інтерпретації у вигляді побудованих тіл, визначення точок або ліній перетину, і сприятиме більш широкому впровадженню СКМ Maple в навчальний процес.



Формулювання цілей статті. Метою даної роботи є адаптування використання можливостей графічних пакетів та пакету математичного аналізу СКМ Maple для розв'язання задач з обчислення геометричної ймовірності. Відповідно до мети перед нами були поставлені та вирішені наступні завдання з розробка лістингу програмного коду в СКМ Maple для вирішення задач з обчислення геометричної ймовірності на площині та у просторі.

Виклад основного матеріалу дослідження з повним обґрунтуванням здобутих наукових результатів (Результати дослідження). Як було зазначено вище, СКМ Maple є потужним інструментом, який широко використовується як для вирішення типових математичних задач, так і задач прикладного спрямування в розрізі загально інженерних, економічних та комп'ютерних дисциплін [17-19]. Тому необхідним є стимулювання якомога широкого застосування СКМ Maple при викладанні математичних дисциплін, в тому числі з огляду на необхідність розширення кола задач, під час яких це є доречним, та залучення всього інструментарію СКМ Maple.

Зазначимо, що основні труднощі, з якими стикаються студенти під час розв'язання задач на обчислення геометричної ймовірності на площині та у просторі, стосуються по-перше побудови областей, обмежених кривими або поверхнями та знаходженню точок або ліній перетину, що є основою для переходу до обчислення визначеного чи кратних інтегралів [7, 13]. Для автоматизації етапу побудови відповідних фігур у СКМ Maple є спеціалізовані пакети графічних команд «plots» та «plottools», які надають користувачеві широкий спектр функцій та якісну геометричну інтерпретацію умови задачі, і саме цьому етапові приділемо особливу увагу. Визначення точок перетину ліній та обчислення визначених та кратних інтегралів для обчислення площ та об'ємів тіл у СКМ Maple зазвичай не викликає особливих труднощів.



Розглянемо розв'язки прикладів на обчислення геометричної ймовірності на площині та у просторі за допомогою СКМ Maple.

Приклад 1. На мапі обрано сектор спостереження у вигляді квадрату з вершинами в точках $(0;0)$, $(0;2)$, $(2;2)$, $(2;0)$. Після влучення снаряду у точку $(3;3)$, зона ураження уламками має форму кола з центром у заданій точці радіуса $\sqrt{5}$. Оцінити ймовірність не потрапити під уламки, якщо місце спостереження обрано довільним чином в межах сектора спостереження.

Розв'язання.

Для автоматизації етапу побудови відповідних областей у СКМ Maple використовуємо спеціалізований пакет графічних команд «plots» [7]:

```
restart;  
with(plots);  
print(`Введемо дані задачі:`);  
F[1] := (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 5;  
a := 0;  
b := 2;  
c := 0;  
d := 2;  
print(`Створюємо графічний об'єкт граничних ліній:`);  
P1 := implicitplot([x = a, x = b, y = c, y = d, F[1]], x = -1 .. 6, y = -1 .. 6, numpoints = 1000, color =  
black);
```

Використовуємо можливості Maple для побудови зафарбованих областей згідно умов завдання (рис. 1):

```
print(`Визначасмо функцію, що приймає для зафарбованої області значення 1, а в інших  
точках -1:`);  
f1 := proc (x, y) options operator, arrow; piecewise(a <= x and x <= b and c <= y and y <= d and 5  
<= (x-3)^2+(y-3)^2, 1, -1) end proc;  
print(`Створюємо графічний об'єкт зафарбованої області:`);  
P2 := implicitplot(0 <= f1(x, y), x = a-1 .. b+1, y = c-1 .. d+1, filledregions = true, coloring = [blue,  
white], numpoints = 1000, view = [-1 .. 3, -1 .. 3]);  
display(P1, P2, view = [-1 .. 6, -1 .. 6])
```



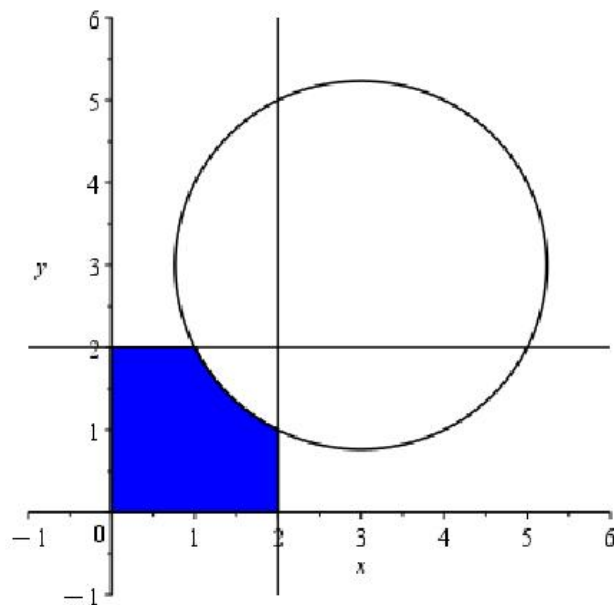
ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ: НАУКОВІ ЗАПИСКИ

Файл (F) Правка (E) Вид (V) Вставити (I) Формат (R) Вичислити (A) Інструменти (T) Окно (W) Помощь (H)

Палитри Workbook

```
> print('Визначемо функцію, що приймає для зафарбованої області значення 1, а в інших точках -1:');  
Визначемо функцію, що приймає для зафарбованої області значення 1, а в інших точках -1: (2)  
> f1 := proc (x,y) options operator, arrow; piecewise(x >= a and x <= b and y >= c and y <= d and (x-3)^2 + (y-3)^2 >= 5, 1, -1) end proc;  
  
f1 := (x,y) -> { 1 a <= x <= b and c <= y and y <= d and 5 <= (x-3)^2 + (y-3)^2  
-1 otherwise (3)  
> print('Створюємо графічний об'єкт зафарбованої області:');  
Створюємо графічний об'єкт зафарбованої області: (4)  
> P2 := implicitplot(f1(x,y) >= 0, x = a-1..b+1, y = c-1..d+1, filledregions = true, coloring = [blue, white], numpoints = 1000, view = [-1..3, -1..3]);  
display(P1,P2, view = [-1..6, -1..6]);
```

а)



б)

Рис. 1. Побудова зафарбованої області (а) та остаточний варіант геометричної інтерпретації умов завдання (б) в СКМ Maple

Реалізуємо етап визначення точок перетину ліній та обчислення площ відповідних фігур для обчислення геометричної ймовірності (рис.2). Окремо



зазначимо, що в даному прикладі при розрахунку площі застосований визначений інтеграл, а рівняння кола використане у явному вигляді з відокремленням відповідного виразу.

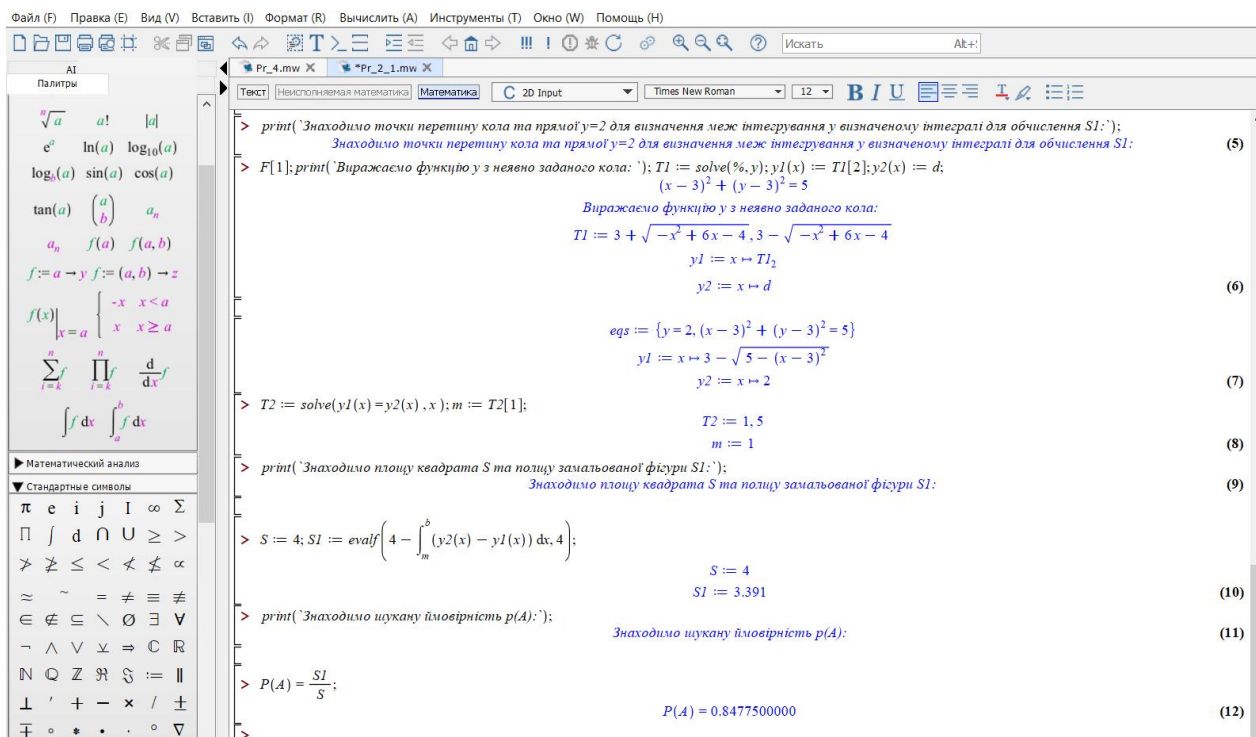


Рис. 2. Реалізація розрахунку шуканої геометричної ймовірності в СКМ Maple

Приклад 2. Знайти ймовірність того, що обрана навмання точка (x,y,z) шара з центром у початку координат та радіусу 3 одиниці, потрапить в область, обмежену параболоїдами обертання $z=x^2+y^2$ та $z=2-x^2-y^2$.

Розв’язання.

Використовуючи приклади розробка лістингу програмного коду в СКМ Maple для побудови просторових фігур [13] під час розв’язання задач обчислення об’єму, реалізуємо етап візуалізації умов задачі (рис. 3):

```

restart;
with(plots);
with(plottools);
  
```



```
print( `Задаємо рівняння поверхонь, які обмежують фігуру у вигляді неявно заданих
функцій: `);
F[1] := z = x^2 + y^2;
F[2] := z = 2 + (-x^2 - y^2);
F[3] := x^2 + y^2 + z^2 = 9;
print( `Виконаємо перехід до циліндричної системи координат: `);
x := r*cos(theta);
y := r*sin(theta);
z := z;
```

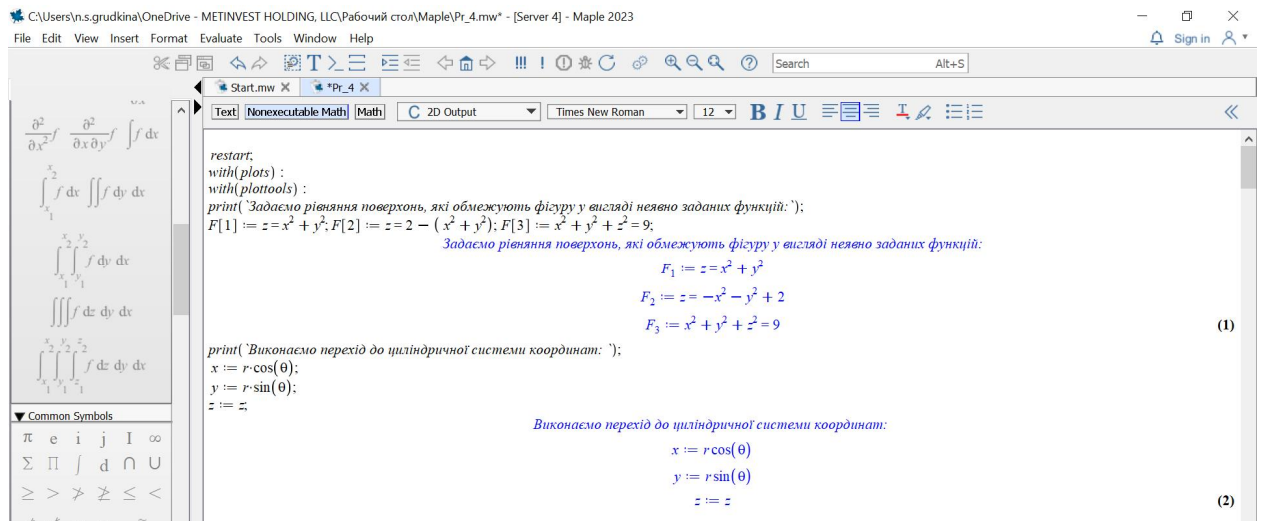


Рис. 3. Введення даних задачі та перехід до циліндричної системи координат в СКМ Maple

Автоматизуємо отримання рівнянь параболоїдів обертання в циліндричній системі координат:

```
print( `Виконаємо перехід до циліндричної системи координат: `);
x := r*cos(varphi);
y := r*sin(varphi);
z := z;
print( `Запишемо рівняння поверхонь в циліндричних координатах та спростимо
вирази: `);
F[1];
F[2];
```



```
simplify(%%, trig);  
simplify(%%, trig);  
print(`Виражаємо функції z із отриманих виразів для рівнянь поверхонь в  
циліндричних координатах: `);  
T1 := solve(%%, z);  
T2 := solve(%%, z);
```

Отримаємо рівняння лінії перетину поверхонь та значення радіусу r для обчислення об'єму тіла, обмеженого даними параболоїдами (рис. 4):

```
print(`Знаходимо рівняння лінії перетину поверхонь F[1] та F[2] та значення радіуса  
r: `);  
T3 := solve({% = `%%`});  
T4 := T3[2];  
T11 := solve(T1 = z, r);  
F1 := T11[1];  
T22 := solve(T2 = z, r);  
F2 := T22[1];
```

```
Виконаємо перехід до циліндричної системи координат:  
x := r cos(φ)  
y := r sin(φ)  
z := z  
(2)  
  
print(`Запишемо рівняння поверхонь в циліндричних координатах та спростимо вирази: `);  
F[1]:=F[2];  
simplify(%%, trig);  
simplify(%%, trig);  
print(`Виражаємо функції z із отриманих виразів для рівнянь поверхонь в циліндричних координатах: `);  
T1 := solve(%%, z);  
T2 := solve(%%, z);  
  
Запишемо рівняння поверхонь в циліндричних координатах та спростимо вирази:  
z = r2 cos(φ)2 + r2 sin(φ)2  
z = -r2 cos(φ)2 - r2 sin(φ)2 + 2  
z = r2  
z = -r2 + 2  
  
Виражаємо функції z із отриманих виразів для рівнянь поверхонь в циліндричних координатах:  
T1 := r2  
T2 := -r2 + 2  
(3)  
  
print(`Знаходимо рівняння лінії перетину поверхонь F[1] та F[2] та значення радіуса r: `);  
T3 := solve({% = %%}); T4 := T3[2]; T11 := solve(T1 = z, r); F1 := T11[1]; T22 := solve(T2 = z, r); F2 := T22[1];  
Знаходимо рівняння лінії перетину поверхонь F[1] та F[2] та значення радіуса r:  
T3 := {r = -1}, {r = 1}  
T4 := {r = 1}  
T11 := √z, -√z  
F1 := √z  
T22 := √-z + 2, -√-z + 2  
F2 := √-z + 2  
(4)
```

Рис. 4. Перехід до циліндричної системи координат в СКМ Maple



Особливу увагу приділяємо побудові тіла, обмеженого даними поверхнями, з покроковим поданням побудови (рис. 5). Така поетапна побудова є доречною для забезпечення докладної геометричної інтепретації та перевірки правильності застосування інструментів СКМ Maple щодо побудові тіл в циліндричних або сферичних координатах, можливостей отримання перерізів. Остаточний варіант геометричної інтепретації задачі дозволяє реалізувати перший етап розв'язання задачі та фактично попередньо оцінити шукану ймовірність (рис. 6):

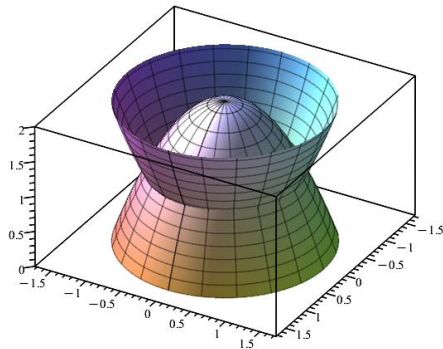
```
print( Будуємо 3D графіки поверхонь F[1] та F[2] в циліндричних координатах: `);  
plot3d([F1, F2], theta = 0 .. 2*Pi, z = 0 .. 3, coords = cylindrical, style = patch, orientation =  
[30, 60], scaling = constrained, numpoints = 10000, view = 0 .. 2);  
print( Будуємо сферу F[3] в сферичних координатах: `);  
G2 := plot3d(3, varphi = 0 .. 2*Pi, theta = 0 .. Pi, coords = spherical, style = line);  
print( Будуємо частину поверхні F[2], яка обмежує фігуру: `);  
plot3d(F2, theta = 0 .. 2*Pi, z = 1 .. 2, coords = cylindrical, style = patch, orientation = [30,  
60], scaling = constrained, numpoints = 10000, view = 0 .. 2);  
print( Будуємо частину поверхні F[1], яка обмежує фігуру: `);  
plot3d(F1, theta = 0 .. 2*Pi, z = 0 .. 1, coords = cylindrical, style = patch, orientation = [45,  
60], scaling = constrained, numpoints = 1000, view = 0 .. 2);  
print( Будуємо тільки фігуру, яка утворюється перетином поверхонь F[1] та F[2]:`);  
F := plot3d(F1, theta = 0 .. 2*Pi, z = 0 .. 1, coords = cylindrical, style = patch, orientation =  
[45, 60], scaling = constrained, numpoints = 10000, view = 0 .. 2);  
G := plot3d(F2, theta = 0 .. 2*Pi, z = 1 .. 2, coords = cylindrical, style = patch, orientation =  
[45, 60], scaling = constrained, numpoints = 10000, view = 0 .. 2);  
display({F, G});  
display({F, G, G2}, view = -3 .. 3);
```



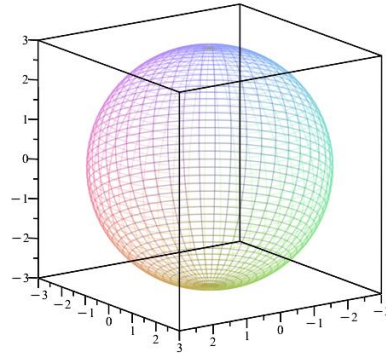
ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ: НАУКОВІ ЗАПИСКИ

Будуємо 3D графіки поверхонь $F[1]$ та $F[2]$ в циліндричних координатах:

Будуємо сферу $F[3]$ в сферичних координатах:



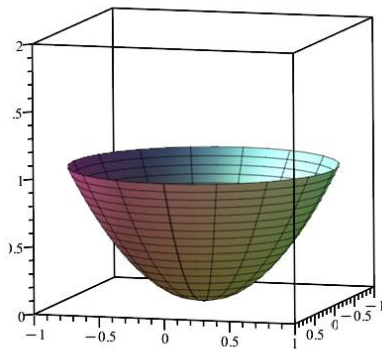
а)



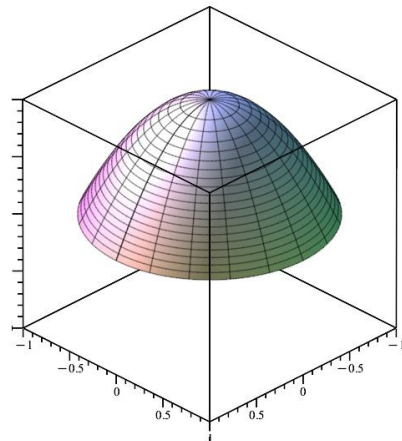
б)

Будуємо частину поверхні $F[1]$, яка обмежує фігуру:

Будуємо частину поверхні $F[2]$, яка обмежує фігуру:



в)

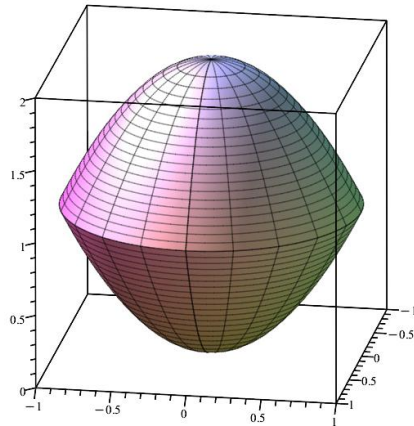


г)

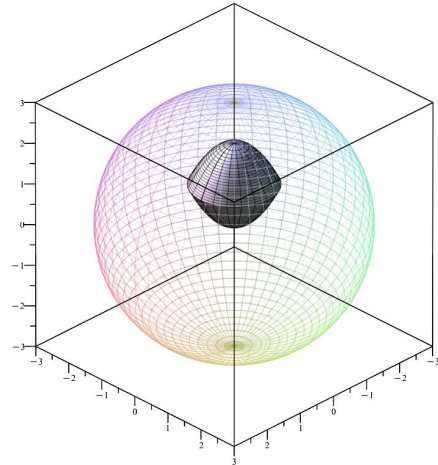
Рис. 5. Покрокова а) – г) побудова поверхонь в СКМ Maple



Будуємо тільки фігуру, яка утворюється перетином поверхонь $F[1]$ та $F[2]$:



а)



б)

Рис. 6. Остаточний варіант побудови тіла, обмеженого параболоїдами обертання (а) та в комбінації з шаром (б) в СКМ Maple

Обчислення об'єму тіла, обмежених параболоїдами обертання, проводимо за допомогою потрійного інтегралу в циліндричних координатах. Доцільно також надати послідовні етапи обчислення потрійного інтегралу у вигляді повторного для закріплення знань із методів обчислення кратних інтегралів в різних системах координат. Знаходимо шукану ймовірність, як відношення об'єму тіла $V1$ до об'єму шара радіусу 3 (рис. 7):

```
print( Обчислимо об'єм шара радіусу R=3`);
```

```
R := 3;
```

```
V := 4/3*Pi*R^3;
```

```
print( Обчислимо об'єм тіла, обмеженого параболоїдами Z1 та Z2 `);
```

```
V1 := int(r, [z = T1 .. T2, r = 0 .. 1, varphi = 0 .. 2*Pi]);
```

```
print( Обчислення потрійного інтегралу у циліндричних координатах можна подати розгорнуто послідовним інтегруванням повторних інтегралів`);
```

```
V3 := int(1, z = T1 .. T2);
```

```
V2 := int(V3*r, r = 0 .. 1);
```



```
V1 := int(V2, varphi = 0 .. 2*Pi);
```

```
print(` Обчислення ймовірності події A:`);
```

```
p(A) = V1/V;
```

```
print(` Обчислимо об'єм шара радіусу R=3`); R := 3 : V :=  $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ ;
```

```
Обчислимо об'єм шара радіусу R=3
```

```
V := 36  $\pi$ 
```

(5)

```
print(` Обчислимо об'єм тіла, обмеженого параболоїдами T1 та T2 `);
```

```
Обчислимо об'єм тіла, обмеженого параболоїдами T1 та T2
```

(6)

```
V1 :=  $\int_0^{2 \cdot \pi} \int_0^1 \int_{T1}^{T2} r \, dz \, dr \, d\varphi$ ;
```

```
V1 :=  $\pi$ 
```

(7)

```
print(` Обчислення потрібного інтегралу у циліндричних координатах можна подати розгорнуто послідовним інтегруванням повторних інтегралів`);
```

```
Обчислення потрібного інтегралу у циліндричних координатах можна подати розгорнуто послідовним інтегруванням повторних інтегралів
```

(8)

```
V3 :=  $\int_{T1}^{T2} 1 \, dz$ ; V2 :=  $\int_0^1 V3 \cdot r \, dr$ ; V1 :=  $\int_0^{2 \cdot \pi} V2 \, d\varphi$ ;
```

```
V3 :=  $-2r^2 + 2$ 
```

```
V2 :=  $\frac{1}{2}$ 
```

```
V1 :=  $\pi$ 
```

(9)

```
print(` Обчислення ймовірності події A:`);
```

```
Обчислення ймовірності події A:
```

(10)

```
p(A) =  $\frac{V1}{V}$ ;
```

```
p(A) =  $\frac{1}{36}$ 
```

(11)

Рис. 7. Розрахунок шуканої ймовірності в СКМ Maple

Слід зазначити, що запропоновані фрагменти коду розв'язання задач з обчислення геометричної ймовірності дозволяють здобувачеві прослідкувати основні етапи розв'язання типових задач, а покрокова геометрична інтерпретація дозволяє контролювати процес розв'язування.

Висновки. З огляду на широке застосування СКМ в процесах автоматизації та удосконалення наукових досліджень, актуальною є задача створення навчальних задач з різних розділів вищої математики та теорії ймовірностей та математичної статистики, під час розв'язання яких використовуються сучасні ІКТ, зокрема СКМ Maple. Запропоновані фрагменти коду в СКМ Maple, які представлено в даній роботі, дозволяють студентам в автоматизованому режимі прослідкувати основні етапи розв'язування типових прикладів з якісним геометричним поданням, що



включає важливі кроки з побудови відповідних ліній, поверхонь та фігур, які вони обмежують, знаходженням точок та ліній перетину графіків функцій та наступним обчисленням площ або об'ємів для обчислення геометричної ймовірності. Це сприятиме підвищенню якості отриманих знань під час розв'язування типових задач теорії ймовірностей та математичної статистики та стане фундаментом для широкого використання СКМ Maple для вирішення більш складних завдань в майбутньому, в тому числі під час розв'язання професійно орієнтованих задач.

Список використаних джерел

1. Співаковський О.В. Теорія і практика використання інформаційних технологій у процесі підготовки студентів математичних спеціальностей: монографія. Херсон : Айлант, 2003. 228с.
2. Жалдак М.І., Горошко Ю.В., Вінниченко Є.Ф. Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів. 3-тє вид. Київ : Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. 315 с.
3. Михалевич В.М. Використання систем комп'ютерної математики у процесі навчання студентів ВНЗ : монографія. Вінниця : ВНТУ, 2016. 279 с.
4. Юнчик В., Федонюк А. Порівняльна характеристика функціональних можливостей систем комп'ютерної математики в процесі розв'язування задач [Електронний ресурс]. Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Інформаційні системи та мережі, 2019. Вип. 6. С. 90-102. Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/VNULPICM_2019_6_10 (дата звернення: 08.08.2024)
5. Maple. URL: <http://www.maplesoft.com/products/Maple/index.aspx> (дата звернення: 06.08.2024).



6. Monagan M.B., Geddes K.O., Heal K.M., Labahn G., Vorkoetter S.M., McCarron J., DeMarco P. Maple Advanced Programming Guide Maplesoft (15 version), a division of Waterloo Maple Inc, 2009. 452 p.
7. Дрозденко В.О. Maple в математиці: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів III та IV рівнів акредитації. Біла Церква, 2019. 328 с.
8. Бусарова Т.М., Гришечкіна Т.С., Звонарьова О.В., Кузнецов В.М. Методи розв'язання задач вищої математики в пакеті MAPLE : навч. посіб. М-во освіти і науки України, Дніпров. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. Дніпро, 2019. 222 с.
9. Стьопкін А.В. Лук'янова Д.Ю. Використання системи комп'ютерної математики при викладанні точних наук. Духовність особистості: методологія, теорія і практика, 2016. Вип. 2. С. 190-196.
10. Бишевец Н.Г., Омецинська Н.В., Юсипів Т.В. Теорія ймовірностей та математична статистика з використанням табличного процесора MS EXCEL: навч. посіб. Таврійський національний університет імені В.І. Вернадського. Одеса : Гельветика, 2021. 233 с.
11. Самарук Н. Використання інформаційних технологій у процесі розв'язування математичних задач з економічним змістом. Збірник наукових праць Національної академії Державної прикордонної служби України. Серія: Педагогічні науки. Хмельницький : Видавництво НАДПСУ, 2022. № 3(30). С. 456-473. URL: <https://elar.khmnu.edu.ua/handle/123456789/13144> (дата звернення: 08.08.2024).
12. Kolesnykov S.O., Pogosyan A.V. Qualitative analysis of the solution of one physical model switching in EXCEL. International scientific conference «MININGMETALTECH 2023 – The mining and metals sector: integration of business, technology and education» : conference proceedings (November 29–30,



2023. Riga, the Republic of Latvia). Riga, Latvia : «Baltija Publishing», 2023. Vol. 2. 348 pages. P. 345-347. DOI <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-361-3-160> (дата звернення: 08.08.2024).

13. Добранюк Ю.В., Михалевич В.М., Коломієць А.А., Козак О.М. Застосування СКМ Maple для побудови 3D графіків в задачах обчислення об'єму фігур. Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. 2022. № 2. С. 115-123.

14. Морзе Н.В., Кочарян А.Б. Модель стандарту ІКТ-компетентності викладачів університету в контексті підвищення якості освіти. Інформаційні технології і засоби навчання. 2014. Вип. 43, №5. С.27–39.

15. Крупський Я. Проблеми ефективної роботи студентів під час використання навчальних Maple тренажерів з покрокового розв'язання типових задач вищої математики. Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету. Частина 3. 2011. С. 130–135. [URL:http://nbuv.gov.ua/UJRN/znpudpu_2011_3_19](http://nbuv.gov.ua/UJRN/znpudpu_2011_3_19) (дата звернення: 06.08.2024).

16. Ічанська Н.В., Лозицький Д.Ю. «Використання математичного апарату та ІКТ для розв'язання прикладних задач». Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика». т. 43. вип. 2, Жовтень 2023. С. 119-129. doi:10.24144/2616-7700.2023.43(2).

17. Hrudkina N.S., Malii Kh.V., Papazov V.M. Mathematical simulation of rolling processes by pressure using MAPLE computer mathematics systems. International scientific conference «MININGMETALTECH 2023 – The mining and metals sector: integration of business, technology and education» : conference proceedings (November 29–30, 2023. Riga, the Republic of Latvia). Riga, Latvia : «Baltija Publishing», 2023. Vol. 2. 348 pages. P. 230-232.



DOI <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-361-3-154> (дата звернення: 08.08.2024).

18. Грудкіна Н., Колесников С., Малій Х. До питання прикладної спрямованості та використання систем комп'ютерної математики в процесі підготовки майбутніх інженерів. Сучасна вища освіта: досягнення, виклики та перспективи розвитку в умовах невизначеності: Матеріали I Міжнародної науково-практичної конференції, присвяченої 100-річчю Мелітопольського державного педагогічного університету імені Богдана Хмельницького (Запоріжжя – Мелітополь – Київ, 05–06 жовтня 2023 р.). Запоріжжя: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького, 2023. С.177-182.

19. Kaidan N. The use of MAPLE CMS in the course of studying the discipline «higher and discrete mathematics» by students of economic specialties. International scientific conference «MININGMETALTECH 2023 – The mining and metals sector: integration of business, technology and education» : conference proceedings (November 29–30, 2023. Riga, the Republic of Latvia). Riga, Latvia : «Baltija Publishing», 2023. Vol. 2. 348 pages. P.243-245, <https://doi.org/10.30525/978-9934-26-361-3-159> (дата звернення: 08.08.2024).