

Міністерство освіти і науки України  
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

# **МЕТОДИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ В ОБРОБЦІ МЕТАЛІВ ТИСКОМ**

**Посібник**

**для студентів галузі знань 13 «Механічна інженерія»  
денної та заочної форм навчання**

Затверджено  
на засіданні вченої ради  
Протокол № 7 від 27.02.2020

Краматорськ  
ДДМА  
2020

УДК 621.77+ 519.95

Л 38

### Рецензенти:

*В. А. Огородніков*, заслужений діяч науки і техніки України, д-р техн. наук, проф., зав. каф. опору матеріалів та прикладної механіки Вінницького національного технічного університету;

*В. В. Драгобецький*, д-р техн. наук, проф., зав. каф. технології машинобудування Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського.

*Електронне видання локального  
використовування на CD-ROM*

### **Левченко, В. М.**

Л 38      **Методи обчислювальної математики в обробці металів тиском: посібник для студентів галузі знань 13 «Механічна інженерія» денної та заочної форм навчання / В. М. Левченко, Л. І. Алієва, Х. В. Малій. – Електрон. дані. – Краматорськ : ДДМА, 2020. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Назва з тит. екрана.**  
ISBN 978-966-379-926-1.

Розглянуто основні числові методи розв'язання трансцендентних та алгебраїчних рівнянь, систем лінійних та нелінійних рівнянь, наближення функцій, інтегрування та диференціювання. Наведено приклади використання числових методів для аналізу процесів обробки тиском.

Призначено для студентів при вивченні курсів, пов'язаних з обчислювальною математикою, математичним моделюванням, програмуванням та САПР, може бути корисним аспірантам та інженерно-технічним працівникам.

**УДК 621.77+ 519.95**

© В. М. Левченко, Л. І. Алієва,  
Х. В. Малій, 2020

© ДДМА, 2020

ISBN 978-966-379-926-1

## ЗМІСТ

ВСТУП	7
1. РІШЕННЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ І АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ	11
1.1. Аналіз процесу видавлювання плоскої штаби через клинову матрицю методом верхньої оцінки	12
1.2. Розрахунок компонент тензорів головних деформацій і головних напружень	18
1.3. Рішення трансцендентних рівнянь	22
1.3.1. Методи відокремлення коренів	22
1.3.1.1. Графічний (табличний) спосіб відокремлення коренів рівняння	22
1.3.1.2. Метод порозрядного наближення	26
1.3.2. Методи уточнення коренів	28
1.3.2.1. Метод дихотомії	28
1.3.2.2. Метод хорд	32
1.3.2.3. Метод Ньютона (метод дотичних)	37
1.3.2.4. Узагальнений метод Ньютона	45
1.3.2.5. Комбінований метод хорд і дотичних	48
1.3.2.6. Модифікований метод Ньютона	50
1.3.2.7. Метод Рібакова	53
1.3.2.8. Метод січних	55
1.3.2.9. Комбінований метод січних-хорд	56
1.3.2.10. Метод простих ітерацій	57
1.3.2.11. Метод зворотної інтерполяції (екстраполяції)	69
1.4. Рішення алгебраїчних рівнянь	76
1.4.1. Аналітичне рішення лінійних, квадратних, кубічних рівнянь і рівнянь четвертого ступеня	76
1.4.1.1. Рішення лінійних і квадратних рівнянь	76

1.4.1.2. Рішення Кардано для кубічних рівнянь	77
1.4.1.3. Рішення Феррарі для рівнянь четвертого ступеня	78
1.4.2. Правило Горнера	78
1.4.3. Метод Бірге-Вієта для пошуку коренів поліномів	82
1.4.4. Рішення алгебраїчних рівнянь шляхом відокремлення множників	83
1.4.4.1. Метод відокремлення лінійного множника полінома	83
1.4.4.2. Метод Берстоу	90
1.4.4.3. Метод відокремлення квадратичного множника полінома	96
1.5. Методи поліпшення збіжності	101
1.5.1. Збіжність типу геометричної прогресії	103
1.5.2. Квадратична збіжність	104
1.5.3. Застосування методів поліпшення збіжності	105
1.6. Порівняльний аналіз методів рішення рівнянь	106
2. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ	111
2.1. Регресійний аналіз (побудова емпіричних формул за допомогою методу найменших квадратів)	111
2.2. Апроксимація діаграм дійсних напружень з використанням методу найменших квадратів	118
2.3. Поняття про інтерполяцію і екстраполяцію	121
2.4. Поліноміальна апроксимація функцій одного змінного	123
2.4.1. Інтерполяційна формула Лагранжа	127
2.4.2. Кінцеві та розділені різниці	131
2.4.2.1. Кінцеві різниці	131
2.4.2.2. Розділені різниці	133
2.4.3. Різнісні методи інтерполяції	136
2.4.3.1. Інтерполяційні формули Ньютона	136

2.4.3.2. Перетворення полінома, записаного за формулою Лагранжа, у поліном, записаний за формулою Ньютона	139
2.4.3.3. Інтерполяційні формули Гауса, Стірлінга і Бесселя	140
2.4.4. Ітераційні методи інтерполяції (метод Ейткена)	141
2.4.5. Інтерполяція сплайнами	143
2.4.5.1. Лінійний сплайн	146
2.4.5.2. Параболічна сплайн-інтерполяція	147
2.4.5.3. Кубічні сплайни	150
3. РІШЕННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ	157
3.1. Рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь	157
3.1.1. Прямі методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь	158
3.1.1.1. Метод виключення Гауса	158
3.1.1.2. Метод виключення Гауса-Жордана	159
3.1.1.3. Рішення системи лінійних рівнянь для задачі апроксимації діаграми дійсних напружень	160
3.1.2. Ітераційні методи рішення систем лінійних рівнянь	163
3.1.2.1. Метод Якобі (метод простої ітерації, метод одночасних зсувів)	164
3.1.2.2. Метод Гауса-Зейделя	164
3.1.2.3. Метод верхньої релаксації (метод послідовної верхньої релаксації)	165
3.1.3. Поняття норми матриці	166
3.2. Рішення систем нелінійних рівнянь	167
3.2.1. Метод простої ітерації	167
3.2.2. Метод Ньютона	168
3.2.3. Застосування методу Ньютона для вирішення нелінійної системи рівнянь в задачі осадки циліндричної заготовки в умовах неоднорідної деформації	170
3.2.4. Метод збурювання параметрів	173

4. ЧИСЛОВЕ ІНТЕГРУВАННЯ	177
4.1. Методи Ньютона-Котеса (методи механічних квадратур)	180
4.1.1. Формули прямокутників	181
4.1.2. Формула трапецій	186
4.1.3. Формула Сімпсона	189
4.2. Методи найвищої алгебраїчної точності	192
4.3. Застосування сплайнів для числового інтегрування (сплайн- квадратури)	196
4.4. Апостеріорні оцінки похибок за Рунге і Ейткенем	200
4.5. Методи Монте-Карло	202
4.6. Числове інтегрування з використанням адаптивних методів	209
4.7. Застосування числового інтегрування для вирішення задачі осадки кільцевої заготовки на плоских плитах	210
5. ЧИСЛОВЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ	217
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	229
ДОДАТКИ	233

## ВСТУП

Ex nihilo nihil fit.<sup>1</sup>

El sueño de la razón produce monstruos.<sup>2</sup>

Математика – це мистецтво називати  
різні речі одним і тим же ім'ям...<sup>3</sup>

Сучасна наука має справу з досить складними об'єктами і системами, математичні моделі яких вимагають використання відповідного математичного апарату. Так, зокрема, в обробці металів тиском (ОМТ) для теоретичного аналізу технологічних процесів гарячого і холодного штампування, видавлювання, прокатки і т.п., побудови математичних моделей процесів і їх оптимізації використовуються різні методи теорії ОМТ (інженерний, енергетичний та ін.). При цьому доводиться займатися інтегруванням і диференціюванням функцій, знаходити корені рівнянь, розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь і системи нелінійних рівнянь, знаходити рішення диференціальних рівнянь. Однак далеко не завжди можна вирішити ці завдання прямими методами, так би мовити «в лоб», і при цьому отримати аналітичні рішення. Крім того, у багатьох випадках використання прямих методів вирішення пов'язано з великим об'ємом роботи і суттєво ускладнює вирішення завдання. Це пояснюється тим, що, як правило, отримані залежності для процесів ОМТ, що досліджуються, досить складні, і для їх отримання потрібне використання різних засобів з арсеналу математичного апарату. Дані, отримані експериментальним шляхом, потребують також відповідної обробки. У таких випадках вдаються до використання так званих числових методів.

Головне завдання даного навчального посібника – допомогти читачеві оволодіти і навчитися використовувати існуючі математичні підходи для вирішення інженерних і науково-дослідних завдань.

<sup>1</sup> Лукрецій (Titus Lucretius Carus) (бл. 99 до н. е. – 55 до н. е.) – римський поет та філософ.

<sup>2</sup> Іспанське прислів'я.

<sup>3</sup> Жюль Анрі Пуанкаре (Jules Henri Poincaré) (1854–1912) – французький математик, лауреат Нобелівської премії з фізики, автор теорії відносності.

Числові методи – це методи наближеного рішення математичних завдань, що зводяться до виконання скінченної кількості елементарних операцій над числами. В якості таких елементарних операцій фігурують арифметичні дії, що виконуються зазвичай приблизно, також допоміжні операції – записи допоміжних результатів, оцінка похибки і т.п.

Числа задаються обмеженим набором цифр, і таким чином в числових методах числова пряма замінюється дискретною системою чисел (так званою сіткою); функція безперервного аргументу замінюється масивом її значень; операції аналізу, що діють над безперервними функціями, замінюються операціями алгебри над значеннями функцій в сітці. Числові методи зводять вирішення завдань до обчислень, які виконують вручну або за допомогою комп'ютера.

До числових методів вдаються в наступних випадках:

- коли отримання аналітичних рішень неможливо;
- коли одержувані аналітично рішення складні і громіздкі.

Прикладом для першого випадку можуть служити так звані «необчислювані» інтеграли, тобто коли для підінтегральної функції неможливо написати первісну в аналітичній формі, використовуючи відомі методи (підстановка, інтегрування по частинах, розкладання).

Як приклади таких «необчислюваних» інтегралів можна навести такі:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx; \quad \int \frac{\cos x}{x} dx; \quad \int \frac{dx}{\ln x}.$$

Необхідність створення математичних моделей для складних об'єктів і процесів стимулювала раніше і продовжує стимулювати розробку числових методів. Розробка нових числових методів і застосування комп'ютерів для їх реалізації призвели до виникнення цілого напрямку в математиці – так званої «обчислювальної математики».

Що стосується області ОМТ, то процеси обробки металів тиском часто мають досить складну фізичну природу, і в математичних моделях цих процесів використовуються досить складні і громіздкі залежності. Дуже часто при теоре-

тичному аналізі та обробці експериментальних даних зустрічаються ситуації, пов'язані з наведеними вище випадками.

Так, наприклад, часто використовуване основне рівняння енергетичного методу

$$P_d = \frac{1}{v_0} \cdot \left[ \sum_{i_0}^{n_0} \left( \iiint_V \sigma_s \xi_i dV \right)_{i_0} + \sum_{i_k}^{n_k} \left( \iint_F \tau_k \sqrt{v_k^2 + v_l^2} dF \right)_{i_k} + \sum_{i_p}^{n_p} \left( \iint_G \tau_s |\Delta v| dG \right)_{i_p} \right],$$

містить в загальному випадку набір з потрійних і кратних інтегралів. Вирази, що стоять під інтегралами, можуть бути досить складними.

Можна сказати, що в даному випадку тільки для відносно простих процесів (осадка циліндра, осадка кільця, редукування), де для побудови поля швидкостей використовують елементарні лінійні і гіперболічні функції, відпадає необхідність у використанні числових методів.

Для таких відносно складних процесів як осадка кільця, комбіноване видавлювання, осадка штаби з двома ступенями свободи течії металу навіть в разі отримання інтегралів в аналітичному вигляді деякі параметри можуть бути отримані з принципу мінімуму повної енергії деформації. Тобто мінімізацією функції сили деформації, що може бути зроблено тільки з використанням числових методів.

Історія розробки числових методів бере початок з XVI-XVII століть і пов'язана з іменами Ньютона, Гауса, Лагранжа та інших великих математиків. Мабуть, це було обумовлено, з одного боку, розвитком природних наук, зародженням техніки і промисловості, з іншого боку – в цей час були зроблені перші спроби створення машин для автоматичного розрахунку (операції додавання, віднімання, ділення і множення) – арифмометри, які були влаштовані за механічним принципом.

Природно, що поява персональних комп'ютерів надала новий імпульс у розвитку обчислювальної математики. З'явилася можливість практично для кожного вченого і фахівця використовувати персональні комп'ютери для вирішення інженерних задач з використанням числових методів. Для цього було розроблено спе-

ціальні алгоритми, які враховують специфіку вирішення завдань за допомогою комп'ютера, так звані «зручні» алгоритми. Економічні числові методи, що лежать в основі таких алгоритмів, дозволяють вирішувати з достатньою точністю і за прийнятний час дуже складні завдання.

Навчальний посібник, що пропонується, містить виклад основних числових методів розв'язання рівнянь, систем рівнянь, апроксимації функцій, інтегрування і диференціювання. Його особливістю є те, що приклади використання даних методів розглянуто стосовно до обробки тиском. Тому посібник може використовуватися як при вивченні методів обчислювальної математики, так і при вирішенні задач теорії і практики обробки металів тиском. Посібник призначений для студентів, магістрантів і аспірантів, які навчаються за напрямком галузі знань – Механічна інженерія та вивчають такі дисципліни, як «Технологія ковальсько-штампувального виробництва. ХОШ», «Ресурсозберігаючі процеси виготовлення деталей відповідального призначення», «Технологія холодного штампування».

## 1. РІШЕННЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ І АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

У практичній діяльності інженера, який займається науково-дослідницькою роботою, досить часто доводиться зустрічатися з задачею рішення алгебраїчних і трансцендентних рівнянь.

Алгебраїчні рівняння першого та другого ступенів вирішуються за формулами, відомими з алгебри. Для алгебраїчних рівнянь третього і четвертого ступенів формули складні, а в загальному вигляді алгебраїчне рівняння п'ятого і більш високого ступенів не може бути вирішено аналітично.

Однак як алгебраїчні, так і неалгебраїчні рівняння можна вирішити з необхідною точністю, якщо попередньо знайти грубі наближення коренів. Останні потім поступово уточнюються.

Рішення нелінійних (зокрема, трансцендентних рівнянь) виду

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

полягає в знаходженні одного або всіх коренів на відрізку  $[a, b]$  зміни  $x$ .

Рішеннями або коренями рівняння називаються такі значення аргументу, які при підстановці в рівняння зводять його в тотожність.

Зазвичай намагаються локалізувати кожен корінь в своєму відрізку  $[a, b]$ . Тоді знаходження всіх коренів зводиться до локалізації кожного кореня з наступним звуженням відрізків локалізації кореня  $[a, b]$  одним з описаних далі методів.

У багатьох реальних наукових та інженерних задачах, в тому числі і в ОМТ, виникає необхідність вирішення рівняння виду

$$f(x, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

де  $f$  – задана функція;  $x$  – невідома величина (аргумент);  $p_1, p_2, \dots, p_n$  – параметри задачі.

При цьому, як правило, дослідника цікавить поведінка рішень в залежності від параметрів  $p_k$ . При кожному фіксованому наборі параметрів  $p_k$  таке рів-

няння може мати або кінцеву, або нескінченну кількість рішень  $x$ , що відповідає певному фізичному змісту конкретного завдання.

Не порушуючи загальності завдання, можна поміняти місцями невідоме  $x$  і будь-який з параметрів  $p_k$ , тобто розв'язувати рівняння відносно іншої невідомої величини.

В результаті числового рішення рівняння отримують таблиці залежностей шуканої величини  $x$  від параметрів  $p_k$ . На комп'ютері ці таблиці можна уявити в наочному вигляді за допомогою засобів машинної графіки.

Найчастіше фіксують всі параметри, за винятком одного, який змінюють в потрібному інтервалі з обраним кроком і отримують одновимірні таблиці і графіки на площині. Змінюючи інші параметри, отримують багатовимірні таблиці, а на графіках – сімейства кривих.

Числове рішення рівняння зазвичай проводять в два етапи [1–3]. На першому етапі необхідно відокремити корені рівняння, тобто знайти такі інтервали зміни змінної  $x$ , де розташований тільки один корінь. По суті справи, на цьому етапі знаходять наближені значення коренів з похибкою, що задається довжиною кожного інтервалу. Нерідко відокремлення коренів вдається провести, не звертаючись до математичних методів і алгоритмів, на підставі фізичного змісту задачі або її спрощеної математичної моделі. На другому етапі проводять уточнення відокремлених коренів, тобто знаходять корені із заданою точністю.

### **1.1. Аналіз процесу видавлювання плоскої штаби через клинову матрицю методом верхньої оцінки**

В якості прикладу задачі з області теорії обробки металів тиском, в якій може знадобитися вирішити трансцендентне рівняння, розглянемо рішення методом верхньої оцінки задачі видавлювання плоскої штаби через клинову матрицю (рис. 1.1).

Теоретичні основи цього методу розглянуто в роботах [4–7]. Метод верхньої оцінки дозволяє на основі енергетичного підходу визначити силу деформації за формулою

$$F_d = \frac{1}{v_0} \left( \sum_{m=1}^M (\tau_k \cdot v_k \cdot A_k)_m + \sum_{n=1}^N (\tau_s \cdot v_s \cdot A_s)_n \right),$$

де  $v_0$  – швидкість інструменту,

$\tau_k$  – контактне дотичне напруження,

$\tau_s$  – межа текучості матеріалу на зсув,

$v_k$  – швидкість ковзання блоку,

$v_s$  – швидкість зсуву сусідніх блоків,

$A_k$  – площа поверхні контакту з інструментом,

$A_s$  – площа поверхні зсуву елементів,

$N$  – кількість поверхонь зсуву,

$M$  – кількість поверхонь контакту.

За основу вирішення даного завдання взято рішення, що наведене в роботі [4]. Особливість вирішення даної задачі при використанні схеми розбиття заготовки на блоки, наведеної на рис. 1.1, полягає в тому, що положення точки  $Q$  може бути однозначно задано тільки якщо відомий кут  $\gamma$  або  $\beta$ . Ці два параметри є залежними один від одного, і кут  $\beta$  можна виразити через кут  $\gamma$  та розміри матриці

$$\beta(\gamma) = \arctan \frac{b_0}{l_2 \cdot \cos(\alpha) - b_d \cdot \cot(\gamma)}. \quad (1.3)$$

Стосовно до задачі видавлювання плоскої штаби через клинову матрицю вираз (1.2) має наступний вигляд:

$$F_d(\gamma) = \mu \cdot (l_1 \cdot v_1 + l_2 \cdot v_2(\gamma) + l_3 \cdot v_3(\gamma)) + 0,5 \cdot (BQ(\gamma) \cdot v_{2-1}(\gamma) + QC(\gamma) \cdot v_{3-2}(\gamma)),$$

де розміри границь блоків  $BQ$ ,  $QC$  і значення швидкостей  $v_2$ ,  $v_3$ ,  $v_{2-1}$  і  $v_{3-2}$  визначено із розрахункової схеми процесу (див. рис. 1.1) і годографу швидкостей (рис. 1.2).

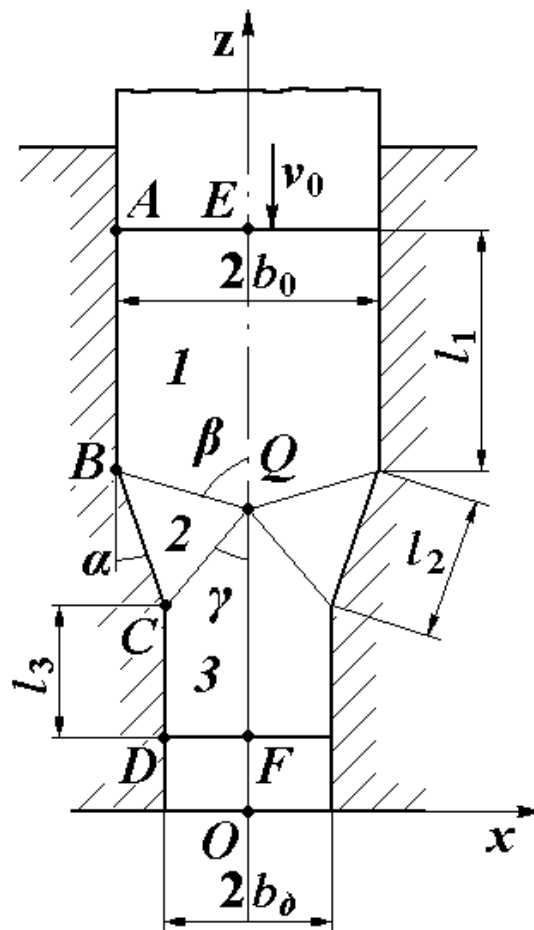


Рисунок 1.1 – Схема процесу видавлювання плоскої штаби через клинову матрицю

У критеріальному вигляді силу деформації визначають як

$$\bar{p}(\gamma) = \mu \cdot (1 + \bar{l}_2 \cdot \bar{v}_2(\gamma) + \bar{l}_3 \cdot \bar{v}_3(\gamma)) + 0,5 \cdot (\overline{BQ}(\gamma) \cdot \bar{v}_{2-1}(\gamma) + \overline{QC}(\gamma) \cdot \bar{v}_{3-2}(\gamma)). \quad (1.4)$$

У розглянутій задачі кут  $\gamma$  – варійований параметр, який можна знайти, використовуючи принцип мінімуму повної енергії деформації [4, 8]: дійсна форма рівноваги тіла відрізняється від усіх можливих форм тим, що повідомляє повній енергії мінімальне значення. Математично це зводиться або до мінімізації функції сили (1.4) за параметром  $\gamma$ , або до вирішення рівняння

$$\frac{d\bar{p}(\gamma)}{d\gamma} = 0 \quad (1.5)$$

відносно того ж параметра.

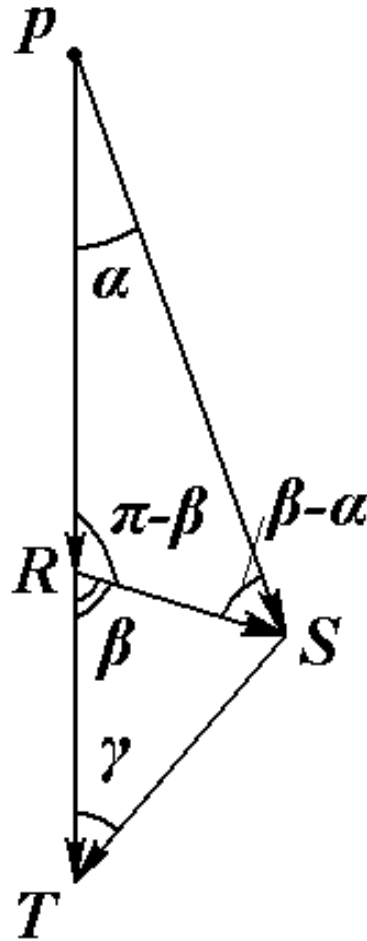


Рисунок 1.2 – Годограф швидкостей для процесу видавлювання плоскої штаби через клинову матрицю

Перша, друга, третя і четверта похідні сили за параметром  $\gamma$  відповідно дорівнюють:

$$\frac{d\bar{p}(\gamma)}{d\gamma} = \mu \left( \bar{l}_2 \cdot \frac{d\bar{v}_2(\gamma)}{d\gamma} + \bar{l}_3 \cdot \frac{d\bar{v}_3(\gamma)}{d\gamma} \right) + 0,5 \cdot \left( \frac{d\bar{BQ}(\gamma)}{d\gamma} \cdot \bar{v}_{2-1}(\gamma) + \bar{BQ}(\gamma) \cdot \frac{d\bar{v}_{2-1}(\gamma)}{d\gamma} + \frac{d\bar{QC}(\gamma)}{d\gamma} \cdot \bar{v}_{3-2}(\gamma) + \bar{QC} \cdot \frac{d\bar{v}_{3-2}(\gamma)}{d\gamma} \right); \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{p}(\gamma)}{d\gamma^2} &= \mu \left( \bar{l}_2 \cdot \frac{d^2\bar{v}_2(\gamma)}{d\gamma^2} + \bar{l}_3 \cdot \frac{d^2\bar{v}_3(\gamma)}{d\gamma^2} \right) + \frac{d\bar{BQ}(\gamma)}{d\gamma} \cdot \frac{d\bar{v}_{2-1}(\gamma)}{d\gamma} + \frac{d\bar{QC}(\gamma)}{d\gamma} \cdot \frac{d\bar{v}_{2-1}(\gamma)}{d\gamma} + \\ &+ 0,5 \cdot \left( \frac{d^2\bar{BQ}(\gamma)}{d\gamma^2} \cdot \bar{v}_{2-1}(\gamma) + \bar{BQ}(\gamma) \cdot \frac{d^2\bar{v}_{2-1}(\gamma)}{d\gamma^2} + \frac{d^2\bar{QC}(\gamma)}{d\gamma^2} \cdot \bar{v}_{3-2}(\gamma) + \right. \\ &\left. + \bar{QC}(\gamma) \cdot \frac{d^2\bar{v}_{3-2}(\gamma)}{d\gamma^2} \right); \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^3 \bar{p}(\gamma)}{d\gamma^3} = & \mu \left( \bar{l}_2 \cdot \frac{d^3 \bar{v}_2(\gamma)}{d\gamma^3} + \bar{l}_3 \cdot \frac{d^3 \bar{v}_3(\gamma)}{d\gamma^3} \right) + 0,5 \cdot \left( \frac{d^3 \bar{BQ}(\gamma)}{d\gamma^3} \cdot \bar{v}_{2-1}(\gamma) + \right. \\
& + \bar{BQ}(\gamma) \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{2-1}(\gamma)}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \bar{QC}(\gamma)}{d\gamma^3} \cdot \bar{v}_{3-2}(\gamma) + \bar{QC}(\gamma) \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{3-2}(\gamma)}{d\gamma^3} \left. \right) + \\
& + 1,5 \cdot \left( \frac{d^2 \bar{BQ}(\gamma)}{d\gamma^2} \cdot \frac{d \bar{v}_{2-1}(\gamma)}{d\gamma} + \frac{d \bar{BQ}(\gamma)}{d\gamma} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{2-1}(\gamma)}{d\gamma^2} + \right. \\
& + \left. \frac{d^2 \bar{QC}(\gamma)}{d\gamma^2} \cdot \frac{d \bar{v}_{3-2}(\gamma)}{d\gamma} + \frac{d \bar{QC}(\gamma)}{d\gamma} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3-2}(\gamma)}{d\gamma^2} \right); \tag{1.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^4 \bar{p}(\gamma)}{d\gamma^4} = & \mu \cdot \left( \bar{l}_2 \cdot \frac{d^4 \bar{v}_2(\gamma)}{d\gamma^4} + \bar{l}_3 \cdot \frac{d^4 \bar{v}_3(\gamma)}{d\gamma^4} \right) + \\
& + 0,5 \cdot \left( \frac{d^4 \bar{BQ}(\gamma)}{d\gamma^4} \cdot \bar{v}_{2-1}(\gamma) + \bar{BQ}(\gamma) \cdot \frac{d^4 \bar{v}_{2-1}(\gamma)}{d\gamma^4} + \right. \\
& + \left. \frac{d^4 \bar{QC}(\gamma)}{d\gamma^4} \cdot \bar{v}_{3-2}(\gamma) + \bar{QC}(\gamma) \cdot \frac{d^4 \bar{v}_{3-2}(\gamma)}{d\gamma^4} \right) + \\
& + 2 \cdot \left( \frac{d^3 \bar{BQ}(\gamma)}{d\gamma^3} \cdot \frac{d \bar{v}_{2-1}(\gamma)}{d\gamma} + \frac{d \bar{BQ}(\gamma)}{d\gamma} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{2-1}(\gamma)}{d\gamma^3} + \right. \\
& + \left. \frac{d \bar{BQ}(\gamma)}{d\gamma} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{2-1}(\gamma)}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \bar{BQ}(\gamma)}{d\gamma^3} \cdot \frac{d \bar{v}_{3-2}(\gamma)}{d\gamma} \right) + \\
& + 3 \cdot \left( \frac{d^2 \bar{BQ}(\gamma)}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{2-1}(\gamma)}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \bar{QC}(\gamma)}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3-2}(\gamma)}{d\gamma^2} \right). \tag{1.9}
\end{aligned}$$

Формули для визначення величин, що входять у вирази (1.4), (1.6) – (1.9), наведено у додатку А.

На рис. 1.3–1.6 наведено графіки функції сили деформації від кута  $\gamma$  при пресуванні штаби через клинову матрицю, а також її першої, другої і третьої похідної по параметру  $\gamma$  для наступних вихідних даних:

$$\bar{b}_0 = 1,0; \bar{b}_\delta = 0,5; \mu = 0,1; \bar{l}_1 = 1,2; \bar{l}_3 = 0,5; \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

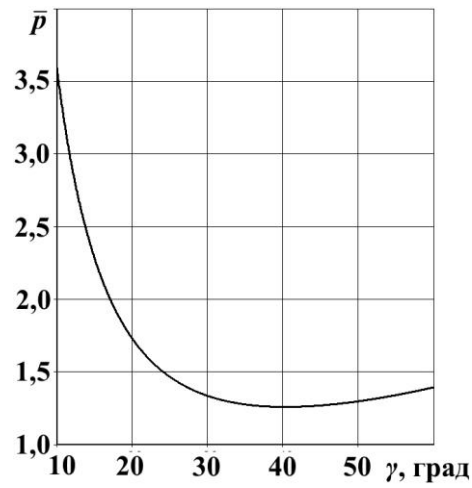


Рисунок 1.3 – Графік залежності функції сили  $\bar{p}$  від величини параметру варіювання  $\gamma$

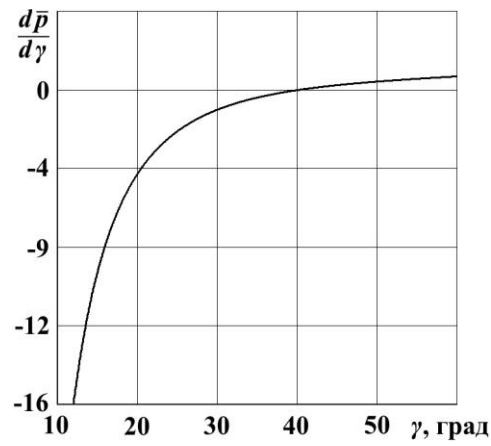


Рисунок 1.4 – Графік залежності першої похідної по  $\gamma$  функції сили  $\bar{p}$  від величини параметру варіювання  $\gamma$

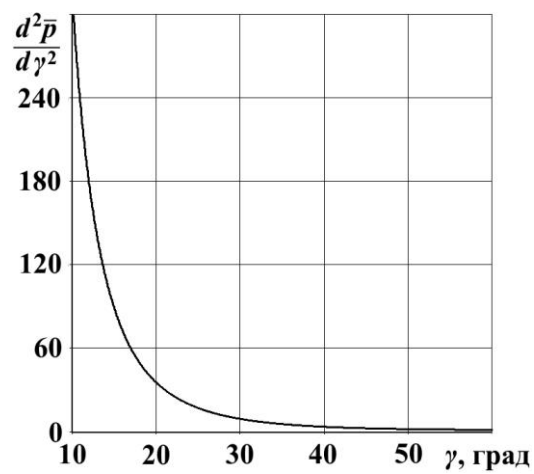


Рисунок 1.5 – Графік залежності другої похідної по  $\gamma$  функції сили  $\bar{p}$  від величини параметру варіювання  $\gamma$

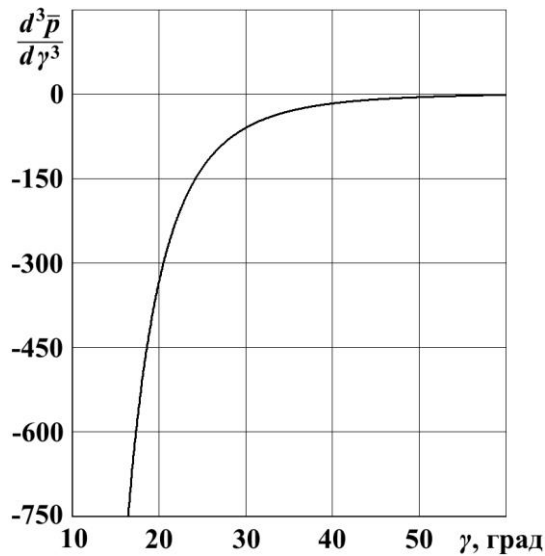


Рисунок 1.6 – Графік залежності третьої похідної по  $\gamma$  функції сили  $\bar{p}$  від величини параметру варіювання  $\gamma$

## 1.2. Розрахунок компонент тензорів головних деформацій і головних напружень

Розрахунок напружено-деформованого стану заготовки в процесі деформації є однією з важливих задач теорії обробки металів тиском, так як дозволяє вирішувати не тільки завдання визначення сили і роботи деформації і величини навантажень, що діють на інструмент, але й задачі кінцевого і граничного формозмінення.

З теорій пружності та пластичності відомо, що деформований стан тіла в точці описує тензор деформації  $T_\varepsilon$

$$T_\varepsilon = \left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{array} \right\}. \quad (1.10)$$

У роботах [9–11] показано, що при зміні положення координатних осей один і той деформований стан виражається різними тензорами  $T_\varepsilon$ , і при певному положенні координатних осей тензор (1.10) може мати форму

$$T_{\varepsilon}^{\Gamma} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix}. \quad (1.11)$$

Такий тензор, у якого всі елементи, що відповідають показникам кутової деформації, дорівнюють нулю, називається тензором головних деформацій (відповідно координатні осі, за якими компоненти тензора деформації  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$  обертаються в нуль, називаються головними осями тензора деформації). У такому вигляді з самим тензором і з його компонентами працювати набагато зручніше і простіше ніж з тензором в загальному вигляді (1.10). Тому при вирішенні задач теорії обробки металів тиском намагаються використовувати саме головні деформації  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ .

Щоб визначити величину головних деформацій, необхідно вирішити кубічне рівняння [9, 12]

$$\varepsilon^3 + I_1(T_{\varepsilon}) \cdot \varepsilon^2 + I_2(T_{\varepsilon}) \cdot \varepsilon + I_3(T_{\varepsilon}) = 0, \quad (1.12)$$

де  $I_1(T_{\varepsilon})$ ,  $I_2(T_{\varepsilon})$ ,  $I_3(T_{\varepsilon})$  – коефіцієнти, що не залежать від орієнтації системи координат (інваріантів тензора деформації)

$$\begin{aligned} I_1(T_{\varepsilon}) &= -(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z); \\ I_2(T_{\varepsilon}) &= \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \varepsilon_z \end{vmatrix}; \\ I_3(T_{\varepsilon}) &= - \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Корені рівняння (1.12) – це головні деформації. В теорії пружності і пластичності [12, 13] доведено, що всі корені цього рівняння – дійсні.

Тензори (1.10) і (1.11) описують деформований стан тіла при використанні опису руху суцільного середовища в змінних Лагранжа. З причини того, що застосування такого підходу обмежується малими деформаціями, то частіше використовують змінні Ейлера [4]. Деформований стан в цьому випадку описує

тензор швидкостей деформацій  $T_\xi$

$$T_\xi = \left\{ \begin{array}{ccc} \xi_x & \frac{1}{2}\xi_{xy} & \frac{1}{2}\xi_{xz} \\ \frac{1}{2}\xi_{yx} & \xi_y & \frac{1}{2}\xi_{yz} \\ \frac{1}{2}\xi_{zx} & \frac{1}{2}\xi_{zy} & \xi_z \end{array} \right\}. \quad (1.14)$$

Для тензора швидкостей деформації також можна визначити положення в просторі головних осей і знайти тензор головних швидкостей деформації

$$T_\xi^r = \left\{ \begin{array}{ccc} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{array} \right\}. \quad (1.15)$$

Щоб визначити величину головних деформацій, необхідно вирішити кубічне рівняння, аналогічне рівнянню (1.12), що використовується для визначення головних деформацій.

Рішення алгебраїчного рівняння третього ступеня може бути необхідне і при розгляді напруженого стану. Напружений стан в точці – це фізична величина, для кількісної характеристики якої необхідно і достатньо задати дев'ять чисел (напруження в координатних площадках), які в сукупності утворюють тензор напружень

$$T_\sigma = \left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{array} \right\}. \quad (1.16)$$

Площинки, на яких діють тільки нормальні напруження, називаються головними площадками; напруження на головних площадках – головними напруженнями; координати осі, перпендикулярні до головних площадок, – головними осями тензора напружень. Щоб визначити головні напруження, необхідно вирішити кубічне рівняння [11, 12, 14]

$$\sigma^3 + I_1(T_\sigma) \cdot \sigma^2 + I_2(T_\sigma) \cdot \sigma + I_3(T_\sigma) = 0, \quad (1.17)$$

де

$$I_1(T_\sigma) = -(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z);$$

$$I_2(T_\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix};$$

$$I_3(T_\sigma) = - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (1.18)$$

Ці коефіцієнти називаються інваріантами тензора напружень  $T_\sigma$ .

За рівнянням (1.17) можна визначити головні напруження  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Отже, напружений стан можна передати тензором головних напружень  $T_\sigma^r$

$$T_\sigma^r = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{Bmatrix}. \quad (1.19)$$

Рівняння (1.17) має три кореня  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Доведено, що всі корені дійсні [11, 14]. Так само як і в разі деформацій мати справу з головними напруженнями при аналізі напруженого стану набагато зручніше і простіше ніж з компонентами тензора напружень, представленим у загальному вигляді.

Розглянемо приклад задачі знаходження головних напружень для напруженого стану, заданого тензором

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} -275 & 16 & -52 \\ 16 & -42 & 34 \\ -52 & 34 & -620 \end{Bmatrix}.$$

Інваріанти тензора напружень розраховуємо за залежностями (1.18)

$$I_1(T_\sigma) = -(-275 - 42 - 620) = 937;$$

$$I_2(T_\sigma) = \begin{vmatrix} -275 & 16 \\ 16 & -42 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -42 & 34 \\ 34 & -620 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -275 & -52 \\ -52 & -620 \end{vmatrix} = 203\,974;$$

$$I_3(T_\sigma) = - \begin{vmatrix} -275 & 16 & -52 \\ 16 & -42 & 34 \\ -52 & 34 & -620 \end{vmatrix} = 6\,627\,388.$$

Таким чином, отримуємо коефіцієнти алгебраїчного рівняння третього ступеня

$$\sigma^3 + 937 \cdot \sigma^2 + 203\,974 \cdot \sigma + 6\,627\,388 = 0, \quad (1.20)$$

вирішивши яке відносно  $\sigma$ , можна визначити головні напруження  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$ .

### 1.3. Рішення трансцендентних рівнянь

#### 1.3.1. Методи відокремлення коренів

##### 1.3.1.1. Графічний (табличний) спосіб відокремлення коренів рівняння

Розглянемо графічний або табличний спосіб відокремлення коренів рівняння, який використовується, коли відсутня інформація про їх розташування. В області, що нас цікавить, зміни невідомого  $x \in [x_0, x_n]$  при фіксованих параметрах  $p_k$  обчислимо ряд значень лівої частини рівняння і результати помістимо в табл. 1.1, за якою можна побудувати графік (рис. 1.7).

Таблиця 1.1 – Табличне представлення функції

$x$	$f(x)$
$x_0$	$f_0$
$x_1$	$f_1$
...	...
$x_n$	$f_n$

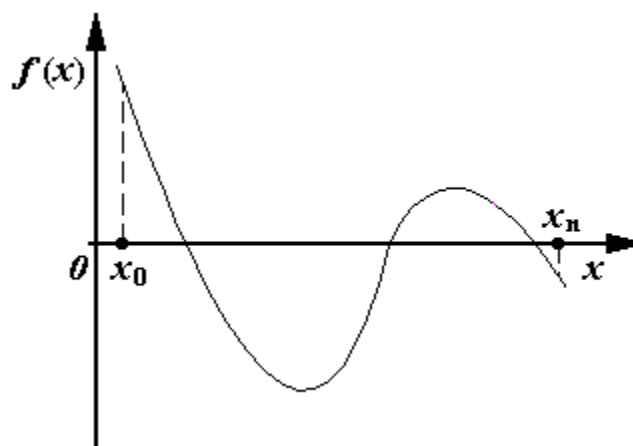


Рисунок 1.7 – Графічне представлення функції

З точністю до обраного кроку (відстань між точками  $x_i$ ) з графіка (таблиці) визначаються наближені значення коренів рівняння. Зменшуючи крок в межах кожного кореня, можна підвищити точність визначення коренів.

Однак такий спосіб вимагає великої кількості обчислень.

**Приклад.** Вирішити рівняння (1.20).

1. Будуємо графік функції  $f(\sigma) = \sigma^3 + 937 \cdot \sigma^2 + 203\,974 \cdot \sigma + 6\,627\,388$  (рис. 1.8).

2. Визначаємо наближено абсциси точок з координатами, що рівні 0:  $\sigma_1 = -640$ ;  $\sigma_2 = -260$ ;  $\sigma_3 = -45$ .

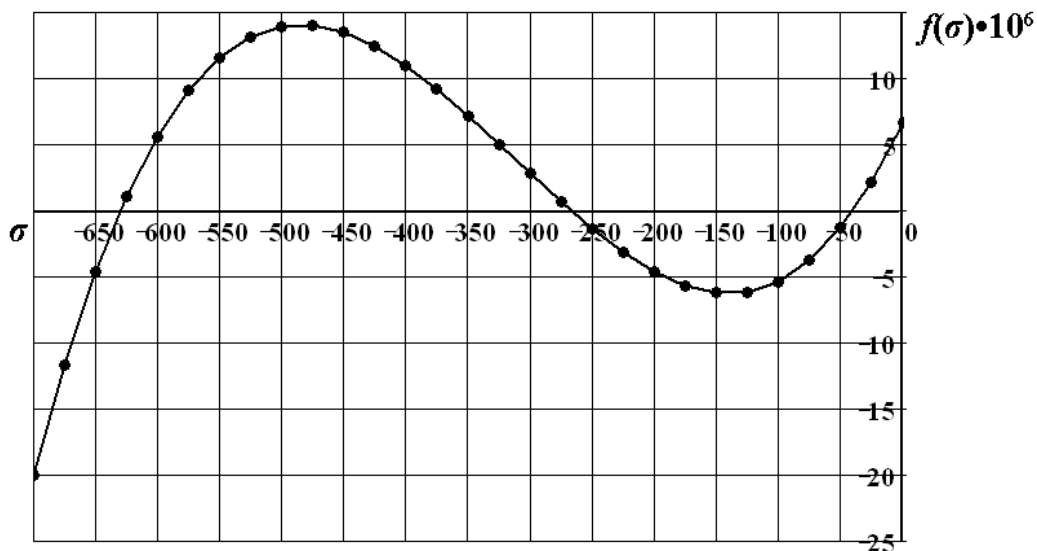


Рисунок 1.8 – Графік функції  $f(\sigma) = \sigma^3 + 937 \cdot \sigma^2 + 203\,974 \cdot \sigma + 6\,627\,388$

Якщо ліва частина рівняння є безперервною функцією аргументу  $x$ , то для відокремлення коренів необов'язково будувати графік цієї функції. У цьому випадку корні рівняння будуть розташовані між точками таблиці, де змінюється знак функції  $f(x)$ . Крок зміни аргументу  $x$  обирається так, щоб він був менше відстані між коренями (табл. 1.2).

Блок-схему такого алгоритму пошуку коренів представлено на рис. 1.9.

Рівняння  $f(x) = 0$  можна представити у вигляді  $f_1(x) = f_2(x)$ , причому одна з цих функцій  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  довільна [1, 15, 16]. Вибір довільної функції проводиться так, щоб графіки  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$  можна було побудувати як можливо легше.

Знаходимо точки перетину графіків. Прочитавши їх абсциси, отримуємо приблизно коріння рівняння  $f(x) = 0$ .

Таблиця 1.2 – Значення функцій  $f(\sigma) = \sigma^3 + 937 \cdot \sigma^2 + 203974 \cdot \sigma + 6627388$

$i$	$\sigma_i$	$f(\sigma_i)$	$i$	$\sigma_i$	$f(\sigma_i)$
0	-700,0	-20024412,0	15	-325,0	4978338,0
1	-675,0	-11681312,0	16	-300,0	2765188,0
2	-650,0	-4698212,0	17	-275,0	598288,0
3	-625,0	1018638,0	18	-250,0	-1428612,0
4	-600,0	5562988,0	19	-225,0	-3221762,0
5	-575,0	9028588,0	20	-200,0	-4687412,0
6	-550,0	11509188,0	21	-175,0	-5731812,0
7	-525,0	13098538,0	22	-150,0	-6261212,0
8	-500,0	13890388,0	23	-125,0	-6181862,0
9	-475,0	13978488,0	24	-100,0	-5400012,0
10	-450,0	13456588,0	25	-75,0	-3821912,0
11	-425,0	12418438,0	26	-50,0	-1353812,0
12	-400,0	10957788,0	27	-25,0	2098038,0
13	-375,0	9168388,0	28	0,0	6627388,0
14	-350,0	7143988,0			

**Приклад.** Вирішити рівняння  $3 \cdot x - \cos(x) - 1 = 0$ .

Представимо дане рівняння у вигляді  $3 \cdot x - 1 = \cos(x)$ . Будуємо графіки функцій  $y = 3 \cdot x - 1$  и  $y = \cos(x)$  (рис. 1.10). Вони перетинаються в одній точці. Прочитавши її абсцису, отримуємо наближений корінь  $x_1 = 0,6$ .

Для таких порівняно простих рівнянь, у яких відсутні параметри, графічним методом вдається провести не тільки відокремлення, а й уточнення коренів. Але при проведенні численних експериментів з варіюванням параметрів задачі подібний метод не підходить для уточнення коренів і використовується тільки для відокремлення коренів. А уточнення коренів проводиться за допомогою інших, більш економічних методів.

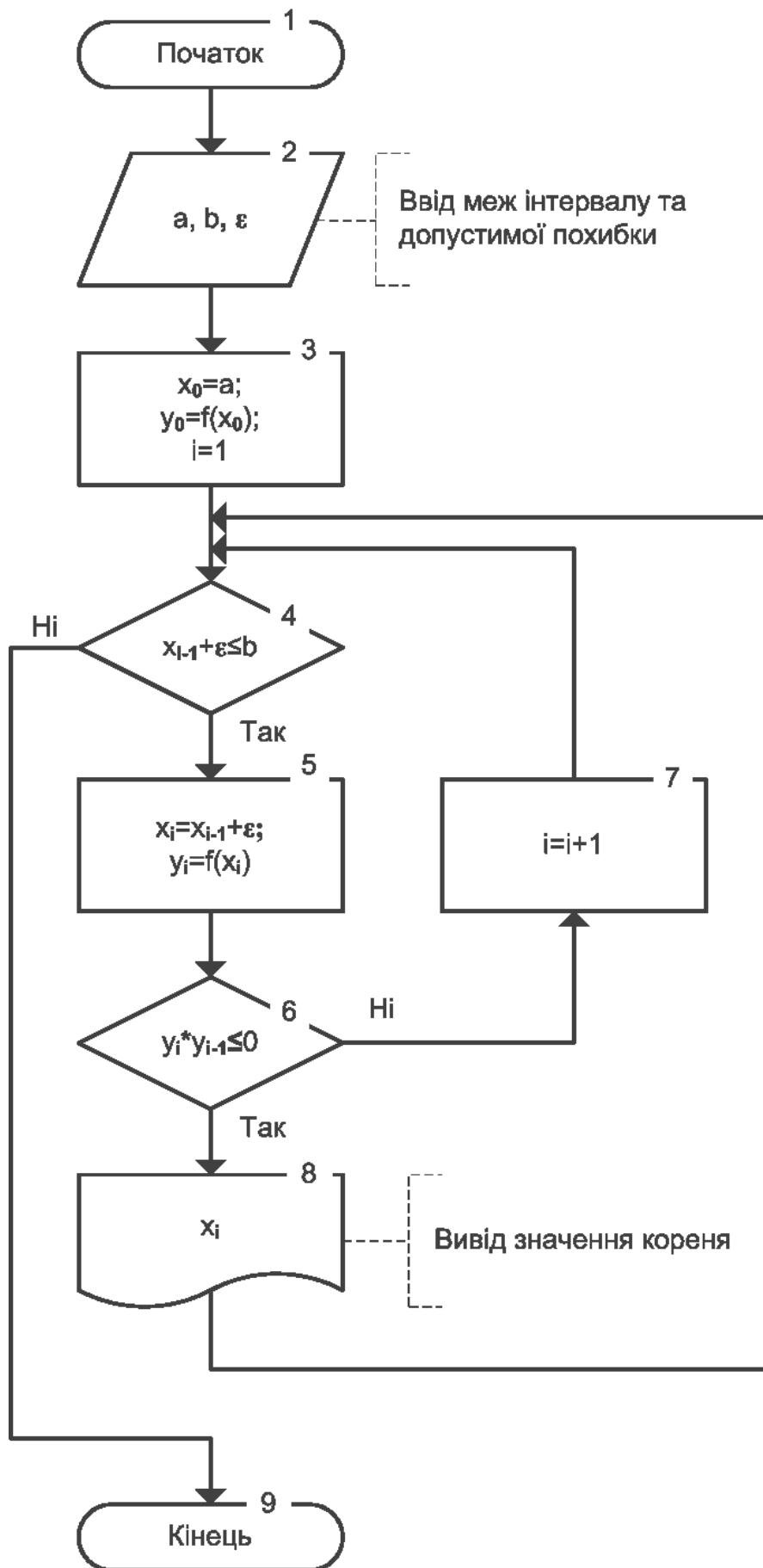


Рисунок 1.9 – Алгоритм табличного методу відокремлення коренів

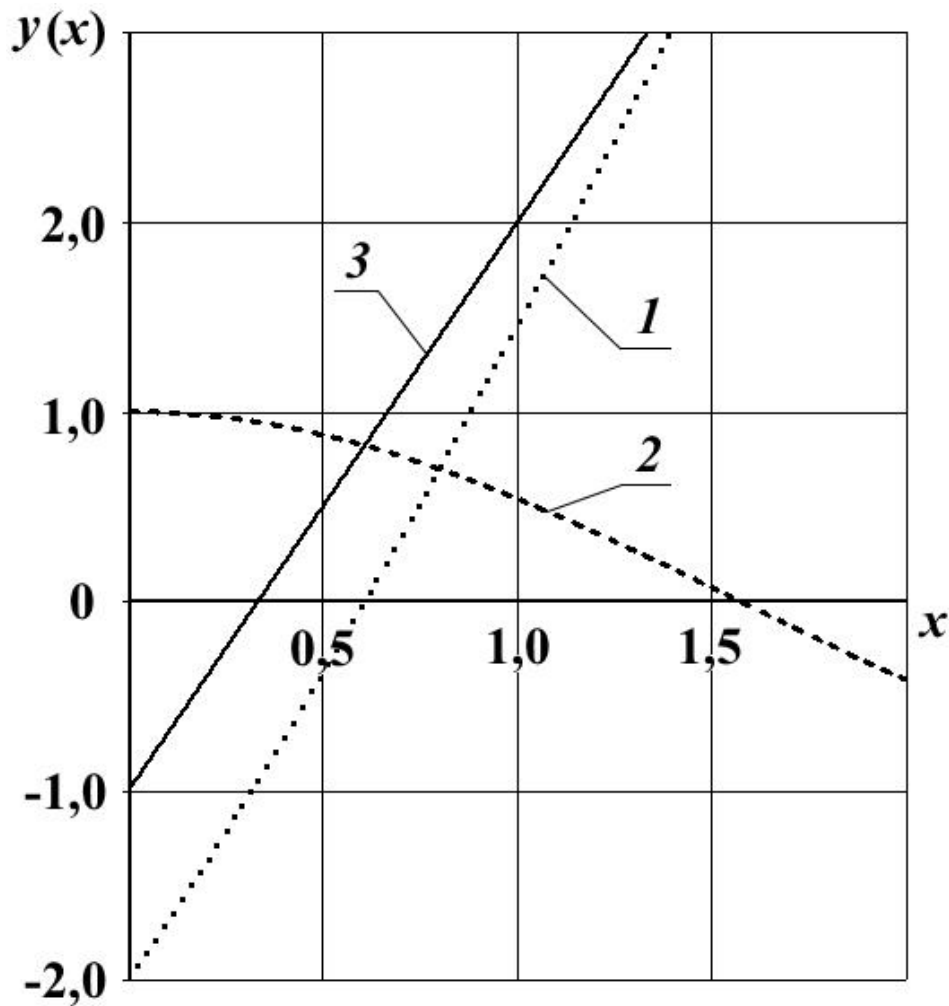


Рисунок 1.10 – Графік функцій: 1 –  $y = 3 \cdot x - \cos(x) - 1$ , 2 –  $y = \cos(x)$  и 3 –  $y = 3 \cdot x - 1$

### 1.3.1.2. Метод порозрядного наближення

Метод порозрядного наближення застосовується для пошуку всіх коренів рівняння  $f(x) = 0$ , що знаходяться на відрізку  $[a, b]$  [2]. Цей метод дозволяє не тільки локалізувати корені, але й уточнити їх значення із заданою точністю. Блок-схему алгоритму представлено на рис. 1.11.

Алгоритм методу досить простий і легко реалізується на комп'ютері [2].

1. Задаємо крок  $c = h$ ,  $x = a$  та обчислюємо функцію  $y_0 = f(x)$ .
2. Обчислюємо значення  $x = x + c$  та перевіряємо умову  $x \leq b$ . Якщо вона виконується, то йдемо до п. 3, інакше закінчуємо рахунок.
3. Обчислюємо значення функції  $y_1 = f(x)$  та перевіряємо умову  $y_0 \cdot y_1 < 0$ . Якщо вона виконується, то йдемо до п. 5, інакше до п. 4.

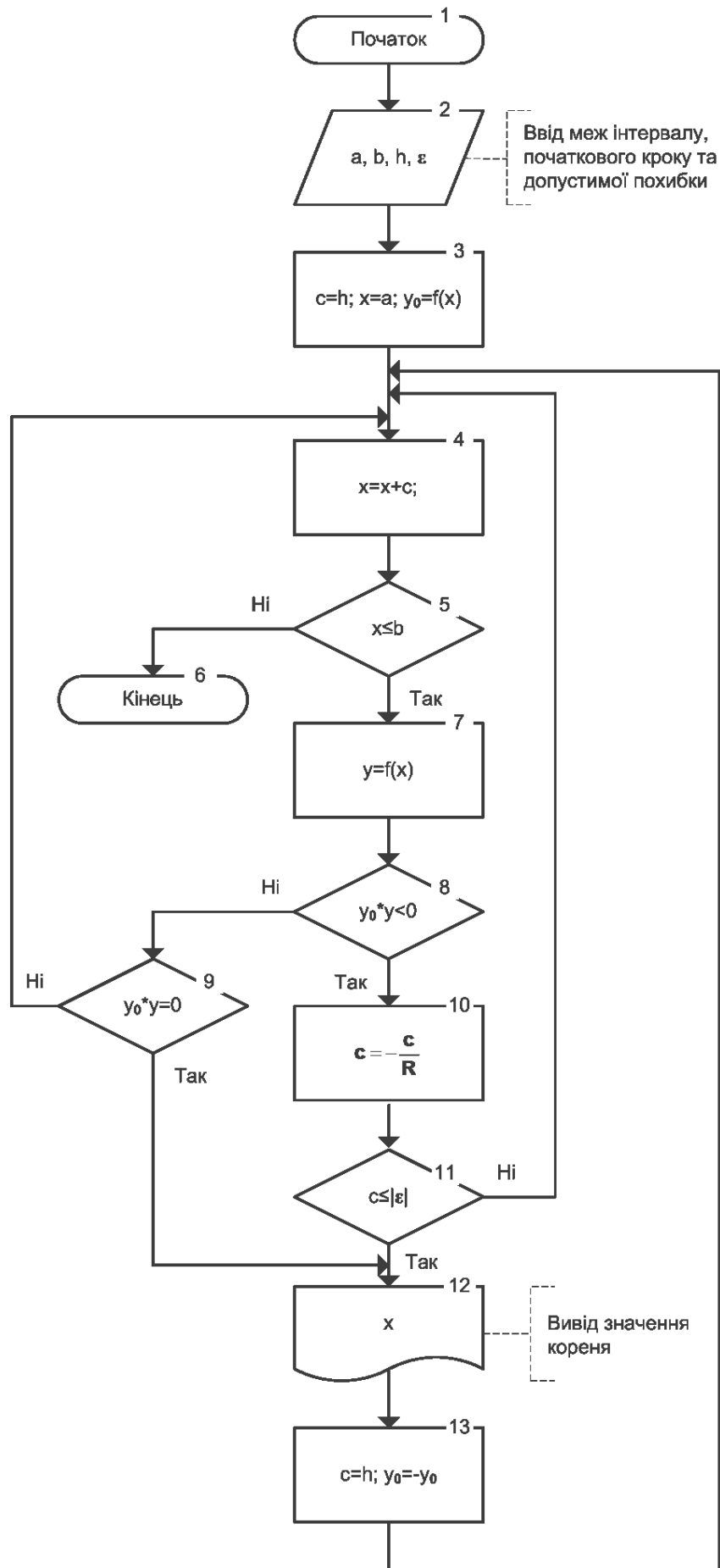


Рисунок 1.11 – Блок-схема алгоритму методу порозрядного наближення

4. Перевіряємо умову  $y = 0$ . Якщо вона виконується, то йдемо до п. 6, інакше до п. 2.

5. Обчислюємо нове значення кроку  $c = -c/R$ , де  $R$  – показник розрядності (зменшення кроку  $c$ ) і перевіряємо умову  $|c| \leq \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – задана похибка обчислення кореня. Якщо ця умова виконується, йдемо до п. 6, інакше до п. 2.

6. Приймаємо обчислене значення  $x$  коренем рівняння. Потім приймаємо  $c = h$ ,  $y_0 = -y_0$  і йдемо до п. 2.

Існує також метод подекадного наближення, який є аналогом методу порозрядного наближення при  $R = 10$  [2]. У табл. 1.3 наведено результати пошуку кореня рівняння (1.5) методом подекадного наближення ( $R = 10$ ) на інтервалі ( $a = 0,392\ 699$ ;  $b = 0,916\ 298$ ) при початковому кроці  $h = 0,05$  та потрібної точності  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$  для тих же вихідних даних, які використовували для побудови графіків на рис. 1.2–1.6. При цьому знайдене значення кореня дорівнює  $0,704324$  ( $i = 32$ ), що відповідає куту  $\gamma = 40,35^\circ$ . Подальші обчислення ( $i = 33 \dots 36$ ) показують, що на заданому інтервалі корінь – один.

### 1.3.2. Методи уточнення коренів

#### 1.3.2.1. Метод дихотомії

Нехай на відрізку  $[a, b]$  розташовано один корінь заданого рівняння  $f(x) = 0$ . Значення функції на кінцях відрізка мають протилежні знаки.

Метод дихотомії, або половинного поділу, полягає в наступному [1–3, 15, 17–21]. Визначаємо середину відрізка  $[a, b]$   $x_0 = (a + b)/2$  і обчислюємо функцію  $f(x_0)$ . Далі робимо вибір, яку з двох частин відрізка взяти для подальшого уточнення кореня. Якщо ліва частина рівняння  $f(x)$  є безперервна функція аргументу  $x$ , то корінь буде знаходитися в тій половині відрізка, на кінцях якої  $f(x)$  має різні знаки. На рис. 1.12 це буде відрізок  $[a, x_0]$ , тобто для чергового кроку уточнення точку  $b$  переміщуємо в середину початкового відрізка  $x_0$  і продовжуємо процес поділу за аналогічним алгоритмом.

Таблиця 1.3 – Результати пошуку кореня рівняння (1.5) методом подекадного наближення

$i$	$\gamma_i$	$\frac{d\bar{p}(\gamma_i)}{d\gamma}$	$c$	$i$	$\gamma_i$	$\frac{d\bar{p}(\gamma_i)}{d\gamma}$	$c$
0	0,392699	-3,002846	0,05	20	0,704649	0,001106	-0,00005
1	0,442699	-2,013028		21	0,704599	0,000937	
2	0,492699	-1,336047		22	0,704549	0,000768	
3	0,542699	-0,856346		23	0,704499	0,000599	
4	0,592699	-0,505959		24	0,704449	0,000429	
5	0,642699	-0,242962		25	0,704399	0,000260	
6	0,692699	-0,040449		26	0,704349	0,000091	
7	0,742699	0,119436		27	0,704299	-0,000078	
8	0,737699	0,104984	-0,005	28	0,704304	-0,000062	-0,000005
9	0,732699	0,090221		29	0,704309	-0,000045	
10	0,727699	0,075135		30	0,704314	-0,000028	
11	0,722699	0,059717		31	0,704319	-0,000011	
12	0,717699	0,043955		32	0,704324	0,000006	0,05
13	0,712699	0,027836		33	0,792699	0,248906	
14	0,707699	0,011349		34	0,842699	0,356541	
15	0,702699	-0,005518		0,0005	35	0,892699	0,448531
16	0,703199	-0,003814	36		0,916298	0,487871	
17	0,703699	-0,002114					
18	0,704199	-0,000417					
19	0,704699	0,001275					

Ітераційний (повторюваний) процес будемо продовжувати до тих пір, поки інтервал  $[a, b]$  не стане менше заданої похибки  $\varepsilon$ .

Алгоритм методу представлено на рис. 1.13.

Слід враховувати, що функція  $f(x)$  обчислюється з деякою абсолютною похибкою  $\varepsilon_1$ . Поблизу кореня значення функції  $f(x)$  малі за абсолютною величиною і можуть виявитися порівнянними з похибкою обчислення. Іншими словами, при підході до кореня можна потрапити в «смугу шумів»  $2 \cdot \varepsilon_1$  (рис. 1.12), і подальше уточнення кореня виявиться неможливим. Тому необхідно задати ширину смуги шумів і припинити ітераційний процес при потраплянні в неї. Так само необхідно мати на увазі, що при зменшенні інтервалу  $[a, b]$  збільшується похибка обчислення його довжини  $(b - a)$  за рахунок віднімання близьких чисел.

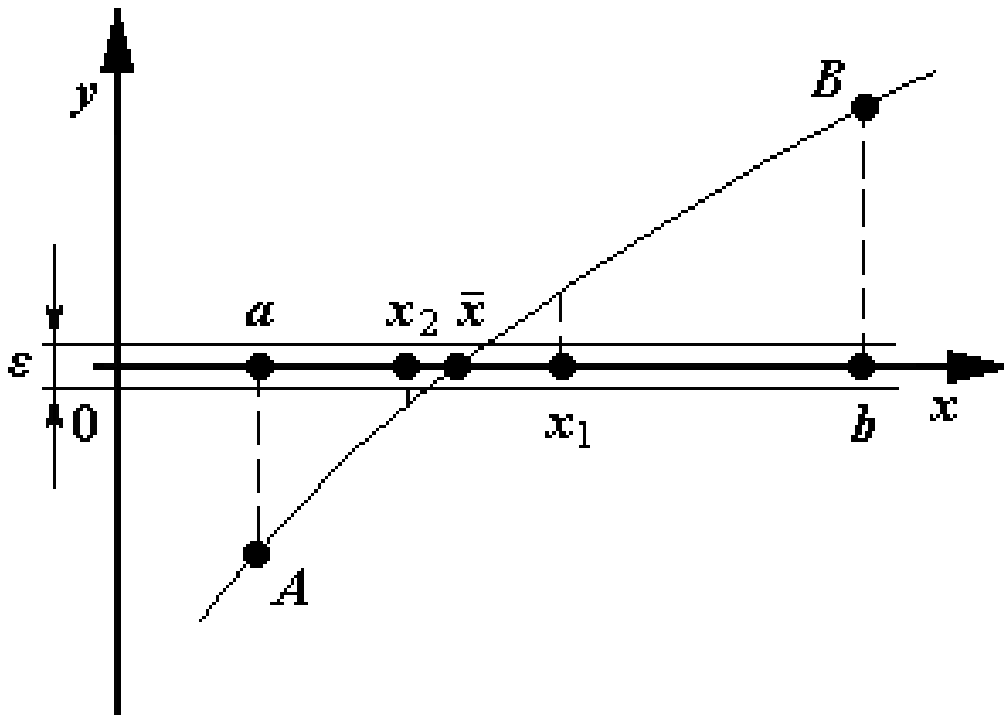


Рисунок 1.12 – Знаходження кореня методом дихотомії

Так як за кожну ітерацію інтервал, де розташований корінь, зменшується у два рази, то через  $n$  ітерацій інтервал буде дорівнювати  $(b - a)/2^n$ , тобто зменшиться у  $2^n$  рази.

Результати рішення рівняння (1.5) методом дихотомії ( $a = 0,174\ 533$ ,  $b = 0,785\ 398$ ) наведено в табл. 1.4.

Вибір чергової точки при уточненні кореня в середині відрізка  $[a, b]$  не є єдиним варіантом [3]. Можна в якості такої точки вибрати випадкове число, що знаходиться на інтервалі  $[a, b]$ . При цьому кількість ітерацій, необхідних для визначення кореня з заданою точністю, може стати як більше, так і менше, ніж при половинному поділі, в залежності від розташування кореня.

Для реалізації такого варіанту, що називається методом випадкового пошуку або методом Монте-Карло, слід замінити вираз  $x_i = (a + b)/2$  на  $x_i = a + (b - a) \cdot r$ , де  $r$  – псевдовипадкове число, отримане за допомогою генератора випадкових чисел і що лежить в інтервалі  $[0, 1]$ . За допомогою такого лінійного перетворення здійснюється перехід від інтервалу  $[0, 1]$  до інтервалу  $[a, b]$ .

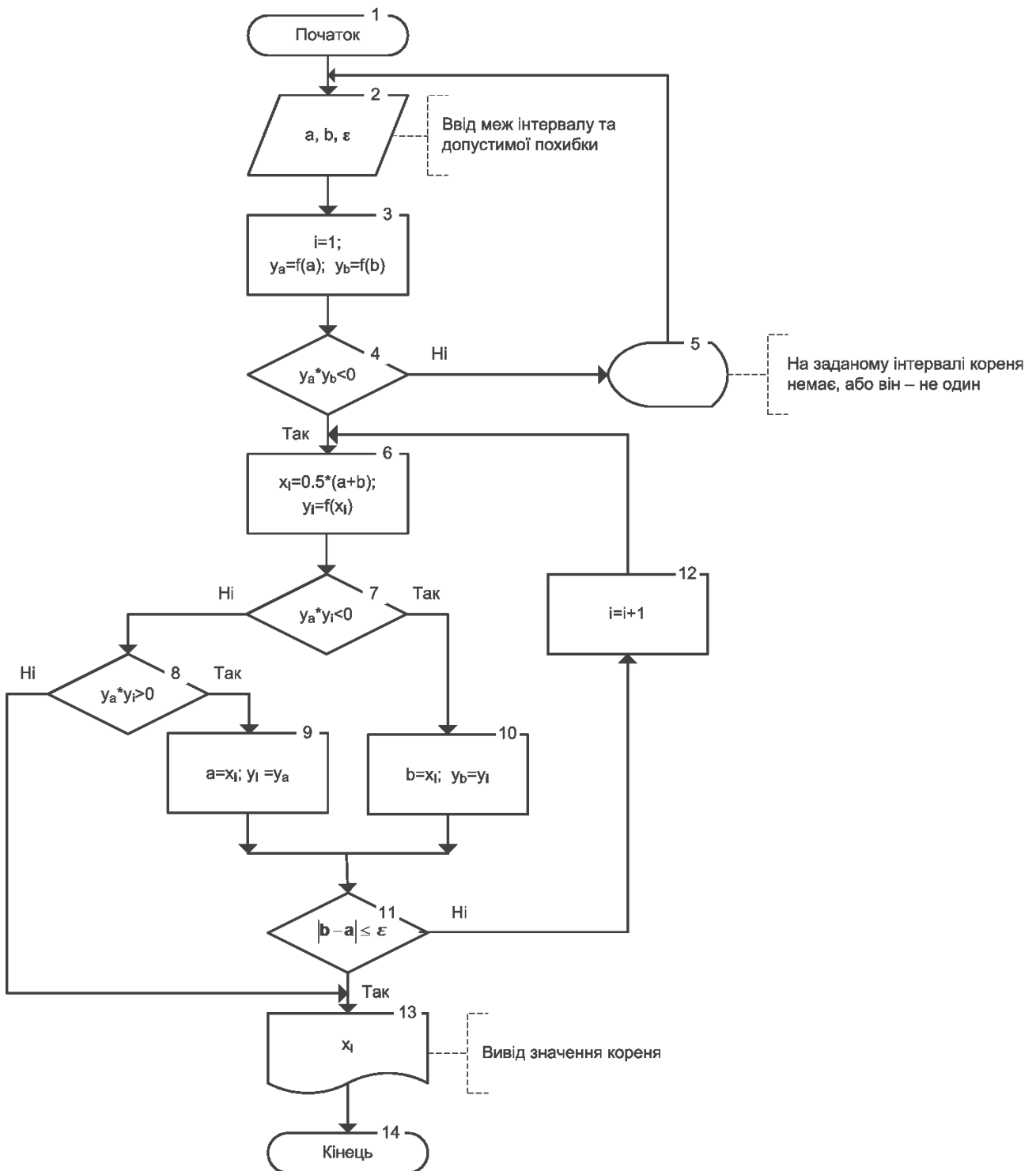


Рисунок 1.13 – Блок-схема алгоритму методу дихотомії

Таблиця 1.4 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5) методом дихотомії

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i$	Значення функції $\frac{d\bar{p}(\gamma_i)}{d\gamma}$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i - \gamma_{i-1} $
1	0,654498	-0,190499	0,130900
2	0,785398	0,231535	0,065450
3	0,719948	0,051089	0,032725
4	0,687223	-0,060284	0,016362
5	0,703586	-0,002498	0,008181
6	0,711767	0,024791	0,004091
7	0,707676	0,011274	0,002045
8	0,705631	0,004420	0,001023
9	0,704609	0,000969	0,000511
10	0,704097	-0,000763	0,000256

### 1.3.2.2. Метод хорд

Нехай на кінцях проміжку  $(a, b)$  функція  $f(x)$  має протилежні знаки (рис. 1.14). Якщо при цьому  $f'(x)$  зберігає в проміжку  $(a, b)$  незмінний знак, то всередині проміжку лежить один єдиний корінь  $\bar{x}$  рівняння  $f(x) = 0$  (якщо  $f'(x)$  не зберігає знака, то корінь теж є, але він може бути не єдиним).

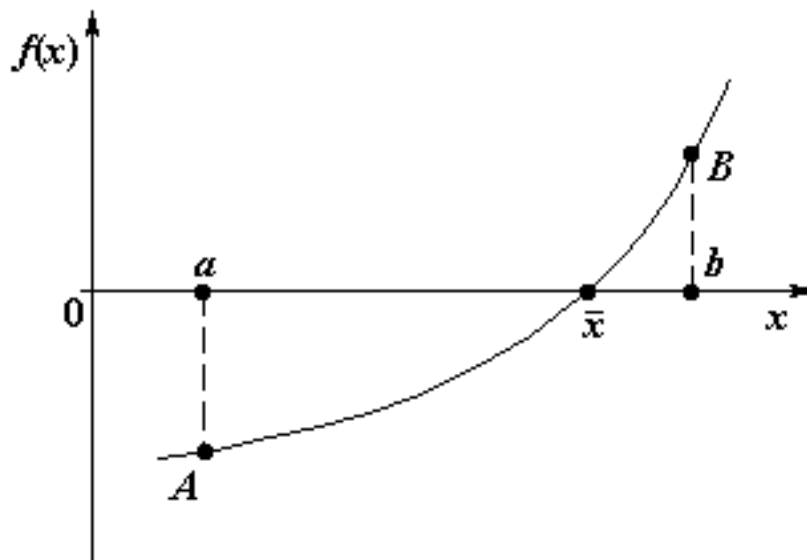


Рисунок 1.14 – Графік функції, що має на інтервалі, що розглядається, протилежні знаки

Для визначення наближеного значення кореня функції  $f(x)$  сама ця функція замінюється на відрізку  $[a, b]$  лінійною функцією, що приймає на кінцях відрізка  $(a, b)$  ті ж самі значення, що і функція  $f(x)$  (рис. 1.15) [1–3, 16, 18, 20–24]. Рівняння прямої  $\varphi(x)$ , що проходить через дві задані точки  $(a, f(a))$  і  $(b, f(b))$ , можна записати як

$$\frac{\varphi(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Виражаючи  $\varphi(x)$ , отримуємо

$$\varphi(x) = f(a) + \frac{x - a}{b - a} \cdot (f(b) - f(a)).$$

В якості наближеного значення кореня  $f(x)$  береться корінь функції  $\varphi(x)$

$x = x_1$

$$f(a) + \frac{x_1 - a}{b - a} \cdot (f(b) - f(a)) = 0;$$

$$x_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}. \quad (1.21)$$

Обчислення значення кореня тим точніше, чим ближче функція  $f(x)$  до свого лінійного наближення  $\varphi(x)$ .

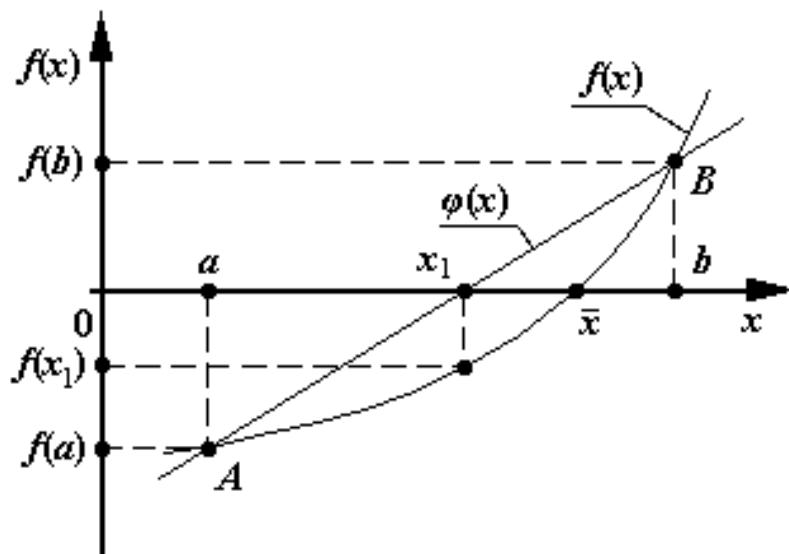


Рисунок 1.15 – Лінійна апроксимація функції

Потім обчислюємо  $f(x_1)$  і беремо той з проміжків  $(a, x_1)$ ;  $(x_1, b)$ , на кінцях якого  $f(x)$  має протилежні знаки (на рис. 1.15 – це підінтервал  $(x_1, b)$ ). Шуканий корінь  $\bar{x}$  лежить в цьому проміжку.

Даний метод має простий геометричний зміст. Через точки  $A$  і  $B$  з абсцисами, що відповідають кінцям відрізка  $(a, b)$ , проводиться хорда (див. рис. 1.15). Точка  $x_1$  перетину хорди  $AB$  з віссю  $Ox$  є першим наближенням до кореню  $\bar{x}$ .

Застосувавши формулу (1.21), отримуємо друге наближення  $x_2$ . Продовжуючи процес, знаходимо послідовність  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  (рис. 1.16). Вона має межею шуканий корінь  $\bar{x}$ .

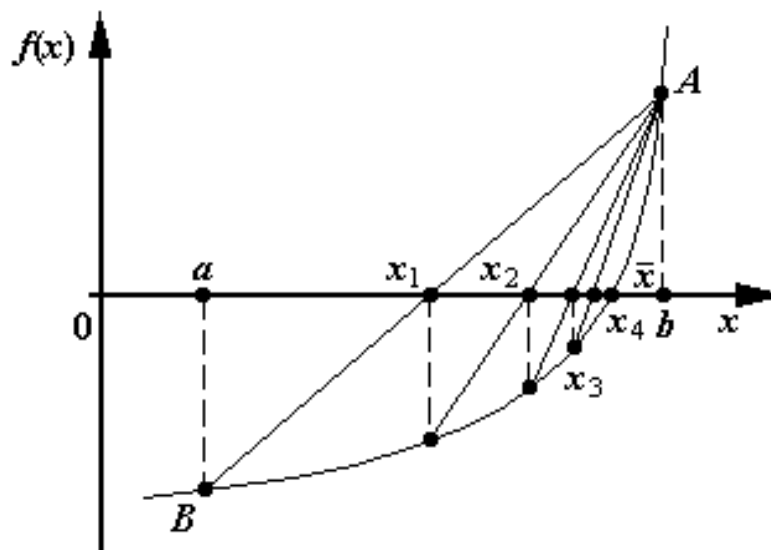


Рисунок 1.16 – Послідовність наближень до кореня для методу хорд

На практиці зручніше користуватися формулами (1.22) і (1.23), отриманими з (1.21) шляхом нескладних перетворень [16]

$$x_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} - a + a;$$

$$x_1 = a - \frac{(b-a) \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}; \quad (1.22)$$

$$x_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} - b + b;$$

$$x_1 = b - \frac{(b-a) \cdot f(b)}{f(b) - f(a)}. \quad (1.23)$$

Зміст формул (1.22) і (1.23) видно з рис. 1.17.

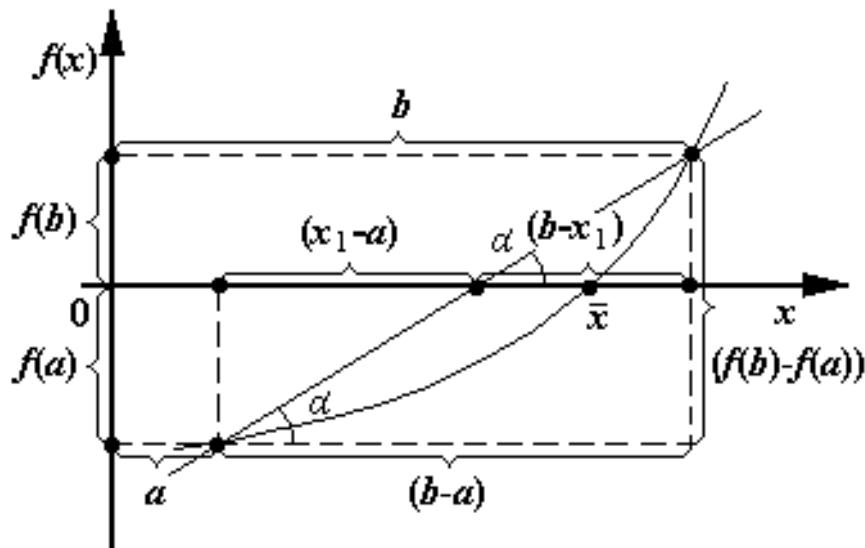


Рисунок 1.17 – Геометричний зміст формул методу хорд

Блок-схему алгоритму методу хорд показано на рис. 1.18.

Проведемо аналіз збіжності процесу. Нехай на черговому етапі обчислень для отримання значення аргументу  $x_{i+1}$  використовується значення  $x_{i-1}$  і  $x_i$ , причому  $f(x_{i+1})$  має той же знак, що і  $f(x_{i-1})$ . Тоді на наступному етапі необхідно використовувати пару значень аргументу  $x_i$  і  $x_{i+1}$ . Визначимо як різницю  $(x_{i-1} - x_i)$  пов'язано з  $(x_{i+1} - x_i)$ . Відповідно до формули (1.23)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(x_i - x_{i-1}) \cdot f(x_i)}{f(x_i) - f(x_{i-1})}.$$

Звідси

$$|x_i - x_{i+1}| = \left| \frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \right| \cdot |x_{i-1} - x_i|.$$

$$\frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

за модулем менше одиниці, так що різниця  $(x_i - x_{i+1})$  за модулем менше різниці  $(x_{i-1} - x_i)$ . Таким чином довжини відрізків  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $[x_i, x_{i+1}]$ , ..., які містять шуканий корінь  $\bar{x}$ , монотонно спадають. Якщо ці довжини, спадаючи, прагнуть до нуля, то корінь рівняння  $\bar{x}$  можна знайти з будь якою точністю.

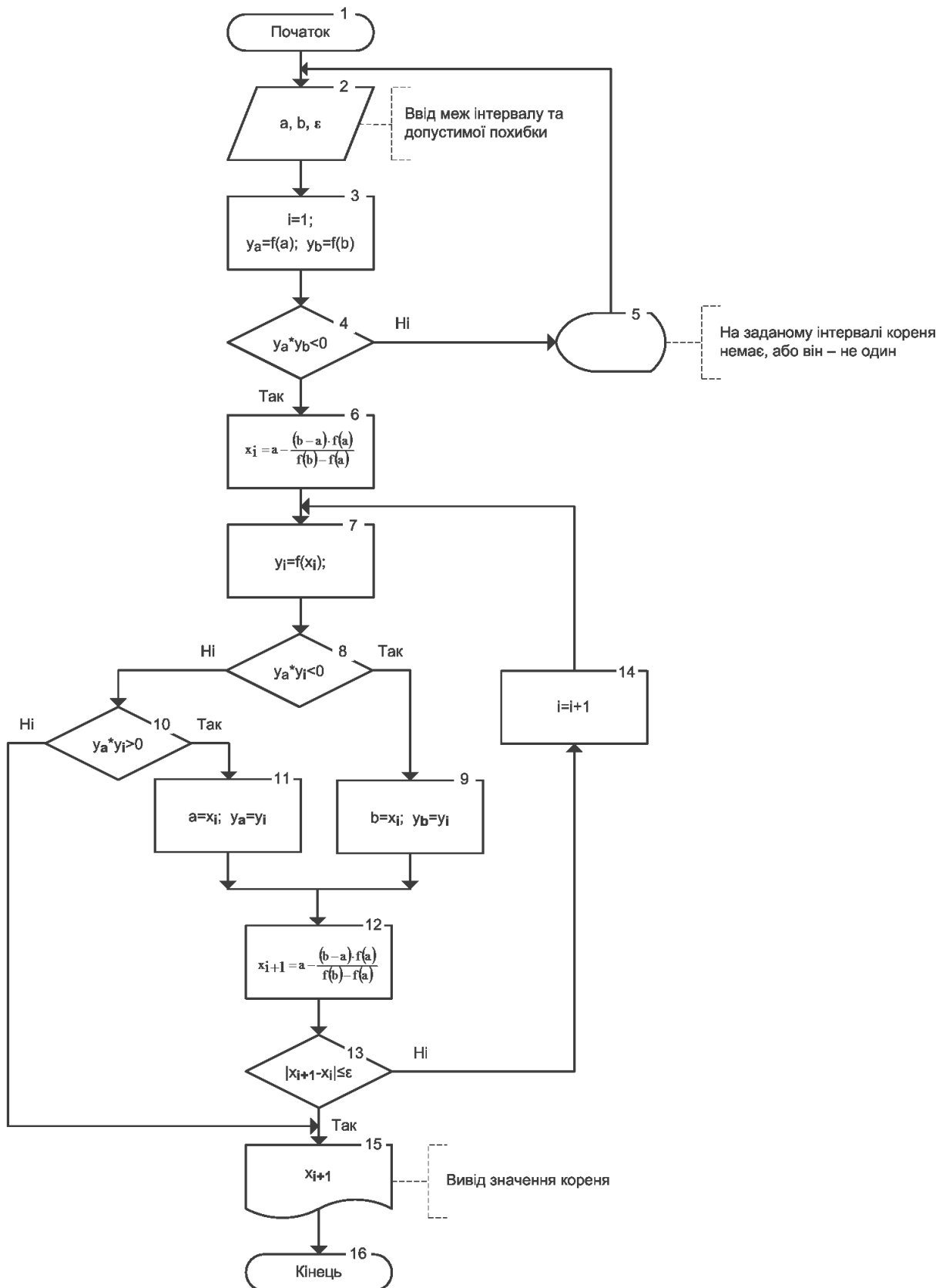


Рисунок 1.18 – Блок-схема алгоритму методу хорд

Оскільки  $f(x_{i-1})$  і  $f(x_i)$  мають різні знаки, то дріб

Найчастіше, однак, трапляється, що довжини відрізків не прагнуть до нуля (наприклад, якщо  $f''(\bar{x}) \neq 0$ ). І в цьому випадку можна показати, що послідовність тих чи інших кінців відрізків прагне до  $\bar{x}$ . Нехай  $i$  та  $(i-1)$  – змінні індекси, що відповідають парам точок  $x_{i-1}$  та  $x_i$ . Довжини відрізків  $[x_{i-1}, x_i]$  можуть не прагнути до нуля, очевидно, тільки за умови, що дріб

$$\frac{f(x_i)}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

прагне до одиниці. В силу обмеженості  $f(x_i)$  це може мати місце тільки в тому випадку, коли  $f(x_{i-1})$  прямує до нуля. Тоді можна визначити  $\bar{x}$  з необхідною точністю, вважаючи  $\bar{x} \approx x_{i-1}$ . Ступінь наближення при уточненні кореня методом, що розглядається, можна визначити наступним чином. Нехай потрібно знайти корінь рівняння з точністю  $\varepsilon$ . Тоді зупиняємося на тому наближенні  $x_n$ , яке відрізняється від попереднього  $x_{n-1}$  менше ніж на  $\varepsilon$ . Однак не виключено (хоча і малоймовірно), що точність виявиться недостатньою. Гарантія буде повною, якщо переконатися, що знаки  $f(x_n)$  і  $f(x_n \pm \varepsilon)$  протилежні.

Можна показати, що при багаторазовому повторенні процесу похибка починає спадати як геометрична прогресія.

Результати рішення рівняння (1.5) методом хорд ( $a = 0,174533$ ,  $b = 0,785398$ ) наведено в табл. 1.5.

### 1.3.2.3. Метод Ньютона (метод дотичних)

Метод Ньютона застосовується для уточнення знайдених наближених дійсних коренів алгебраїчних і трансцендентних рівнянь [1–3, 15–19, 21–27]. Його також можна застосовувати для уточнення комплексних коренів.

Нехай відомо наближене значення  $x_0$  кореня  $\bar{x}$  рівняння

$$f(x) = 0. \quad (1.24)$$

Число  $a$  називається коренем  $k$ -ї кратності рівнянь  $f(x) = 0$ , якщо при  $x = a$  разом з функцією  $f(x)$  обертаються в нуль її похідні до порядку  $k-1$  включно:  $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$ .

При цьому говорять, що рівняння має  $k$  однакових коренів. Однократний корінь називають простим.

Таблиця 1.5 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5) методом хорд

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i$	Значення функції $\frac{d\bar{p}(\gamma_i)}{d\gamma}$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i - \gamma_{i-1} $
1	0,843118	0,357370	0,047904
2	0,795215	0,254783	0,031481
3	0,763734	0,177047	0,020658
4	0,743075	0,120511	0,013519
5	0,729557	0,080778	0,008824
6	0,720732	0,053559	0,005748
7	0,714984	0,035247	0,003739
8	0,711245	0,023080	0,002430
9	0,708815	0,015063	0,001578
10	0,707238	0,009809	0,001024

Розглянемо випадок, коли корінь рівняння (1.24) є однократним (простим), і рівняння не має близьких до нього коренів (точніше різниця  $(\bar{x} - x_0')$  значно менше різниці  $(\bar{x}_i - x_0')$ , де  $\bar{x}_i$  – будь який корінь рівняння (1.24), відмінний від  $\bar{x}$ ).

Розкладемо функцію  $f(x)$  в ряд Тейлора за ступенями  $(x - x_0')$  в межах точки  $x_0'$

$$f(x) = f(x_0') + f'(x_0') \cdot (x - x_0') + \frac{1}{2} \cdot f''(x_0') \cdot (x - x_0')^2 + \dots \quad (1.25)$$

Оскільки корінь  $(\bar{x} - x_0')$  рівняння

$$f(x_0') + f'(x_0') \cdot (x - x_0') + \frac{1}{2} f''(x_0') \cdot (x - x_0')^2 + \dots = 0 \quad (1.26)$$

значно менше за інших його коренів, то можна відкинути доданки, що містять  $x - x_0'$  в ступені 2 і більше, а цей корінь визначити з рівняння

$$f(x_0') + f'(x_0') \cdot (x - x_0') = 0. \quad (1.27)$$

Звідси

$$\bar{x} \approx x_0' - \frac{f(x_0')}{f'(x_0')}. \quad (1.28)$$

Геометричний зміст методу Ньютона полягає в наступному.

Нехай на кінцях проміжку  $(a, b)$  функція  $f(x)$  має протилежні знаки (рис. 1.19 і 1.20), а похідні  $f'(x)$  і  $f''(x)$  зберігають в проміжку  $(a, b)$  незмінний знак (тобто на ділянці  $AB$  лінія графіка функції  $f(x)$ ) йде скрізь вгору або скрізь вниз і звернена увігнутістю скрізь вгору або скрізь вниз).

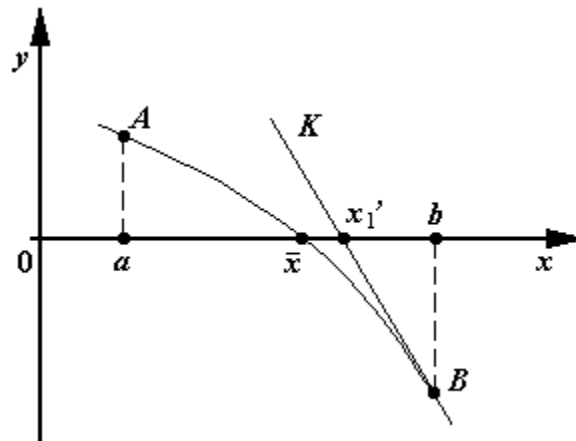


Рисунок 1.19 – Дотична, проведена до графіка функції в точці  $B$

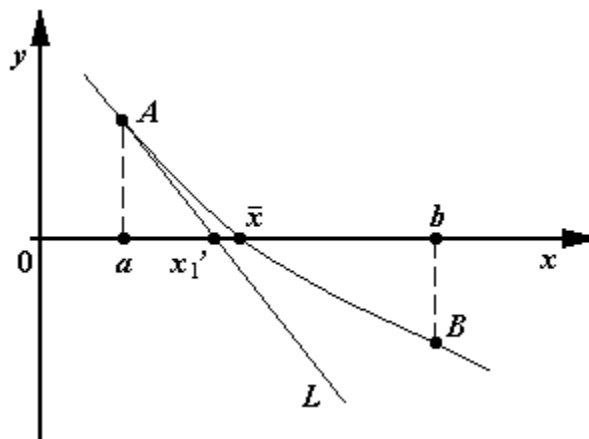


Рисунок 1.20 – Дотична, проведена до графіка функції в точці  $A$

**Визначення.** Дотичною до даної безперервної кривої в даній її точці  $M$  (точка дотику) називається граничне положення січної  $MM'$ , що проходить через точку  $M$ , коли друга точка перетину  $M'$  необмежено наближається за кривою до першої (рис. 1.21).

Якщо січна  $MM'$  при  $M \rightarrow M'$  не має граничного положення, то кажуть, що дотичної до даної лінії в точці  $M$  не існує.

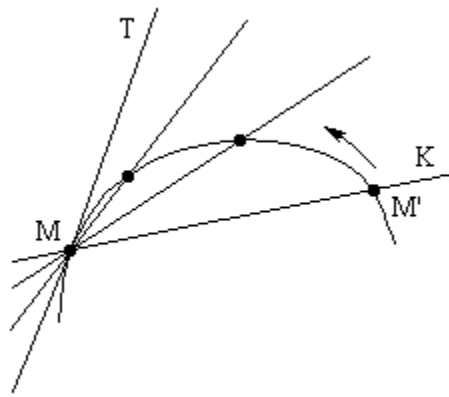


Рисунок 1.21 – Геометричне визначення дотичної

Для визначення кореня  $\bar{x}$ , що лежить в проміжку  $(a, b)$  в тому кінці дуги  $AB$ , де знаки  $f(x)$  і  $f''(x)$  однакові (тобто в верхньому, якщо  $AB$  звернена увігнутістю доверху, і в нижньому, якщо до низу), проводимо дотичну  $BK$  на рис. 1.19 і  $AL$  на рис. 1.20.

**Зауваження 1.** Якщо дотичну провести в тому кінці дуги, де  $f(x)$  і  $f''(x)$  мають протилежні знаки, то  $x_1'$  може вийти за межі проміжку  $(a, b)$  і погіршити наближення (рис. 1.22).

**Зауваження 2.** Якщо  $f''(x)$  не зберігає знака в проміжку  $(a, b)$ , то дотичні в обох кінцях дуг можуть перетнути  $Ox$  за межами проміжку (рис. 1.23).

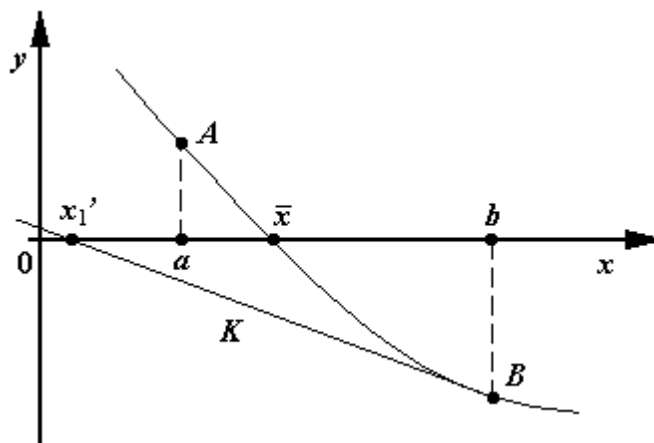


Рисунок 1.22 – Дотична, проведена в точці, в якій не збігаються знаки функції і другої похідної

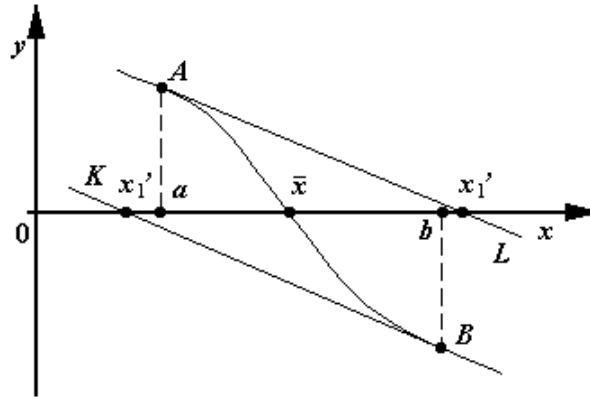


Рисунок 1.23 – Функція, друга похідна якої не зберігає знака на даному інтервалі

За перше наближення шуканого кореня приймається точка  $x = x_1'$ , де дотична перетинає вісь  $Ox$ .

Якщо дотична взята в точці  $x = b$ , то

$$x_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \quad (1.29)$$

якщо ж в точці  $x = a$

$$x_1' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \quad (1.30)$$

В обох випадках друге наближення знаходять за формулою

$$x_2' = x_1' - \frac{f(x_1')}{f'(x_1')}. \quad (1.31)$$

Метод Ньютона полягає в побудові послідовності  $x_0'$  (вихідне значення кореня),  $x_1'$ , ...,  $x_n'$ , ... (рис. 1.24) за допомогою рекурентної формули

$$x_i' = x_{i-1}' - \frac{f(x_{i-1}')}{f'(x_{i-1}')}. \quad (1.32)$$

Якщо значення  $x_0'$  досить близько до  $\bar{x}$ , то послідовність  $x_1'$ , ...,  $x_n'$ , ... збігається до  $\bar{x}$ , причому так, що похибка  $\varepsilon_i = \bar{x} - x_i$  на черговому етапі буде нескінченно малою величиною другого порядку в порівнянні з похибкою  $\varepsilon_{i-1} = \bar{x} - x_{i-1}$ . Дійсно, рівняння (1.24) можна переписати у вигляді (замість  $x_0$  беремо загальний член  $x_{i-1}$ )

$$f(x_{i-1}') + f'(x_{i-1}') \cdot (x - x_{i-1}') + \frac{1}{2} \cdot f''(\xi) \cdot (x - x_{i-1}')^2 = 0,$$

де  $\xi$  – деяке число, проміжне між  $x_{i-1}'$  і  $x$ . Вважаючи в цьому рівнянні  $x = \bar{x}$ , отримуємо тотожність і, віднімаючи з нього співвідношення (1.32), матимемо

$$f'(x_{i-1}') \cdot (\bar{x} - x_{i-1}') + \frac{1}{2} \cdot f''(\xi) \cdot (\bar{x} - x_{i-1}')^2 = 0.$$

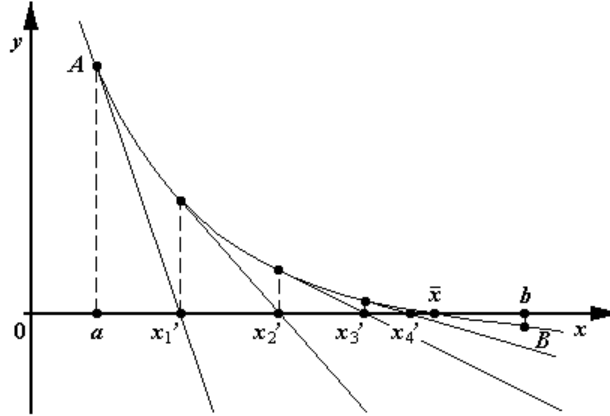


Рисунок 1.24 – Послідовність наближень до кореня методом Ньютона

Звідси

$$(\bar{x} - x_{i-1}') = -\frac{f''(\xi)}{2 \cdot f'(x_{i-1}')} \cdot (\bar{x} - x_{i-1}')^2,$$

що і потрібно було довести.

Блок-схему алгоритму методу Ньютона наведено на рис. 1.25. В табл. 1.6 наведено результати пошуку за формулою (1.32) кореня рівняння (1.5) для  $a = 0,174\ 533$ ,  $b = 0,785\ 398$ . Дотичні в даному випадку проводили в точці  $a$ .

На відміну від методу хорд, метод Ньютона може і не привести до мети (якщо початкове значення  $x_0$  недостатньо близько до кореня  $\bar{x}$ ).

У тому випадку, коли корінь  $\bar{x}$  є двократним або є два дуже близьких кореня  $\bar{x}_1$  і  $\bar{x}_2$ , формулою (1.32) користуватися не можна. В цьому випадку слід шукати більш точні значення коренів з рівняння

$$f(x_0') + f'(x_0') \cdot (x - x_0') + \frac{1}{2} \cdot f''(x_0') \cdot (x - x_0')^2 = 0. \quad (1.33)$$

Аналогічно для уточнення кореня третьої кратності або трьох близьких коренів складається рівняння третього ступеня

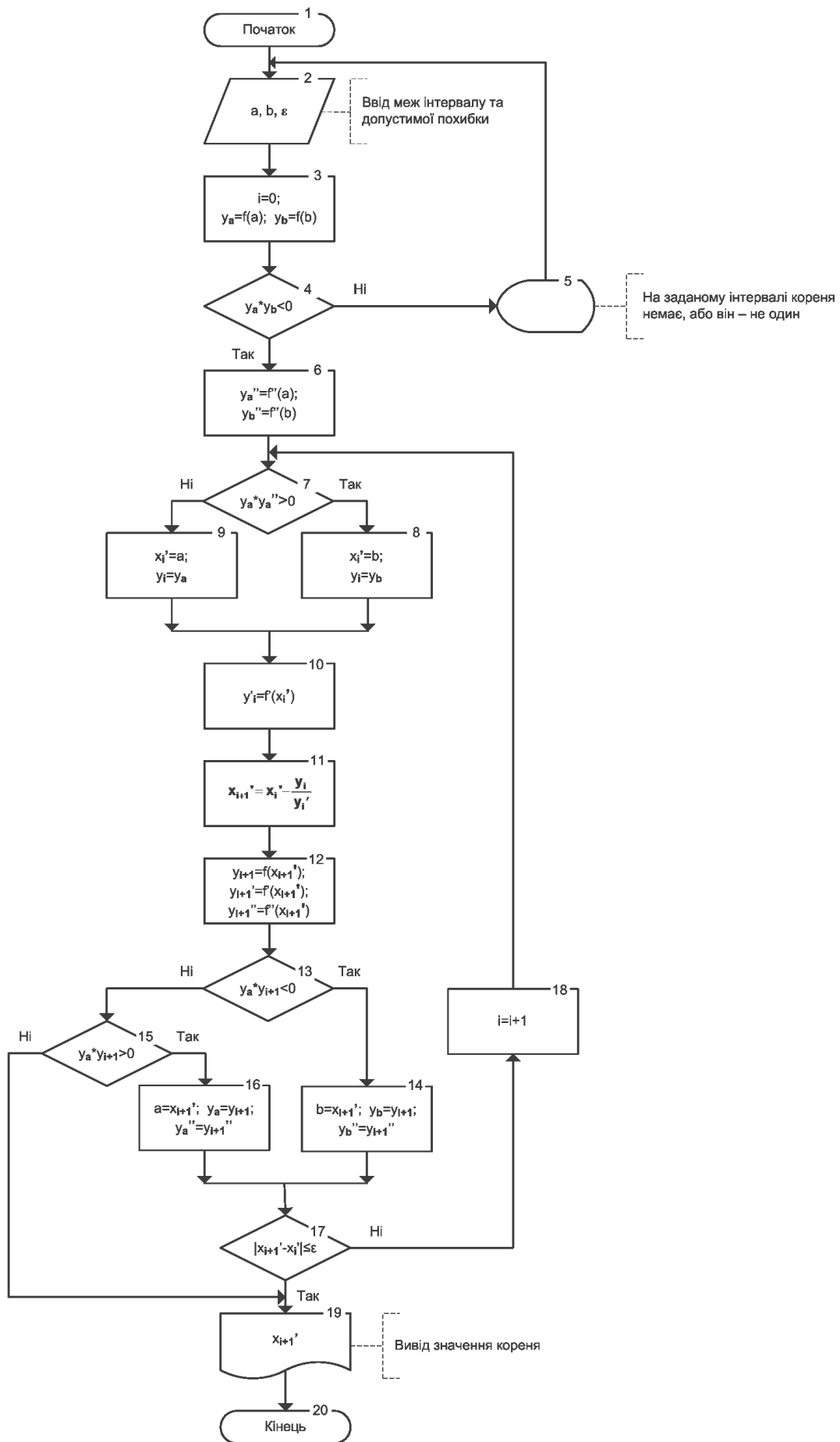


Рисунок 1.25 – Блок-схема алгоритму методу Ньютона

$$f(x_0') + f'(x_0') \cdot (x - x_0') + \frac{1}{2} \cdot f''(x_0') \cdot (x - x_0')^2 + \frac{1}{6} \cdot f'''(x_0') \cdot (x - x_0')^3 = 0 \quad (1.34)$$

і так далі.

Таблиця 1.6 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5) методом дотичних

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i'$	Значення функції $\frac{d\bar{p}(\gamma_i')}{d\gamma}$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i' - \gamma_{i-1}' $
1	0,517369	-1,079727	0,124670
2	0,630312	0,301624	0,112943
3	0,691956	-0,043110	0,061644
4	0,703971	-0,001191	0,012015
5	0,704322	$-9,618394 \cdot 10^{-7}$	0,000351
6	0,704322	$-6,285528 \cdot 10^{-13}$	$2,839755 \cdot 10^{-7}$
7	0,704322	0,0	$1,856293 \cdot 10^{-13}$
8	0,704322	0,0	0,0
9	0,704322	0,0	0,0
10	0,704322	0,0	0,0

На практиці зазвичай не буває заздалегідь відома кратність кореня. Тому обчислення слід починати за формулою (1.32). Якщо вони не ведуть до мети, то слід спробувати вирішити рівняння (1.33).

**Порядок дотику плоских кривих.** Кажуть, що криві  $y = f(x)$  і  $y = g(x)$  мають в точці  $M(x_M, y_M)$  дотик  $n$ -го порядку, якщо

$$\begin{aligned} f(x_M) &= g(x_M), \quad f'(x_M) = g'(x_M), \dots, \\ f^{(n)}(x_M) &= g^{(n)}(x_M), \quad f^{(n+1)}(x_M) \neq g^{(n+1)}(x_M). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Це визначення передбачає, що  $f(x)$  і  $g(x)$  мають в точці  $x_M$  похідні до  $(n + 1)$  порядку включно.

При дотриманні умови (1.35)  $f(x + \Delta x) - g(x + \Delta x)$  є нескінченно малою величиною  $(n + 1)$  порядку щодо  $\Delta x$ .

Точка, в якій крива і дотична до неї мають дотик другого порядку (або будь-якого парного порядку), називається точкою перегину. У точці перегину крива перетинає свою дотичну. Кривизна в точці перегину дорівнює 0.

Рішення за допомогою рівняння (1.33) рівносильне побудові параболи, яка в точці  $(x_0', f(x_0'))$  має з графіком функції  $y = f(x)$  дотик другого порядку (рис. 1.26). Точки перетину цієї параболи з віссю  $x$  дають більш точні значення двократного кореня  $\bar{x}$  або  $\bar{x}_1$  і  $\bar{x}_2$ , якщо є два близьких кореня.

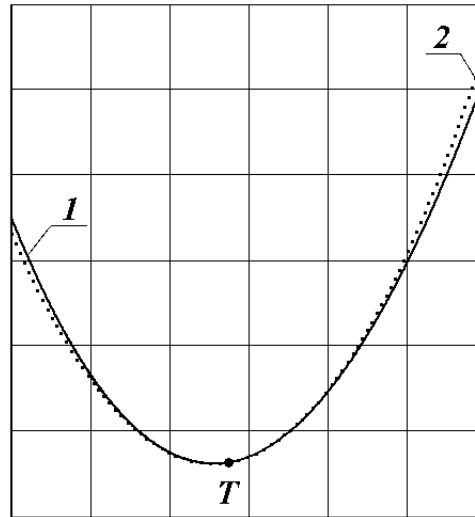


Рисунок 1.26 – Функція (1) і дотична другого порядку (2), проведена в точці  $T$

Коли заздалегідь відомо (або є підстави припускати), що рівняння має корінь третього або більш високої кратності можна скористатися рівнянням (1.34) або відповідним рівнянням більш високого ступеня.

Для знаходження коренів рівняння (1.24) з дуже великою точністю можна використовувати узагальнений метод Ньютона [16]. Кожен етап узагальненого методу замінює декілька етапів звичайного методу.

#### 1.3.2.4. Узагальнений метод Ньютона

Якщо позначити коефіцієнти розкладання  $f(x)$  за ступенями  $(x - x_0')$  через  $f_0, f_1, f_2, \dots$ , то за обчислювальною схемою узагальненого методу Ньютона, запропонованою А.П. Доморядом, уточнення коренів здійснюється за формулою

$$x_1' = x_0' - \frac{f_0 \cdot f_1}{\begin{vmatrix} f_1 & f_0 \\ f_2 & f_1 \end{vmatrix}} = x_0' - \frac{f_0 \cdot f_1}{f_1^2 - f_0 \cdot f_2}; \quad (1.36)$$

$$x_1' = x_0' - \frac{f_0 \cdot \begin{vmatrix} f_1 & f_0 \\ f_2 & f_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_0 & 0 \\ f_2 & f_1 & f_0 \\ f_3 & f_2 & f_1 \end{vmatrix}} = x_0' - \frac{f_0 \cdot f_1^2 - f_0^2 \cdot f_2}{f_1^3 - 2 \cdot f_0 \cdot f_1 \cdot f_2 + f_0^2 \cdot f_3}. \quad (1.37)$$

Результати пошуку за формулами (1.36) і (1.37) кореня рівняння (1.5) для  $a = 0,174533$ ,  $b = 0,785398$  наведено у табл. 1.7 і 1.8.

Таблиця 1.7 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5) узагальненим методом Ньютона (формула (1.36))

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i'$	Значення функції $\frac{d\bar{p}(\gamma_i')}{d\gamma}$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i' - \gamma_{i-1}' $
1	0,737715	0,105030	0,031177
2	0,706538	0,007466	0,002204
3	0,704333	0,000038	0,000011
4	0,704322	$9,744171 \cdot 10^{-10}$	$2,876893 \cdot 10^{-10}$
5	0,704322	0,0	0,0
6	0,704322	0,0	0,0
7	0,704322	0,0	0,0
8	0,704322	0,0	0,0
9	0,704322	0,0	0,0
10	0,704322	0,0	0,0

Таблиця 1.8 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5) узагальненим методом Ньютона (формула (1.37))

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i'$	Значення функції $\frac{d\bar{p}(\gamma_i')}{d\gamma}$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i' - \gamma_{i-1}' $
1	0,787010	0,235410	0,068028
2	0,718981	0,048031	0,014167
3	0,704815	0,001665	0,000492
4	0,704323	$1,888405 \cdot 10^{-6}$	$5,575373 \cdot 10^{-7}$
5	0,704322	$2,421868 \cdot 10^{-12}$	$7,149836 \cdot 10^{-13}$
6	0,704322	0,0	0,0
7	0,704322	0,0	0,0
8	0,704322	0,0	0,0
9	0,704322	0,0	0,0
10	0,704322	0,0	0,0

**Визначення 1.** Нескінченно малою величиною називається величина, межа якої дорівнює нулю.

**Приклад.** Функція  $1 - \cos \alpha$  є нескінченно мала величина при  $\alpha \rightarrow 0$ , бо  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 - \cos \alpha) = 0$ .

**Визначення 2.** Нескінченно великою величиною називається змінна величина, абсолютне значення, якої необмежено зростає. Вираз «абсолютне значення величини у необмежено зростає» означає, що  $|y|$  у якійсь точці залишається великим будь-якого заздалегідь даного позитивного числа.

**Приклад.** Функція  $\frac{1}{x}$  є нескінченно велика величина при нескінченно малому  $x$ , бо в міру наближення  $x$  до нуля абсолютне значення величини  $\frac{1}{x}$  необмежено зростає.

**Теорема.** Сума двох, трьох і взагалі будь-якого незмінного числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

**Визначення 3.** Якщо відношення  $\frac{\beta}{\alpha}$  двох нескінченно малих величин саме нескінченно мало (тобто якщо  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , а значить  $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$ ), то  $\beta$  називається величиною вищого порядку малості щодо  $\alpha$ ; при цьому  $\alpha$  називається величиною нижчого порядку малості щодо  $\beta$ .

**Приклад.** При  $x \rightarrow 0$  величина  $x^5$  має вищий порядок малості відносно  $x^3$ , бо  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5}{x^3} = 0$ . Навпаки,  $x^3$  має нижчий порядок щодо  $x^5$ , бо  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^5} = \infty$ .

**Визначення 4.** Якщо відношення  $\frac{\beta}{\alpha}$  двох нескінченно малих величин прагне до кінцевої межі, не рівній нулю, то  $\alpha$  та  $\beta$  називаються нескінченно малими одного порядку малості (замість відношення  $\frac{\beta}{\alpha}$  можна взяти і зворотне  $\frac{\alpha}{\beta}$ , бо воно теж буде мати кінцеву межу не рівну нулю: якщо  $\lim \frac{\beta}{\alpha} = t$ , то

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{t}.$$

**Приклад.** При  $x \rightarrow 0$  величини  $\sin(x)$  і  $2x$  мають один і той же порядок малості, бо  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{2}$ .

**Визначення 5.** Нескінченно мала величина  $\beta$  має  $m$ -й порядок малості відносно нескінченно малої величини  $\alpha$ , якщо  $\beta$  має той же порядок малості, що  $\alpha^m$ , тобто (див. визначення 4) якщо відношення  $\frac{\beta}{\alpha^m}$  має кінцеву межу, що не рівна нулю.

**Приклад.** При  $x \rightarrow 0$  нескінченно мала має третій порядок щодо  $x$ , бо  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4}x^3 : x^3\right) = \frac{1}{4}$ , нескінченно мала  $\frac{1}{7}x^2$  – другий порядок, нескінченно мала  $\sqrt{x}$  – порядок  $\frac{1}{2}$ .

При обчисленнях за формулою (1.36) помилка  $\bar{x} - x_k$  є нескінченно малою величиною третього порядку щодо  $\bar{x} - x_{k-1}$ , а при обчисленнях за формулою (1.37) – нескінченно малою четвертого порядку.

### 1.3.2.5. Комбінований метод хорд і дотичних

При виконанні умов двох описаних вище методів наближення  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (за методом хорд) і наближення  $x_1', x_2', \dots, x_n'$  (за методом дотичних) підходять до кореню  $\bar{x}$  з протилежних сторін: перші з боку увігнутості, другі з боку опуклості графіка функції (рис. 1.27) [1, 15, 23].

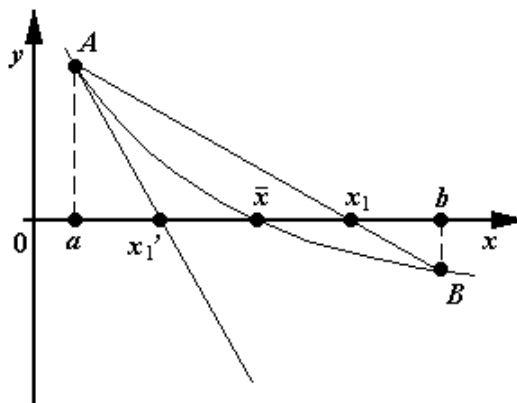


Рисунок 1.27 – Комбінований метод хорд і дотичних

Спільне застосування обох методів дає відразу надмірне і недостатнє наближення, і ступінь точності оцінюється безпосередньо.

Якщо  $a$  є той кінець проміжку  $(a, b)$ , де знаки  $f(x)$  і  $f''(x)$  однакові, то за такими формулами знаходимо:

$$x_1 = a - \frac{(b-a) \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}; \quad (1.38)$$

$$x_1' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \quad (1.39)$$

Якщо знаки  $f(x)$  і  $f''(x)$  однакові на кінці  $b$ , формула (1.39) замінюється на

$$x_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \quad (1.40)$$

Шуканий корінь знаходиться між  $x_1$  та  $x_1'$ .

При цьому  $f(x_1')$  має той же знак, що і  $f''(x_1')$ . Отже, можна знову застосувати формули (1.38), (1.39), замінивши в них  $a$  на  $x_1'$ , а  $b$  на  $x_1$ .

Для других наближень

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1 - x_1') \cdot f(x_1')}{f(x_1) - f(x_1')};$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1')}{f'(x_1')}.$$

Для обчислення  $x_3$  та  $x_3'$  застосовують ті ж формули, замінивши в них  $x_1$  та  $x_1'$  на  $x_2$  та  $x_2'$ .

Продовжуючи процес, можна знайти  $\bar{x}$  з необхідною точністю, використовуючи формули для  $(i + 1)$ -го наближення

$$x_{i+1} = x_i' - \frac{(x_i - x_i') \cdot f(x_i')}{f(x_i) - f(x_i')}; \quad (1.41)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i')}{f'(x_i')}. \quad (1.42)$$

Блок-схему алгоритму наведено на рис. 1.28. В табл. 1.9 наведено результати пошуку кореня рівняння (1.5) для  $a = 0,174533$ ,  $b = 0,785398$  комбінованим методом хорд і дотичних. Дотичні проводили в точці  $a$ .

Таблиця 1.9 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5)  
комбінованим методом хорд і дотичних

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i$	Значення функції $\frac{d\bar{p}(\gamma_i)}{d\gamma}$	Значення аргументу $\gamma_i'$	Значення функції $\frac{d\bar{p}(\gamma_i')}{d\gamma}$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i - \gamma_i' $
1	0,843118	0,357370	0,517369	-1,079727	0,325749
2	0,762113	0,172781	0,630312	-0,301624	0,131800
3	0,714110	0,032422	0,691956	-0,043110	0,022154
4	0,704601	0,000942	0,703971	-0,001191	0,000630
5	0,704322	$7,622447 \cdot 10^{-7}$	0,704322	$-9,618394 \cdot 10^{-7}$	$5,090228 \cdot 10^{-7}$
6	0,704322	$4,979628 \cdot 10^{-13}$	0,704322	$-6,285528 \cdot 10^{-13}$	$3,326228 \cdot 10^{-13}$
7	0,704322	0,0	0,704322	0,0	0,0
8	0,704322	0,0	0,704322	0,0	0,0
9	0,704322	0,0	0,704322	0,0	0,0
10	0,704322	0,0	0,704322	0,0	0,0

### 1.3.2.6. Модифікований метод Ньютона

Даний метод полягає в тому, що замість обчислення похідної  $f'(x_i)$  на кожному кроці ітерацій знаходиться її наближене значення [2]

$$f'(x_i) = \frac{df(x_i)}{dx} \approx (f(x_i + \Delta x) - f(x_i)) / \Delta x = \Delta f(x_i) / \Delta x,$$

де  $\Delta x = \varepsilon$ .

Отже, ітераційна формула має вигляд

$$x_{i+1} = x_i - \frac{\Delta x \cdot f(x_i)}{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}. \quad (1.43)$$

Значення  $\Delta x$  не обов'язково має дорівнювати  $\varepsilon$ . Просто рівність  $\Delta x = \varepsilon$  дозволяє зменшити число вихідних даних, що вводяться.

Результати пошуку кореня рівняння (1.5) модифікованим методом Ньютона для  $a = 0,174533$ ,  $b = 0,785398$  наведено у табл. 1.10–1.12. Дотичні, як і в прикладах вище, проводили у точці  $a$ .

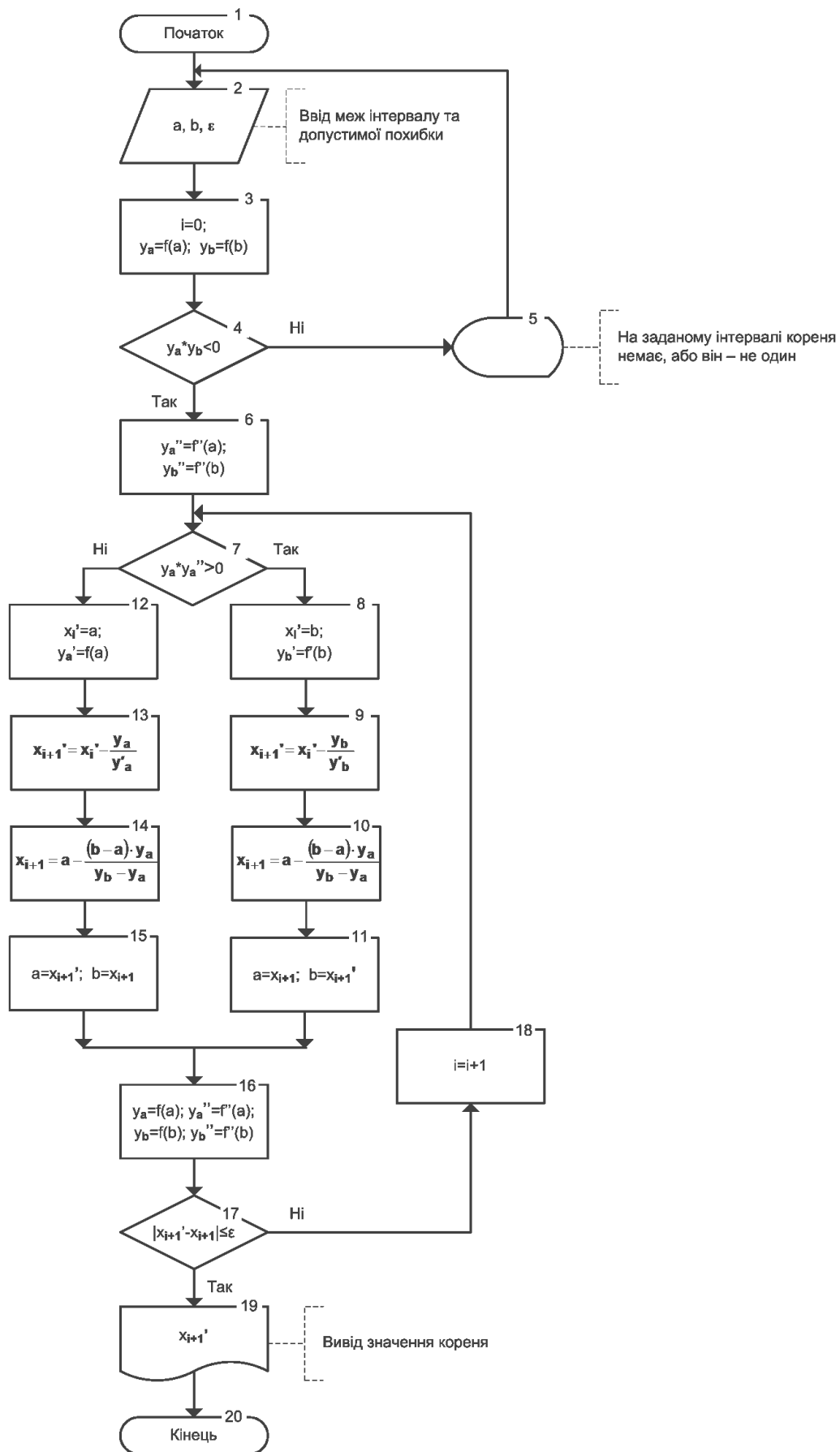


Рисунок 1.28 – Блок-схема алгоритму комбінованого методу хорд та дотичних

Таблиця 1.10 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5)  
модифікованим методом Ньютона для кроку 0,1

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i$	Значення функції $\frac{d\bar{p}(\gamma_i)}{d\gamma}$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i - \gamma_{i-1} $
1	0,572855	-0,632644	0,180156
2	0,695043	-0,032116	0,122187
3	0,706252	0,006509	0,011210
4	0,706252	0,006509	0,0
5	0,706252	0,006509	0,0
6	0,706252	0,006509	0,0
7	0,706252	0,006509	0,0
8	0,706252	0,006509	0,0
9	0,706252	0,006509	0,0
10	0,706252	0,006509	0,0

Таблиця 1.11 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5)  
модифікованим методом Ньютона для кроку 0,01

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i$	Значення функції $\frac{d\bar{p}(\gamma_i)}{d\gamma}$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i - \gamma_{i-1} $
1	0,522644	-1,030157	0,129945
2	0,637815	-0,265635	0,057982
3	0,695797	-0,029452	0,008554
4	0,704351	0,000098	0,0
5	0,704351	0,000098	0,0
6	0,704351	0,000098	0,0
7	0,704351	0,000098	0,0
8	0,704351	0,000098	0,0
9	0,704351	0,000098	0,0
10	0,704351	0,000098	0,0

Таблиця 1.12 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5)  
модифікованим методом Ньютона для кроку 0,001

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i$	Значення функції $\frac{d\bar{p}(\gamma_i)}{d\gamma}$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i - \gamma_{i-1} $
1	0,517894	-1,074722	0,125194
2	0,631070	-0,297924	0,113177
3	0,692368	-0,041636	0,061297
4	0,704021	-0,001020	0,011654
5	0,704323	$1,639395 \cdot 10^{-6}$	0,000301
6	0,704323	$1,639395 \cdot 10^{-6}$	0,0
7	0,704323	$1,639395 \cdot 10^{-6}$	0,0
8	0,704323	$1,639395 \cdot 10^{-6}$	0,0
9	0,704323	$1,639395 \cdot 10^{-6}$	0,0
10	0,704323	$1,639395 \cdot 10^{-6}$	0,0

### 1.3.2.7. Метод Рибаківа

Цей метод також можна розглядати як модифікацію методу Ньютону при заміні  $f'(x_i)$  деяким числом  $M \geq f'(\xi)$ , де  $\xi$  – значення  $x$  на відрізку  $[a, b]$ , при якому  $f'(x)$  максимальна [1, 2, 22].

При  $M \gg f'(\xi)$  збіжність не порушується, але сповільнюється.

Метод Рибаківа зручний для пошуку всіх коренів рівняння на відрізку  $[a, b]$ .

Для його реалізації можна використовувати наступний алгоритм (рис. 1.29).

1. Задаємо початкове значення  $x_0 = a$ .
2. Для кожної  $i$ -ї ітерації ( $i = 0, 1, \dots$ ) обчислюємо

$$x_{i+1} = x_i + \frac{|f(x_i)|}{M}$$

і перевіряємо умову  $x_{i+1} < b$ .

Якщо ця умова не виконується, значить знайдені всі корені. У протилежному випадку перевіряємо виконання умови  $|x_{i+1} - x_i| > \varepsilon$ . Якщо воно виконується, повторюємо цикл обчислень за формулою, наведеною вище. Якщо ця умова не виконується, значить  $x_{i+1}$  є один з коренів рівняння. Після цього переходимо до виконання наступного пункту.

3. Задаємо початкові наближення до чергового кореня  $x_0 = x_{i+1} + \varepsilon$  і, якщо  $x_0 < b$ , йдемо до виконання п. 2. Якщо  $x_0 \geq b$ , обчислення вважаємо закінченими.

Число ітерацій при реалізації методу Рибаківа  $N = (b - a) \cdot M / \varepsilon$ .

Функція  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$  може мати похідну з розривами першого роду.

Результати пошуку кореня рівняння (1.5) модифікованим методом Рибаківа для  $a = 0,174533$ ,  $b = 0,785398$  наведено у табл. 1.13 і 1.14. Дотичні проводили в точці  $a$ .

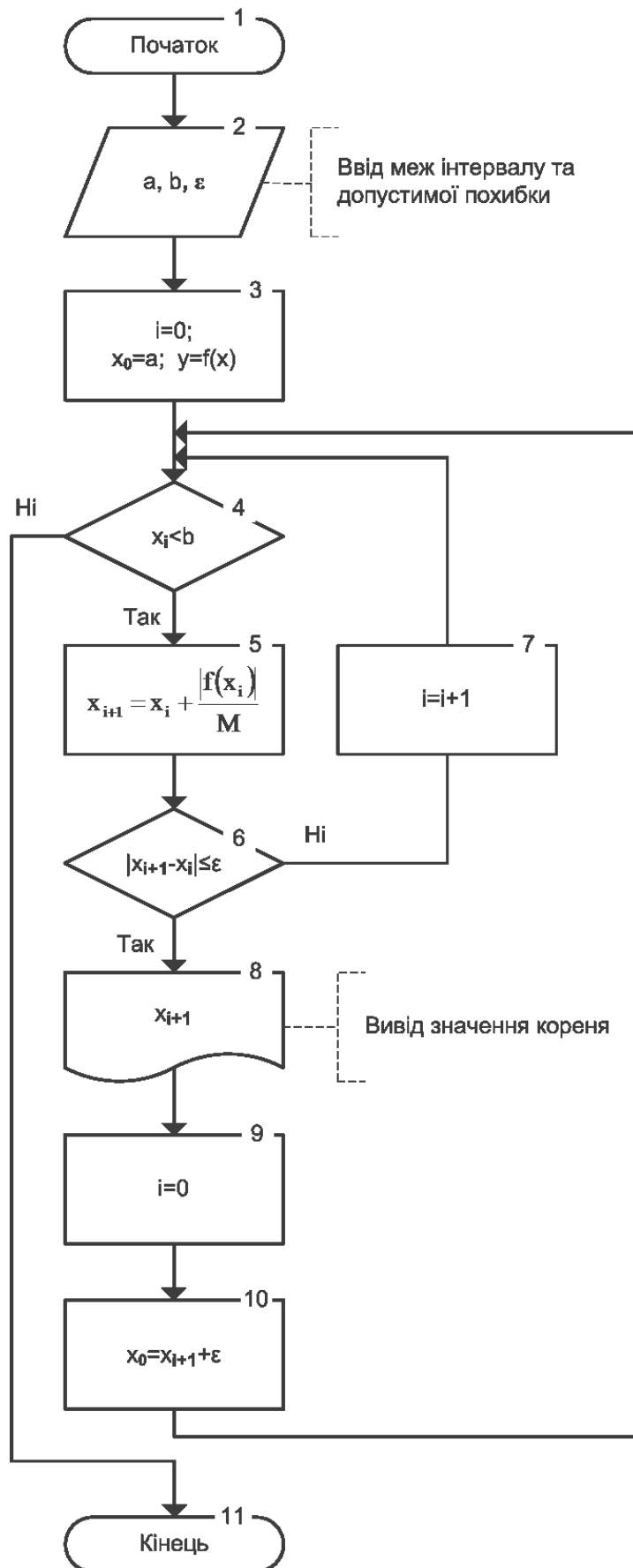


Рисунок 1.29 – Блок-схема алгоритму методу Рібакува

Таблиця 1.13 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5) методом  
Рибакова при  $M = 10$

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i$	Значення функції $\frac{d\bar{p}(\gamma_i)}{d\gamma}$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i - \gamma_{i-1} $
1	0,692984	-0,039432	0,300285
2	0,696927	-0,025482	0,003943
3	0,699475	-0,016603	0,002548
4	0,701135	-0,010874	0,001660
5	0,702223	-0,007146	0,001087
6	0,702937	-0,004706	0,000715
7	0,703408	-0,003103	0,000471
8	0,703718	-0,002049	0,000310
9	0,703923	-0,001353	0,000205
10	0,704058	-0,000894	0,000135

Таблиця 1.14 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5) методом  
Рибакова при  $M = 30$

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i$	Значення функції $\frac{dp(\gamma_i)}{d\gamma}$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i - \gamma_{i-1} $
1	0,492794	-1,334977	0,100095
2	0,537293	-0,901037	0,044499
3	0,567328	-0,670649	0,030035
4	0,589683	-0,524289	0,022355
5	0,607159	-0,422325	0,017476
6	0,621237	-0,347132	0,014078
7	0,632808	-0,289496	0,011571
8	0,642457	-0,244070	0,009650
9	0,650593	-0,207511	0,008136
10	0,657510	-0,177609	0,006917

З результатів обчислень видно, що при  $M = 10$  ітераційний процес дає хороше наближення до кореня, а при великих значеннях (наприклад, при  $M = 30$ ) збіжність погіршується.

### 1.3.2.8. Метод січних

Цей метод (рис. 1.30) реалізується алгоритмом, описаним в методі хорд, якщо абсциси  $a$  і  $b$  взяті з одного боку кореня і не фіксуються [2, 3, 17–19, 22, 25]. Умови збіжності методу січних аналогічні умовам збіжності методу хорд.

Для обчислень використовують формули:

$$x_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}; \quad (1.44)$$

$$x_1 = a - \frac{(b-a) \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}; \quad (1.45)$$

$$x_1 = b - \frac{(b-a) \cdot f(b)}{f(b) - f(a)}. \quad (1.46)$$

Результати пошуку кореня рівняння (1.5) методом січних для  $a' = 0,392699$ ,  $b' = 0,628319$  наведено в табл. 1.15.

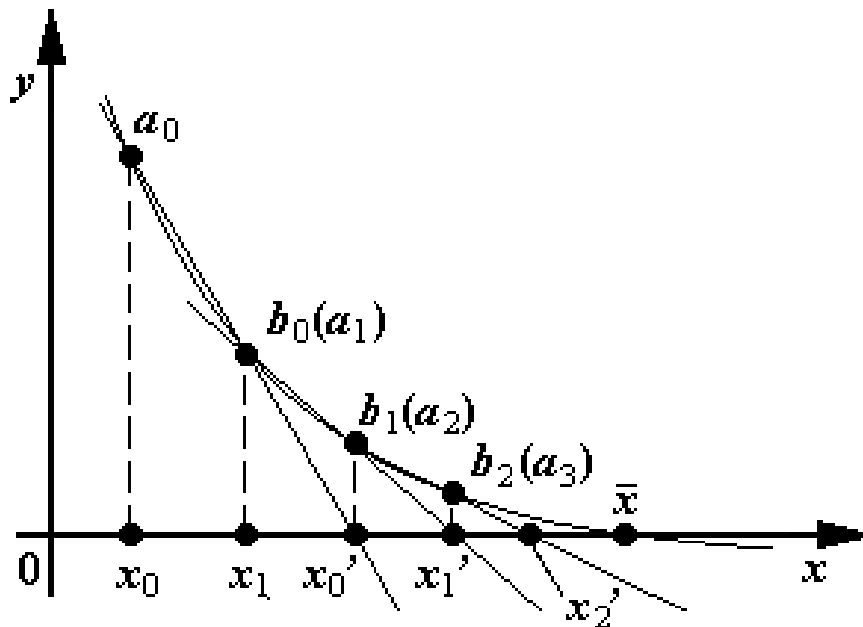


Рисунок 1.30 – Знаходження кореня методом січних

### 1.3.2.9. Комбінований метод січних-хорд

Метод забезпечує гарантовану збіжність при виборі в межах відрізка  $[a, b]$  двох наближень – нульового  $x_0$  і першого  $x_1$  (рис. 1.31).

Обчислення проводять по одній з формул (1.44) – (1.46) методу січних і однією з формул (1.21) – (1.23) методу хорд [2].

Результати пошуку кореня рівняння (1.5) комбінованим методом січних-хорд для  $a = a' = 0,392699$ ,  $b' = 0,628319$  и  $b = 0,916298$  наведено в табл. 1.16.

Таблиця 1.15 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5) методом січних

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i'$	Значення функції $\frac{d\bar{p}(\gamma_i')}{d\gamma}$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i' - \gamma_{i-1} $
1	0,695923	-0,029007	0,040341
2	0,703385	-0,003181	0,007462
3	0,704304	-0,000061	0,000919
4	0,704322	$-1,322126 \cdot 10^{-7}$	0,000018
5	0,704322	$-5,506873 \cdot 10^{-12}$	$3,903315 \cdot 10^{-8}$
6	0,704322	0,000000	$1,625811 \cdot 10^{-12}$
7	0,704322	0,000000	0,0
8	0,704322	0,000000	0,0
9	0,704322	0,000000	0,0
10	0,704322	0,000000	0,0

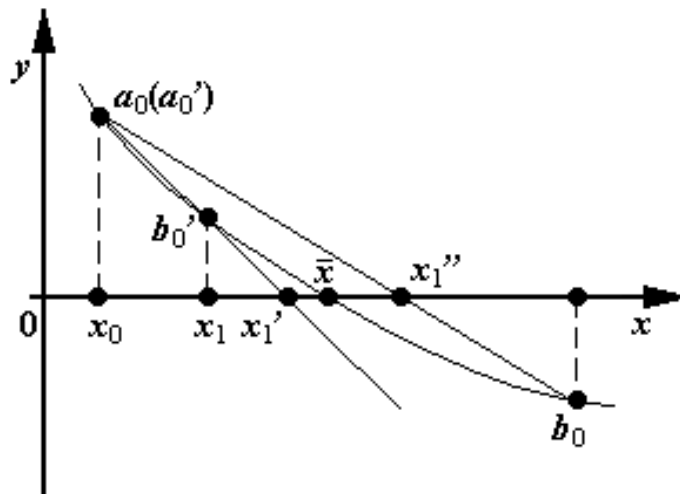


Рисунок 1.31 – Знаходження кореня комбінованим методом січних-хорд

### 1.3.2.10. Метод простих ітерацій

Метод простих ітерацій служить для обчислення дійсних коренів багаточленів і трансцендентних функцій [1–3, 17, 21–26].

Він заснований на перетворенні вихідного рівняння

$$F(x) = 0 \quad (1.47)$$

у рівняння

$$x = f(x) \quad (1.48)$$

і багаторазовому застосуванні ітераційної формули

$$x_i = f(x_{i-1}) \quad (1.49)$$

до тих пір, поки виконується умова

$$|x_i - x_{i-1}| \geq \varepsilon,$$

де  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $\varepsilon$  – задана похибка обчислення кореня.

Таблиця 1.16 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5)  
комбінованим методом січних-хорд

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i$	Значення функції $\frac{d\bar{p}(\gamma_i)}{d\gamma}$	Значення аргументу $\gamma_i'$	Значення функції $\frac{d\bar{p}(\gamma_i')}{d\gamma}$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i' - \gamma_i $
1	0,655583	-0,185835	0,843118	0,357370	0,187536
2	0,695923	-0,029007	0,728341	0,077092	0,032418
3	0,703385	-0,003181	0,707008	0,009041	0,003623
4	0,704304	-0,000061	0,704374	0,000176	0,000070
5	0,704322	$-1,322126 \cdot 10^{-7}$	0,704322	$3,789544 \cdot 10^{-7}$	$1,509182 \cdot 10^{-7}$
6	0,704322	$-5,506873 \cdot 10^{-12}$	0,704322	$1,578315 \cdot 10^{-11}$	$6,285750 \cdot 10^{-12}$
7	0,704322	0,0	0,704322	0,0	0,0
8	0,704322	0,0	0,704322	0,0	0,0
9	0,704322	0,0	0,704322	0,0	0,0
10	0,704322	0,0	0,704322	0,0	0,0

Очевидно, що для застосування ітераційної формули (1.49) необхідно задати початкове наближення до кореня  $x_0$ .

Блок-схему алгоритму методу простих ітерацій представлено на рис. 1.32.

Перетворення рівняння (1.47) в рівняння (1.48) можна зробити різними шляхами, потрібно лише, щоб всі корені рівняння (1.48) були коренями рівняння (1.47).

Основне питання, яке виникає при використанні цього методу, – чи збігається  $x_i$  до рішення рівняння (1.47)  $\bar{x}$  при зростанні  $i$ , тобто  $x_i \rightarrow \bar{x}$  при  $i \rightarrow \infty$ ?

Виведемо достатні умови для збіжності методу, тобто умови, які є гарантією того, що послідовні значення  $x_i$  будуть наближатися до рішення рівняння (1.48). Необхідно відзначити, що ці умови не є необхідними, так як існують функції, для яких ці умови не виконуються, але для яких за допомогою виразу (1.48) можна знайти рішення рівняння (1.47).

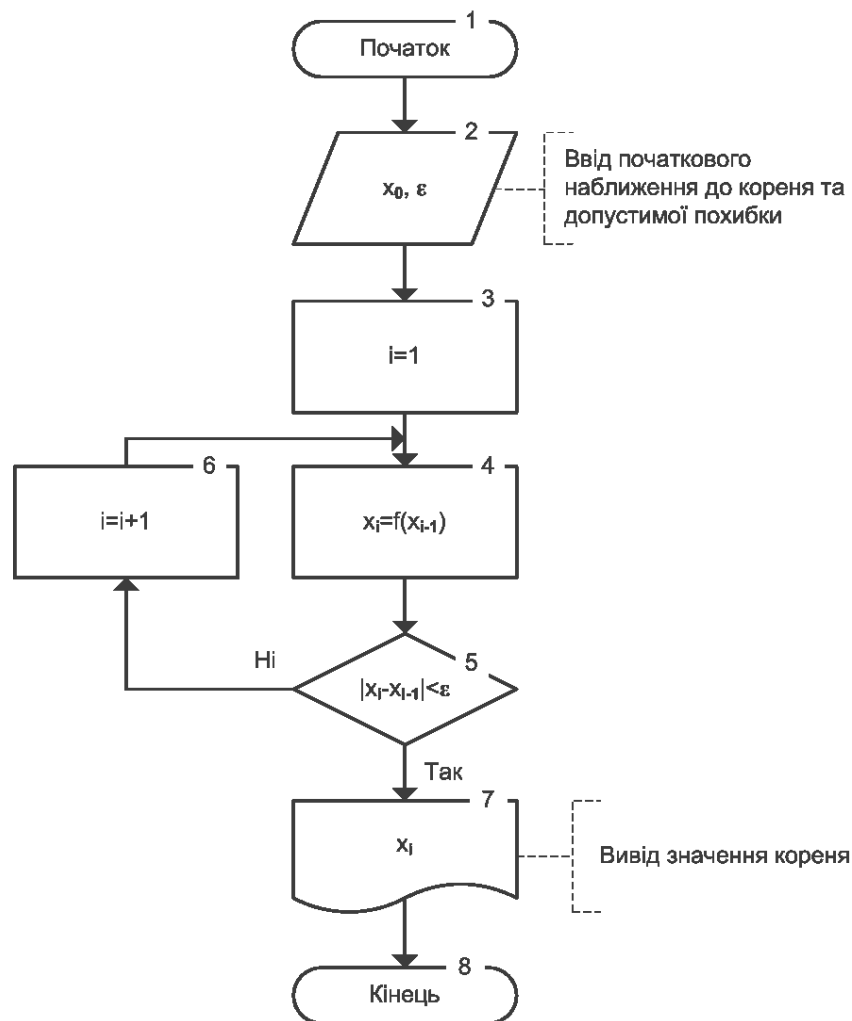


Рисунок 1.32 – Блок-схема алгоритму методу простих ітерацій

Розглянемо спочатку геометричне уявлення процесу [1, 3, 25, 26]. При вирішенні рівняння (1.48) відшукується точка перетину кривої  $y = f(x)$  і прямої  $y = x$ . Розглянемо рис. 1.33, на якому зображено деяку криву  $y = f(x)$ . Ця крива може являти собою будь-яку функцію, похідна якої позитивна і менше 1, тобто  $0 < f'(x) < 1$ . Нехай  $x = \bar{x}$  – значення аргументу в точці перетину, тоді  $\bar{x}$  є коренем цього рівняння.

Задамося деяким  $x_0$ . Значення  $x_1$  дорівнює  $f(x_0)$ . Так як  $OA$  на рис. 1.33 дорівнює  $f(x_0)$ , то знайти  $x_1$  можна наступним чином: проводимо через точку  $A$  горизонтальну лінію до перетину з прямою  $y = x$  в точці  $B$ , як показано на рисунку. Значення  $x_2$  можна знайти, провівши через точку  $B$  вертикальну лінію до перетину з кривою  $y = f(x)$ . При цьому отримуємо відрізок  $OC$ , рівний  $f(x_1)$ , та,

проводячи через точку  $C$  горизонтальну лінію до перетину з прямою  $y = x$ , отримуємо  $x_2$ . Процес триває в тому ж порядку. Послідовність операцій показано стрілками на рис. 1.33. З рисунка видно, як послідовні значення  $x$  збігаються до  $\bar{x}$ .

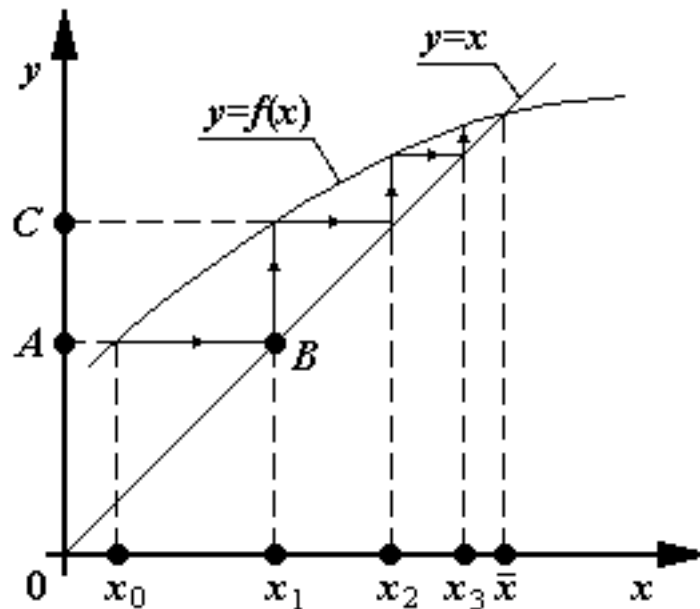


Рисунок 1.33 – Схема ітераційного процесу для випадку позитивної похідної функції  $f(x)$ , меншою 1

Розглянемо тепер іншу криву  $y = f(x)$ , похідна якої негативна, але менша 1 за абсолютною величиною. Цей випадок представлено на рис. 1.34.

Послідовні операції обчислення рішення цього рівняння показано стрілками. І в цьому випадку наближення збігаються до вирішення  $\bar{x}$ . На противагу першому випадку, на цей раз кожне наступне наближення знаходиться з протилежного боку від  $\bar{x}$ .

Розглянемо випадки, коли похідна функції більша 1 і менша  $-1$  (рис. 1.35, 1.36). В обох випадках ітераційний процес розходиться. Кожне наступне значення  $x$  відстоїть далі від дійсного значення кореня, ніж попереднє.

Таким чином можна зробити висновок про те, що ітераційний процес пошуку кореня рівняння за формулою (1.48) збігається за умови, що похідна  $f'(x)$  менша 1 за абсолютною величиною.

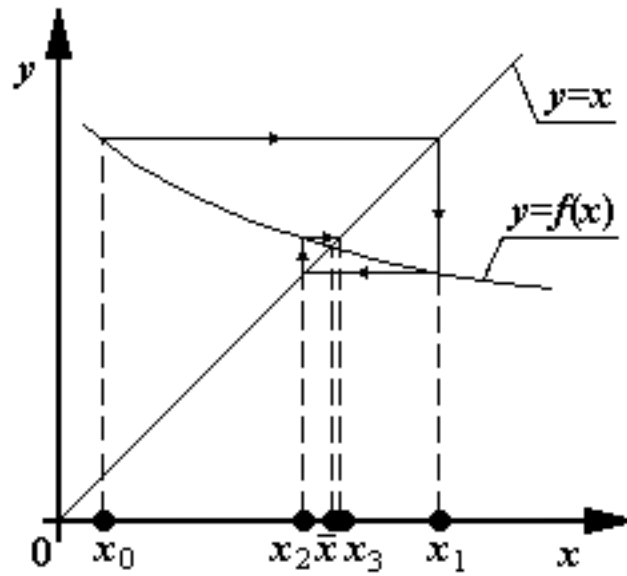


Рисунок 1.34 – Схема ітераційного процесу для випадку негативної похідної функції  $f(x)$ , більше  $-1$

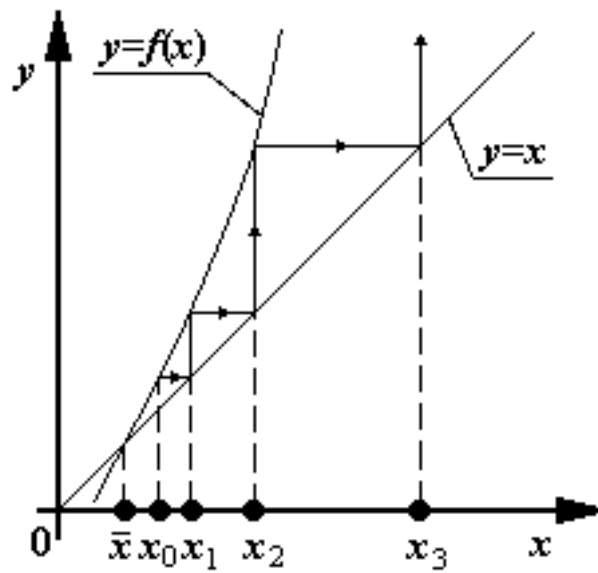


Рисунок 1.35 – Схема ітераційного процесу для випадку позитивної похідної функції  $f(x)$ , більше  $1$

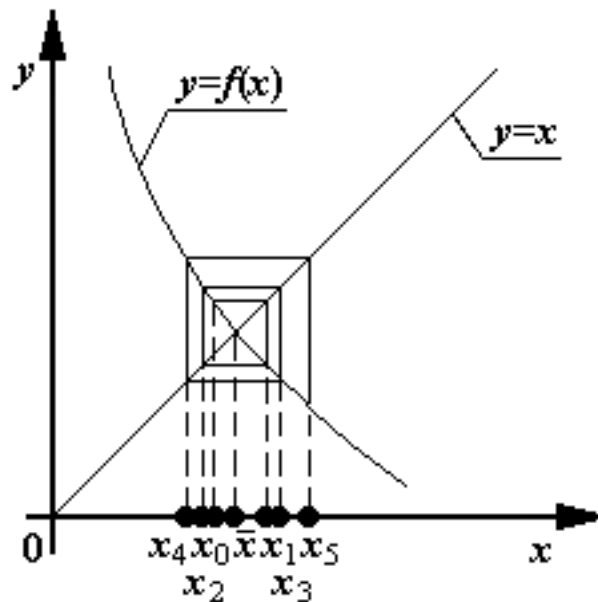


Рисунок 1.36 – Схема ітераційного процесу для випадку негативної похідною функції  $f(x)$ , менше  $-1$

У цьому можна переконатися за допомогою елементарних викладок

$$\bar{x} = f(\bar{x}); \quad x_i = f(x_{i-1}),$$

так що  $x_i - \bar{x} = f(x_{i-1}) - f(\bar{x})$ .

Помноживши праву частину на  $\frac{x_{i-1} - \bar{x}}{x_{i-1} - \bar{x}}$  і, використовуючи теорему про

середнє значення, отримуємо  $x_i - \bar{x} = f'(\xi) \cdot (x_{i-1} - \bar{x})$ , де  $\xi$  лежить між  $x_{i-1}$  і  $\bar{x}$ .

**Теорема Лагранжа про кінцеве збільшення функції (теорема Лагранжа про середнє значення).** Якщо функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$  і диференційована на  $(a, b)$ , то в інтервалі  $(a, b)$  існує таке число  $X$ , що

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(X).$$

Дану формулу можна переписати у вигляді  $f(b) - f(a) = f'(X) \cdot (b - a)$  або при інших позначеннях  $f(a+h) - f(a) = f'(X) \cdot h$ . Це – формула кінцевих приростів функції, її пишуть також у вигляді  $f(a+h) = f(a) + f'(X) \cdot h$ .

Тепер нехай  $m$  буде максимальним значенням  $f'(x)$  на всьому розглянутому інтервалі, тобто в інтервалі, що включає в себе  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{x}$ . Тоді

$$|x_n - \bar{x}| \leq m \cdot |x_{n-1} - \bar{x}|.$$

Таким же чином отримуємо

$$|x_{n-1} - \bar{x}| \leq m \cdot |x_{n-2} - \bar{x}|$$

і тому

$$|x_n - \bar{x}| \leq m^2 \cdot |x_{n-2} - \bar{x}|.$$

Продовжуючи ті ж викладки, отримуємо

$$|x_n - \bar{x}| \leq m^n \cdot |x_0 - \bar{x}|.$$

Очевидно, що, якщо на всьому інтервалі  $m < 1$ , то незалежно від вибору початкового значення  $x_0$  зі зростанням  $n$  права частина нерівності стає малою і  $x_n$  збігається до  $\bar{x}$ . З іншого боку, для випадку  $|f'(x)| > 1$  величина  $|x_n - \bar{x}|$  необмежено зростає з ростом  $n$ .

Таким чином, якщо  $|f'(x)| < 1$ , то процес збігається, якщо ж  $|f'(x)| > 1$ , то процес розходиться. Причому нерівності повинні виконуватися при всіх значеннях  $x_n$ , обчислюваних в результаті виконання задачі.

Що станеться в разі, коли похідна  $f'(x)$  в деяких точках  $x_i$  менша, а в інших більша 1 за абсолютною величиною? Точної відповіді на це питання не існує, так як процес іноді збігається, а іноді розходиться.

**Приклад.** Дано рівняння  $F(x) = x^2 - c = 0$ , де  $c \geq 0$ . Це рівняння можна перетворити до вигляду (1.48), додавши до лівої і правої частин  $x$

$$x = x^2 + x - c$$

або розділивши увесь вираз на  $x$

$$x = \frac{c}{x}.$$

Нарешті, можна перетворити рівняння до наступного виду:

$$x^2 - c - 2x^2 + 2x^2 = 0;$$

$$x^2 - c - 2x^2 = -2x^2;$$

$$-2x^2 = x^2 - c - 2x^2;$$

$$\frac{-2x^2}{-2x} = \frac{x^2 - c - 2x^2}{-2x};$$

$$x = x + \frac{x^2 - c}{-2x};$$

$$x = x - \frac{x}{2} + \frac{c}{2x};$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot \left( x + \frac{c}{x} \right).$$

Очевидно, що коренями рівняння є значення  $x$ , які рівні  $\pm\sqrt{c}$ .

При застосуванні першої ітераційної формули  $|f'(x)| < 1$ , якщо  $-1 < x < 0$ . В цьому випадку якщо число  $c$  менше 1, то процес збігається до від'ємного значення кореня.

З іншого боку, якщо скористатися формулою  $x = \frac{c}{x}$ , то  $f'(x) = -\frac{c}{x^2}$  і при  $x$ , близьких до  $\sqrt{c}$  (як і має бути при знаходженні кореня рівняння),  $|f'(x)|$  стає майже рівним 1, і процес розходиться.

І застосовуючи формулу  $x = \frac{1}{2} \cdot \left( x + \frac{c}{x} \right)$ , отримуємо вираз для  $f'(x)$  у вигляді

$$\frac{1}{2} \cdot \left( 1 - \frac{c}{x^2} \right).$$

У цьому випадку, коли  $x \approx \sqrt{c}$ , то  $f'(x) \approx 0$ , і процес дуже швидко збігається.

Взагалі кажучи, хоча для будь-якого рівняння можна знайти велику кількість відповідних йому функцій  $f(x)$  у виразі (1.48), необхідно з великою обережністю підходити до їх конкретного вибору, так як від нього і від вибору початкового значення  $x_0$  залежить збіжність процесу ітерації.

Застосуємо метод простих ітерацій для вирішення рівняння (1.5). Функція, що входить в це рівняння, є досить громіздкою, що в даному випадку дещо ускладнює завдання отримання ітераційної формули (1.48). Тому обмежимося її простим варіантом

$$\gamma = \frac{F(\gamma) - t \cdot \gamma}{-t}, \quad (1.50)$$

де  $F(\gamma) = \frac{d\bar{p}(\gamma)}{d\gamma}$  – вихідна функція з рівняння (1.5),  $t$  – деяке позитивне

число (необов'язково ціле).

Формула (1.50) отримана в такий спосіб

$$\begin{aligned} F(\gamma) &= 0; \\ F(\gamma) - t \cdot \gamma &= -t \cdot \gamma; \\ -t \cdot \gamma &= F(\gamma) - t \cdot \gamma; \\ \gamma &= \frac{F(\gamma) - t \cdot \gamma}{-t}; \\ \gamma &= \frac{F(\gamma)}{-t} + \gamma; \\ \gamma &= \gamma - \frac{F(\gamma)}{t}. \end{aligned}$$

Таким чином ітераційна формула для розглянутого рівняння має вигляд

$$\gamma = f(\gamma), \quad (1.51)$$

де  $f(\gamma) = \gamma - \frac{F(\gamma)}{t}$ . З графіків, представлених на рис. 1.37, видно, що абсциси кореня рівняння (1.5) і точки перетину кривих  $f(\gamma)$  і  $y = \gamma$  збігаються, тобто рівняння (1.51) має однаковий корінь з рівнянням (1.5). Схему наближення до кореня рівняння (1.5) методом простих ітерацій з використанням рівняння (1.51) показано на рис. 1.38. Дослідним шляхом можна показати, що оптимальне з точки зору збіжності ітераційного процесу значення для параметра  $t$  знаходиться в інтервалі 2,0...7,9 (див. приклад результату розрахунків в табл. 1.17). При  $2,0 \leq t < 2,3$  і  $4,5 \leq t < 7,9$  швидкість збіжності ітераційного процесу дещо зменшується. Для  $1,7 < t < 2,0$  і  $t > 7,9$  ітераційний процес збігається досить повільно, а при  $t < 1,7$  рішення отримати взагалі не вдається (для цих значень  $t$  приклади результатів розрахунків наведено в табл. 1.18, 1.19).

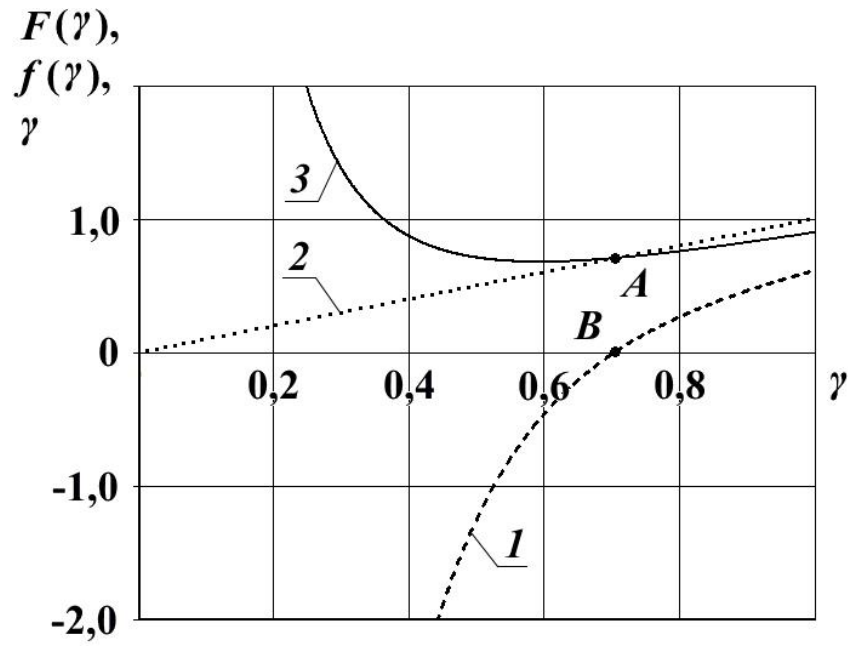


Рисунок 1.37 – Графіки функцій  $F(\gamma)$  (1),  $f(\gamma)$  (2) і  $y = \gamma$  (3) (при  $t = 6,0$ )

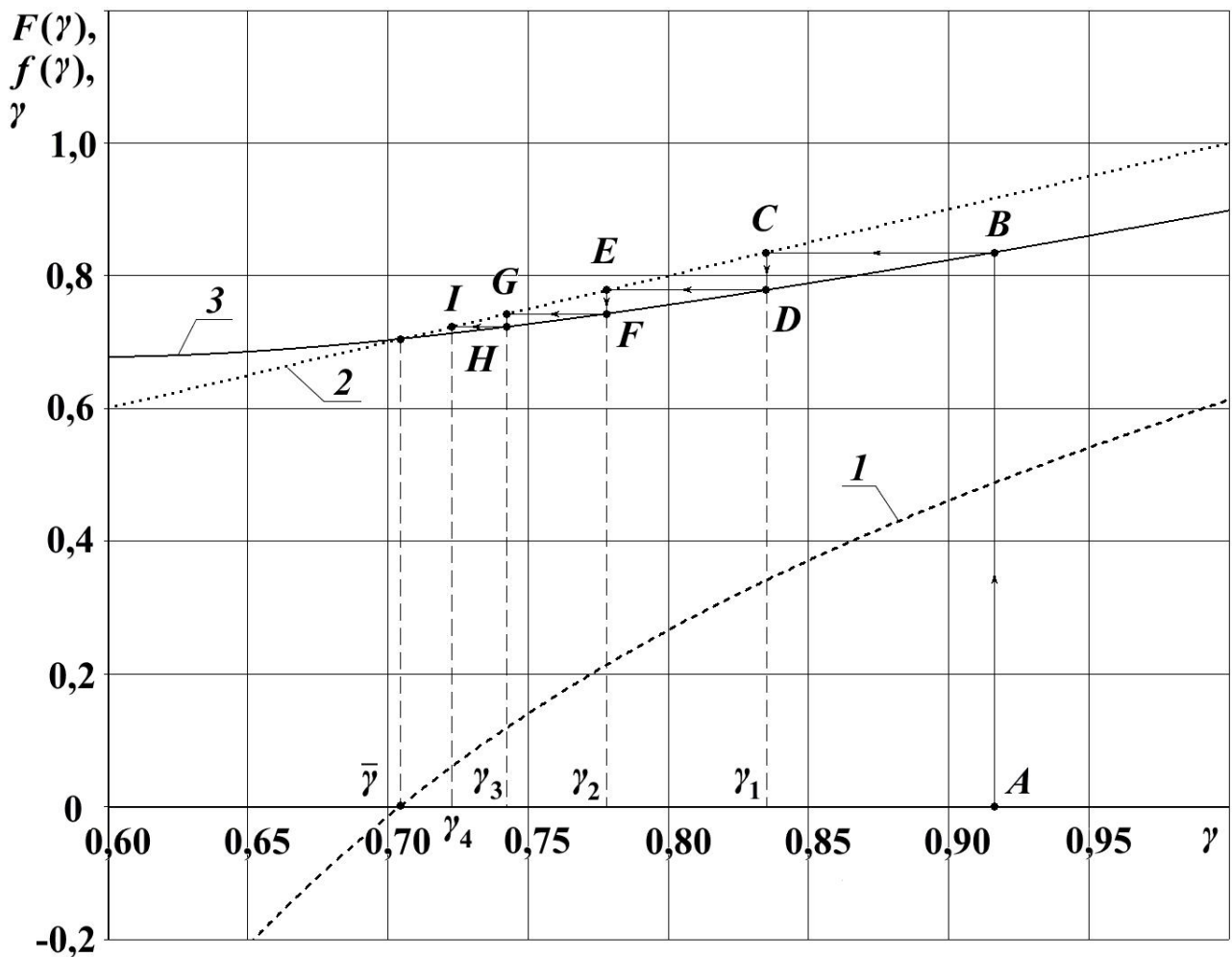


Рисунок 1.38 – Схема наближення до кореня рівняння (1.5) методом простих ітерацій (при  $t = 6,0$  і  $\gamma_0 = 0,916298$ ): 1 – функція  $F(\gamma)$ ; 2 – функція  $f(\gamma)$ ; 3 – функція  $y = \gamma$

Для перевірки достатньої умови збіжності розглянемо, які значення приймає похідна функції  $f(\gamma) = \gamma - \frac{F(\gamma)}{4,5}$  на інтервалі, де розташований шуканий корінь. З рис. 1.39 видно, що функція  $f'(\gamma) = -\frac{F'(\gamma)}{4,5}$  при  $\gamma \in [0,526; 1,0]$  має значення, що не перевищують за модулем 1. Отже, обираючи перше наближення в межах даного інтервалу, можна гарантувати збіжність ітераційного процесу.

Таблиця 1.17 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5) методом простих ітерацій ( $t = 4,0$  і  $\gamma_0 = 0,916298$ )

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i$	Значення функції $F(\gamma_i)$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i - \gamma_{i-1} $
1	0,916298	0,487871	0,121968
2	0,794330	0,252722	0,063180
3	0,731149	0,085580	0,021395
4	0,709754	0,018172	0,004543
5	0,705211	0,003006	0,000751
6	0,704460	0,000467	0,000117
7	0,704343	0,000072	0,000018
8	0,704325	0,000011	$2,745427 \cdot 10^{-6}$
9	0,704323	$1,682899 \cdot 10^{-6}$	$4,207247 \cdot 10^{-7}$
10	0,704322	$2,578866 \cdot 10^{-7}$	$6,447164 \cdot 10^{-8}$

Таблиця 1.18 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5) методом ітерацій ( $t = 8,0$  і  $\gamma_0 = 0,916298$ )

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i$	Значення функції $F(\gamma_i)$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i - \gamma_{i-1} $
1	0,916298	0,487871	0,060984
2	0,855314	0,381022	0,047628
3	0,807686	0,283141	0,035393
4	0,772294	0,199127	0,024891
5	0,747403	0,132756	0,016595
6	0,730808	0,084554	0,010569
7	0,720239	0,052005	0,006501
8	0,713738	0,031216	0,003902
9	0,709836	0,018442	0,002305
10	0,707531	0,010789	0,001349

Таблиця 1.19 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5) методом простих ітерацій ( $t = 1,2$  і  $\gamma_0 = 0,916298$ )

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i$	Значення функції $F(\gamma_i)$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i - \gamma_{i-1} $
1	0,916298	0,487871	0,406560
2	0,509738	-1,154541	0,962118
3	1,471856	1,332072	1,110060
4	0,361796	-3,855681	3,213068
5	3,574864	-2,171082	1,809235
6	5,384099	12,208959	10,174132
7	-4,790033	1,379509	1,149591
8	-5,939625	-4,481587	3,734656
9	-2,204969	0,520092	0,433410
10	-2,638379	-1,221587	1,017989

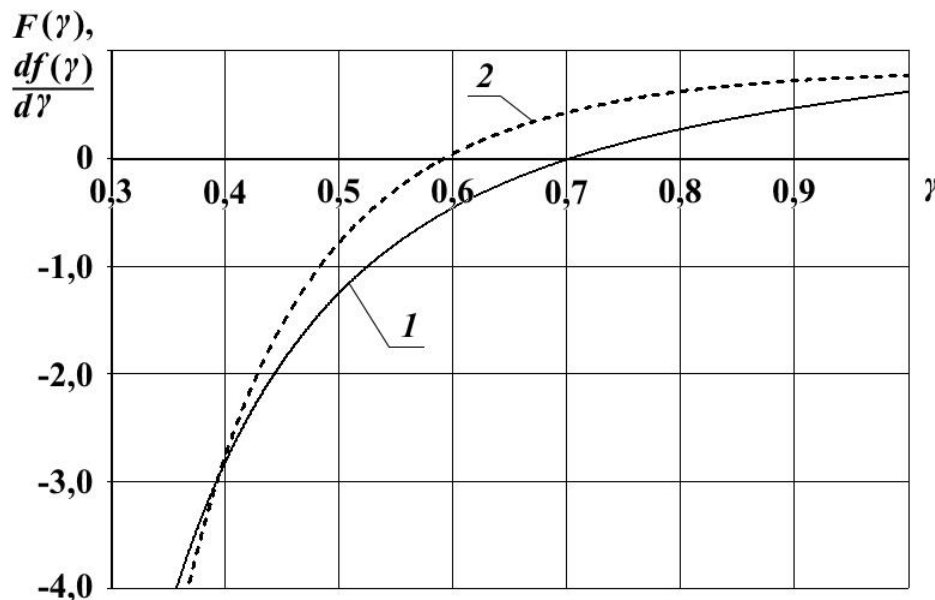


Рисунок 1.39 – Графіки вихідної функції  $F(\gamma)$  (1) і похідної від функції  $f(\gamma)$  (2) (при  $t = 6,0$ )

Результати розрахунку, наведені в табл. 1.20–1.22 і на рис. 1.39 для  $\gamma_0 = 0,392699$ , показують, що хоча для такого обраного значення  $\gamma_0$  достатня умова збіжності і не виконується при  $2,1 \leq t < 12,0$  (похідна  $\frac{df(\gamma)}{d\gamma} < -1,0$ ), але ітераційний процес при цьому все ж збігається (тобто, як було сказано вище, достатня умова збіжності зовсім не є необхідна).

Таблиця 1.20 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5) методом простих ітерацій ( $t = 1,2$  і  $\gamma_0 = 0,392699$ )

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i$	Значення функції $F(\gamma_i)$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i - \gamma_{i-1} $
1	0,392699	-3,002846	2,502372
2	2,895071	9,941443	8,284536
3	-5,389465	0,450281	0,375235
4	-5,764699	-1,069090	0,890908
5	-4,873791	1,206104	1,005086
6	-5,878878	-2,736339	2,280282
7	-3,598595	409,246148	341,038456
8	-344,637052	0,522441	0,435367
9	-345,072419	-1,226225	1,021854
10	-344,050565	1,454523	1,212103

Таблиця 1.21 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5) методом простих ітерацій ( $t = 2,8$  і  $\gamma_0 = 0,392699$ )

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i$	Значення функції $F(\gamma_i)$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i - \gamma_{i-1} $
1	0,392699	-3,002846	1,072445
2	1,465144	1,317631	0,470583
3	0,994562	0,605440	0,216228
4	0,778333	0,214265	0,076523
5	0,701810	-0,008559	0,003057
6	0,704867	0,001842	0,000658
7	0,704209	-0,000384	0,000137
8	0,704346	0,000081	0,000029
9	0,704317	-0,000017	$6,032980 \cdot 10^{-6}$
10	0,704323	$3,541826 \cdot 10^{-6}$	$1,264938 \cdot 10^{-6}$

### 1.3.2.11. Метод зворотної інтерполяції (екстраполяції)

Метод інтерполяції полягає в обчисленні ряду значень  $y_k = f(x_k)$  для заданих  $x_k$ , ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) на відрізку  $[a, b]$  і заміні на ньому вихідної функції поліномом  $P_n(x)$  ступеня  $n$ . Після цього знаходять рішення  $x'$  алгебраїчного рівняння  $P_n(x) = 0$ .

Таблиця 1.22 – Результати рішення трансцендентного рівняння (1.5) методом простих ітерацій ( $t = 4,5$  і  $\gamma_0 = 0,392699$ )

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_i$	Значення функції $F(\gamma_i)$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_i - \gamma_{i-1} $
1	0,392699	-3,002846	0,667299
2	1,059998	0,694345	0,154299
3	0,905699	0,470480	0,104551
4	0,801148	0,268433	0,059652
5	0,741496	0,115988	0,025775
6	0,715721	0,037622	0,008361
7	0,707361	0,010220	0,002271
8	0,705090	0,002595	0,000577
9	0,704513	0,000646	0,000144
10	0,704369	0,000160	0,000036

Корінь може бути знайдений і за межами відрізка  $[a, b]$ . В цьому випадку для знаходження кореня застосовується екстраполяція.

Цей метод, по суті, є узагальненням методу хорд для інтерполяції та методу січних для екстраполяції. При використанні полінома першого ступеня  $P_1(x)$  методи інтерполяції та екстраполяції збігаються відповідно з методами хорд і січних.

Однак для того щоб не вирішувати рівняння алгебри ступеня  $n$ , при побудові поліномів використовують зворотну інтерполяцію (екстраполяцію), тобто проводять заміну функції  $y$  на аргумент  $x$  і аргументу  $x$  на функцію  $y$ . Потім, вважаючи  $y = 0$ , знаходять наближення до кореня  $x'$ . Це і є метод зворотної інтерполяції (екстраполяції) (рис. 1.40).

На жаль, для довільних функцій оцінка похибки цього методу відсутня. Однак для отримання результату із заданою похибкою  $\varepsilon$  можна побудувати ітераційну процедуру уточнення кореня.

Метод квадратичної зворотної інтерполяції (екстраполяції) полягає в заміні функції  $f(x)$  поліномом Ньютона другого ступеня ( $n = 2$ ) [2, 17, 20, 22, 25]

$$P_2(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1), \quad (1.52)$$

для побудови якого використовуються три точки  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  (рис. 1.41, 1.42). При цьому можна отримати аналітичний вираз для наближеного значення кореня.

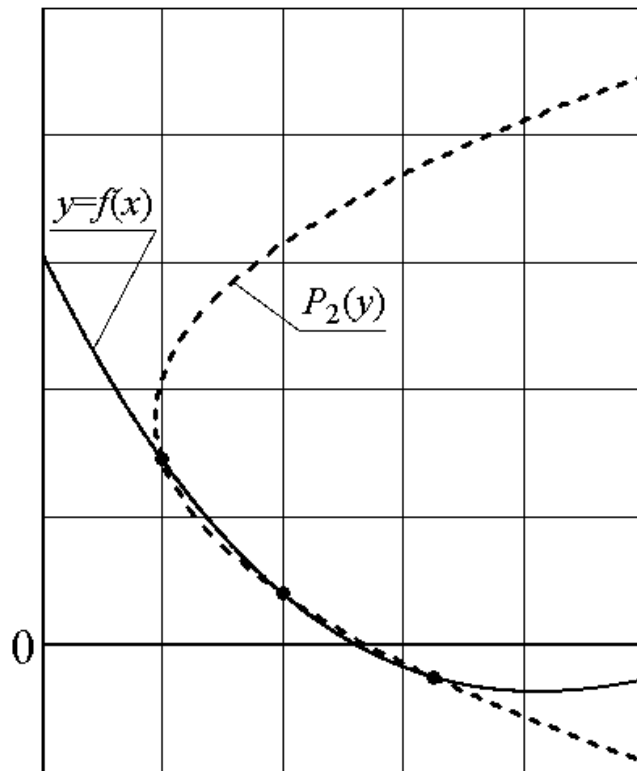


Рисунок 1.40 – Зворотна інтерполяція функції

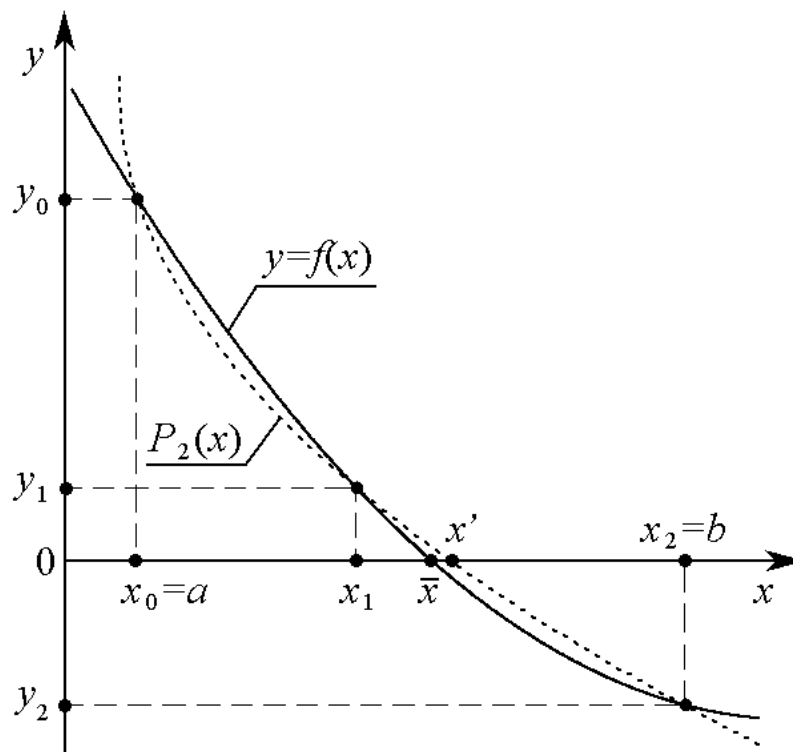


Рисунок 1.41 – Метод квадратичної зворотної інтерполяції

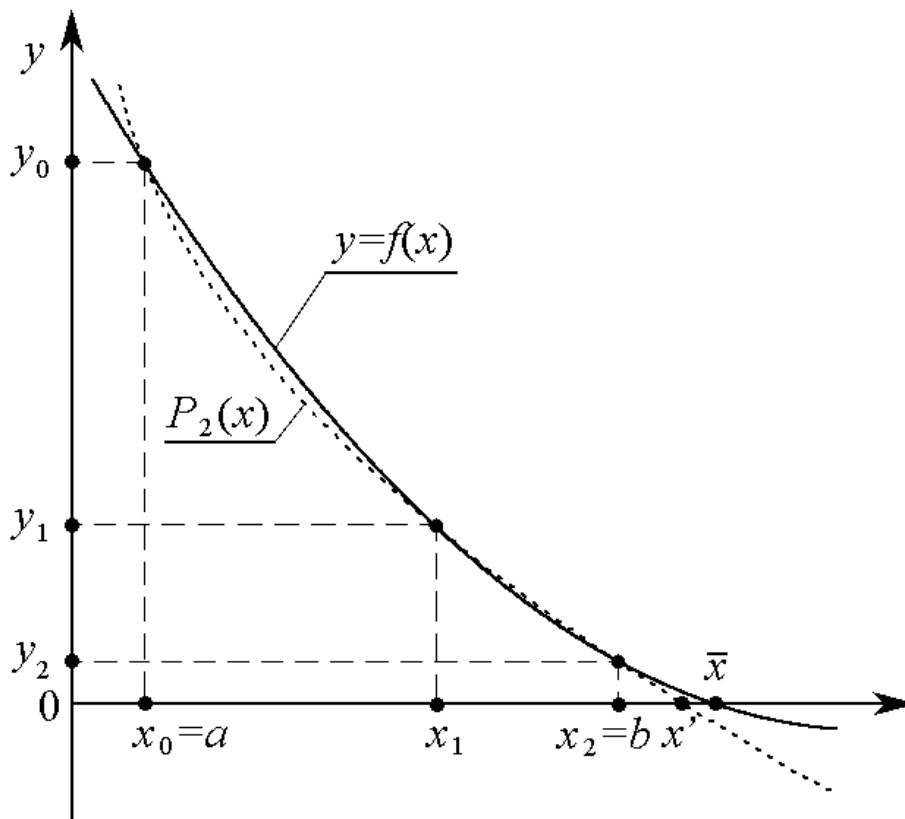


Рисунок 1.42 – Метод квадратичної зворотної інтерполяції

Замінив  $x$  на  $y$  і  $y$  на  $x$ , поліном Ньютона другого ступеня можна представити у вигляді

$$x(y) = b_0 + b_1 \cdot (y - y_0) + b_2 \cdot (y - y_0) \cdot (y - y_1). \quad (1.53)$$

Для  $y = 0$  знаходимо

$$x = b_0 - b_1 \cdot y_0 + b_2 \cdot y_0 \cdot y_1. \quad (1.54)$$

Коефіцієнт  $b_0$  знаходимо, підставивши в рівняння (1.53)  $x = x_0$  і  $y = y_0$ :

$$b_0 = x_0. \quad (1.55)$$

Для знаходження коефіцієнта  $b_1$  підставляємо значення  $x = x_1$ ,  $y = y_1$  і використовуємо вираз (1.55) для  $b_0$

$$x_1 = b_0 + b_1 \cdot (y_1 - y_0) + b_2 \cdot (y_1 - y_0) \cdot (y_1 - y_1);$$

$$b_1 = \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}. \quad (1.56)$$

Коефіцієнт  $b_2$  знаходимо, підставивши  $x = x_2$ ,  $y = y_2$  у вираз (1.55), (1.56) для  $b_0$  і  $b_1$ :

$$x_2 = b_0 + b_1 \cdot (y_2 - y_0) + b_2 \cdot (y_2 - y_0) \cdot (y_2 - y_1);$$

$$b_2 = \frac{q_2 - b_1}{y_2 - y_1}, \quad (1.57)$$

де  $q_2 = \frac{x_2 - x_0}{y_2 - y_0}$ .

Підставивши  $b_0$ ,  $b_1$  і  $b_2$  в (1.54), отримаємо

$$x = x_0 - y_0 \cdot \left[ \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} + \frac{(x_1 - x_0)/(y_1 - y_0) - (x_2 - x_0)/(y_2 - y_0)}{y_2 - y_1} \cdot y_1 \right]. \quad (1.58)$$

Для уточнення значення кореня можна використовувати ітераційну формулу

$$x_{1i+1} = x_0 - y_0 \cdot \left[ \frac{x_{1i} - x_0}{y_{1i} - y_0} + \frac{(x_{1i} - x_0)/(y_{1i} - y_0) - (x_2 - x_0)/(y_2 - y_0)}{y_2 - y_{1i}} \cdot y_{1i} \right]. \quad (1.59)$$

Алгоритм методу виглядає наступним чином.

1. Допустимо  $x_0 = a$  і обчислюємо  $y_0 = f(x_0)$ .

2. Допустимо  $x_2 = b$  і обчислюємо  $y_2 = f(x_2)$ .

3. Задаємо вихідне наближення до кореня  $x_{1i}$ ,  $i = 0$ .

4. Обчислюємо значення функції  $y_{1i} = f(x_{1i})$ .

5. За формулою (1.59) знаходимо корінь  $x_{1i+1}$ .

6. Перевіряємо умову  $|x_{1i+1} - x_{1i}| > \varepsilon$ . Якщо вона виконується, приймаємо

$x_{1i} = x_{1i+1}$  і переходимо до п. 4, якщо не виконується, вважаємо  $x_{1i+1}$  коренем.

Блок-схему алгоритму методу квадратичної зворотної інтерполяції представлено на рис. 1.43.

Збіжність даного алгоритму засновано на властивості полінома давати точні значення  $x$  при заданому  $y$  у вузлі інтерполяції (екстраполяції), тобто в точці  $x_1$ .

Застосуємо метод квадратичної зворотної інтерполяції для вирішення рівняння (1.5) при аналізі процесу видавлюванні штаби через клинову матрицю методом верхньої оцінки.

У табл. 1.23 наведено результати для 11 ітерацій при початкових значеннях вузлів апроксимації  $\gamma_{00} = 0,392699$ ,  $\gamma_{10} = 0,556324$ ,  $\gamma_{20} = 1,047198$ .

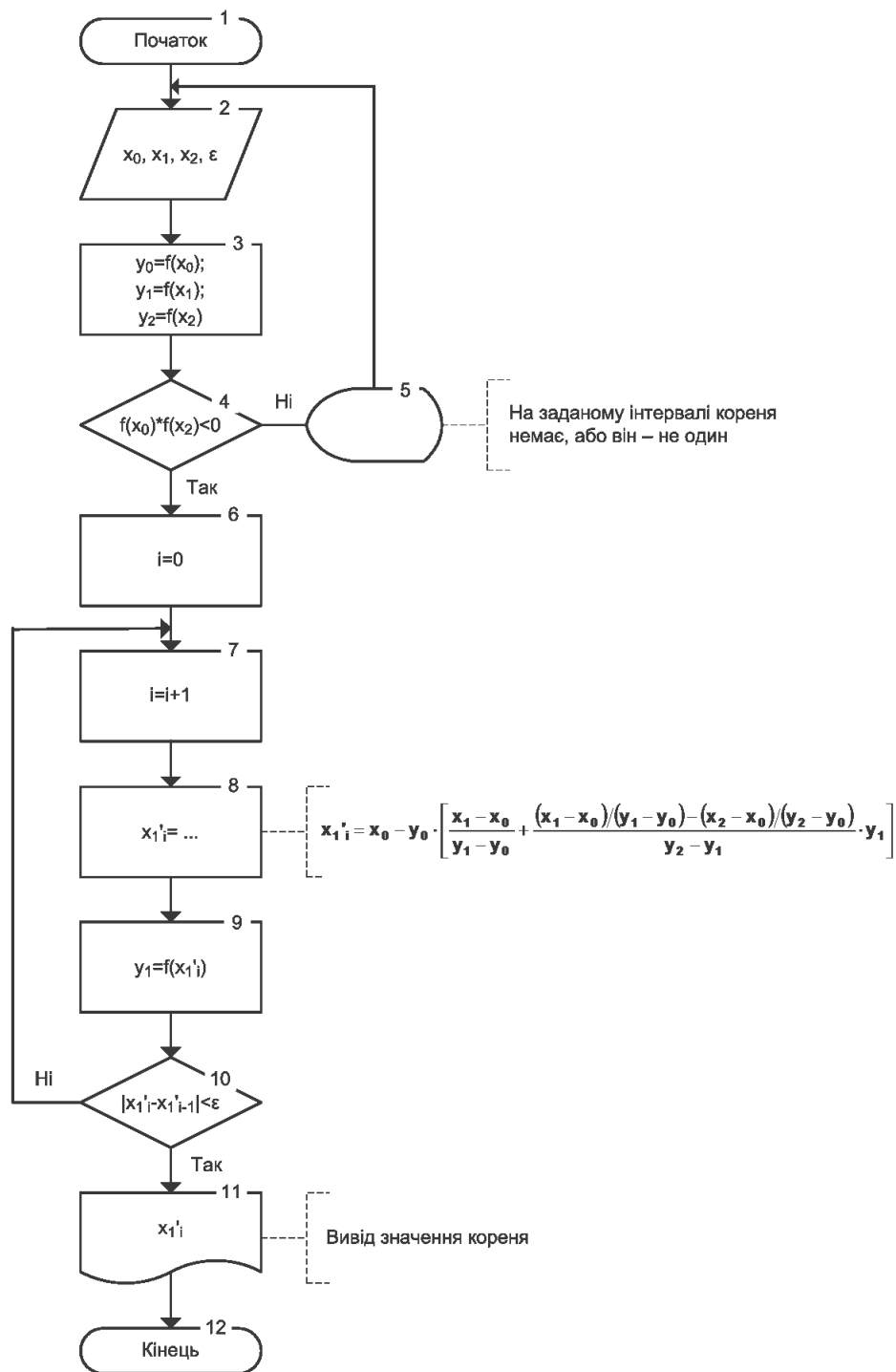


Рисунок 1.43 – Блок-схема алгоритму методу квадратичної зворотної інтерполяції

Таблиця 1.23 – Результати рішення трансцендентного рівняння  
методом квадратичної зворотної інтерполяції

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_{1i}$	Значення функції $\frac{dF_0(\gamma_{1i}')}{d\gamma}$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_{1i} - \gamma_{1i-1} $
0	0,523599	-1,021367	0,238044
1	0,761643	0,171539	0,074931
2	0,686712	-0,062163	0,023189
3	0,709901	0,018657	0,007333
4	0,702568	-0,005966	0,002308
5	0,704875	0,001871	0,000727
6	0,704148	-0,000590	0,000229
7	0,704377	0,000186	0,000072
8	0,704305	-0,000059	0,000023
9	0,704328	0,000018	$7,168500 \cdot 10^{-6}$
10	0,704321	$-5,817350 \cdot 10^{-6}$	$2,258689 \cdot 10^{-6}$

Розрахункові дані для екстраполяції при початкових значеннях вузлів  $x_0 = 0,174533$ ,  $x_1 = 0,349066$ ,  $x_2 = 0,523599$  наведено в табл. 1.24.

Таблиця 1.24 – Результати рішення трансцендентного рівняння  
методом квадратичної зворотної екстраполяції

Номер ітерації $i$	Значення аргументу $\gamma_{1i}$	Значення функції $\frac{dF_0(\gamma_{1i}')}{d\gamma}$	Похибка $\varepsilon_i =  \gamma_{1i} - \gamma_{1i-1} $
1	0,349066	-4,281356	0,237638
2	0,586704	-0,542706	0,074276
3	0,660980	-0,163002	0,027089
4	0,688069	-0,057188	0,010130
5	0,698199	-0,021036	0,003813
6	0,702012	-0,007867	0,001438
7	0,703450	-0,002960	0,000543
8	0,703993	-0,001116	0,000205
9	0,704198	-0,000421	0,000077
10	0,704275	-0,000159	0,000029
11	0,704305	-0,000060	0,000011

Графічну інтерпретацію рішення трансцендентного рівняння (1.5) методом зворотної квадратичної інтерполяції представлено на рис. 1.44.

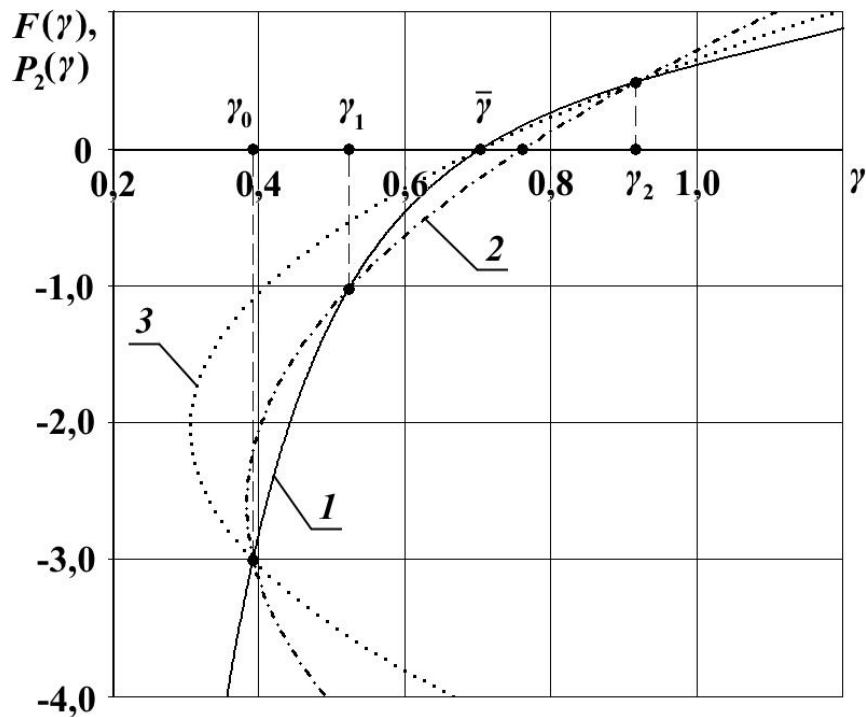


Рисунок 1.44 – Використання методу квадратичної зворотної інтерполяції стосовно до задачі видавлювання плоскої штаби через клинову матрицю: 1 – графік функції; 2 – графік зворотного полінома другого ступеня, побудованого за початковими значеннями (нульова ітерація); 3 – графік того ж полінома для десятої ітерації

## 1.4. Рішення алгебраїчних рівнянь

### 1.4.1. Аналітичне рішення лінійних, квадратних, кубічних рівнянь і рівнянь четвертого ступеня

Розглянемо рішення алгебраїчних рівнянь 1–4-го ступенів [16, 27, 28].

#### 1.4.1.1. Рішення лінійних і квадратних рівнянь

Загальне рівняння першого ступеня (лінійне рівняння)

$$a \cdot x = b \text{ або } a \cdot x - b = 0, \quad (1.60)$$

де ( $a \neq 0$ ), має рішення

$$x = \frac{b}{a}. \quad (1.61)$$

Квадратне рівняння

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, \quad (1.62)$$

де ( $a \neq 0$ ), має корні

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}. \quad (1.63)$$

Якщо рівняння має дійсні коефіцієнти, то його корені  $x_1$  і  $x_2$  або дійсні різні, або дійсні рівні, або комплексні пов'язані в залежності від того, чи буде  $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$  відповідно позитивний, дорівнює нулю або негативний. Варто

зазначити, що  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  та  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ .

#### 1.4.1.2. Рішення Кардано для кубічних рівнянь

Кубічне рівняння

$$x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad (1.64)$$

підстановкою  $x = y - \frac{a}{3}$  приводиться до «неповного» виду

$$y^3 + p \cdot y + q = 0; \quad p = -\frac{a^2}{3} + b; \quad q = 2 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^3 - \frac{a \cdot b}{3} + c. \quad (1.65)$$

Корені  $y_1, y_2$  та  $y_3$  «неповного» кубічного рівняння дорівнюють

$$y_1 = A + B; \\ y_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i \cdot \frac{A-B}{2} \cdot \sqrt{3}, \quad (1.66)$$

де  $A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \quad Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$

Якщо рівняння (1.64) має дійсні коефіцієнти, то воно має або один дійсний корінь і два сполучених комплексних кореня, або три дійсних кореня, принаймні два з яких рівні, або три різних дійсних корені в залежності від того, чи буде  $Q$  відповідно позитивним, дорівнюватиме нулю, або негативним. В останньому випадку («незвідний» випадок) можна скористатися наступним методом.

Якщо  $Q < 0$ , то  $p < 0$  и

$$y_1 = 2 \cdot \sqrt{-p/3} \cdot \cos \frac{\alpha}{3};$$

$$y_{2,3} = 2 \cdot \sqrt{-p/3} \cdot \cos \left( \frac{\alpha}{3} \pm \frac{2\pi}{3} \right), \quad (1.67)$$

де  $\cos \alpha = -\frac{q}{2 \cdot \sqrt{-(p/3)^3}}$ .

Блок-схему алгоритму методу Кардано показано на рис. 1.45.

Результати рішення рівняння (1.20) за формулами Кардано наведено у табл. 1.25.

### 1.4.1.3. Рішення Феррарі для рівнянь четвертого ступеня

Рівняння четвертого ступеня можна записати як

$$x^4 + a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0. \quad (1.68)$$

Якщо  $y_1$  будь-який з коренів рівняння ( $a, b, c$  та  $d$  – коефіцієнти рівняння (1.68))

$$y^3 - b \cdot y^2 + (a \cdot c - 4 \cdot d) \cdot y - a^2 \cdot d + 4 \cdot b \cdot d - c^2 = 0, \quad (1.69)$$

то чотири кореня рівняння (1.68) знаходяться як корені двох квадратних рівнянь

$$x^2 + \frac{a}{2} \cdot x + \frac{y_1}{2} = \pm \sqrt{\left( \frac{a^2}{4} - b + y_1 \right) \cdot x^2 + \left( \frac{a}{2} \cdot y_1 - c \right) \cdot x + \frac{y_1^2}{4} - d}, \quad (1.70)$$

де підкореневий вираз в правій частині є повним квадратом.

### 1.4.2. Правило Горнера

При діленні полінома ступеня  $n$

$$P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0 \quad (1.71)$$

на поліном ступеня  $m$

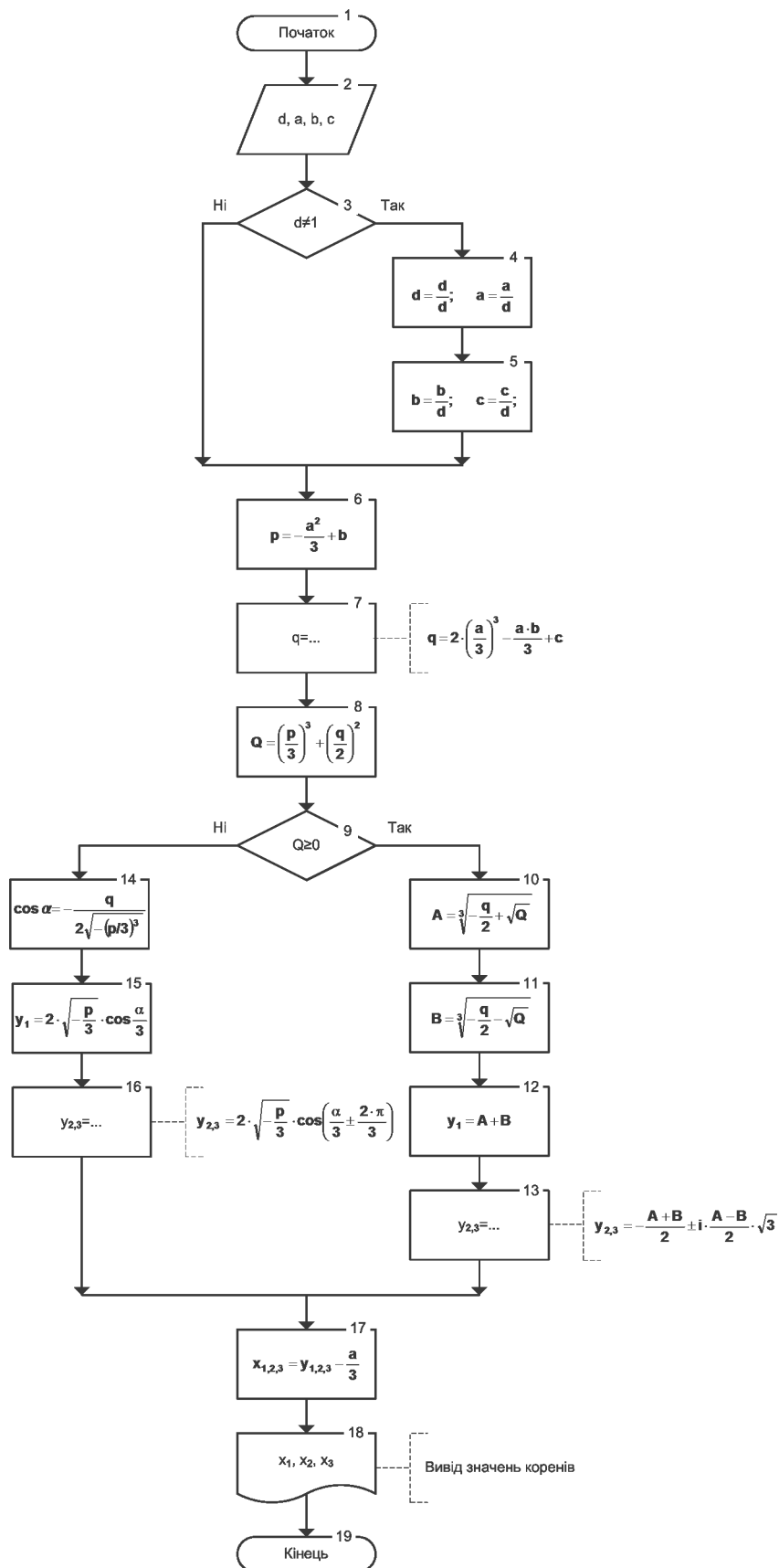


Рисунок 1.45 – Блок-схема алгоритму методу Кардано

Таблиця 1.25 – Результати рішення рівняння (1.20) за методом

## Кардано

$a$	937
$b$	203974
$c$	6627388
$p$	-88682,333333
$q$	3857060,740741
$Q$	$-2,211215 \cdot 10^{13}$
$\alpha$	1,959996
$y_1$	273,050385
$y_2$	44,485715
$y_3$	-317,5361
$x_1$	-39,282948
$x_2$	-267,847618
$x_3$	-629,869434
$f(x_1)$	$1,210719 \cdot 10^{-8}$
$f(x_2)$	$-7,450581 \cdot 10^{-9}$
$f(x_3)$	$1,490116 \cdot 10^{-8}$

$$L_m(x) = x^m + b_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + b_0 \quad (1.72)$$

маємо часткове у вигляді полінома  $Q_{n-m}(x)$  ступеня  $(n - m)$  і залишок у вигляді полінома  $R_{m-1}(x)$  ступеня  $(m - 1)$

$$Q_{n-m}(x) = c_{n-m} \cdot x^{n-m} + c_{n-m-1} \cdot x^{n-m-1} + \dots + c_0; \quad (1.73)$$

$$R_{m-1}(x) = d_{m-1} \cdot x^{m-1} + d_{m-2} \cdot x^{m-2} + \dots + d_0, \quad (1.74)$$

тобто вихідний поліном  $P_n$  можна представити як

$$P_n(x) = L_m(x) \cdot Q_{n-m}(x) + R_{m-1}(x). \quad (1.75)$$

Коефіцієнти часткового (1.73) і залишку (1.74) можна знайти, прирівнюючи вирази з однаковими ступенями  $x$ , що стоять зліва і справа відносно знака рівності у виразі (1.75)

$$c_{n-m} = a_n;$$

$$c_{n-m-1} = a_{n-1} - c_{n-m} \cdot b_{m-1};$$

$$c_{n-m-2} = a_{n-2} - c_{n-m-1} \cdot b_{m-1} - c_{n-m} \cdot b_{m-2};$$

...

$$c_0 = a_m - c_1 \cdot b_{m-1} - c_2 \cdot b_{m-2} - \dots - c_m \cdot b_0, \quad (1.76)$$

$$\begin{aligned}
d_{m-1} &= a_{m-1} - c_0 \cdot b_{m-1} - c_1 \cdot b_{m-2} - \dots - c_{m-1} \cdot b_0; \\
d_{m-2} &= a_{m-2} - c_0 \cdot b_{m-2} - c_1 \cdot b_{m-3} - \dots - c_{m-2} \cdot b_0; \\
&\dots \\
d_0 &= a_0 - c_0 \cdot b_0.
\end{aligned} \tag{1.77}$$

В цілому ряді випадків буває необхідно обчислити значення полінома виду (1.71).

Цей поліном можна переписати в дещо відмінному вигляді, після чого його можна обчислити не тільки швидше, але і в багатьох випадках з більшою точністю.

Розділимо  $P_n(x)$  на  $(x - x_0)$ . В результаті ділення виходять поліном ступеня  $(n - 1)$  і постійний залишок  $d_0$

$$P_n(x) = (x - x_0) \cdot (b_{n-1} \cdot x^{n-1} + b_{n-2} \cdot x^{n-2} + \dots + b_1 \cdot x + b_0) + d_0. \tag{1.78}$$

Так як  $P_n(x_0) = d_0$ , і якщо знайти метод обчислення  $d_0$ , то це буде метод для обчислення  $P_n(x_0)$ .

Розкриємо дужки в правій частині виразу (1.78) і прирівняємо коефіцієнти при відповідних ступенях  $x$

$$\begin{aligned}
a_n &= b_{n-1}; \\
a_{n-1} &= b_{n-2} - x_0 \cdot b_{n-1}; \\
&\dots \\
a_{j+1} &= b_j - x_0 \cdot b_{j+1}; \\
&\dots \\
a_1 &= b_0 - x_0 \cdot b_1 \\
a_0 &= d_0 - x_0 \cdot b_0,
\end{aligned}$$

або, записуючи в вигляді рекурентної формули

$$\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n; \\
b_j &= a_{j+1} + x_0 \cdot b_{j+1}, \text{ де } j = n - 2, \dots, 0; \\
d_0 &= a_0 + x_0 \cdot b_0.
\end{aligned}$$

Таким чином обчислюються  $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0$  та  $d_0$  в зазначеному порядку. Так як величину  $x_0$  нічим не обмежено, то індекс 0 можна опустити.

Цей метод обчислення значення полінома відомий під назвою правила Горнера [1, 16, 26, 27] і в загальному вигляді записується так

$$P_n(x) = (((\dots((a_n) \cdot x + a_{n-1}) \cdot x + \dots + a_2) \cdot x + a_1) \cdot x + a_0). \quad (1.79)$$

Коефіцієнти в цій формулі ті ж, що і в (1.71).

Мається на увазі, що самі внутрішні дужки повинні бути розкриті першими.

Завдяки зовнішньому вигляду формули правило Горнера іноді називають гніздовою процедурою.

Для обчислення значення полінома за правилом Горнера потрібно  $n$  множень і  $n$  складань.

Число множень при обчисленні за формулою (1.71) становить  $n \cdot (n + 1) / 2$ , якщо кожна ступінь  $x$  виходить шляхом послідовного множення на  $x$ , тобто  $x_k = x^{k-1} \cdot x$  і так далі.

### 1.4.3. Метод Бірге-Вієта для пошуку коренів поліномів

До рівняння (1.24), де в якості функції  $f(x)$  виступає багаточлен (1.71), застосуємо метод Ньютона [26].

Обчислення  $P_n(x_k)$  за правилом Горнера проводиться за рекурентними формулами

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n; \\ b_j &= a_{j+1} + x_k \cdot b_{j+1}, \text{ де } j = n - 2, \dots, 0; \\ d_0 &= a_0 + x_k \cdot b_0. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Відповідно до формули (1.78)

$$P(x) = (x - x_k) \cdot G_{n-1}(x) + d_0 \text{ и } P_n(x_k) = d_0,$$

де  $G_{n-1}(x) = b_0 + b_1 \cdot x + \dots + b_{n-1} \cdot x^{n-1}$ .

Тому

$$P_n'(x) = (x - x_k) \cdot G_{n-1}'(x) + G_{n-1}(x).$$

$$\text{Отже } P_n'(x_k) = G_{n-1}(x_k).$$

Але ж  $G_{n-1}(x)$  є багаточленом ступеня  $(n - 1)$ , так що, використовуючи правило Горнера, можна обчислити  $G_{n-1}(x_k)$  і таким чином знайти  $P_n'(x_k)$ . Використовуючи ті ж рекурентні формули, маємо

$$\begin{aligned} c_{n-2} &= b_{n-1}; \\ c_j &= b_{j+1} + x_k \cdot c_{j+1}, \text{ де } j = n - 3, \dots, 0; \\ e_0 &= b_0 + x_k \cdot c_0 \end{aligned} \tag{1.81}$$

та відповідно

$$P_n'(x_k) = G_{n-1}(x_k) = e_0.$$

Підставляючи знайдені значення  $P_n(x_k)$  і  $P_n'(x_k)$  в формулу для методу Ньютона, отримуємо

$$x_{k+1} = x_k - \frac{d_0}{e_0}, \tag{1.82}$$

де  $d_0$  і  $e_0$  обчислені за формулами (1.80) та (1.81).

Результати пошуку коренів  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$  кубічного рівняння (1.20) методом Бірге-Вієта (блок-схему наведено на рис. 1.46) для початкових наближень  $\sigma_{10} = -45$ ,  $\sigma_{20} = -260$  та  $\sigma_{30} = -640$  представлено в табл. 1.26–1.28.

#### **1.4.4. Рішення алгебраїчних рівнянь шляхом відокремлення множників**

##### **1.4.4.1. Метод відокремлення лінійного множника полінома**

Нехай потрібно знайти дійсний корінь  $\bar{x}$  полінома  $P_n(x)$ , і для цього необхідно виділити з  $P_n(x)$  лінійний множник  $(x - \bar{x})$  [21, 24]. Знаючи наближене значення кореня, можна скласти наближене значення  $(x - \bar{x}_0)$  лінійного множника. Для його уточнення ділять поліном  $P_n(x)$  на  $(x - \bar{x}_0)$ . При діленні до кінця

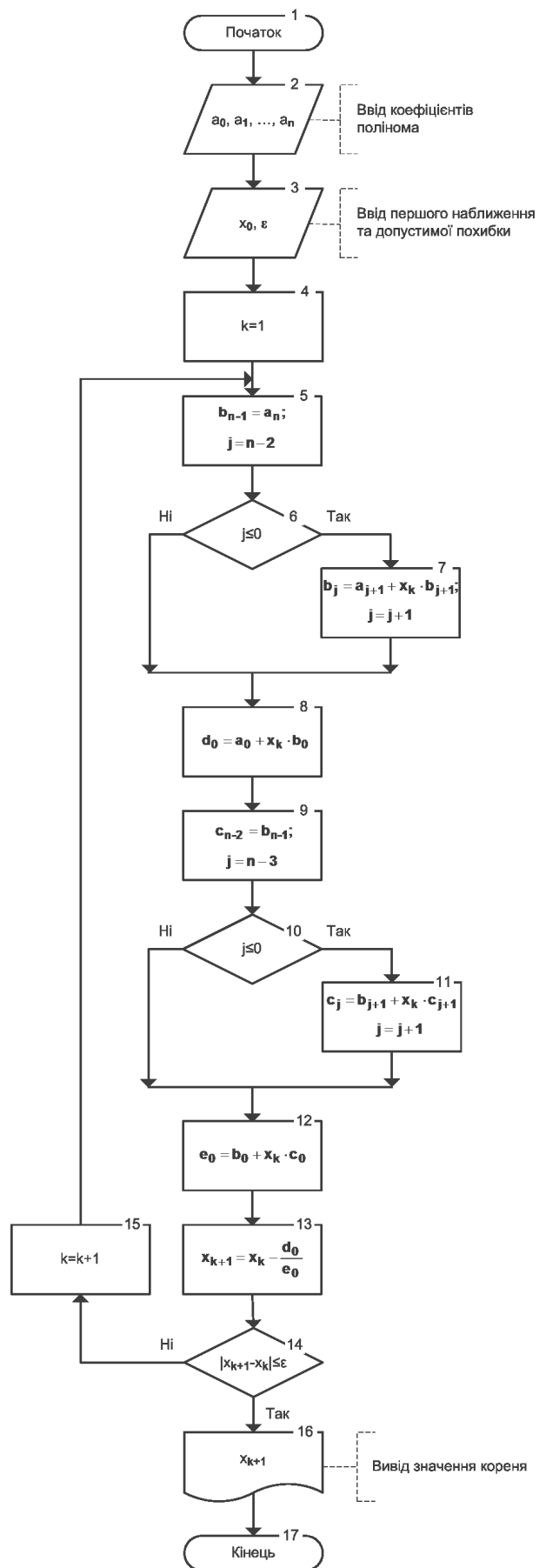


Рисунок 1.46 – Блок-схема алгоритму методу Бірге-Вієта

Таблиця 1.26 – Результати пошуку кореня  $\sigma_1$  рівняння (1.20) за методом Бірге-Віста

$i$	$b_2$	$b_1$	$b_0$	$d_0$	
1	1,0	892,0	163834,0	-745142,0	
2	1,0	897,927044	168889,335814	28382,352921	
3	1,0	897,717319	168709,256740	36,048454	
4	1,0	897,717052	168709,027495	0,000058	
5	1,0	897,717052	168709,027495	0,0	
6	1,0	897,717052	168709,027495	0,0	
7	1,0	897,717052	168709,027495	0,0	
8	1,0	897,717052	168709,027495	0,0	
9	1,0	897,717052	168709,027495	0,0	
10	1,0	897,717052	168709,027495	0,0	
1	$c_1$	$c_0$	$e_0$	$\sigma_{1i}$	$f(\sigma_{1i})$
2	1,0	847,0	125719,0	-39,072956	28382,352921
3	1,0	858,854087	135331,367546	-39,282681	36,048454
4	1,0	858,434638	134987,642524	-39,282948	0,000058
5	1,0	858,434103	134987,205015	-39,282948	0,0
6	1,0	858,434103	134987,205014	-39,282948	0,0
7	1,0	858,434103	134987,205014	-39,282948	0,0
8	1,0	858,434103	134987,205014	-39,282948	0,0
9	1,0	858,434103	134987,205014	-39,282948	0,0
10	1,0	858,434103	134987,205014	-39,282948	0,0
1	1,0	858,434103	134987,205014	-39,282948	0,0

Таблиця 1.27 – Результати пошуку кореня  $\sigma_2$  рівняння (1.20) за методом Бірге-Віста

$i$	$b_2$	$b_1$	$b_0$	$d_0$	
1	1,0	677,0	27954,000000	-640652,0	
2	1,0	669,038227	24697,330619	9447,507017	
3	1,0	669,152361	24743,119964	1,735504	
4	1,0	669,152382	24743,128381	0,0	
5	1,0	669,152382	24743,128381	0,0	
6	1,0	669,152382	24743,128381	0,0	
7	1,0	669,152382	24743,128381	0,0	
8	1,0	669,152382	24743,128381	0,0	
9	1,0	669,152382	24743,128381	0,0	
10	1,0	669,152382	24743,128381	0,0	
1	$c_1$	$c_0$	$e_0$	$\sigma_{1i}$	$f(\sigma_{1i})$
2	1,0	417,000000	-80466,0	-267,961773	9447,507017
3	1,0	401,076455	-82775,827147	-267,847639	1,735504
4	1,0	401,304722	-82745,402340	-267,847618	0,0
5	1,0	401,304764	-82745,396741	-267,847618	0,0
6	1,0	401,304764	-82745,396741	-267,847618	0,0
7	1,0	401,304764	-82745,396741	-267,847618	0,0
8	1,0	401,304764	-82745,396741	-267,847618	0,0
9	1,0	401,304764	-82745,396741	-267,847618	0,0
10	1,0	401,304764	-82745,396741	-267,847618	0,0
1	1,0	401,304764	-82745,396741	-267,847618	0,0

Таблиця 1.28 – Результати пошуку кореня  $\sigma_3$  рівняння (1.20) за методом Бірге-Вієта

$i$	$b_2$	$b_1$	$b_0$	$d_0$
1	1,0	297,000000	13894,000000	-2264772,0
2	1,0	306,702811	10660,080267	-91630,623306
3	1,0	307,129753	10522,106471	-173,797140
4	1,0	307,130566	10521,844126	-0,000629
5	1,0	307,130566	10521,844125	0,0
6	1,0	307,130566	10521,844125	0,0
7	1,0	307,130566	10521,844125	0,0
8	1,0	307,130566	10521,844125	0,0
9	1,0	307,130566	10521,844125	0,0
10	1,0	307,130566	10521,844125	0,0

$i$	$c_1$	$c_0$	$e_0$	$\sigma_{1i}$	$f(\sigma_{1i})$
1	1,0	-343,000000	233414,0	-630,297189	-91630,623306
2	1,0	-323,594377	214620,706599	-629,870247	-173,797140
3	1,0	-322,740493	213806,740429	-629,869434	-0,000629
4	1,0	-322,738867	213805,191733	-629,869434	0,0
5	1,0	-322,738867	213805,191727	-629,869434	0,0
6	1,0	-322,738867	213805,191727	-629,869434	0,0
7	1,0	-322,738867	213805,191727	-629,869434	0,0
8	1,0	-322,738867	213805,191727	-629,869434	0,0
9	1,0	-322,738867	213805,191727	-629,869434	0,0
10	1,0	-322,738867	213805,191727	-629,869434	0,0
1	1,0	-322,738867	213805,191727	-629,869434	0,0

в залишку виходить постійна величина. Зупинимо ділення на передостанньому кроці, коли залишок буде лінійним  $d_1 \cdot x - d_0$  і запишемо його в формі  $d_0 \cdot (x - x_1)$ . При цьому розуміється, що  $d_0 \neq 0$ . Різницю  $(x - x_1)$  називають приведеним передостаннім залишком.

Така операція ділення призведе до наступного виду  $P_n(x)$

$$P_n(x) = (x - x_0) \cdot (c_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + c_1 \cdot x) + d_0 \cdot (x - x_1). \quad (1.83)$$

Число  $x_1$  приймають за перше покращене значення кореня. Можна побудувати явний вираз  $x_1$  через поліном  $P_n(x)$ . Із рівності (1.83) отримуємо

$$P_n(x_0) = d_0 \cdot (x_0 - x_1); \quad P_n(0) = -d_0 \cdot x_1. \quad (1.84)$$

Виключаючи з (1.84)  $d_0$ , знаходимо

$$d_0 = -\frac{P_n(0)}{x_1};$$

$$P_n(x_0) = d_0 \cdot (x_0 - x_1) = -\frac{P_n(0)}{x_1} \cdot (x_0 - x_1) = -P_n(0) \cdot \left( \frac{x_0}{x_1} - 1 \right) = P_n(0) \cdot \left( 1 - \frac{x_0}{x_1} \right);$$

$$\frac{P_n(x_0)}{P_n(0)} = 1 - \frac{x_0}{x_1}; \quad \frac{x_0}{x_1} = 1 - \frac{P_n(x_0)}{P_n(0)}; \quad x_1 = \frac{x_0}{1 - \frac{P_n(x_0)}{P_n(0)}},$$

$$x_1 = \frac{P_n(0) \cdot x_0}{P_n(0) - P_n(x_0)} \quad (1.85)$$

або, враховуючи, що  $P_n(0) = a_0$ , а  $P_n(x_0) = a_n \cdot x_0^n + a_{n-1} \cdot x_0^{n-1} + \dots + a_0$ ,

$$x_1 = \frac{a_0 \cdot x_0}{a_0 - (a_n \cdot x_0^n + a_{n-1} \cdot x_0^{n-1} + \dots + a_0)} = -\frac{a_0 \cdot x_0}{a_n \cdot x_0^n + a_{n-1} \cdot x_0^{n-1} + \dots + a_1} =$$

$$= -\frac{a_0 \cdot x_0}{a_n \cdot x_0^n + a_{n-1} \cdot x_0^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x_0} = -\frac{a_0}{a_n \cdot x_0^{n-1} + a_{n-1} \cdot x_0^{n-2} + \dots + a_1},$$

$$x_1 = -\frac{a_0}{a_n \cdot x_0^{n-1} + a_{n-1} \cdot x_0^{n-2} + \dots + a_1}. \quad (1.86)$$

Для побудови  $x_2$  ділимо  $P_n(x)$  на  $(x - x_1)$ , знаходимо передостанній залишок  $i$ , представляючи його в приведеній формі  $d_1 \cdot (x - x_2)$ , знайдемо  $x_2$  і так далі.

Наступне наближення  $x_{k+1}$  будується за попереднім  $x_k$  шляхом ділення та має вигляд  $P_n(x)$ :

$$P_n(x) = (x - x_k) \cdot (c_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + c_1 \cdot x) + d_k \cdot (x - x_{k+1}). \quad (1.87)$$

Умовою можливості необмеженого продовження такого алгоритму є дотримання нерівності  $d_k \neq 0$  ( $k = 0, 1, \dots$ ).

Явний вираз  $x_{k+1}$  через  $x_k$  отримуємо з (1.83)

$$x_{k+1} = \frac{P_n(0) \cdot x_k}{P_n(0) - P_n(x_k)} = -\frac{a_0}{a_n \cdot x_k^{n-1} + a_{n-1} \cdot x_k^{n-2} + \dots + a_1}. \quad (1.88)$$

По суті викладений алгоритм (блок-схему алгоритму методу відокремлення лінійного множника представлено на рис. 1.47) є простою ітерацією для рівняння

$$x = \varphi(x) = \frac{P_n(0) \cdot x}{P_n(0) - P_n(x)} = x + \frac{x \cdot P_n(x)}{P_n(0) - P_n(x)}. \quad (1.89)$$

Якщо послідовність  $x_k$  збігається, і  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$ , то  $x_k \in$  корінь  $\bar{x}$  полінома  $P_n(x)$ . Дійсно, якщо припустити, що  $x_k \rightarrow \bar{x}$  (при  $k \rightarrow \infty$ ), то з рекурентного виразу (1.88), взятого в формі

$$x_{k+1} = x_k + \frac{x_k}{P_n(0) - P_n(x_k)} \cdot P_n(x_k),$$

виходить, що при  $k \rightarrow \infty$  повинно бути  $P_n(x_k) \rightarrow 0$  і, через безперервність  $P_n(x)$ , отримуємо  $P_n(\bar{x}) = 0$ .

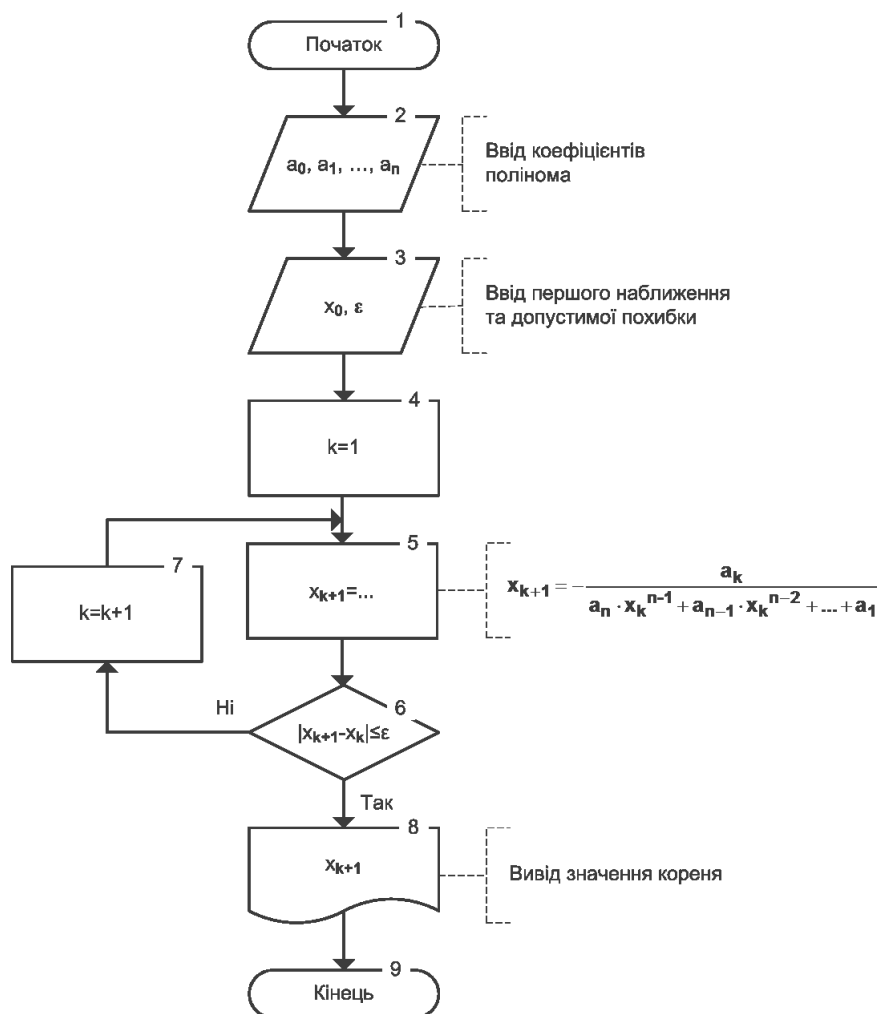


Рисунок 1.47 – Блок-схема алгоритму методу відокремлення лінійного множника

Що ж стосується збіжності послідовних наближень  $x_k$ , то її гарантувати можна не у всіх випадках. Нагадаємо, що для рівняння  $x = \varphi(x)$  при знаходженні рішення  $\bar{x}$  в методі простої ітерації, якщо вихідне наближення  $x_0$  взято до-

силь близько до  $\bar{x}$  і якщо  $|\varphi'(\bar{x})| < 1$ , то ітераційна послідовність  $x_k$  збігається до  $\bar{x}$ , в іншому випадку збіжність може бути відсутньою.

Як видно з (1.88)

$$\varphi'(\bar{x}) = 1 + \bar{x} \cdot \frac{P'(\bar{x})}{P(0)}. \quad (1.90)$$

Тому можна стверджувати, що послідовність  $x_k$ , що визначається за формулою (1.88), буде збігатися до кореня, якщо, по-перше  $\left| 1 + \bar{x} \cdot \frac{P'(\bar{x})}{P(0)} \right| < 1$ , і, по-друге, вихідне наближення  $x_0$  взято досить близьким до  $\bar{x}$ .

Результати обчислення кореня  $\sigma_1$  рівняння (1.20) за ітераційною формулою (1.88) наведено в табл. 1.29 для початкового наближення  $\sigma_{10} = -45$ .

Таблиця 1.29 – Результати обчислення кореня  $\sigma_1$  рівняння (1.20) шляхом відокремлення лінійного множника

$i$	$P(0)$	$P(\sigma_{1i-1})$	$\sigma_{1i}$	$P(\sigma_{1i})$	$\varepsilon_i =  \sigma_{1i} - \sigma_{1i-1} $
1	6627388	-745142,0	-40,451848	-156668,823414	4,548152
2	6627388	-156668,823414	-39,517666	-31638,728454	0,934182
3	6627388	-31638,728454	-39,329907	-6337,046622	0,187758
4	6627388	-6337,046622	-39,292336	-1267,181032	0,037571
5	6627388	-1267,181032	-39,284825	-253,306989	0,007511
6	6627388	-253,306989	-39,283323	-50,632228	0,001501
7	6627388	-50,632228	-39,283023	-10,120482	0,000300
8	6627388	-10,120482	-39,282963	-2,022899	0,000060
9	6627388	-2,022899	-39,282951	-0,404340	0,000012
10	6627388	-0,40434	-39,282949	-0,080820	0,000002

Для знаходження інших коренів рівняння (1.20) ділимо вихідний поліном на лінійний множник  $(\sigma + 39,282949)$ . В результаті отримуємо поліном ступеня 2, а задача знаходження коренів  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$  рівняння (1.20) зводиться до вирішення квадратного рівняння  $\sigma^2 + 897,717051 \cdot \sigma + 168709,02081$ . Для цього можна або скористатися формулою (1.63), або застосувати алгоритм, за допомогою якого було отримано перший корінь. Результати застосування останнього для вихідного наближення  $\sigma_{20} = -260$  наведено у табл. 1.30.

Для знаходження третього кореня рівняння (1.20) ділимо поліном другого ступеня на лінійний множник  $(\sigma + 267,846132)$ . В результаті отримуємо поліном ступеня  $(\sigma + 629,870919)$ , прирівнюючи який до нуля і вирішуючи лінійне рівняння, знаходимо шуканий третій корінь кубічного рівняння (1.20)  $\sigma_{3i} = -629,870919$ .

Таблиця 1.30 – Результати обчислення кореня  $\sigma_1$  рівняння (1.20) шляхом відокремлення лінійного множника

$i$	$P(0)$	$P(\sigma_{2i-1})$	$\sigma_{2i}$	$P(\sigma_{2i})$	$\varepsilon_i =  \sigma_{1i} - \sigma_{1i-1} $
1	168709,026981	2902,593687	-264,551538	1204,116503	4,551538
2	168709,026981	1204,116503	-266,453279	506,724994	1,901741
3	168709,026981	506,724994	-267,255994	214,530435	0,802715
4	168709,026981	214,530435	-267,596270	91,056448	0,340275
5	168709,026981	91,056448	-267,740776	38,690240	0,144506
6	168709,026981	38,690240	-267,802191	16,447176	0,061415
7	168709,026981	16,447176	-267,828301	6,993039	0,026110
8	168709,026981	6,993039	-267,839404	2,973559	0,011102
9	168709,026981	2,973559	-267,844124	1,264452	0,004721
10	168709,026981	1,264452	-267,846132	0,537694	0,002007

#### 1.4.4.2. Метод Берстоу

Метод Берстоу застосовується для уточнення коренів багаточленів [16, 20]. Він дозволяє знайти не тільки дійсні, але комплексні корені.

Нехай функція в алгебраїчному рівнянні є поліном  $P$  ступеня  $k$  ( $k = 4, 5, \dots$ )

$$P_k(x) = a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \dots + a_0. \quad (1.91)$$

Якщо в якості дільника полінома (1.91) виступає поліном другого ступеня ( $m = 2$ )

$$L_2(x) = x^2 + b_1 \cdot x + b_0, \quad (1.92)$$

то частка і залишок мають такий вигляд

$$Q_{k-2}(x) = a'_{k-2} \cdot x^{k-2} + a'_{k-3} \cdot x^{k-3} + \dots + a'_0; \quad (1.93)$$

$$R_2(x) = d_1 \cdot x + d_0. \quad (1.94)$$

Їх коефіцієнти визначають за такими виразами

$$a'_{k-2} = a_k;$$

$$\begin{aligned}
a'_{k-3} &= a_{k-1} - a'_{k-2} \cdot b_1; \\
a'_{k-4} &= a_{k-2} - a'_{k-3} \cdot b_1 - a'_{k-2} \cdot b_0; \\
a'_{k-5} &= a_{k-3} - a'_{k-4} \cdot b_1 - a'_{k-3} \cdot b_0; \\
&\dots \\
a'_0 &= a_2 - a'_1 \cdot b_1 - a'_2 \cdot b_0,
\end{aligned} \tag{1.95}$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= a_1 - a'_0 \cdot b_1 - a'_1 \cdot b_0; \\
d_0 &= a_0 - a'_0 \cdot b_0.
\end{aligned} \tag{1.96}$$

Блок-схему алгоритму ділення полінома на квадратичний множник представлено на рис. 1.48.

Поліном  $P_k(x)$  (1.96) ступеня  $k$  ділимо на поліном другого ступеня  $L_2(x)$  (1.92), позначаючи коефіцієнти дільника  $b_1$  та  $b_0$  відповідно як  $p$  та  $q$ .

$$L_2(x) = x^2 + p \cdot x + q. \tag{1.97}$$

Отримуємо поліном  $Q_n(x)$  ступеня  $n = (k - 2)$  з коефіцієнтами  $a'_n, a'_{n-1}, \dots, a'_1, a'_0$ , що визначаються за формулами (1.95)

$$Q_n(x) = a'_n \cdot x^n + a'_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a'_1 + a'_0. \tag{1.98}$$

Тому вихідний поліном  $P_k(x)$  можна записати як

$$P_k(x) = L_2(x) \cdot Q_n(x) + A \cdot x + B, \tag{1.99}$$

де  $A$  і  $B$  – коефіцієнти залишку від ділення ( $d_1$  і  $d_0$  в формулах (1.94) і (1.96)).

Очевидно, що коефіцієнти залишку залежать від  $p$  і  $q$

$$A = A(p, q); \quad B = B(p, q). \tag{1.100}$$

Знайти точний дільник  $L_2(x)$  – це значить підібрати такі значення  $p = p_0$  і  $q = q_0$ , що

$$A(p_0, q_0) = 0; \quad B(p_0, q_0) = 0. \tag{1.101}$$

Нехай відомі наближені значення цих коефіцієнтів  $p_1 \approx p_0$  і  $q_1 \approx q_0$ .

Тоді, розкладаючи функції, які стоять в лівих частинах рівнянь (1.101), в ряд Тейлора отримуємо

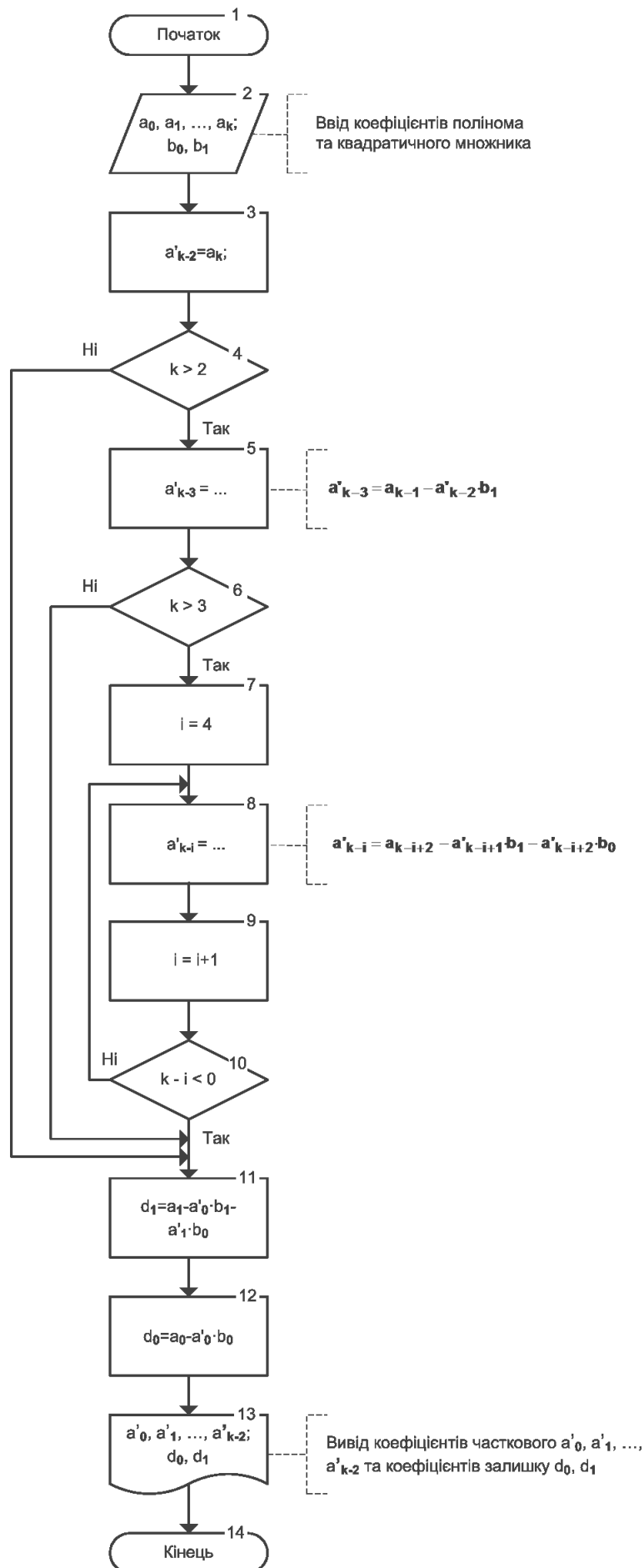


Рисунок 1.48 – Блок-схема алгоритму ділення полінома на квадратичний множник

$$\begin{aligned}
A(p_0, q_0) &\approx A(p_1, q_1) + \frac{\partial A(p_1, q_1)}{\partial p} \cdot \Delta p_1 + \frac{\partial A(p_1, q_1)}{\partial q} \cdot \Delta q_1; \\
B(p_0, q_0) &\approx B(p_1, q_1) + \frac{\partial B(p_1, q_1)}{\partial p} \cdot \Delta p_1 + \frac{\partial B(p_1, q_1)}{\partial q} \cdot \Delta q_1.
\end{aligned} \tag{1.102}$$

Прийmemo в якостi других наближень  $p$  i  $q$  величини  $p_2 = p_1 + \Delta p_1$  i  $q_2 = q_1 + \Delta q_1$ , де  $\Delta p_1$  i  $\Delta q_1$  визначаються системою лiнiйних рiвнянь

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A(p_1, q_1)}{\partial p} \cdot \Delta p_1 + \frac{\partial A(p_1, q_1)}{\partial q} \cdot \Delta q_1 + A(p_1, q_1) &= 0; \\
\frac{\partial B(p_1, q_1)}{\partial p} \cdot \Delta p_1 + \frac{\partial B(p_1, q_1)}{\partial q} \cdot \Delta q_1 + B(p_1, q_1) &= 0.
\end{aligned} \tag{1.103}$$

Аналогiчно обчислюються третi наближення i т.д. Можна показати, що рiзницi  $|p_0 - p_k|$  i  $|q_0 - q_k|$  є нескiнченно малими величинами другого порядку малостi у порiвняннi з максимальною з рiзниць  $|p_0 - p_{k-1}|$  та  $|q_0 - q_{k-1}|$ .

Покажемо, як отримати коефiцiєнти  $\Delta p_1$  i  $\Delta q_1$  системи (1.103). Вiльнi члени  $A(p_1, q_1)$  та  $B(p_1, q_1)$  можна обчислити шляхом дiлення  $P_k(x)$  на  $L_2^{(1)}(x) = x^2 + p_1 \cdot x + q_1$ . Отриману при цьому частку позначимо  $Q_n^{(1)}(x)$ . Тут i далi в цьому параграфi верхнiй iндекс у дужках для полiнома позначає номер наближення.

Продиференцiювавши тотожнiсть

$$P_k(x) = L_2^{(1)}(x) \cdot Q_n^{(1)}(x) + A(p, q) \cdot x + B(p, q)$$

по  $q$  i пiдставив  $p = p_1$  та  $q = q_1$ , отримуємо

$$0 = 1 \cdot Q_n^{(1)}(x) + L_2^{(1)}(x) \cdot \frac{\partial Q_n^{(1)}(x)}{\partial q} + \frac{\partial A(p_1, q_1)}{\partial q} \cdot x + \frac{\partial B(p_1, q_1)}{\partial q}. \tag{1.104}$$

Так як це спiввiдношення становить тотожнiсть щодо  $x$ , а  $\frac{\partial Q_n^{(1)}(x)}{\partial q}$  є по-

лiномом щодо  $x$ , то  $\frac{\partial A(p_1, q_1)}{\partial q}$  i  $\frac{\partial B(p_1, q_1)}{\partial q}$  будуть коефiцiєнтами залишку вiд дi-

лення  $Q_n^{(1)}(x)$  на  $L_2^{(1)}(x)$ , взятими зi зворотними знаками.

Аналогічно, після диференціювання (1.99) по  $p$  і підстановки  $p = p_1$  та  $q = q_1$ , отримуємо

$$0 = 1 \cdot x \cdot Q_n^{(1)}(x) + L_2^{(1)}(x) \cdot \frac{\partial Q_n^{(1)}(x)}{\partial p} + \frac{\partial A(p_1, q_1)}{\partial p} \cdot x + \frac{\partial B(p_1, q_1)}{\partial p}, \quad (1.105)$$

де

$$Q_n^{(1)}(x) \cdot x = a'_n \cdot x^{n+1} + a'_{n-1} \cdot x^n + \dots + a'_0 \cdot x. \quad (1.106)$$

звідки виходить, що  $\frac{\partial A(p_1, q_1)}{\partial p}$  і  $\frac{\partial B(p_1, q_1)}{\partial p}$  є коефіцієнтами, отриманими при діленні  $Q_n^{(1)}(x) \cdot x$  на  $L_2^{(1)}(x)$  і взятими зі зворотними знаками.

Алгоритм методу Берстоу зводиться до наступного. Процес обчислення починається з ділення полінома (1.91) на наближений дільник  $L_2^{(1)}(x)$ . В результаті отримуємо поліном  $Q^{(1)}(x)$  ступеня  $n$ , а коефіцієнти залишку позначимо як  $A_1$  і  $B_1$ .

Поліноми  $Q_n^{(1)}(x)$  і  $Q_n^{(1)}(x) \cdot x$  ще раз ділимо на  $L_2^{(1)}(x)$

$$Q_n^{(1)}(x) = L_2^{(1)}(x) \cdot F_{n-2}^{(1)}(x) + R_1^{(1)}; \quad (1.107)$$

$$Q_n^{(1)}(x) \cdot x = L_2^{(1)}(x) \cdot G_{n-1}^{(1)}(x) + R_1'^{(1)}. \quad (1.108)$$

Поліноми частки від цього ділення

$$F_{n-2}^{(1)}(x) = c_m \cdot x^m + c_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + c_0; \quad (1.109)$$

$$G_{n-1}^{(1)}(x) = c_m \cdot x^{m+1} + c_{m-1} \cdot x^{m+1} + \dots + c_0 \cdot x + c'_0, \quad (1.110)$$

де  $m = n - 2 = k - 4$ ;

$c_m, c_{m-1}, c_0, c'_0$  – коефіцієнти поліномів частки від ділення  $Q_n(x)$  і  $Q_n(x) \cdot x$ .

Коефіцієнти залишків від ділення  $Q_n^{(1)}(x)$  і  $Q_n^{(1)}(x) \cdot x$  на  $L_2^{(1)}(x)$

$R^{(1)}(x) = C_1 \cdot x + D_1$  і  $R'^{(1)}(x) = E_1 \cdot x + H_1$  визначаємо за (1.77) як

$$C_1 = a'_1 - c_0 \cdot b_1 - c_1 \cdot b_0; \quad (1.111)$$

$$D_1 = a'_0 - c_0 \cdot b_0; \quad (1.112)$$

$$E_1 = a'_0 - c'_0 \cdot b_1 - c_0 \cdot b_0; \quad (1.113)$$

$$H_1 = -c'_0 \cdot b_0. \quad (1.114)$$

У виразі (1.113) для коефіцієнта  $E_1$  замінюємо  $a'_0 - c_0 \cdot b_0$  на  $D_1$ . Так як за формулою (1.94)\* значення  $c'_0$  і за формулою (1.110) значення  $C_1$  рівні  $a'_1 - c_0 \cdot b_1 - c_1 \cdot b_0$ , то в виразах (1.113) і (1.114) замінюємо  $c'_0$  на  $C_1$ . Таким чином, з урахуванням, що для першої ітерації  $b_1 = p_1$ ,  $b_0 = q_1$  можна записати

$$E_1 = D_1 - C_1 \cdot p_1; \quad (1.115)$$

$$H_1 = -C_1 \cdot q_1. \quad (1.116)$$

У лінійній системі рівнянь (1.103) замінюємо  $\frac{\partial A(p_1, q_1)}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial B(p_1, q_1)}{\partial q}$ ,  $\frac{\partial A(p_1, q_1)}{\partial p}$  і  $\frac{\partial B(p_1, q_1)}{\partial p}$  на  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $E_1$  і  $H_1$ , взяті з протилежним знаком, і з урахуванням (1.115), (1.116) отримуємо

$$\begin{cases} (D_1 - C_1 \cdot p_1) \cdot \Delta p_1 + C_1 \cdot \Delta q_1 = A_1; \\ -C_1 \cdot q_1 \cdot \Delta p_1 + D_1 \cdot \Delta q_1 = B_1. \end{cases} \quad (1.117)$$

Вирішуючи систему (1.117) щодо  $\Delta p_1$  і  $\Delta q_1$

$$\begin{aligned} \Delta p_1 &= \frac{A_1 \cdot D_1 - B_1 \cdot C_1}{D_1 \cdot (D_1 - C_1 \cdot p_1) + C_1^2 \cdot q_1}; \\ \Delta q_1 &= \frac{1}{C_1} \cdot \left[ A_1 - \frac{(D_1 - C_1 \cdot p_1) \cdot (A_1 \cdot D_1 - B_1 \cdot C_1)}{D_1 \cdot (D_1 - C_1 \cdot p_1) + C_1^2 \cdot q_1} \right], \end{aligned} \quad (1.118)$$

обчислюємо уточнені значення для множників  $p$  і  $q$

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + \Delta p_1; \\ q_2 &= q_1 + \Delta q_1. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Це дає новий більш точний дільник  $L_2^2(x) = x^2 + p_2 \cdot x + q_2$ . Якщо його коефіцієнти недостатньо точні ( $|\Delta p_1|$  або  $|\Delta q_1|$  більше заданої точності  $\varepsilon$ ), то процедура повторюється з використанням ітераційних формул

$$\Delta p_i = \frac{A_i \cdot D_i - B_i \cdot C_i}{D_i \cdot (D_i - C_i \cdot p_i) + C_i^2 \cdot q_i};$$

\* З урахуванням того, що для знаходження коефіцієнтів  $c$  при діленні полінома  $Q(x) \cdot x$  на  $L_2(x)$  в правих частинах формул (1.94), (1.95) індекси для коефіцієнтів  $a$  і  $c$  при відповідних ступенях  $x$  необхідно зменшити на одиницю в порівнянні з аналогічними коефіцієнтами при діленні полінома  $Q(x)$ .

$$\Delta q_i = \frac{1}{C_i} \cdot \left[ A_i - \frac{(D_i - C_i \cdot p_i) \cdot (A_i \cdot D_i - B_i \cdot C_i)}{D_i \cdot (D_i - C_i \cdot p_i) + C_i^2 \cdot q_i} \right];$$

$$p_{i+1} = p_i + \Delta p_i;$$

$$q_{i+1} = q_i + \Delta q_i. \quad (1.120)$$

де  $A_i$ ,  $B_i$  и  $C_i$ ,  $D_i$  – коефіцієнти залишків від двох послідовних ділень вихідного полінома на квадратичний множник;  $p_i$ ,  $q_i$  – поточне наближення значень коефіцієнтів дільника;  $p_{i+1}$ ,  $q_{i+1}$  – наступне наближення значень коефіцієнтів дільника;  $\Delta p_i$  и  $\Delta q_i$  – поправки на  $i$ -му кроці.

Ітераційний процес збігається, якщо наближений дільник достатньо близький до дійсного. Початкові значення для  $p_1$  і  $q_1$  можна приймати, використовуючи наступні співвідношення

$$p_1 = -(x_1^{(1)} + x_2^{(1)}); \quad q_1 = x_1^{(1)} \cdot x_2^{(1)}, \quad (1.121)$$

де  $x_1^{(1)}$  і  $x_2^{(1)}$  – початкові наближення для шуканих коренів.

Блок-схему алгоритму методу Берстоу наведено на рис. 1.49.

### 1.4.4.3. Метод відокремлення квадратичного множника полінома

Ідею знаходження коренів алгебраїчного рівняння

$$P_n(x) = 0 \quad (1.122)$$

шляхом відокремлення квадратичного множника  $L_2^1(x) = x^2 + p_1 \cdot x + q_1$ , яка складає основу розглянутого вище методу Берстоу, можна реалізувати дещо інакше [22, 23].

Будемо шукати множник у вигляді  $L_2(x) = x^2 + p \cdot x + q$ . Припустимо, що задано початкові наближені значення  $p_0$  і  $q_0$  для  $p$  і  $q$ . Розділимо  $P_n(x)$  на  $L_2^0(x) = x^2 + p_0 \cdot x + q_0$  до передостаннього залишку, який має вигляд  $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ . Якщо  $a \neq 0$ , то цей залишок можна записати як  $a \cdot (x^2 + p_1 \cdot x + q_1)$ , а  $p_1$  і  $q_1$  – прийняти за перші поліпшені значення для  $p$  і  $q$ .

Після цього можна розділити поліном  $P_n(x)$  на  $L_2^1(x) = x^2 + p_1 \cdot x + q_1$  і отримати другі наближення  $p_2$  і  $q_2$ , а потім продовжити процес уточнення  $p$  і  $q$ .

Визначимо залежності для  $p$  і  $q$  від коефіцієнтів рівняння (1.122).

Після ділення полінома

$$P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0$$

на  $x^2 + p \cdot x + q$  до кінця (тобто до лінійного залишку) справедлива наступна рівність:

$$P_n(x) = (x^2 + p \cdot x + q) \cdot (c_{n-2} \cdot x^{n-2} + c_{n-3} \cdot x^{n-3} + \dots + c_1 \cdot x + c_0) + d_1 \cdot (x + p) + d_0. \quad (1.123)$$

Коефіцієнти  $d_1$  і  $d_0$  лінійного залишку тут записані у форматі, який дозволяє отримати однакові рівності, котрі пов'язують коефіцієнти  $a_i$  з  $c_i$  і  $d_i$  шляхом порівняння коефіцієнтів при однакових ступенях  $x$

$$\begin{aligned} a_n &= c_{n-2}; \\ a_{n-1} &= p \cdot c_{n-2} + c_{n-3}; \\ a_{n-2} &= p \cdot c_{n-3} + q \cdot c_{n-2} + c_{n-4}; \\ a_{n-3} &= c_{n-5} \cdot p + c_{n-4} \cdot q + c_{n-5}; \\ &\dots \\ a_1 &= q \cdot c_1 + p \cdot c_0 + d_1; \\ a_0 &= q \cdot c_0 - p \cdot d_1 + d_0 \end{aligned} \quad (1.124)$$

Очевидно, що  $c_i$  і  $d_i$  будуть багаточленами щодо  $p$  і  $q$ , тому нижче їх будемо позначати  $c_i(p_k, q_k)$  і  $d_i(p_k, q_k)$ .

При діленні  $P_n(x)$  на  $L_2(x) = x^2 + p \cdot x + q$  передостанній залишок є

$$\begin{aligned} c_0 \cdot (x^2 + p \cdot x + q) + d_1 \cdot (x + p) + d_0 &= c_0 \cdot x^2 + (p \cdot c_0 + d_1) \cdot x + \\ &+ q \cdot c_0 + p \cdot d_1 + d_0. \end{aligned} \quad (1.125)$$

Коефіцієнти  $p_{k+1}$  і  $q_{k+1}$  в передостанньому залишку з номером  $(k + 1)$  пов'язані з коефіцієнтами  $p_k$  і  $q_k$  відповідно (1.125) співвідношеннями

$$\begin{aligned}
 p_{k+1} &= p_k + \frac{d_1(p_k, q_k)}{c_0(p_k, q_k)}; \\
 q_{k+1} &= q_k + \frac{p_k \cdot d_1(p_k, q_k) + d_0(p_k, q_k)}{c_0(p_k, q_k)}, \quad (1.126)
 \end{aligned}$$

Для того щоб тричлен  $L_2(x) = x^2 + p \cdot x + q$  був дільником полінома  $P_n(x)$ , необхідно і достатньо, щоб останній залишок  $d_1 \cdot (x + p) + d_0$  в (1.123) був тотожно рівний нулю, що еквівалентно рівностям  $p \cdot d_1(p, q) + d_0(p, q) = 0$ ;  $d_0(p, q) = 0$ , або

$$d_1(p, q) = 0; \quad d_0(p, q) = 0. \quad (1.127)$$

Останні можна записати як

$$\begin{aligned}
 p_{k+1} &= \varphi(p_k, q_k) = p + \frac{d_1(p, q)}{c_0(p, q)}; \\
 q_{k+1} &= \psi(p_k, q_k) = q + \frac{d_0(p, q) + p \cdot d_1(p, q)}{c_0(p, q)}. \quad (1.128)
 \end{aligned}$$

Рівності (1.126) є формули простої однокрокової ітерації для системи (1.128). Початкові значення для  $p$  і  $q$  можна приймати, використовуючи співвідношення (1.120). Блок-схему алгоритму методу Берстоу представлено на рис. 1.49.

Використання формул (1.128) перед застосуванням формул (1.119) має перевагу завдяки більш простому алгоритму обчислень, а також тому, що за їх допомогою можна знаходити корені алгебраїчних рівнянь, починаючи з ступеня 2 включно (в методі Берстоу мінімальна ступінь рівняння дорівнює 4). Однак схема подвійного ділення полінома на квадратичний множник в методі Берстоу дозволяє отримати значний вииграш в швидкості збіжності ітераційного процесу.

Слід зазначити, що рішення алгебраїчних рівнянь розглянутими методами, що базуються на виділенні множників, має ряд особливостей.

Якщо  $P_n(x)$  – поліном високого ступеня, то його значення швидко зростає при збільшенні аргументу. Для запобігання від переповнення пам'яті комп'ютера при реалізації розглянутих методів зазвичай вводять масштабні множники, величина яких пов'язана з діапазоном зміни аргументу.

Найбільші за модулем корені полінома високого ступеня можуть бути дуже чутливі до похибок коефіцієнтів при старших ступенях, причому в разі кратних або близьких коренів ітераційний процес може бути слабостійким при менших ступенях полінома, ніж для віддалених один від одного простих коренів.

Так як для видалення обчислених коренів необхідно ділити поліном, то це вносить похибку округлення в одержувані коефіцієнти частки, що, в свою чергу, негативно впливає на точність знаходження наступних коренів.

Емпіричний досвід показує, що якщо спочатку видаляти менші за модулем корені, точність падає відносно мало в порівнянні з початковим видаленням великих коренів. Для останнього варіанту точність падає катастрофічно.

Тому в разі невизначеності з розташуванням малих коренів полінома за вихідне наближення зазвичай беруть  $-1$ ,  $0$  або  $1$ . Ітерації зазвичай збігаються до найменшого за модулем кореня (або коренів). Його видаляють і за аналогічним початковим наближенням шукають наступний корінь (корені). В цьому випадку втрата точності буде відносно невелика.

У табл. 1.31 представлено результати обчислення коренів рівняння (1.20) методом відокремлення квадратичного множника.

Таблиця 1.31. – Результати обчислення коренів рівняння (1.20) методом відокремлення квадратичного множника

$i$	$p_i$	$q_i$	$c_1$	$c_0$	$d_1$	$d_0$
0	305,0	11700,0	1,0	632,0	-486,0	-767012,0
1	304,231013	10251,832278	1,0	632,768987	1214,217924	140346,470748
2	306,149909	11057,417302	1,0	630,850091	-218,115166	-348184,713931
3	305,804161	10399,637176	1,0	631,195839	552,048944	63180,284280
4	306,678769	10767,192115	1,0	630,321231	-99,331228	-159401,791453
5	306,521180	10465,973371	1,0	630,478820	252,914604	28813,464145
6	306,922327	10634,634306	1,0	630,077673	-45,540004	-73257,632863
7	306,850051	10496,183317	1,0	630,149949	116,272846	13218,613501
8	307,034567	10573,779042	1,0	629,965433	-20,942887	-33727,295682
9	307,001322	10510,033503	1,0	629,998678	53,539433	6080,789452
10	307,086306	10545,775587	1,0	629,913694	-9,644845	-15540,460711

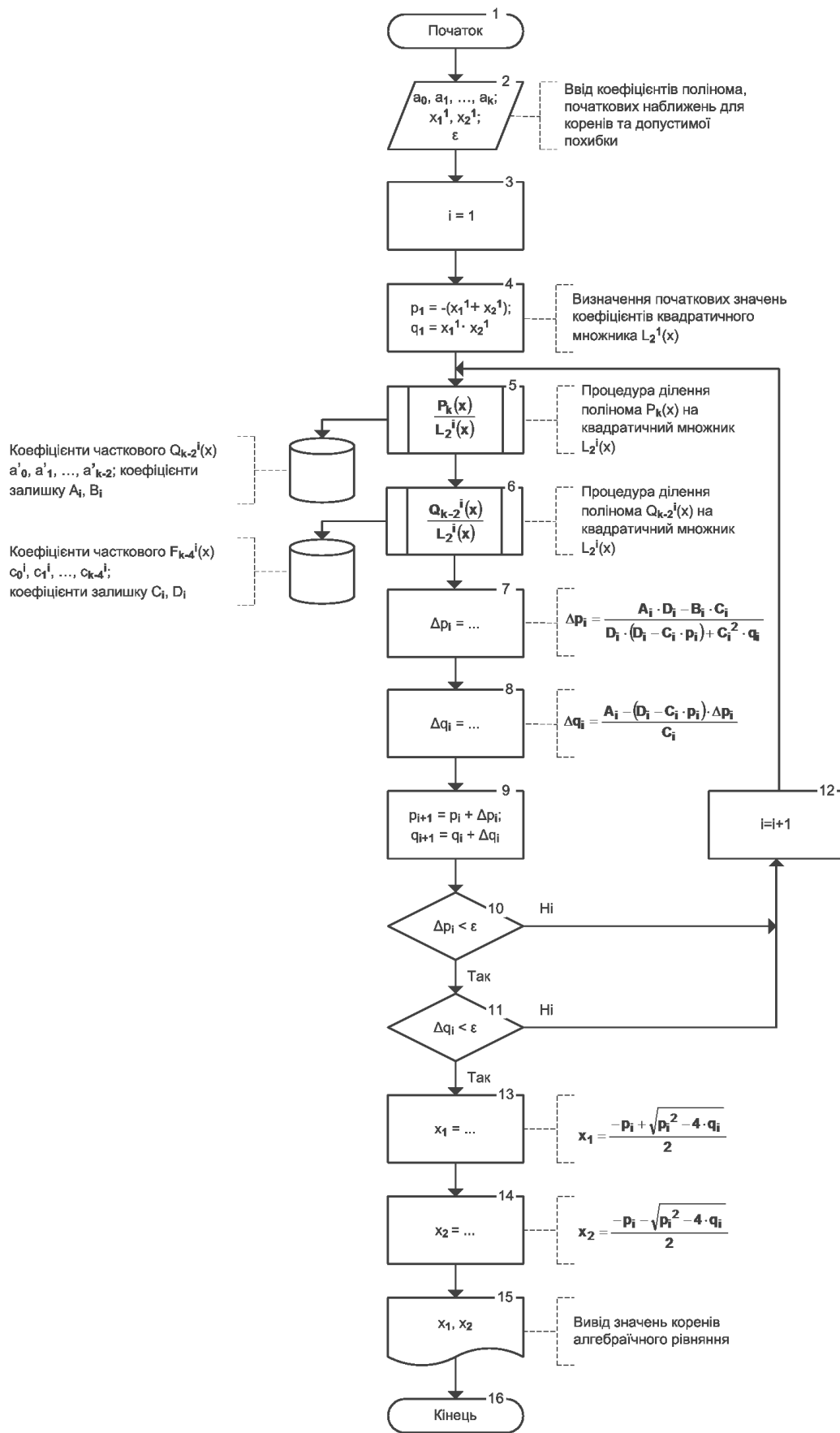


Рисунок 1.49 – Блок-схема алгоритму методу Берстоу

Продовження табл. 1.31

$i$	$\Delta p_i$	$\Delta q_i$	$\sigma_{1i}$	$P(\sigma_{1i})$	$\sigma_{2i}$	$P(\sigma_{2i})$
0	-0,768987	-1448,167722	-260,0	-640652,0	-45,0	-745142,0
1	1,918896	805,585023	-265,637729	-182195,620762	-38,593284	93485,813709
2	-0,345748	-657,780125	-264,315794	-290533,430683	-41,834115	-339060,059000
3	0,874608	367,554939	-266,829290	-84122,543307	-38,974871	41664,247822
4	-0,157588	-301,218745	-266,236571	-132956,185937	-40,442198	-155384,618258
5	0,401147	168,660935	-267,378228	-38810,394521	-39,142953	18913,639693
6	-0,072277	-138,450989	-267,108401	-61093,515115	-39,813927	-71444,506460
7	0,184516	77,595725	-267,631221	-17899,630265	-39,218830	8658,528523
8	-0,033245	-63,745539	-267,507534	-28124,915585	-39,527033	-32899,485497
9	0,084983	35,742085	-267,747847	-8254,278374	-39,253475	3979,180651
10	-0,015311	-29,372691	-267,690970	-12958,622843	-39,395336	-15160,498813

Блок-схему алгоритму методу відокремлення квадратичного множника представлено на рис. 1.50.

### 1.5. Методи поліпшення збіжності

Методи, які дозволяють, знаючи кілька членів послідовності  $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$  і оперуючи тільки з ними, отримати число  $a_{k+1}^*$ , ближче до  $a$ , ніж останній з відомих членів послідовності  $a_{k+1}$ , називаються методами поліпшення збіжності [16].

Нехай відомо кілька членів  $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$  послідовності  $\{a_i\}$ , що збігається до деякої межі  $a$ . Дану послідовність, наприклад, наближених значень кореня  $a$  отримано яким-небудь з розглянутих методів вирішення трансцендентних рівнянь.

Методи поліпшення збіжності не використовують в обчисленнях задане рівняння, операції проводяться лише над декількома вже обчисленими числами – членами послідовності. В силу цього потрібна дуже незначна кількість обчислень, зазвичай у багато разів менша ніж для обчислення чергового члена послідовності  $a_{k+2}$  у той спосіб, за допомогою якого ця послідовність будується. При цьому  $a_{k+1}^*$  може бути в деяких випадках значно ближче до  $a$ , ніж  $a_{k+2}$ .

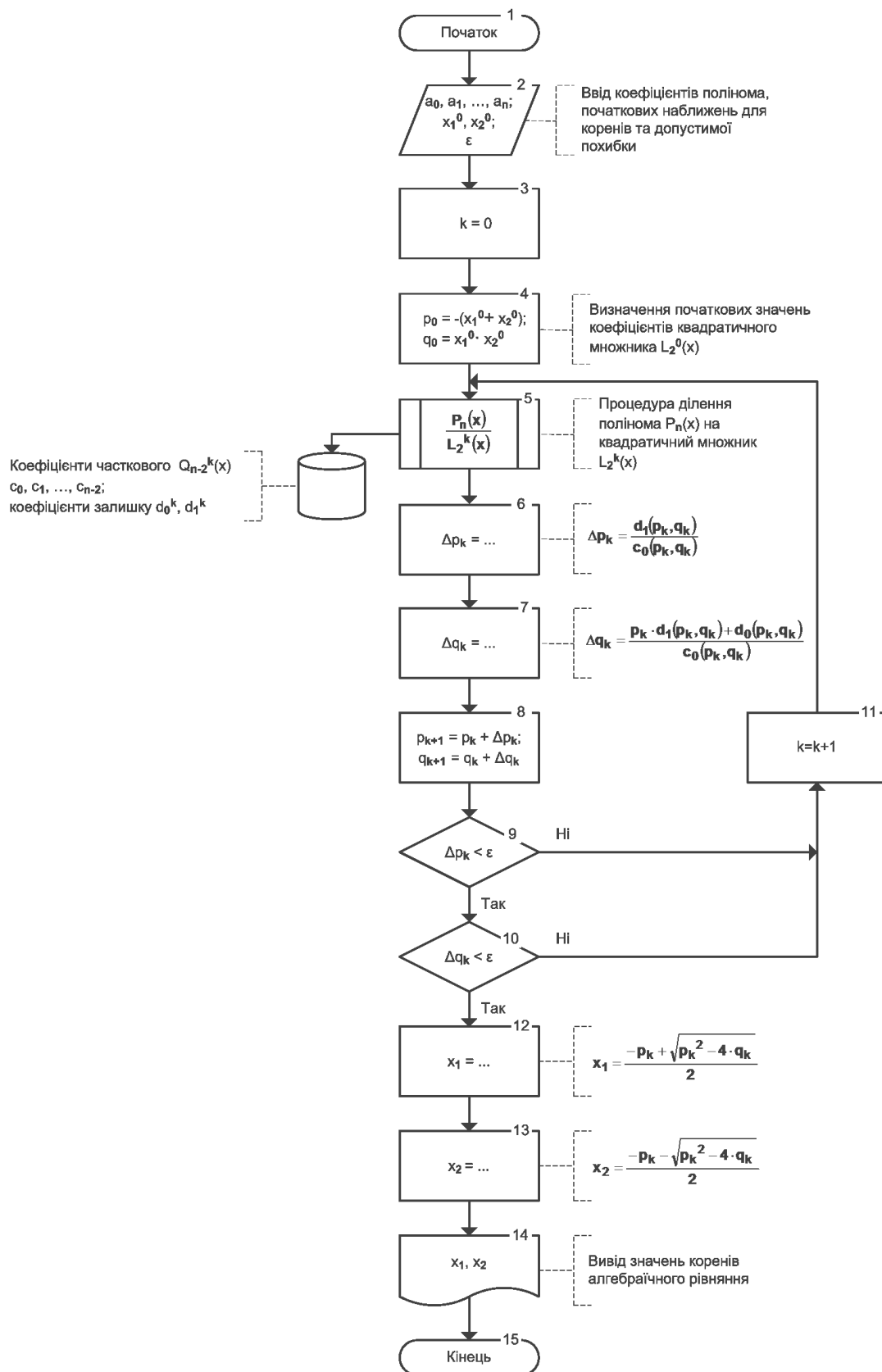


Рисунок 1.50 – Блок-схема алгоритму методу відокремлення квадратичного множника

Основний недолік методів поліпшення збіжності, що обмежує область їх застосування, полягає в великій втраті точності, яка характерна для цих мето-

дів. При поліпшенні збіжності в обчисленнях завжди прямо або побічно беруть участь різниці  $a_{k+1} - a_k$ ,  $a_k - a_{k-1}$ , ... . Якщо ці різниці містять невелику кількість значущих цифр, то відповідно значення  $a_{k+1}$  \* також виходить з низькою точністю і може виявитися внаслідок цього гіршим наближенням для  $a$ , ніж  $a_{k+2}$ . Тим часом, якщо  $a_{k+1}$  \* і  $a_{k+2}$  близькі до  $a$ , то вони близькі і до один одному і відрізняються зазвичай (на останніх етапах обчислення) лише кількома останніми цифрами.

Таким чином методи поліпшення збіжності застосовні лише тоді, коли в обчисленнях зберігається велика кількість значущих цифр, так що різниці  $a_{k+1} - a_k$  повинні мати приблизно половину або більше тієї кількості значущих цифр, яке містить  $a_k$ . У деяких методах використовується лише три послідовних значення  $a_{k-1}$ ,  $a_k$ ,  $a_{k+1}$ . Для того щоб забезпечити можливість застосування цих методів необхідно спеціально обчислити два значення –  $a_k$  і  $a_{k+1}$  з підвищеною точністю.

Залежно від характеру збіжності послідовності  $\{a_i\}$  застосовуються різні методи поліпшення збіжності.

### 1.5.1. Збіжність типу геометричної прогресії

Під цією назвою мається на увазі збіжність, при якій похибка  $a - a_k$  зменшується приблизно як геометрична прогресія з деяким певним знаменником  $q$

$$a - a_{k+1} \approx q \cdot (a - a_k). \quad (1.129)$$

Віднімемо цю рівність з такої ж рівності

$$a - a_k \approx q \cdot (a - a_{k-1}). \quad (1.130)$$

Отримуємо

$$a_{k+1} - a_k \approx q \cdot (a_k - a_{k-1}). \quad (1.131)$$

Виключив  $q$  зі співвідношення (1.129) і (1.130)  $\frac{a - a_{k+1}}{a - a_k} \approx \frac{a - a_k}{a - a_{k-1}}$ , вира-

зимо  $a$

$$a \approx \frac{a_{k-1} \cdot a_{k+1} - a_k^2}{a_{k-1} + a_{k+1} - 2 \cdot a_k}. \quad (1.132)$$

Формулу (1.131) використовуємо для визначення  $a_{k+1}^*$

$$a_{k+1}^* \approx \frac{a_{k-1} \cdot a_{k+1} - a_k^2}{a_{k-1} + a_{k+1} - 2 \cdot a_k}. \quad (1.133)$$

За допомогою нескладних перетворень

$$a_{k+1}^* \approx \frac{a_{k-1} \cdot a_{k+1} - a_k^2 + (2 \cdot a_{k+1} \cdot a_k - a_{k+1}^2) - (2 \cdot a_{k+1} \cdot a_k - a_{k+1}^2)}{a_{k-1} + a_{k+1} - 2 \cdot a_k}$$

формулу (1.133) можна привести до виду, більш зручного для обчислень,

$$a_{k+1}^* \approx a_{k+1} - \frac{(a_{k+1} - a_k)^2}{a_{k-1} + a_{k+1} - 2 \cdot a_k}. \quad (1.134)$$

Метод поліпшення при геометричній збіжності в якому використовується формула (1.134) називають також методом Ейткена-Стеффенсона або  $\delta^2$ - процесом Ейткена.

**Приклад.** Використовуючи, перші три наближення до кореня рівняння (1.5), отримані методом хорд (див. табл. 1.5), розраховуємо значення наступного наближення за формулою (1.133)

$$\begin{aligned} \gamma_3^* &\approx \gamma_3 - \frac{(\gamma_3 - \gamma_2)^2}{\gamma_1 + \gamma_3 - 2 \cdot \gamma_2} = 0,763734 - \frac{(0,763734 - 0,795215)^2}{0,843118 + 0,763734 - 2 \cdot 0,795215} = \\ &= 0,703385. \end{aligned}$$

## 1.5.2. Квадратична збіжність

Квадратичною збіжністю називається збіжність, при якій різниця зменшуються у такий спосіб

$$a_{k+1} - a_k \approx C \cdot (a_k - a_{k-1})^2, \quad (1.135)$$

де  $C$  – константа, яка не залежить від  $k$ .

Тоді

$$a_{k+2} - a_{k+1} \approx C \cdot (a_{k+1} - a_k)^2. \quad (1.136)$$

Підставивши в рівність (1.135) замість  $C$  його значення з рівності (1.135)

$$C \approx \frac{a_{k+1} - a_k}{(a_k - a_{k-1})^2}, \quad (1.137)$$

маємо

$$a_{k+2} \approx a_{k+1} + \frac{(a_{k+1} - a_k)^3}{(a_k - a_{k-1})^2}. \quad (1.138)$$

Якщо наближення  $a_{k-1}$ ,  $a_k$ ,  $a_{k+1}$  вже обчислені, а  $a_{k+2}$  необхідно знайти, то замість того, щоб обчислювати чергове наближення  $a_{k+2}$  тим же загальним способом, яким отримані  $a_{k-1}$ ,  $a_k$ ,  $a_{k+1}$ , можна скористатися наближеною рівністю (1.138) і шукати наближене значення  $a$  за формулою

$$a_{k+1}^* = a_{k+1} + \frac{(a_{k+1} - a_k)^3}{(a_k - a_{k-1})^2}. \quad (1.139)$$

Оцінка порядку величини  $a_{k+1}^* - a$  показує, що наближення  $a_{k+1}^*$  краще, ніж  $a_{k+1}$ , але гірше ніж  $a_{k+2}$ . Тому цим методом поліпшення збіжності доцільно користуватися в тому випадку, коли обчислення  $a_{k+2}$  звичайним способом вимагає значно більшої кількості обчислень, ніж застосування формули (1.139).

**Приклад.** Використовуючи перші три наближення до кореня рівняння (1.5), отримані методом Ньютона (див. табл. 1.6), розраховуємо значення наступного наближення за формулою (1.139)

$$\gamma_3'^* \approx \gamma_3' + \frac{(\gamma_3' - \gamma_2')^3}{(\gamma_2' - \gamma_1')^2} = 0,691956 + \frac{(0,691956 - 0,630312)^3}{(0,630312 - 0,517369)^2} = 0,710319.$$

### 1.5.3. Застосування методів поліпшення збіжності

У методі ітерацій збіжність має характер геометричній прогресії, що дозволяє після двох етапів методу ітерацій застосувати формулу (1.134), якщо тільки наближені значення кореня обчислено з достатньою кількістю значущих цифр. Потім уточнене значення кореня береться за вихідне, і знову відбуваються дві ітерації, після чого знову можна застосувати формулу (1.134) і т.д.

У методі лінійної інтерполяції часто зустрічається випадок, коли один кінець інтервалу, що містить корінь, залишається нерухомим. Другий кінець інтервалу при цьому так наближається до кореня, що похибка зменшується приблизно як геометрична прогресія. У цьому випадку може бути застосована формула (1.134).

У методі Ньютона збіжність є квадратичною, що дає можливість застосувати формулу (1.139). Якщо значення похідної не обчислюються на кожному етапі заново, а береться весь час одним і тим же (таким як в першій точці), то процес збігається приблизно як геометрична прогресія. В цьому випадку потрібно скористатися формулою (1.134).

До узагальненого методу Ньютона розглянуті методи поліпшення збіжності незастосовні.

## 1.6. Порівняльний аналіз методів рішення рівнянь

Оскільки універсального методу вирішення рівнянь не існує, в кожному конкретному випадку доводиться робити вибір, що забезпечує отримання рішення з мінімальними витратами часу при заданій точності. Тому в табл. 1.32 наведено короткий порівняльний аналіз розглянутих вище методів розв'язання рівнянь. Характеристики методів не враховують конкретного виду функції, що входить в рівняння (загальний випадок), переваги і недоліки методів розглянуті для однакових умов розв'язуваної задачі.

Таблиця 1.32 – Коротка порівняльна характеристика методів розв'язання рівнянь

Метод	Характеристика	
	переваги	недоліки
Графічний (табличний)	Дозволяє виділити інтервали з єдиним коренем, приблизно знайти значення всіх коренів і задати початкові значення для ітераційних процесів	Точність рішень при великому кроці зміни аргументу невелика, збільшення точності за рахунок зменшення кроку вимагає великої кількості обчислень функції і великих витрат часу

Продовження табл. 1.32

Метод	Характеристика	
	переваги	недоліки
Порозрядного наближення	Див. графічний (табличний) метод	Хоча швидкість наближення до кореня вище в порівнянні з табличним методом, але за цим показником поступається іншим методам
Дихотомії	Досить універсальний і простий алгоритм уточнення значення кореня, не вимагає обчислення похідних, немає обмежень по другій похідній функції в рівнянні	Швидкість збіжності менша, ніж методу хорд і особливо методу Ньютона
Хорд	Дозволяє уточнити значення кореня, не вимагає обчислення похідних, немає обмежень по другій похідній функції в рівнянні на розглянутому інтервалі, швидкість вище, ніж у методу дихотомії	Ітераційні формули трохи складніші методу дихотомії, за швидкістю поступається методу Ньютона, неможна безпосередньо визначити точність обчислення значення кореня
Ньютона	Дозволяє уточнити значення кореня, найбільша швидкість збіжності	Необхідність обчислення першої похідної на кожній ітерації, обмеження на поведінку другої похідної функції в рівнянні на розглянутому інтервалі, ітераційна формула ускладнюється в разі кратних або близько розташованих коренів
Узагальнений Ньютона (дотичних)	Замінює кілька кроків звичайного методу Ньютона	Відносно громіздкі ітераційні формули, необхідність обчислення першої і вищих похідних на кожній ітерації, незастосовні методи поліпшення збіжності
Комбінований хорд і дотичних	Дозволяє безпосередньо оцінити точність отриманого рішення	Підсумовується кількість обчислень за методами Ньютона і хорд, має недоліки обох цих методів
Модифікований Ньютона	Дозволяє не обчислювати першу похідну функції аналітично	Характерні недоліки методу Ньютона, додатково в загальному випадку швидкість збіжності може зменшуватися через використання наближеного значення першої похідної
Рибакова	Дозволяє не обчислювати першу похідну функції аналітично. Може застосовуватися для пошуку кількох коренів на заданому інтервалі	Необхідно визначити максимальне значення першої похідної функції на даному інтервалі
Січних	Використовує формули методу хорд	Недоліки методу хорд і додатково в загальному випадку лінійна екстраполяція дає гірші результати в порівнянні з інтерполяцією

Продовження табл. 1.32

Метод	Характеристика	
	переваги	недоліки
Комбінований січних-хорд	Див. комбінований метод хорд і дотичних	Включає недоліки методу Ньютона і методу січних, кількість обчислень за формулами цих методів підсумовується
Простих ітерацій	Простота методу, не вимагає обчислення похідних	Необхідність побудови оригінальної ітераційної формули для кожного випадку, яка забезпечує збіжність процесу до шуканого кореня
Зворотної інтерполяції (екстраполяції)	Див. метод хорд	Див. метод хорд, додатково ускладнюється ітераційна формула
Кардано	Можна отримати всі корені кубічного рівняння, не вдаючись до ітераційних формул	Застосовується лише для пошуку коренів кубічних рівнянь, громіздкість формул
Феррарі	Те ж, що і у методу Кардано, але для рівнянь четвертого ступеня	Застосовується лише для пошуку коренів рівнянь четвертого ступеня, громіздкість формул зростає в порівнянні з методом Кардано
Бірге-Віста	Дозволяє використовувати метод Ньютона для знаходження коренів алгебраїчних рівнянь, використовуючи схему Горнера	Застосовується лише для алгебраїчних рівнянь, має недоліки методу Ньютона
Відокремлення лінійного множника полінома	Дозволяє знайти коріння алгебраїчних рівнянь за рахунок відокремлення лінійних множників	Застосовується лише для алгебраїчних рівнянь, існує проблема збіжності (див. метод ітерацій). Для поліномів високих ступенів існує проблема швидкого зростання їх значень при збільшенні аргументу. Найбільші за модулем корені полінома високого ступеня можуть бути дуже чутливим до похибок коефіцієнтів при старших ступенях, особливо в разі кратних або близьких коренів. Похибка округлення коефіцієнтів частки негативно впливає на точність знаходження наступних коренів.
Берстоу	Дозволяє знайти корені алгебраїчних рівнянь, в тому числі і комплексні, за рахунок відокремлення квадратичних множників	Див. метод відокремлення лінійного множника полінома. Застосовується для вирішення алгебраїчних рівнянь, тільки починаючи з четвертого ступеня
Відокремлення квадратичного множника полінома	Дозволяє знайти коріння алгебраїчних рівнянь, в тому числі і комплексні, застосовуючи ідею методу Берстоу, але використовуються більш прості ітераційні формули. Дозволяє вирішувати алгебраїчні рівняння, починаючи з другого ступеня включно	Див. метод відокремлення лінійного множника полінома. Нижча швидкість збіжності в порівнянні з методом Берстоу

## Контрольні питання

1. У чому полягає недолік графічного (табличного) способу відокремлення коренів?
2. Як оцінити точність обчисленого за допомогою методу дихотомії значення кореня?
3. Чому на кінцях проміжку, що містить корінь, функція з рівняння, що вирішується, повинна мати протилежні знаки?
4. Як переконатися, що на даному інтервалі корінь рівняння один?
5. Чому при використанні методу хорд користуватися формулами (1.22) і (1.23) краще, ніж формулою (1.21)?
6. На підставі чого можна стверджувати, що має місце збіжність ітераційного процесу при пошуку кореня методом хорд?
7. Що лежить в основі методу Ньютона (дотичних) для вирішення рівнянь?
8. Чому при використанні методу Ньютона необхідно щоб на розглянутому інтервалі друга похідна функції, що стоїть в рівнянні, мала постійний знак?
10. Як оцінити точність отриманого методом Ньютона рішення?
11. Чому метод Ньютона неефективний для пошуку кратних і близько розташованих коренів рівнянь?
12. Як виглядає рівняння дотичної, проведеної до графіка функції в заданій точці?
13. У чому перевага комбінованого методу хорд та дотичних?
14. Які модифікації методу Ньютона Ви знаєте?
15. У чому перевага методу простих ітерацій?
16. Яке достатня умова має виконуватися для збіжності ітераційного процесу при пошуку кореня рівняння методом простих ітерацій?
17. Що лежить в основі методу зворотної інтерполяції?
18. Які основні методи розв'язання алгебраїчних рівнянь Ви знаєте?

19. Чому при використанні методів розв'язання алгебраїчних рівнянь на основі відокремлення множників раціонально спочатку знаходити менші за модулем корені?

20. Для чого використовують методи поліпшення збіжності?

## 2. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

### 2.1. Регресійний аналіз (побудова емпіричних формул за допомогою методу найменших квадратів)

У технічних розрахунках доводиться користуватися емпіричними формулами, складеними на підставі досвіду і спостереження. Якщо набір експериментальних даних отримано зі значною похибкою, то використовувати інтерполяцію не має сенсу. В цьому випадку необхідно застосовувати функцію, що апроксимує, отриману іншим способом. Один з найкращих методів отримання таких формул – метод найменших квадратів (МНК) [2, 3, 17–20, 26, 31, 32].

Розкриємо ідею цього методу на прикладі випадку лінійної залежності двох величин [29].

Нехай необхідно встановити залежність між двома величинами  $x$  і  $y$ . Результати для  $n$  вимірювань представлено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1 – Емпірична залежність між величинами  $x$  і  $y$

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	...	$y_n$

Розглянемо  $x$  і  $y$  як прямокутні координати точок на площині. Якщо точки з відповідними координатами, взяті з табл. 2.1, розташовуються так, як це показано на рис. 2.1, можна припускати, що залежність між  $x$  і  $y$  можна наближено описати лінійною функцією, що виражається формулою (2.1)

$$y = a \cdot x + b. \quad (2.1)$$

Формула (2.1) може бути представлена в такому вигляді:

$$a \cdot x + b - y = 0. \quad (2.2)$$

Так як точки з координатами  $(x_i, y_i)$  тільки приблизно лежать на прямій, що описується функцією (2.1), то формули (2.1) і (2.2) – наближені. Отже, підс-



солотною величиною. Однак це, очевидно, не забезпечить малості похибок, так як останні можуть мати різні знаки.

Замінюючи у виразі (2.4) похибки  $\varepsilon_i$  їх значеннями з рівності (2.3), отримаємо величину

$$U = (a \cdot x_1 + b - y_1)^2 + (a \cdot x_2 + b - y_2)^2 + \dots + (a \cdot x_n + b - y_n)^2,$$

де  $x_1, y_1; x_2, y_2; \dots; x_n, y_n$  розглядаються як коефіцієнти, а власне коефіцієнти  $a$  і  $b$  як невідомі величини, що підлягають визначенню.

Значить  $U$  можна розглядати як функцію від двох змінних –  $a$  і  $b$ . При цьому необхідно підібрати коефіцієнти  $a$  і  $b$  так, щоб функція  $U$  отримала як можливо менше значення. Відповідно до висновку з теореми, яка каже, що в точці екстремуму функції кількох змінних кожна її часткова похідна першого порядку або дорівнює нулю, або не існує, для забезпечення мінімуму функції  $U$  необхідно, щоб часткові похідні були

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial b} = 0.$$

Знаходимо ці похідні і для зручності викладок множимо їх на коефіцієнт  $\frac{1}{2}$ . В результаті отримуємо

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial a} = (a \cdot x_1 + b - y_1) \cdot x_1 + (a \cdot x_2 + b - y_2) \cdot x_2 + \dots + (a \cdot x_n + b - y_n) \cdot x_n;$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial b} = (a \cdot x_1 + b - y_1) + (a \cdot x_2 + b - y_2) + \dots + (a \cdot x_n + b - y_n).$$

Звідси, прирівнюючи часткові похідні нулю, отримаємо лінійну систему двох алгебраїчних рівнянь з двома невідомими  $a$  і  $b$

$$(a \cdot x_1 + b - y_1) \cdot x_1 + (a \cdot x_2 + b - y_2) \cdot x_2 + \dots + (a \cdot x_n + b - y_n) \cdot x_n = 0;$$

$$(a \cdot x_1 + b - y_1) + (a \cdot x_2 + b - y_2) + \dots + (a \cdot x_n + b - y_n) = 0. \quad (2.5)$$

Здійснюючи звичайні алгебраїчні перетворення, представимо цю систему в більш простому вигляді

$$a \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + b \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = y_1 \cdot x_1 + y_2 \cdot x_2 + \dots + y_n \cdot x_n;$$

$$a \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + b \cdot n = y_1 + y_2 + \dots + y_n,$$

або, використовуючи загальноприйняті математичні скорочені позначення, маємо

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i; \\ a \cdot \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (2.6)$$

Це остаточний вигляд так званої нормальної системи методу найменших квадратів. Із системи (2.6) знаходимо  $a$  і  $b$ , а потім підставляємо у формулу (2.1)

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i - n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2}; \quad b = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i - a \cdot \sum_{i=1}^n x_i\right).$$

Визначимо коефіцієнти для степеневі регресії  $y = a \cdot x^b$ . Для цієї регресії (а так само для показникової і експоненційної регресій) зручно спочатку прологарифмувати функцію

$$\ln(y) = \ln(a \cdot x^b); \quad \ln(y) = \ln(a) + b \cdot \ln(x); \quad \ln(a) + b \cdot \ln(x) - \ln(y) = 0;$$

$$U = (\ln(a) + b \cdot \ln(x_1) - \ln(y_1))^2 + (\ln(a) + b \cdot \ln(x_2) - \ln(y_2))^2 + \dots +$$

$$+ (\ln(a) + b \cdot \ln(x_n) - \ln(y_n))^2;$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial a} = (\ln(a) + b \cdot \ln(x_1) - \ln(y_1)) \cdot \frac{1}{a} + (\ln(a) + b \cdot \ln(x_2) - \ln(y_2)) \cdot \frac{1}{a} + \dots +$$

$$+ (\ln(a) + b \cdot \ln(x_n) - \ln(y_n)) \cdot \frac{1}{a};$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial b} = (\ln(a) + b \cdot \ln(x_1) - \ln(y_1)) \cdot \ln(x_1) + (\ln(a) + b \cdot \ln(x_2) - \ln(y_2)) \cdot \ln(x_2) + \dots$$

$$+ (\ln(a) + b \cdot \ln(x_n) - \ln(y_n)) \cdot \ln(x_n);$$

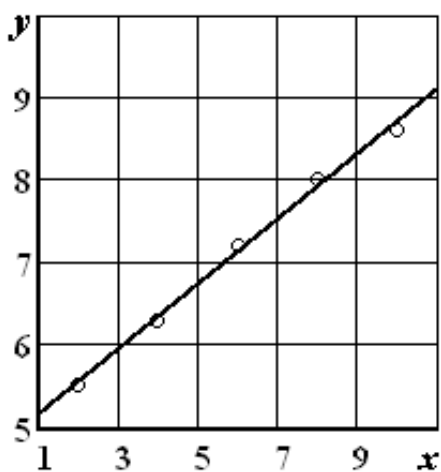
$$\begin{cases} \frac{1}{a} \cdot \left( n \cdot \ln(a) + b \cdot \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \sum_{i=1}^n \ln(y_i) \right) = 0; \\ \ln(a) \cdot \sum_{i=1}^n \ln(x_i) + b \cdot \sum_{i=1}^n (\ln(x_i))^2 - \sum_{i=1}^n (\ln(x_i) \cdot \ln(y_i)) = 0; \end{cases}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n \ln(x_i) \cdot \sum_{i=1}^n \ln(y_i) - n \cdot \sum_{i=1}^n (\ln(x_i) \cdot \ln(y_i))}{\left(\sum_{i=1}^n \ln(x_i)\right)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n (\ln(x_i))^2};$$

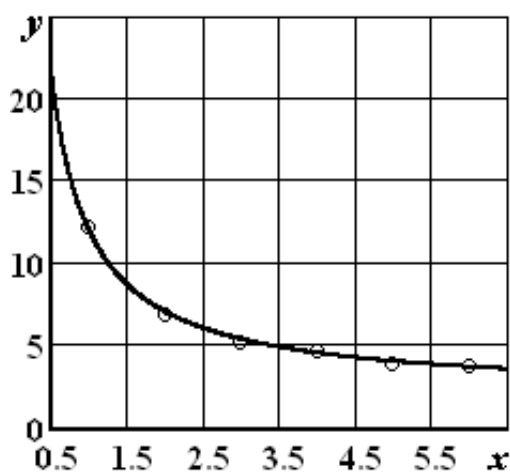
$$a = \exp\left[\frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \ln(y_i) - b \cdot \sum_{i=1}^n \ln(x_i)\right)\right].$$

Аналогічним шляхом можна отримати коефіцієнти для інших регресій.

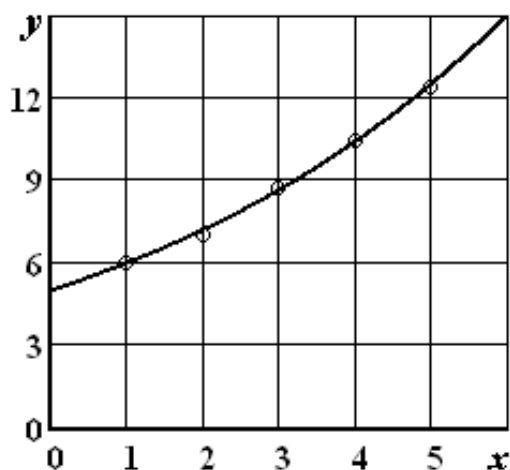
На рис. 2.2 показано приклади апроксимації методом найменших квадратів з використанням лінійної  $y = a + b \cdot x$ , гіперболічної  $y = b + \frac{a}{x}$ , показникової  $y = a \cdot b^x$ , експоненційної  $y = a \cdot e^{(b \cdot x)}$  і логарифмічної функцій  $y = a + b \cdot \lg(x)$ .



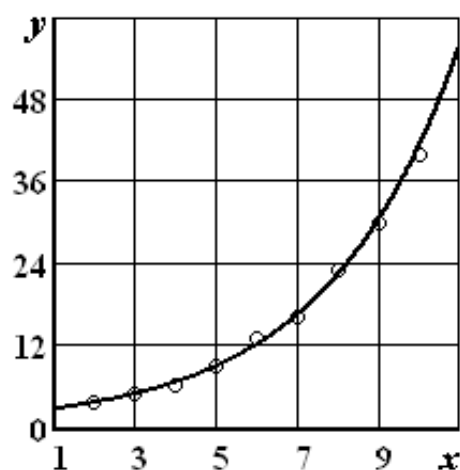
a



б



в



г

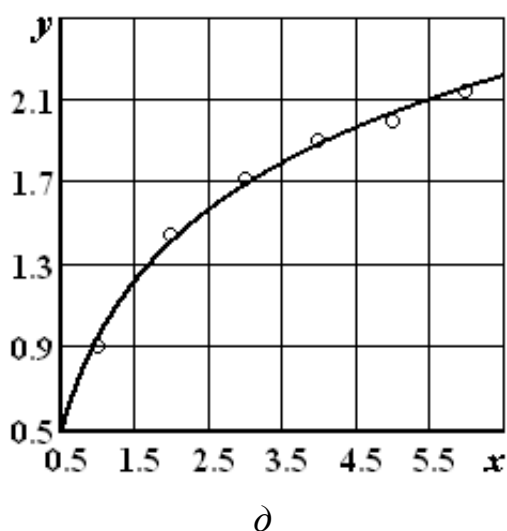


Рисунок 2.2 – Апроксимація методом найменших квадратів з використанням лінійної (а), гіперболічної (б), показникової (в), експоненційної (г) і логарифмічної (д) функцій

Якщо для побудови емпіричної залежності за методом найменших квадратів використовується квадратична функція, то потрібно визначити вже три коефіцієнта параболічної регресії

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c; \quad a \cdot x^2 + b \cdot x + c - y = 0;$$

$$U = (a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 + c - y_1)^2 + (a \cdot x_2^2 + b \cdot x_2 + c - y_2)^2 + \dots + (a \cdot x_n^2 + b \cdot x_n + c - y_n)^2;$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial a} = (a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 + c - y_1) \cdot x_1^2 + (a \cdot x_2^2 + b \cdot x_2 + c - y_2) \cdot x_2^2 + \dots$$

$$+ (a \cdot x_n^2 + b \cdot x_n + c - y_n) \cdot x_n^2;$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial b} = (a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 + c - y_1) \cdot x_1 + (a \cdot x_2^2 + b \cdot x_2 + c - y_2) \cdot x_2 + \dots +$$

$$+ (a \cdot x_n^2 + b \cdot x_n + c - y_n) \cdot x_n;$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial c} = (a \cdot x_1^2 + b \cdot x_1 + c - y_1) + (a \cdot x_2^2 + b \cdot x_2 + c - y_2) + \dots +$$

$$+ (a \cdot x_n^2 + b \cdot x_n + c - y_n).$$

Задача визначення коефіцієнтів  $a$ ,  $b$ , і  $c$  для параболічної регресії в кінцевому підсумку зводиться до необхідності вирішення лінійної системи з трьох рівнянь щодо цих коефіцієнтів

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n (y_i \cdot x_i^2) = 0; \\ a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \cdot \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i \cdot x_i = 0; \\ a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot c - \sum_{i=1}^n y_i = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

У загальному випадку при використанні в методі найменших квадратів цілих алгебраїчних функцій застосовується поліноміальна регресія, яка забезпечує знаходження коефіцієнтів полінома:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_m \cdot x^m$$

з рішення системи рівнянь

$$\begin{cases} c_0 \cdot a_0 + c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_2 + \dots + c_m \cdot a_m = d_0 \\ c_1 \cdot a_0 + c_2 \cdot a_1 + c_3 \cdot a_2 + \dots + c_{m+1} \cdot a_m = d_1 \\ \dots \\ c_m \cdot a_0 + c_{m+1} \cdot a_1 + c_{m+2} \cdot a_2 + \dots + c_{2m} \cdot a_m = d_m \end{cases}, \quad (2.12)$$

де  $c_j = \sum_{i=1}^n (x_i)^j$ , де  $j = 0, 1, 2, \dots, 2 \cdot m$ ;

$$d_k = \sum_{i=1}^n (x_i)^k \cdot y_i, \text{ де } k = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Поліном ступеня  $m < n$ , де  $n$  – число пар  $x_i$  і  $y_i$ , забезпечує апроксимацію таблично заданої функції  $y_i(x_i)$  з мінімальною середньоквадратичною похибкою

$$E = \sqrt{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 / (n+1)}. \quad (2.13)$$

Якщо  $m = n$ , то має місце звичайна інтерполяція, тобто значення  $y(x)$  при  $x = x_i$  точно збігаються із заданими  $y_i$ . При  $m < n$  такої збіжності в загальному випадку немає. Таким чином, апроксимація  $y_i(x_i)$  за методом найменших квадратів має більш універсальний характер, ніж звичайна інтерполяція.

Якщо задачу обмежити лише обчисленням значень коефіцієнтів  $a_0, a_1, \dots, a_m$  полінома без обчислення похибки  $E$ , то немає необхідності в створенні масивів  $x_i$  і  $y_i$ . При цьому досить обчислити  $c_j$  (масив з  $2 \cdot m$  чисел) і  $d_k$  (масив з  $m$

чисел) і вирішити отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь, наприклад, методом Гауса.

Крім наведених вище функцій, для апроксимації методом найменших квадратів можна використовувати також такі залежності [2]:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{a \cdot x + b}; & y &= \frac{x}{a \cdot x + b}; & y &= a \cdot 10^{(b \cdot x)}; & y &= \frac{1}{a \cdot e^{-x} + b}; & y &= a \cdot x^{(b \cdot x)}; \\
 y &= a \cdot \ln(x) + b & y &= \frac{a}{b + x}; & y &= \frac{a \cdot x}{b + x}; & y &= a \cdot e^{(b/x)}; & y &= a \cdot 10^{(b/x)}; \\
 y &= a \cdot x^m + b.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Слід зазначити, що сучасні калькулятори дозволяють, вводючи масиви значень для аргументу і функції, автоматично обчислювати значення коефіцієнтів деяких регресій (наприклад, лінійної, логарифмічної і експоненційної).

## 2.2. Апроксимація діаграм дійсних напружень з використанням методу найменших квадратів

Діаграми дійсних напружень – це графічне зображення залежності справжніх напружень  $\sigma$ , від ступеня попередньої деформації  $\varepsilon$  [4].

Такі залежності широко використовуються для урахування деформаційного зміцнення в теоретичних рішеннях задач обробки тиском. Кожен метал або сплав зміцнюється по різному і, отже, доводиться будувати для різних марок матеріалів свої діаграми дійсних напружень [33, 34]. Для побудови діаграм дійсних напружень зазвичай використовують випробування на стиснення циліндричних зразків з торцевими виточками. Але при теоретичному аналізі процесів ОМТ безпосередньо діаграми дійсних напружень використовувати незручно, а при розрахунках з використанням комп'ютера взагалі неможливо (комп'ютер не вміє «читати» безпосередньо графіки). Експериментально отримана залежність дійсного опору деформації від ступеня деформації є набором точок, які розташовані з певним кроком, що не дозволяє визначати значення напруження для інших значень деформації. Функція дійсного опору деформації може

так само входить в інтеграли, що виражають компоненти сили, роботи або потужності деформації. Це означає, що необхідно представити залежність дійсних напружень  $\sigma_s$  від ступеня попередньої деформації  $\varepsilon$  в аналітичному вигляді. Оскільки дані для побудови діаграми дійсних напружень отримують експериментально і, отже, з деякою похибкою, то вимагати, щоб апроксимуюча функція проходила точно через кожен точку діаграми, не має сенсу. Оптимальним підходом для апроксимації подібних залежностей є використання методу найменших квадратів.

Для апроксимації діаграм дійсних напружень методом найменших квадратів зазвичай застосовують або лінійну, або ступеневу залежності

$$\sigma_s(\varepsilon) = A + B \cdot \varepsilon_i;$$

$$\sigma_s(\varepsilon) = A + B \cdot \varepsilon^n.$$

Але в роботах [4, 35–37] показано, що адекватною є апроксимація діаграм дійсних напружень кубічним поліномом

$$\sigma_s(\varepsilon) = A_0 + A_1 \cdot \varepsilon + A_2 \cdot \varepsilon^2 + A_3 \cdot \varepsilon^3.$$

Отримання аналітичних залежностей напруження текучості від ступеня деформації покажемо на прикладі апроксимації діаграми дійсних напружень для алюмінієвого сплаву.

У табл. 2.2 наведені дані, отримані експериментально при випробуванні на стиснення циліндричних зразків алюмінієвого сплаву АД1.

Таблиця 2.2 – Результати випробування на стиснення зразків з алюмінію АД1

$\varepsilon_i$	0,02	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,75
$\sigma_s$ , МПа	53,2	61,0	82,1	90,4	101,2	114,5	122,3	131,2	140,1	144,8	150,2

Для апроксимації методом найменших квадратів будемо використовувати кубічний поліном.

$$\sigma = A_3 \cdot \varepsilon^3 + A_2 \cdot \varepsilon^2 + A_1 \cdot \varepsilon + A_0; \quad A_3 \cdot \varepsilon^3 + A_2 \cdot \varepsilon^2 + A_1 \cdot \varepsilon + A_0 - \sigma = 0;$$

$$U = \left( A_3 \cdot \varepsilon_1^3 + A_2 \cdot \varepsilon_1^2 + A_1 \cdot \varepsilon_1 + A_0 - \sigma_1 \right)^2 + \left( A_3 \cdot \varepsilon_2^3 + A_2 \cdot \varepsilon_2^2 + A_1 \cdot \varepsilon_2 + A_0 - \sigma_2 \right)^2 + \dots + \left( A_3 \cdot \varepsilon_n^3 + A_2 \cdot \varepsilon_n^2 + A_1 \cdot \varepsilon_n + A_0 - \sigma_n \right)^2;$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial A_3} = \left( A_3 \cdot \varepsilon_1^3 + A_2 \cdot \varepsilon_1^2 + A_1 \cdot \varepsilon_1 + A_0 - \sigma_1 \right) \cdot \varepsilon_1^3 + \left( A_3 \cdot \varepsilon_2^3 + A_2 \cdot \varepsilon_2^2 + A_1 \cdot \varepsilon_2 + A_0 - \sigma_2 \right) \cdot \varepsilon_2^3 + \dots + \left( A_3 \cdot \varepsilon_n^3 + A_2 \cdot \varepsilon_n^2 + A_1 \cdot \varepsilon_n + A_0 - \sigma_n \right) \cdot \varepsilon_n^3;$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial A_2} = \left( A_3 \cdot \varepsilon_1^3 + A_2 \cdot \varepsilon_1^2 + A_1 \cdot \varepsilon_1 + A_0 - \sigma_1 \right) \cdot \varepsilon_1^2 + \left( A_3 \cdot \varepsilon_2^3 + A_2 \cdot \varepsilon_2^2 + A_1 \cdot \varepsilon_2 + A_0 - \sigma_2 \right) \cdot \varepsilon_2^2 + \dots + \left( A_3 \cdot \varepsilon_n^3 + A_2 \cdot \varepsilon_n^2 + A_1 \cdot \varepsilon_n + A_0 - \sigma_n \right) \cdot \varepsilon_n^2;$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial A_1} = \left( A_3 \cdot \varepsilon_1^3 + A_2 \cdot \varepsilon_1^2 + A_1 \cdot \varepsilon_1 + A_0 - \sigma_1 \right) \cdot \varepsilon_1 + \left( A_3 \cdot \varepsilon_2^3 + A_2 \cdot \varepsilon_2^2 + A_1 \cdot \varepsilon_2 + A_0 - \sigma_2 \right) \cdot \varepsilon_2 + \dots + \left( A_3 \cdot \varepsilon_n^3 + A_2 \cdot \varepsilon_n^2 + A_1 \cdot \varepsilon_n + A_0 - \sigma_n \right) \cdot \varepsilon_n;$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial A_0} = \left( A_3 \cdot \varepsilon_1^3 + A_2 \cdot \varepsilon_1^2 + A_1 \cdot \varepsilon_1 + A_0 - \sigma_1 \right) + \dots + \left( A_3 \cdot \varepsilon_2^3 + A_2 \cdot \varepsilon_2^2 + A_1 \cdot \varepsilon_2 + A_0 - \sigma_2 \right) + \left( A_3 \cdot \varepsilon_n^3 + A_2 \cdot \varepsilon_n^2 + A_1 \cdot \varepsilon_n + A_0 - \sigma_n \right).$$

Задача визначення коефіцієнтів  $A_3$ ,  $A_2$ ,  $A_1$ , і  $A_0$  для даної регресії зводиться до необхідності вирішення лінійної системи з чотирьох рівнянь щодо цих коефіцієнтів.

$$A_3 \cdot \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^6 + A_2 \cdot \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^5 + A_1 \cdot \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^4 + A_0 \cdot \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^3 - \sum_{k=1}^n (\sigma_k \cdot \varepsilon_k^3) = 0;$$

$$A_3 \cdot \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^5 + A_2 \cdot \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^4 + A_1 \cdot \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^3 + A_0 \cdot \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 - \sum_{k=1}^n (\sigma_k \cdot \varepsilon_k^2) = 0;$$

$$A_3 \cdot \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^4 + A_2 \cdot \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^3 + A_1 \cdot \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 + A_0 \cdot \sum_{k=1}^n \varepsilon_k - \sum_{k=1}^n (\sigma_k \cdot \varepsilon_k) = 0;$$

$$A_3 \cdot \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^3 + A_2 \cdot \sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 + A_1 \cdot \sum_{k=1}^n \varepsilon_k + A_0 \cdot n - \sum_{k=1}^n \sigma_k = 0,$$

$$\text{де } \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k^6 = 0,245405; \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k^5 = 0,360368; \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k^4 = 0,548325; \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k^3 = 0,882008;$$

$$\sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k^2 = 1,5604; \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k = 3,32; \sum_{k=1}^{11} (\sigma_k \cdot \varepsilon_k^3) = 126,847738; \sum_{k=1}^{11} (\sigma_k \cdot \varepsilon_k^2) = 217,87253;$$

$$\sum_{k=1}^{11} (\sigma_k \cdot \varepsilon_k) = 433,499; \sum_{k=1}^{11} \sigma_k = 1191,0; n = 11,0.$$

Вирішуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів  $A_3$ ,  $A_2$ ,  $A_1$ , и  $A_0$  (див. розділ 3), отримуємо кубічну функцію, апроксимуючу діаграму дійсних напружень для сплаву АД1 (рис. 2.3)

$$\sigma_s(\varepsilon) = 45,0 + 386,3 \cdot \varepsilon - 523,2 \cdot \varepsilon^2 + 260,3 \cdot \varepsilon^3.$$

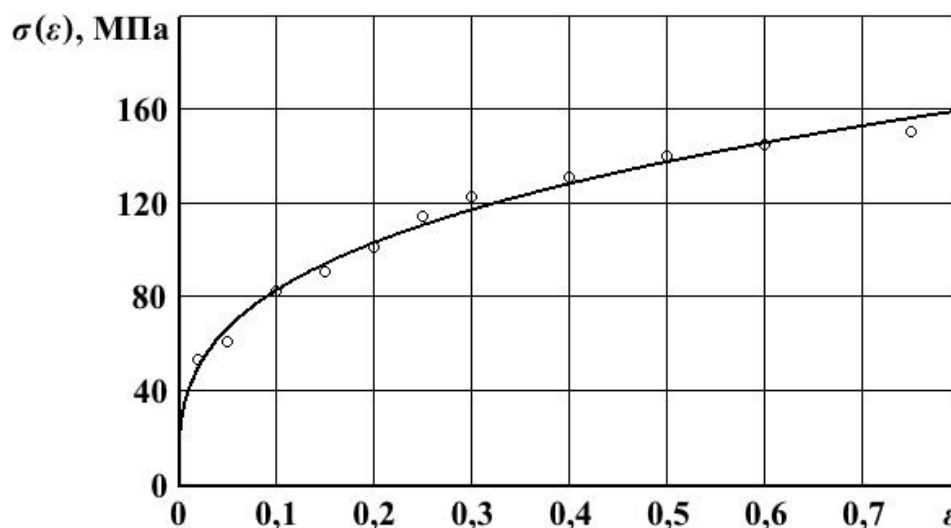


Рисунок 2.3 – Апроксимація діаграми дійсних напружень кубічним поліномом з використанням методу найменших квадратів (точками показані експериментальні дані)

### 2.3. Поняття про інтерполяцію і екстраполяцію

Однією з важливих задач в процесі математичного моделювання є обчислення значень функцій, що входять в математичний опис моделі. Для складних моделей подібні обчислення можуть бути трудомісткими навіть при використанні сучасних комп'ютерів. При виконанні програм, що реалізують основні методи обчислювальної математики, велика частина часу також витрачається на обчислення функцій.

Функції, що використовуються в математичних моделях, можуть задаватися як аналітичним способом, так і табличним, при якому значення функції відомі тільки для дискретних значень аргументів. Це може бути пов'язано або з тим, що дані отримані експериментально, або з тим, що обсяг таблиць обмежений, і в них можна навести лише деякі дані. Крім того, алгоритм обчислення вихідної функції, заданої в аналітичному вигляді, може бути досить складним. При цьому витрати часу при обчисленні такої функції зростають, а в результаті похибок обчислення отримані значення функції можуть бути недостатньо точними. Обмежений об'єм пам'яті комп'ютера також накладає свої обмеження на масиви даних, що вводяться.

Поставлені проблеми вирішуються шляхом наближеної заміни функції  $f(x)$  більш простою функцією  $\varphi(x)$ , яку неважко обчислювати при будь-якому значенні аргументу  $x$  на заданому інтервалі його зміни. Введену функцію  $\varphi(x)$  можна використовувати не тільки для наближеного визначення числових значень функції  $f(x)$ , але і для проведення аналітичних викладок при теоретичному дослідженні моделі.

Наближення функції  $f(x)$  більш простою функцією  $\varphi(x)$  називається апроксимацією (від латинського *approximo* – наближеність) [1–3, 17–20, 22, 23, 25, 27, 30, 31]. Наближеності цих двох функцій домагаються шляхом введення в апроксимуючу функцію  $\varphi(x)$  вільних параметрів  $c_0, c_1, \dots, c_n$  і відповідним їх вибором.

В обчислювальній математиці апроксимація функцій є основою для розробки багатьох методів і алгоритмів.

Нехай функція  $f(x)$  задана таблицею значень, отриманих з експерименту або шляхом обчислення послідовних значень аргументу  $x_0, x_1, \dots, x_n$  (табл. 2.3). Введемо апроксимуючу функцію  $\varphi(x, c_0, c_1, \dots, c_n)$  так, щоб вона збігалася з табличними значеннями заданої функції  $f(x)$  у всіх вузлах  $x_i$ :

$$\varphi(x_i, c_0, c_1, \dots, c_n) = f(x_i), \quad (2.15)$$

де  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Вільні параметри  $c_i$  визначаються з системи (2.15).

Таблиця 2.3 – Таблично задана функція

$x$	$f(x)$
$x_0$	$f(x_0)$
$x_1$	$f(x_1)$
...	...
$x_n$	$f(x_n)$

Цей спосіб введення апроксимуючої функції називається лагранжевою інтерполяцією, а співвідношення (2.15) – умовами Лагранжа [3].

Задачею інтерполяції у вузькому сенсі вважають знаходження наближених значень табличної функції при аргументах  $x$ , які не збігаються з вузловими точками. Якщо значення аргументу  $x$  розташоване між вузлами  $x_0 \leq x \leq x_n$ , то знаходження наближеного значення функції  $f(x)$  називають інтерполяцією, якщо апроксимуючу функцію обчислюють поза інтервалом  $[x_0, x_n]$ , то процес називають екстраполяцією [3]. Походження цих термінів пов'язано з латинськими словами *inter* – між, у середині, *pole* – вузол, *extra* – поза.

У більш загальному плані за допомогою інтерполяції вирішують широке коло завдань числового аналізу – диференціювання та інтегрування функцій, знаходження нулів і екстремумів функцій, рішення диференціальних рівнянь і т.п. Можливість вирішення подібних задач обумовлено досить простим видом апроксимуючої функції  $\varphi(x)$ .

## 2.4. Поліноміальна апроксимація функцій одного змінного

Найпростішим видом інтерполяції є лінійна інтерполяція, в основі якої лежить апроксимація кривої на ділянці між точками  $(x_k, y_k)$  і  $(x_{k+1}, y_{k+1})$  прямою, що проходить через ті ж точки (рис. 2.4). Рівняння прямої можна представити у вигляді

$$\frac{y - y_k}{x - x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}; \quad y = \frac{y_k \cdot (x - x_{k+1}) - y_{k+1} \cdot (x - x_k)}{x_k - x_{k+1}}.$$

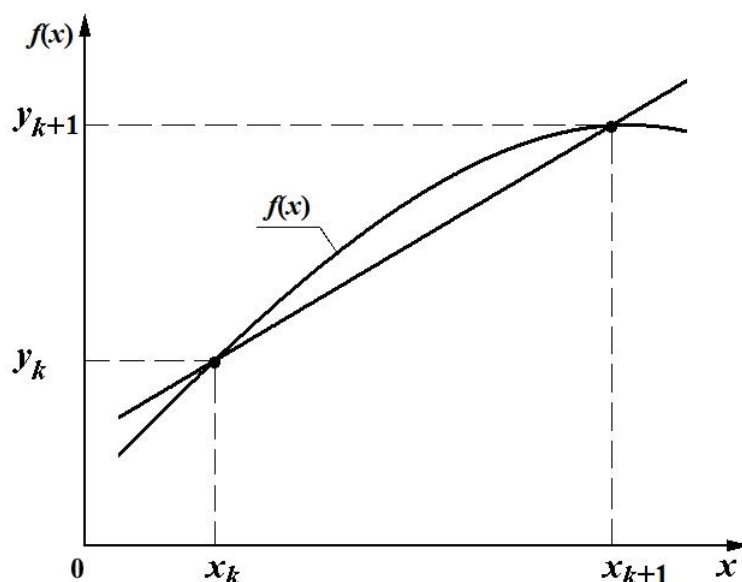


Рисунок 2.4 – Лінійна інтерполяція

Таким чином, знаючи два табличних значення функції  $y_k$  і  $y_{k+1}$ , що відповідають аргументам  $x_k$  та  $x_{k+1}$ , за допомогою наведених вище формул можна знайти значення функції  $y$  при будь-якому значенні  $x$  на інтервалі  $[x_k, x_{k+1}]$ . Зазвичай вважають, що, використовуючи більше число сусідніх точок і апроксимуючу дійсну криву більш складною функцією, можна уточнити отриманий результат.

Історично і прагматично найбільш важливим класом інтерполяційних функцій є множина алгебраїчних поліномів. Поліноми мають очевидну перевагу – їх значення легко обчислювати, їх також легко складати, множити, інтегрувати і диференціювати. Ще одним позитивним властивістю поліномів є наступне: якщо  $c$  – константа, а  $P(x)$  – поліном, то поліномами будуть і  $P(c \cdot x)$ , і  $P(x + c)$ .

Зрозуміло, клас функцій може мати всі зазначені вище властивості і тим не менш не мати задовільних апроксимаційних (інтерполяційних) якостей. На щастя, є вагомим підстави вважати, що будь-яка безперервна функція  $f(x)$  на замкнутому інтервалі може бути добре наближена деяким поліномом  $P_n(x)$ . Це випливає з раннього результату теорії наближень, так званої апроксимаційної теореми Вейерштрасса [19].

**Теорема Вейерштрасса:** якщо  $f(x)$  – безперервна на кінцевому замкнутому інтервалі  $[a, b]$  функція, то для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує поліном  $P_n(x)$  ступеня  $n(\varepsilon)$ , такий, що

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon.$$

Деякі докази теореми Вейерштрасса мають конструктивний характер, але одержуваний поліном  $P_n(x)$  зазвичай настільки високого ступеня, що користуватися ним непрактично. Крім того, наведена вище теорема нічого не говорить про існування задовільного інтерполяційного полінома для заданої множини точок  $\{(x_j, y_j)\}$ . І хоча деякий поліном інтерполює функцію  $f(x)$  із заданою точністю на всьому інтервалі  $[a, b]$ , немає гарантії, що такий поліном можна знайти за допомогою алгоритму, використання якого зручно для практичних обчислень.

Поліном  $P_n(x)$  можна записати за степенями  $x$

$$P_n(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n = \sum_{i=1}^n (a_i \cdot x^i).$$

У поліномі ступеня  $n$  міститься  $(n + 1)$  коефіцієнтів. Щоб однозначно визначити коефіцієнти, потрібно задати  $(n + 1)$  коректно поставлених умов. При інтерполяції зазвичай вимагають, щоб поліном проходив через  $(n + 1)$  точку  $(x_j, y_j)$ , де  $j = 0, 1, \dots, n$  і всі  $x_j$  різні. Це дає  $(n + 1)$  лінійне рівняння для визначення невідомих коефіцієнтів  $a_i$ :

$$y_i = \sum_{j=0}^n a_j \cdot x_j^i,$$

де  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Як показує наступне міркування, рішення, якщо воно існує, визначається єдиним чином. Зафіксуємо множину  $\{(x_j)\}$ , що складається з  $(n + 1)$  різної точки. Якби було два полінома  $P_n(x)$  і  $Q_n(x)$ , приймають одні і ті ж значення  $y_j$  в точках  $x_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), то різниця  $P_n(x) - Q_n(x)$  перетворювалася б у нуль для  $(n + 1)$  різного значення змінної  $x$ . Оскільки ступінь різниці не перевищує  $n$ , то

$P_n(x) - Q_n(x)$  зобов'язаний бути нульовим поліномом і, отже,  $P_n(x)$  та  $Q_n(x)$  повинні співпадати.

Це доводить єдиність полінома ступеня меншою або рівною  $n$ , що інтерполює довільну множину з  $(n + 1)$  точок, але не його існування. Система  $(n + 1)$  рівнянь, що визначають коефіцієнти полінома  $P_n(x)$  через задані  $\{y_j\}$ , є лінійною. Один з головних результатів лінійної алгебри полягає в тому, що лінійна система або має єдине рішення для будь-якого набору  $\{y_j\}$ , або існують набори  $\{y_j\}$ , для яких рішень багато. Оскільки вище було доведено, що більше одного рішення не може бути, значить повинен існувати єдиний поліном для будь-якої апроксимаційної задачі з  $(n + 1)$  різними значеннями абсциси.

Інтерполяція поліномом надає можливість вибору базису в просторі таких поліномів. Вище було взято базис з одночленів  $1, x, x^2, \dots, x_n$ . Це призводить до системи лінійних рівнянь, яка в принципі може бути вирішена одним з відомих методів рішення систем лінійних рівнянь. Однак у багатьох випадках така система рівнянь надзвичайно погано обумовлена. Наприклад, якщо абсциси  $\{x_i\}$  розподілені приблизно рівномірно на інтервалі  $[0; 1]$ . Виявляється, що послідовні ступені  $1, x, x^2, \dots, x_n$  майже лінійно залежні на інтервалі  $[0; 1]$ , частково тому, що вони є позитивними, а графіки йдуть від  $(0; 0)$  до  $(1; 1)$ . Саме ця близькість до лінійної залежності робить рішення лінійної системи при нормальній робочій точності вкрай важкою справою для порядку, що перевищує 10.

Методи відшукання полінома, що задовольняє умовам

$$P_n(x_i) = y_i, \text{ при } i = 0, 1, \dots, n,$$

можна розділити на наступні групи: метод Лагранжа, різнісні методи, ітераційні методи інтерполяції та інтерполяція сплайнами.

Важливо, однак, відзначити, що існує один і тільки один поліном ступеня  $n$ , який інтерполює задані  $(n + 1)$  точок. Є безліч різних формул для побудови інтерполяційних поліномів, заснованих на різному виборі базисів, однак при цьому наборі точок всі вони приводять до одного і того ж поліному.



В результаті для шуканого багаточлена отримуємо

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \left[ y_j \cdot \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_{j-1}) \cdot (x-x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_j-x_0) \cdot (x_j-x_1) \cdot \dots \cdot (x_j-x_{j-1}) \cdot (x_j-x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x_j-x_n)} \right]. \quad (2.22)$$

Ввівши позначення

$$L_j(x) = (x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_{j-1}) \cdot (x-x_{j+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n),$$

можна записати багаточлен в більш компактному вигляді

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n \left[ y_j \cdot \frac{L_j(x)}{L_j(x_j)} \right]. \quad (2.23)$$

Приклади лінійного і квадратичного поліномів, записаних за формулою Лагранжа, наведені нижче

$$P_1(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)} + y_1 \cdot \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)};$$

$$P_2(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2)} + y_1 \cdot \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_2)}{(x_1-x_0) \cdot (x_1-x_2)} + y_2 \cdot \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1)}{(x_2-x_0) \cdot (x_2-x_1)}.$$

Оптимальний розподіл вузлів інтерполяції, що забезпечує мінімальну оцінку похибки на всьому відрізку, є нерівномірним. Вузли згущуються на кінцях відрізка і розріджуються в його середині. Це викликає незручності на практиці. Нерівномірний розподіл вузлів можна задати, наприклад, якщо інтерполяційний багаточлен будується один раз, причому для всього заданого відрізка. Якщо ж відрізок  $[a, b]$  великий і потрібна висока точність апроксимації функції, то одним інтерполяційним багаточленом прийнятного ступеня навіть з оптимальним розподілом вузлів зазвичай не вдається забезпечити задану точність інтерполяції на всьому відрізку. В такому випадку часто користуються таблицею значень функції у вузлах, розташованих з постійним кроком, число яких може бути досить великим. Коли задається значення аргументу  $x$ , то обирається кілька найближчих до  $x$  вузлів, використовуваних для побудови інтерполяційного багаточлена зазвичай невисокого ступеня, і проводиться інтерполяція.

Для інтерполяції за формулою Лагранжа з рівновіддаленими вузлами можна записати, що  $x_i = x_0 + i \cdot h$ , де  $i = 0, 1, \dots, n$ ;  $y_i = f(x_i)$  – задані значення функції.

Вводимо безрозмірну незалежну змінну  $q = \frac{x - x_0}{h}$ , звідки випливає, що

$$x = x_0 + q \cdot h.$$

Тоді вузлу  $x_j$  буде відповідати

$$q = \frac{x_j - x_0}{h} = \frac{x_0 + j \cdot h - x_0}{h} = j, \quad (2.24)$$

і, крім того, будуть виконуватися співвідношення

$$x - x_j = h \cdot (q - j); \quad x_j - x_i = h \cdot (j - i). \quad (2.25)$$

Інтерполяційний багаточлен ступеня  $n = 1$  можна записати

$$P_1(x) = P_1(x_0 + q \cdot h) = y_0 \cdot (1 - q) + y_1 \cdot q.$$

Для ступеня  $n = 2$  відповідно

$$P_2(x) = P_2(x_0 + q \cdot h) = y_0 \cdot \frac{(q-1) \cdot (q-2)}{2} - y_1 \cdot q \cdot (q-2) + y_2 \cdot \frac{q \cdot (q-1)}{2}.$$

У загальному випадку інтерполяційний багаточлен за формулою Лагранжа прийме наступний вигляд:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + q \cdot h) = \sum_{j=0}^n y_0 \cdot p_{n,j}, \quad (2.26)$$

$$\text{де } p_{n,j}(q) = (-1)^{n-j} \cdot \frac{q \cdot (q-1) \cdot \dots \cdot (q-j+1) \cdot (q-j-1) \cdot \dots \cdot (q-n)}{j!(n-j)!}.$$

Якщо центральний вузол позначити як  $x_0$ , а вузли, що знаходяться зліва і праворуч від  $x$  відповідно  $x_{-j}$  і  $x_j$ , то коефіцієнти  $A_{n,j}$ , що входять в формулу (2.22), визначаються з наведених нижче виразів.

$$\text{Для двох вузлів } y_0, y_1 \ (n = 1) \quad A_{1,j}(q) = (-1)^{j+1} \cdot \frac{q \cdot (q-1)}{q-j}.$$

Для багаточленів ступеня  $n = 2 \dots 5$  відповідно

$$A_{2,j}(q) = (-1)^{j+1} \cdot \frac{q \cdot (q^2 - 1)}{(1+j)!(1-j)!(q-j)};$$

$$A_{3,j}(q) = (-1)^{j+1} \cdot \frac{q \cdot (q^2 - 1) \cdot (q-2)}{(1+j)!(2-j)!(q-j)};$$

$$A_{4,j}(q) = (-1)^{j+1} \cdot \frac{q \cdot (q^2 - 1) \cdot (q^2 - 4)}{(2+j)!(2-j)!(q-j)};$$

$$A_{5,j}(q) = (-1)^{j+1} \cdot \frac{q \cdot (q^2 - 1) \cdot (q^2 - 4) \cdot (q-3)}{(2+j)!(3-j)!(q-j)}.$$

Формули Лагранжа для поліномів ступеня 1 ... 5 з рівновіддаленими вузлами і з центральною точкою  $x_0$  можна записати

$$P_1(q) = y_0 \cdot (1 - q) + y_1 \cdot q;$$

$$P_2(q) = y_{-1} \cdot \frac{q \cdot (q-1)}{2} + y_0 \cdot (1 - q^2) + y_1 \cdot \frac{q \cdot (q+1)}{2};$$

$$P_3(q) = y_{-1} \cdot \frac{-q \cdot (q-1) \cdot (q-2)}{6} + y_0 \cdot \frac{(q^2 - 1) \cdot (q-2)}{2} - y_1 \cdot \frac{q \cdot (q+1) \cdot (q-2)}{2} +$$

$$+ y_2 \cdot \frac{q \cdot (q^2 - 1)}{6};$$

$$P_4(q) = y_{-2} \cdot \frac{(q^2 - 1) \cdot q \cdot (q-2)}{24} + y_{-1} \cdot \frac{(q-1) \cdot q \cdot (q^2 - 4)}{6} + y_0 \cdot \frac{(q^2 - 1) \cdot (q^2 - 4)}{4} -$$

$$- y_1 \cdot \frac{(q+1) \cdot q \cdot (q^2 - 4)}{6} + y_2 \cdot \frac{(q^2 - 1) \cdot q \cdot (q+2)}{24};$$

$$P_5(q) = y_{-2} \cdot \frac{-q \cdot (q^2 - 1) \cdot (q-2) \cdot (q-3)}{120} + y_{-1} \cdot \frac{q \cdot (q-1) \cdot (q^2 - 4) \cdot (q-3)}{24} -$$

$$- y_0 \cdot \frac{(q^2 - 1) \cdot (q^2 - 4) \cdot (q-3)}{12} - y_1 \cdot \frac{q \cdot (q+1) \cdot (q^2 - 4) \cdot (q-3)}{12} +$$

$$+ y_2 \cdot \frac{q \cdot (q^2 - 1) \cdot (q+2) \cdot (q-3)}{24} + y_3 \cdot \frac{q \cdot (q^2 - 1) \cdot (q^2 - 4)}{120}.$$

Похибка інтерполяції багаточленом за формулою Лагранжа визначається для загального випадку

$$\max_{[a,b]} |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \max_{[a,b]} |\omega_n(x)|, \quad (2.27)$$

де  $M_{n+1} = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$ ,  $\omega_n(x) = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$ .

Залежність точності інтерполяції за формулою Лагранжа для полінома з рівновіддаленими вузлами визначається в залежності від кроку, з яким вони розташовані, наступною формулою:

$$\max_{[x_0, x_n]} |f(x) - P_n(x)| \leq h^{n+1} \cdot \frac{M_{n+1}^h}{(n+1)!} \cdot \Omega_n, \quad (2.28)$$

де  $\Omega_n = \max_{[0, n]} |\bar{\omega}_n(q)|$ ;  $M_{n+1}^h = \max_{[x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$ ;  $\bar{\omega}_n(q) = q \cdot (q-1) \cdot \dots \cdot (q-n)$ .

## 2.4.2. Кінцеві та розділені різниці

### 2.4.2.1. Кінцеві різниці

Нехай  $x_k = x + k \cdot h$ , де  $k$  – ціле,  $h > 0$ ,  $f_k = f(x_k)$ .

Величина

$$\Delta f_k = f(x_k + h) - f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k) = f_{k+1} - f_k \quad (2.29)$$

називається кінцевою різницею першого порядку функції  $f$  в точці  $x_k$  (з кроком  $h$ ), а величина

$$\begin{aligned} \Delta^2 f_k &= \Delta(\Delta f_k) = \Delta f(x_k + h) - \Delta f(x_k) = (f(x_{k+2}) - f(x_{k+1})) - (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = \\ &= f_k - 2 \cdot f_{k+1} + f_{k+2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

є кінцева різниця другого порядку в точці  $x_k$ .

У загальному вигляді кінцева різниця  $n$ -го порядку функції  $f(x)$  в точці  $x_k$  визначається за рекурентною формулою [20, 22, 25, 28]

$$\Delta^n f_k = \Delta(\Delta^{n-1} f_k) = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k, \quad (2.31)$$

де  $n \geq 1$ ,  $\Delta^0 f_k = f_k$ .

При обчисленнях кінцеві різниці зручно записувати у вигляді таблиці (див. табл. 2.4).

Таблиця 2.4 – Кінцеві різниці

$x_0$	$f_0$			
		$\Delta f_0$		
$x_1$	$f_1$		$\Delta^2 f_0$	
		$\Delta f_1$		$\Delta^3 f_0$
$x_2$	$f_2$		$\Delta^2 f_1$	

$x_3$	$f_3$	$\Delta f_2$	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$
$x_4$	$f_4$	$\Delta f_3$		

**Лема 2.1.** Якщо функцію  $f$  визначено на відрізку  $[x_k, x_{k+n}]$  і вона має на ньому  $n$  безперервних похідних включно, то існує така точка  $\eta \in (x_k, x_{k+n})$ , що

$$\Delta^n f_k = h^n \cdot f^{(n)}(\eta). \quad (2.32)$$

Згідно виразу (2.29) формула (2.32) при  $n = 1$  збігається з формулою кінцевих збільшень Лагранжа.

**Теорема Лагранжа про кінцеве збільшення.** Якщо функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$  і диференційована на  $(a, b)$ , то на інтервалі  $(a, b)$  існує таке число  $X$ , що  $f(b) - f(a) = f'(X) \cdot (b - a)$ .

Число  $X$  часто записують у вигляді  $X = a + \theta \cdot (a + b)$ , ( $0 < \theta < 1$ ).

Доведемо лему при  $n = 2$ . Нехай  $\varphi(x) = f(x + h) - f(x)$ . Тоді згідно (2.31)

$$\Delta^2 f_k = \varphi(x_k + h) - \varphi(x_k)$$

і, отже, за формулою Лагранжа

$$\Delta^2 f_k = h \cdot \varphi'(\eta_1), \quad (2.33)$$

де  $\eta_1 \in (x_k, x_{k+1})$  – деяка точка, а  $\varphi'(\eta_1) = f'(\eta_1 + h) - f'(\eta_1)$ .

Застосовуючи ще раз формулу кінцевих збільшень Лагранжа до функції  $f'(x)$ , отримуємо

$$\varphi'(\eta_1) = h \cdot f''(\eta), \quad (2.34)$$

де  $\eta \in (\eta_1, \eta_1 + h) \subset (x_k, x_{k+2})$  – деяка точка.

З (2.33) і (2.34) випливає твердження леми 2.1 при  $n = 2$ . Для  $n > 2$  леми 2.1 доводиться аналогічно.

**Висновок леми 2.1.** Кінцева різниця  $n$ -го порядку алгебраїчного багаточлена  $n$ -й ступеня постійна, тобто не залежить від  $k$ , а кінцеві різниці вищих порядків дорівнюють 0.

**Практичне застосування кінцевих різниць.** Згідно леми 2.1, якщо  $f(x)$  визначено на відрізку  $[x_0, x_{n+1}]$  і вона має на ньому  $n + 1$  безперервних похідних, то величина  $(\Delta^{n+1} f_0)/(h^{n+1})$ , яку можна обчислити через табличні значення функції  $f$  за допомогою формули (2.31), дорівнює значенню похідної  $f^{(n+1)}$  в деякій точці  $\eta \in (x_0, x_{n+1})$ , де  $x_{n+1} = x_0 + (n + 1) \cdot h$ . Тому якщо  $h$  мале, то число  $|(\Delta^{n+1} f_0)/(h^{n+1})|$  можна наближено прийняти за величину

$$M_{n+1}^h = \max_{[x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$$

і використовувати в оцінці похибки інтерполяції вираз (2.28) (див. оцінку похибки для полінома за формулою Лагранжа).

Такою нестрогою оцінкою похибки користуються, якщо досить складно обчислюється похідна або, взагалі, є в розпорядженні тільки табличні значення  $(n + 1)$  раз диференційованої функції.

#### 2.4.2.2. Розділені різниці

Нехай  $x_0, x_1, \dots, x_n$  – довільні точки (вузли) осі  $x$ , причому  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ . Значення  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$  функції  $f$  в вузлах називаються розділеними різницями нульового порядку. Число

$$f(x_0; x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad (2.35)$$

називається розділеною різницею першого порядку функції  $f(x)$  в точці  $x_0$ . Очевидно, що

$$f(x_0; x_1) = f(x_1; x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}, \quad (2.36)$$

тобто розділена різниця першого порядку є симетричною функцією аргументів  $x_0$  і  $x_1$ .

Розділена різниця  $n$ -го порядку визначається через розділені різниці  $(n - 1)$ -го порядку за рекурентною формулою [20, 22, 28]

$$f(x_0; x_1; \dots; x_n) = \frac{f(x_1; x_2; \dots; x_n) - f(x_0; x_1; \dots; x_{n-1})}{x_n - x_0}. \quad (2.37)$$

При обчисленнях розділені різниці записують у вигляді таблиці (табл. 2.5).

Таблиця 2.5 – Розділені різниці

$x_0$	$f(x_0)$			
$x_1$	$f(x_1)$	$f(x_0; x_1)$		
$x_2$	$f(x_2)$	$f(x_1; x_2)$	$f(x_0; x_1; x_2)$	$f_0(x_0; x_1; x_2; x_3)$
$x_3$	$f(x_3)$	$f(x_2; x_3)$	$f(x_1; x_2; x_3)$	$f_1(x_1; x_2; x_3; x_4)$
$x_4$	$f(x_4)$	$f(x_3; x_4)$		

**Лема 2.2.** Розділена різниця  $n$ -го порядку виражається через вузлові значення функції за формулою

$$f(x_0; x_1; \dots; x_n) = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)}, \quad (2.38)$$

тобто є симетричною функцією своїх аргументів.

При  $n = 1$  дане твердження випливає з рівності (2.36). При  $n = 2$  відповідно до (2.37) маємо

$$\begin{aligned} f(x_0; x_1; x_2) &= \frac{1}{x_2 - x_0} \cdot \left[ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right] = \\ &= \frac{1}{x_2 - x_0} \cdot \left[ \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} - \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} \right] = \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1) \cdot (x_1 - x_0) - f(x_1) \cdot (x_1 - x_2)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_2 - x_0)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} = \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} + \frac{-f(x_1) \cdot x_0 + f(x_1) \cdot x_2}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_2 - x_0)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} = \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Рівність (2.38) при  $n = 2$  доведено. Доведення рівності (2.38) для довільного  $n$  проводиться за індукцією.

Згідно до леми 2.2 значення розділеної різниці  $n$ -го порядку не залежить від нумерації  $(n + 1)$  вузлів, за якими вона будується. Всього є  $(n + 1)!$  різних варіантів їх нумерації цілими числами від 0 до  $n$ .

**Лема 2.3.** Якщо  $x_k = x_0 + k \cdot h$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , тобто вузли розташовано з постійним кроком  $h > 0$ , то між розділеною різницею  $n$ -го порядку і кінцевою різницею  $n$ -го порядку є такий зв'язок:

$$f(x_0; x_1; \dots; x_n) = \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}. \quad (2.40)$$

**Доказ.** Для  $n = 1$  рівність випливає з (2.29) і (2.35). При знаходженні кожної наступної по порядку кінцевої різниці відбувається згідно (2.31) просто віднімання попередніх різниць, а при обчисленні наступної розділеної різниці відповідно до формули (2.37) проводиться додатково до віднімання ділення на величину  $x_n - x_0 = n \cdot h$ . Звідси і виникає величина  $n! h^n$  в знаменнику правої частини рівності (2.40).

**Лема 2.4.** Нехай  $[a, b]$  – мінімальний відрізок, що містить вузли  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , і функція визначена на відрізку  $[a, b]$  і має на ньому безперервні до порядку  $n$  включно похідні. Тоді існує така точка  $\eta \in (a, b)$ , що

$$f(x_0; x_1; \dots; x_n) = \frac{f^{(n)}(\eta)}{n!}. \quad (2.41)$$

Для вузлів, розташованих з постійним кроком, рівність (2.41) випливає з лем 2.1 та 2.3.

**Висновок леми 2.4.** Розділена різниця  $n$ -го порядку від алгебраїчного багаточлена  $n$ -го ступеня приймає постійне значення, яке залежить від вибору вузлів  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , а розділені різниці вищих порядків дорівнюють нулю.

### 2.4.3. Різнісні методи інтерполяції

Незважаючи на те, що інтерполяційна формула Лагранжа дозволяє вирішувати задачі апроксимації функцій і часто використовується в теоретичних викладках, на практиці більш широкого поширення набули різнісні інтерполяційні формули, зокрема формули Ньютона [1–3, 17, 18, 20, 22–25, 27, 31].

#### 2.4.3.1. Інтерполяційні формули Ньютона

Інтерполяційний багаточлен за формулою Ньютона для інтегрування вперед має вигляд

$$P_n(x) = c_0 + c_1 \cdot (x - x_0) + c_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots + c_n \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}). \quad (2.42)$$

Коефіцієнти  $c_j$  знаходяться з  $n$  рівнянь

$$P_n(x_i) = f(x_i),$$

що дозволяє записати систему

$$\begin{aligned} c_0 &= f(x_0); \\ c_0 + c_1 \cdot (x_1 - x_0) &= f(x_1); \\ c_0 + c_1 \cdot (x_2 - x_0) + c_2 \cdot (x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) &= f(x_2); \\ &\dots \\ c_0 + c_1 \cdot (x_n - x_0) + \dots + c_n \cdot (x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) \cdot \dots \cdot (x_n - x_{n-1}) &= f(x_n). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Це лінійна система рівнянь з трикутною матрицею, і визначення з її допомогою значень коефіцієнтів  $c_j$  не викликає ускладнень.

Можна відзначити, що  $c_0 = f(x_0)$  є розділеною різницею нульового порядку функції  $f(x)$  в точці  $x_0$ . Коефіцієнт  $c_1$  є розділеною різницею першого порядку функції  $f(x)$  в точці  $x_0$ . Це впливає з підстановки  $c_0$  в друге рівняння системи

$$c_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_0; x_1).$$

Відповідно  $c_2$  є розділеною різницею другого порядку функції  $f(x)$  в точці  $x_0$

$$c_2 = \frac{f(x_1; x_2) - f(x_0; x_1)}{x_2 - x_0} = f(x_0; x_1; x_2),$$

а коефіцієнт  $c_n$  є розділеною різницею  $n$ -го порядку функції  $f(x)$  в точці  $x_0$

$$c_n = f(x_0; x_1; \dots; x_n).$$

З урахуванням цього можна записати інтерполяційний поліном Ньютона з розділеними різницями для нерівних проміжків для інтерполяції вперед і для інтерполяції назад відповідно

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0; x_1) \cdot (x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots + f(x_0; x_1; \dots; x_n) \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}); \quad (2.44)$$

$$P_n(x) = f(x_n) + f(x_{n-1}; x_n) \cdot (x - x_n) + f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) \cdot (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n) + \dots + f(x_0; x_1; \dots; x_n) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n). \quad (2.45)$$

Для випадку рівновіддалених вузлів, якщо  $x_k = x_0 + k \cdot h$ ,  $h > 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ,  $f_k = f(x_k)$ , то, з огляду на зв'язок розділеної різниці з кінцевою різницею і ввівши безрозмірну змінну  $q = \frac{x - x_0}{h}$ , інтерполяційний багаточлен можна переписати в наступному вигляді:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + q \cdot h) = f_0 + q \cdot \frac{\Delta f_0}{1!} + q \cdot (q - 1) \cdot \frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \dots + q \cdot (q - 1) \cdot \dots \cdot (q - n + 1) \cdot \frac{\Delta^n f_0}{n!}. \quad (2.46)$$

Цей поліном називається інтерполяційним багаточленом Ньютона з рівновіддаленими вузлами для інтерполяції вперед. У ньому початок відліку  $q$  розташоване в крайньому лівому вузлі  $x_0$ , і використовувані кінцеві різниці йдуть в таблиці різниць від  $f_0$  вправо і вниз (табл. 2.6).

Таблиця 2.6 – Кінцеві різниці для інтерполяції вперед

$x_0$	$f_0$	$\Delta f_0$		
-------	-------	--------------	--	--

$x_1$	$f_1$		$\Delta^2 f_0$	
$x_2$	$f_3$	$\Delta f_1$	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_0$
$x_3$	$f_4$	$\Delta f_2$	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_1$
$x_4$	$f_5$	$\Delta f_3$		

Цей інтерполяційний поліном зручно використовувати для знаходження значень функцій, якщо аргументи на початку заданої таблиці значень і для екстраполяції лівіше точки  $x_0$ , тобто для  $q < 0$ .

Інтерполяційний багаточлен з рівновіддаленими вузлами  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_0$ , де

$$x_k = x_n + k \cdot h, \quad q = \frac{x - x_n}{h}, \quad \text{має вигляд}$$

$$P_n(x) = P_n(x_n + q \cdot h) = f_n + q \cdot \frac{\Delta f_{n-1}}{1!} + q \cdot (q+1) \cdot \frac{\Delta^2 f_{n-2}}{2!} + \dots + q \cdot (q+1) \cdot \dots \cdot (q+n-1) \cdot \frac{\Delta^n f_0}{n!} \quad (2.47)$$

і називається інтерполяційним багаточленом Ньютона з рівновіддаленими вузлами для інтерполяції назад. У ньому початок відліку  $q$  розташовано в крайньому правому вузлі  $x_0$ , а кінцеві різниці, що використовуються, йдуть в таблиці від  $f_0$  вправо вгору (табл. 2.7).

Такий інтерполяційний поліном зручно використовувати при інтерполяції в кінці таблиці і екстраполяції правіше точки  $x_n$ , тобто для  $q > 0$ .

Похибка інтерполяційних формул Ньютона для інтерполяції вперед і інтерполяції назад оцінюється наступними виразами відповідно:

$$R'_n(x) = R'_n(x_0 + q \cdot h) = h^{n+1} \cdot \bar{\omega}'_n(q) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!};$$

$$R''_n(x) = R''_n(x_n + q \cdot h) = h^{n+1} \cdot \bar{\omega}''_n(q) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

де  $\bar{\omega}'_n(q) = q \cdot (q-1) \cdot \dots \cdot (q-n)$ ;  $\bar{\omega}''_n(q) = q \cdot (q+1) \cdot \dots \cdot (q+n)$ ,

$f^{(n+1)}$  –  $(n + 1)$ -та похідна по  $x$ ,  $\xi$  – деяка точка мінімального відрізка, який містить вузли інтерполяції  $x_0, x_1, \dots, x_n$  і точку  $x$ .

Таблиця 2.7 – Кінцеві різниці для інтерполяції назад

$x_4$	$f_4$			
		$\Delta f_4$		
$x_3$	$f_3$		$\Delta^2 f_4$	
		$\Delta f_3$		$\Delta^3 f_4$
$x_2$	$f_2$		$\Delta^2 f_3$	
		$\Delta f_2$		$\Delta^3 f_3$
$x_1$	$f_1$		$\Delta^2 f_2$	
		$\Delta f_1$		
$x_0$	$f_0$			

### 2.4.3.2. Перетворення полінома, записаного за формулою Лагранжа, у поліном, записаний за формулою Ньютона

Доказ того, що для даного набору точок за інтерполяційними формулами Лагранжа і Ньютона виходить один і той же поліном ступеня  $n$ , досить громіздкий. Тому обмежимося демонстрацією перетворення полінома першого ступеня, записаного за формулою Лагранжа, в поліном того ж ступеня за формулою Ньютона:

$$\begin{aligned}
 P_1(x) &= f(x_0) \cdot \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1) \cdot \frac{x-x_0}{x_1-x_0} = f(x_0) + f(x_0) \cdot \frac{x-x_1}{x_0-x_1} + \\
 &+ f(x_1) \cdot \frac{x-x_0}{x_1-x_0} - f(x_0) = \\
 &= f(x_0) - f(x_0) \cdot \frac{x-x_1}{x_1-x_0} + f(x_1) \cdot \frac{x-x_0}{x_1-x_0} - f(x_0) = \\
 &= f(x_0) + \frac{-f(x_0) \cdot (x-x_1) + f(x_1) \cdot (x-x_0) - f(x_0) \cdot (x_1-x_0)}{x_1-x_0} = \\
 &= f(x_0) + \frac{-f(x_0) \cdot x + f(x_0) \cdot x_1 + f(x_1) \cdot x - f(x_1) \cdot x_0 - f(x_0) \cdot x_1 + f(x_0) \cdot x_0}{x_1-x_0} = \\
 &= f(x_0) + \frac{x \cdot [f(x_1) - f(x_0)] - x_0 \cdot [f(x_1) - f(x_0)]}{x_1-x_0} =
 \end{aligned}$$

$$= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) = f(x_0) + \Delta f(x_0; x_1) \cdot (x - x_0).$$

Витративши декілька більше часу, то ж саме можна показати і для поліномів вищих ступенів.

### 2.4.3.3. Інтерполяційні формули Гауса, Стірлінга і Бесселя

Інтерполяційні формули Ньютона є не єдиними з різністних схем інтерполяції. Так, існують інтерполяційні формули Гауса, Стірлінга і Бесселя [1, 24, 38].

Перша інтерполяційна формула Гауса (інтерполяція вперед)

$$P_n(x) = y_0 + q \cdot \Delta y_0 + \frac{q \cdot (q-1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1) \cdot q \cdot (q-1)}{3!} \cdot \Delta^3 y_{-1} + \\ + \frac{(q+1) \cdot q \cdot (q-1) \cdot (q-2)}{4!} \cdot \Delta^4 y_{-2} + \frac{(q+2) \cdot (q+1) \cdot q \cdot (q-1) \cdot (q-2)}{5!} \cdot \Delta^5 y_{-2} + \dots + \\ + \frac{(q+n-1) \cdot \dots \cdot (q-n+1)}{(2 \cdot n-1)!} \cdot \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \frac{(q+n-1) \cdot \dots \cdot (q-n)}{(2 \cdot n)!} \cdot \Delta^{2n} y_{-n},$$

де  $q = (x - x_0)/h$ .

Друга інтерполяційна формула Гауса (інтерполяція назад)

$$P_n(x) = y_0 + q \cdot \Delta y_{-1} + \frac{(q+1) \cdot q}{2!} \cdot \Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1) \cdot q \cdot (q-1)}{3!} \cdot \Delta^3 y_{-2} + \\ + \frac{(q+2) \cdot (q+1) \cdot q \cdot (q-1)}{4!} \cdot \Delta^4 y_{-2} + \dots + \frac{(q+n-1) \cdot \dots \cdot (q-n+1)}{(2 \cdot n-1)!} \cdot \Delta^{2n-1} y_{-n} + \\ + \frac{(q+n) \cdot q \cdot (q+n-1) \cdot \dots \cdot (q-n+1)}{(2 \cdot n)!} \cdot \Delta^{2n} y_{-n},$$

де  $q = (x - x_0)/h$ .

Область застосування формул Гауса аналогічна області застосування формул Ньютона.

Інтерполяційні формули Стірлінга і Бесселя ефективні для  $|q| \leq 0,25$  і  $0,25 \leq |q| \leq 0,75$ .

### Інтерполяційна формула Стірлінга

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & y_0 + q \cdot \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + \frac{q^2}{2} \cdot \Delta^2 y_{-1} + \frac{q \cdot (q^2 - 1)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \\
 & + \frac{q^2 \cdot (q^2 - 1)}{4!} \cdot \Delta^4 y_{-2} + \frac{q \cdot (q^2 - 1) \cdot (q^2 - 2^2)}{5!} \cdot \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \\
 & \frac{q^2 \cdot (q^2 - 1) \cdot (q^2 - 2^2)}{6!} \cdot \Delta^6 y_{-3} + \dots + \frac{q \cdot (q^2 - 1) \cdot (q^2 - 2^2) \cdot \dots \cdot [q^2 - (n-1)^2]}{(2 \cdot n - 1)!} \times \\
 & \times \frac{\Delta^{2n-1} y_{-n} + \Delta^{2n-1} y_{-(n-1)}}{2} + \frac{q^2 \cdot (q^2 - 1) \cdot (q^2 - 2^2) \cdot \dots \cdot [q^2 - (n-1)^2]}{(2 \cdot n)!} \cdot \Delta^{2n} y_{-n},
 \end{aligned}$$

де  $q = (x - x_0)/h$ .

### Інтерполяційні формули Бесселя

$$\begin{aligned}
 P_n(x) = & \frac{y_0 + y_{-1}}{2} + (q - 0,5) \cdot \Delta y_0 + \frac{q \cdot (q - 1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \\
 & \frac{(q - 0,5) \cdot q \cdot (q - 1)}{3!} \cdot \Delta^3 y_{-1} + \frac{q \cdot (q - 1) \cdot (q + 1) \cdot (q - 2)}{4!} \cdot \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \\
 & + \frac{(q - 0,5) \cdot q \cdot (q - 1) \cdot (q + 1) \cdot (q - 2)}{5!} \cdot \Delta^5 y_{-2} + \\
 & + \frac{q \cdot (q - 1) \cdot (q + 1) \cdot (q - 2) \cdot (q + 2) \cdot (q + 3)}{6!} \cdot \frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} + \dots + \\
 & + \frac{q \cdot (q - 1) \cdot (q + 1) \cdot (q - 2) \cdot (q + 2) \cdot \dots \cdot (q - n) \cdot (q + n - 1)}{(2 \cdot n)!} \cdot \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} + \\
 & + \frac{(q - 0,5) \cdot q \cdot (q - 1) \cdot (q + 1) \cdot (q - 2) \cdot (q + 2) \cdot \dots \cdot (q - n) \cdot (q + n - 1)}{(2 \cdot n + 1)!} \cdot \Delta^{2n+1} y_{-n}
 \end{aligned}$$

де  $q = (x - x_0)/h$ .

#### 2.4.4. Ітераційні методи інтерполяції (метод Ейткена)

Ці методи засновані на повторному застосуванні простої інтерполяційної схеми. Найбільш відомим з них є метод Ейткена [18], сутність якого полягає в повторному застосуванні лінійної інтерполяції.

Лінійна інтерполяція між точками  $(x_0, y_0)$  і  $(x_i, y_i)$  здійснюється за формулою

$$y_{i,1}(x) = \frac{1}{x_i - x_0} \cdot [y_{0,0} \cdot (x_i - x) - y_{i,0} \cdot (x_0 - x)],$$

де  $i = 1, 2, \dots, n$ .

За допомогою цієї формули, задавши значення  $x$ , можна скласти таблицю функцій  $y_{i,1}(x)$ , де  $i = 1, 2, \dots, n$ . Використовуючи ці функції, за допомогою лінійної інтерполяції

$$y_{i,2}(x) = \frac{1}{x_i - x_1} \cdot [y_{1,1}(x) \cdot (x_i - x) - y_{i,1}(x) \cdot (x_1 - x)]$$

отримаємо нове сімейство співвідношень, де  $i = 2, 3, \dots, n$ .

Простою підстановкою можна показати, що вирази для  $y_{i,2}(x)$  являють собою багаточлени другого ступеня, що описують криві, що проходять через точки  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  і  $(x_i, y_i)$ . Здобувши багаточлени  $y_{i,2}$ , за допомогою лінійної інтерполяції можна записати вираз для багаточлена третього ступеня

$$y_{i,3}(x) = \frac{1}{x_i - x_2} \cdot [y_{2,2}(x) \cdot (x_i - x) - y_{i,2}(x) \cdot (x_2 - x)],$$

де  $i = 3, 4, \dots, n$ , описує криві, що проходять через точки  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  і  $(x_i, y_i)$ .

Продовжуючи цей процес, можна отримати значення  $y_{i,j}(x)$ , які будуть прагнути до значення  $f(x)$ . Ітерацію можна закінчити, коли в значеннях двох інтерполяційних багаточленів послідовних ступенів збігається необхідна кількість знаків. Слід, однак, відзначити, що при обчисленні багаточленів з високими ступенями результати наближень можуть погіршуватися в порівнянні з результатами наближень поліномами більш низьких ступенів через помилки заокруглень.

Метод Ейткена не вимагає, щоб використовувані для інтерполяції значення функції були розташовані через рівні інтервали. Інтерполяційний поліном при використанні ітераційного методу Ейткена в явному вигляді не будується.

Наведені вище формули можуть бути записані за допомогою визначників

$$y_{i,1} = \frac{1}{x_i - x_0} \cdot \begin{vmatrix} y_{0,0} & x_0 - x \\ y_{i,0} & x_i - x \end{vmatrix}; \quad y_{i,2} = \frac{1}{x_i - x_1} \cdot \begin{vmatrix} y_{1,1} & x_1 - x \\ y_{i,1} & x_i - x \end{vmatrix};$$

$$y_{i,3} = \frac{1}{x_i - x_2} \cdot \begin{vmatrix} y_{2,2} & x_2 - x \\ y_{i,2} & x_i - x \end{vmatrix}$$

або в загальному вигляді

$$Y_{0,1} = \frac{1}{x_1 - x_0} \cdot \begin{vmatrix} x - x_0 & y_0 \\ x - x_1 & y_1 \end{vmatrix}; \quad Y_{1,2} = \frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \begin{vmatrix} x - x_1 & y_1 \\ x - x_2 & y_2 \end{vmatrix}; \quad \dots;$$

$$Y_{0,1,2} = \frac{1}{x_2 - x_0} \cdot \begin{vmatrix} x - x_0 & Y_{0,1} \\ x - x_2 & Y_{1,2} \end{vmatrix}; \quad \dots \quad Y_{0,1,2,3} = \frac{1}{x_3 - x_0} \cdot \begin{vmatrix} x - x_0 & Y_{0,1,2} \\ x - x_3 & Y_{1,2,3} \end{vmatrix}; \quad \dots;$$

. . . . .

## 2.4.5. Інтерполяція сплайнами

Отже, можна провести єдиний поліном ступеня меншим або рівним  $n$  через будь-які  $(n + 1)$  точок з різними абсцисами, і це один з можливих підходів до задачі апроксимації функцій. Оскільки вся множина даних включається в одну поліноміальну функцію, то вона може бути названа глобальним інтерполантом цих даних. Часто глобальну поліноміальну інтерполяцію краще не застосовувати взагалі.

Інтерполяційним масивом на відрізку  $[a; b]$  назвемо будь-який трикутний масив з тією властивістю, що всі  $x_j^i \in [a, b]$  і елементи кожного окремого рядка різні.

$$\begin{array}{cccc} x_0^1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdot & \cdot \\ x_0^2 & x_1^3 & x_2^3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Нехай  $P_n(x)$  – інтерполяційний поліном, що співпадає з функцією  $f(x)$  в точках  $(n + 1)$ -го рядка.

**Теорема Фабера.** Для будь-якого інтерполяційного масиву знайдуться безперервна функція  $g(x)$  і точка  $x \in [a, b]$  такі, що  $P_n(x)$  не збігається до  $g(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  [19].

Прикладом до даної теореми може служити функція Рунге [19]. Небезпеки, пов'язані з поліноміальною інтерполяцією, вперше виявив Рунге в 1901 р. Він намагався інтерполювати поліномами на інтервалі  $[-1; 1]$  просту функцію  $f(x) = \frac{1}{1 + 25 \cdot x^2}$  при рівномірному розподілі абсцис. З'ясувалося, що при нескінченному збільшенні порядку  $n$  інтерполяційного полінома  $P_n$  послідовність  $P_n(x)$  розходиться на інтервалах  $0,726 \leq |x| < 1$ , причому глобальна поліноміальна інтерполяція навіть в даному випадку дає гарну пристайність в центральній частині інтервалу (рис. 2.5).

Крім питань глобальної збіжності, поліноміальна інтерполяція має і інші недоліки. Час побудови та обчислення інтерполяційних поліномів високого ступеня може для деяких задач виявитися надмірним. Поліноми високих ступенів можуть призводити також до серйозних проблем, пов'язаних з помилками округлень.

Поліноміальна інтерполяція не завжди дає задовільні результати при апроксимації залежностей (див. рис. 2.5). Основним недоліком інтерполяційних поліномів, які наближують функції, є те, що їх поведінка в межах будь-якої точки визначає їх поведінку в цілому. Незважаючи на виконання умов Лагранжа в вузлах, інтерполяційна функція може мати значне відхилення від кривої, що апроксимується, між вузлами. При цьому підвищення ступеня інтерполяційного полінома може призводити не до зменшення, а до збільшення похибки (наприклад, функція Рунге). Апаратом наближення, вільним від цих недоліків, є сплайни [3, 18, 39–43].

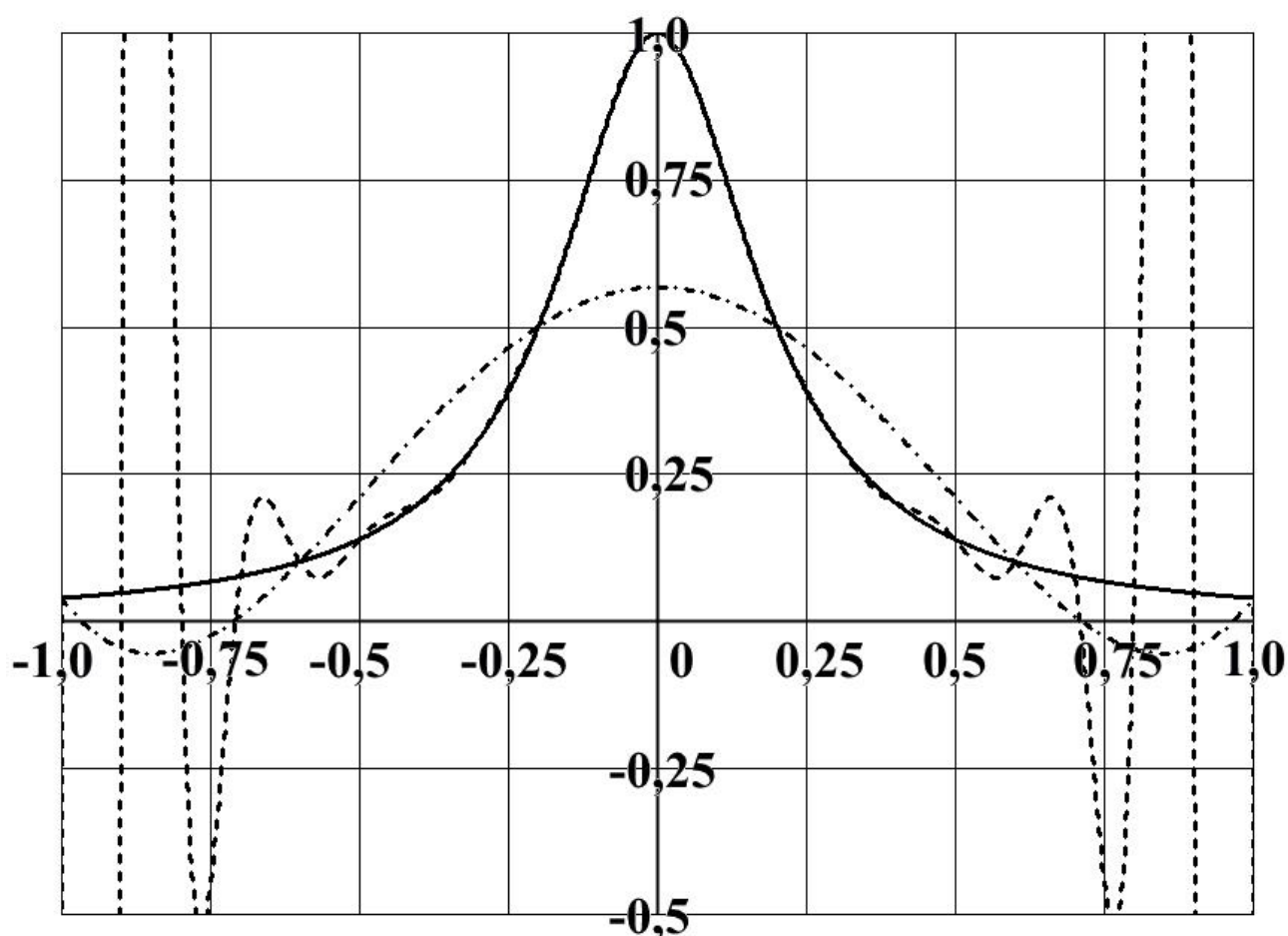


Рисунок 2.5 – Функція Рунге (суцільна лінія) і її апроксимація за формулою Лагранжа поліномами 5-го і 20-го ступеня (штрихова і штрихпунктирна лінія відповідно)

Для проведення гладких кривих через вузлові значення функції інженери використовують пружну металеву лінійку, поєднуючи її з вузловими точками. Будучи деформована таким чином, лінійка набуває форму, при якій збережена в ній пружна енергія мінімальна. Використовуючи теорію вигину бруса, можна строго показати, що сплайн це група пов'язаних кубічних багаточленів, в місцях сполучення яких перша і друга похідні неперервні.

Математичну теорію подібної апроксимації розвинено за останню чверть століття і вона називається теорією сплайн-функцій (від англійського слова *spline* – лінійка, рейка). Історія теорії сплайнів починається з роботи Шенберга, що вийшла в 1946 р.

Серед сплайнів найважливішу роль відіграють поліноміальні сплайни.

Нехай відрізок  $[a, b]$  розбито на  $n$  часткових відрізків  $[x_i, x_{i+1}]$ , де  $x_{i+1} = x_i + h_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ;  $x_0 = a$ ;  $x_n = b$ . Сплайном називається функція, яка разом з кількома своїми похідними неперервна на всьому заданому відрізку  $[a, b]$ , а на кожному частковому відрізку  $[x_i, x_{i+1}]$  окремо є деяким алгебраїчним багаточленом.

Максимальна за всіма частковими відрізками ступінь багаточленів називається ступенем сплайна, а різниця між ступенем сплайна і порядком найвищої безперервної на  $[a, b]$  похідною – дефектом сплайна.

Наприклад, безперервна кусково-лінійна функція (ламана) є сплайном першого ступеня з дефектом, що дорівнює одиниці, так як неперервна тільки сама функція (нульова похідна), а перша похідна вже розривна.

### 2.4.5.1. Лінійний сплайн

Нехай  $f(x)$  – функція, що інтерполюється, яка приймає значення  $f(x_i)$  в вузлах інтерполяції  $x_i \in [a, b]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ , причому  $(a = x_0) < x_1 < \dots < x_{n-1} < (x_n = b)$ .

Потрібно побудувати лінійний сплайн, що задовольняє наступним умовам:

1) на кожному відрізку  $[x_i, x_{i+1}]$

$$S_1(x) = S_{1,i}(x) = a_{0,i} + a_{1,i} \cdot (x - x_i); \quad (2.48)$$

$$2) S_{1,i}(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n - 1; \quad (2.49)$$

3)  $S_1(x)$  – безперервна функція на інтервалі  $[a, b]$

$$S_{1,i}(x_{i+1}) = S_{1,i+1}(x_{i+1}), i = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (2.50)$$

Таким чином, для того щоб однозначно задати  $S_1(x)$ , необхідно визначити  $2n$  невідомих з умови (2.48), маючи  $2n$  співвідношень (2.49) і (2.50).

З умов (2.48) і (2.49) маємо

$$a_{0,i} = f(x_i). \quad (2.51)$$

А з умов (2.48) і (2.50)

$$a_{0,i} + a_{1,i} \cdot (x_{i+1} - x_i) = a_{0,i+1} + a_{1,i+1} \cdot (x_{i+1} - x_{i+1});$$

$$a_{1,i} = \frac{a_{0,i+1} - a_{0,i}}{x_{i+1} - x_i};$$

або, використовуючи співвідношення (2.51)

$$a_{1,i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}. \quad (2.52)$$

Формули (2.51) і (2.52) дозволяють побудувати сплайн  $S_1(x)$  для заданих вузлів  $x_i$ .

Лінійний сплайн є ламаною лінією.

### 2.4.5.2. Параболічна сплайн-інтерполяція

Розглянемо задачу апроксимації функції  $f(x)$ , заданої таблично в вузлах  $x_i$ , параболічним сплайном  $S_2(x)$ .

Визначимо  $S_2(x)$  наступним чином:

$$S_2(x) = S_{2,i}(x) = a_{0,i} + a_{1,i} \cdot (x - x_i) + a_{2,i} \cdot (x - x_i)^2 \quad (2.53)$$

на кожному інтервалі  $[x_i, x_{i+1}]$ , де  $i = 0, 1, \dots, m - 1$ .

Формула (2.53) є поліномом другого ступеня (парабола).

Запишемо умови, виконання яких дозволить однозначно визначити послідовність сплайнів  $S_{2,i}(x)$ .

З умови інтерполяції (в вузлах значення сплайна має співпадати з відповідним значенням функції) впливають такі  $2m$  співвідношень:

$$\begin{aligned} S_{2,i}(x_i) &= f(x_i); \\ S_{2,i}(x_{i+1}) &= f(x_{i+1}), \end{aligned} \quad (2.54)$$

де  $i = 0, 1, \dots, m - 1$ .

Крім того, з визначення сплайна виходить, що перша похідна параболічного сплайна неперервна у внутрішніх вузлах, тобто

$$\frac{d}{dx} S_{2,i}(x_{i+1}) = \frac{d}{dx} S_{2,i+1}(x_{i+1}), \quad (2.55)$$

де  $i = 0, 1, \dots, m - 2$ .

Умови (2.55) дають  $(m - 1)$  співвідношення.

Для визначення сплайна  $S_2(x)$  за формулою (2.53) необхідно знайти  $3m$  невідомих

$$a_{0,i}; a_{1,i} \text{ и } a_{2,i}, \text{ де } i = 0, 1, \dots, m - 1. \quad (2.56)$$

Умови (2.54) і (2.55) дають  $(3 \cdot m - 1)$  співвідношення для визначення коефіцієнтів (2.56). Для того щоб знайти коефіцієнти, потрібно задати ще одну додаткову умову. Це може бути, наприклад, умова

$$\frac{d}{dx} S_{2,0}(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0), \quad (2.57)$$

або аналогічна умова на правому кінці інтервалу  $[a, b]$ .

Покажемо, що умови (2.54), (2.55) і (2.57) дають можливість однозначно визначити всі коефіцієнти (2.56) сплайна (2.53).

$$\frac{d}{dx} S_{2,i}(x) = \frac{d}{dx} [a_{0,i} + a_{1,i} \cdot (x - x_i) + a_{2,i} \cdot (x - x_i)^2] = a_{1,i} + 2 \cdot a_{2,i} \cdot (x - x_i). \quad (2.58)$$

При  $i = 1$

$$\frac{d}{dx} S_{2,0}(x) = a_{1,0} + 2 \cdot a_{2,0} \cdot (x - x_0);$$

$$\frac{d}{dx} S_{2,0}(x_0) = a_{1,0} + 2 \cdot a_{2,0} \cdot (x_0 - x_0) = a_{1,0};$$

з (2.57) знаходимо

$$a_{1,0} = \frac{d}{dx} f(x_0). \quad (2.59)$$

З (2.49) маємо (умова інтерполяції)

$$S_{2,i}(x_i) = a_{0,i} + a_{1,i} \cdot (x_i - x_i) + a_{2,i} \cdot (x_i - x_i)^2 = a_{0,i}$$

$$a_{0,i} = f(x_i), \text{ де } i = 0, 1, m - 1; \quad (2.60)$$

$$S_{2,i}(x_{i+1}) = a_{0,i} + a_{1,i} \cdot (x_{i+1} - x_i) + a_{2,i} \cdot (x_{i+1} - x_i)^2 = f(x_{i+1}).$$

Підставляючи (2.60), отримуємо

$$a_{1,i} \cdot (x_{i+1} - x_i) + a_{2,i} \cdot (x_{i+1} - x_i)^2 = f(x_{i+1}) - f(x_i). \quad (2.61)$$

З (2.55) і (2.58) маємо

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} S_{2,i}(x_{i+1}) &= a_{1,i} + 2 \cdot a_{2,i} \cdot (x_{i+1} - x_i); \\ \frac{d}{dx} S_{2,i+1}(x_{i+1}) &= a_{1,i+1} + 2 \cdot a_{2,i+1} \cdot (x_{i+1} - x_{i+1}); \\ a_{1,i} + 2 \cdot a_{2,i} \cdot (x_{i+1} - x_i) &= a_{1,i+1}.\end{aligned}$$

Звідси

$$a_{2,i} = \frac{a_{1,i+1} - a_{1,i}}{2 \cdot (x_{i+1} - x_i)}. \quad (2.62)$$

Підставляючи (2.62) у (2.61), отримуємо

$$\begin{aligned}a_{1,i} \cdot (x_{i+1} - x_i) + \frac{a_{1,i+1} - a_{1,i}}{2 \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot (x_{i+1} - x_i)^2 &= f(x_{i+1}) - f(x_i); \\ a_{1,i+1} &= \frac{2 \cdot (f(x_{i+1}) - f(x_i))}{(x_{i+1} - x_i)} - a_{1,i}.\end{aligned} \quad (2.63)$$

Формула (2.63) при послідовному застосуванні дає можливість визначити всі значення  $a_{1,1}; a_{1,2}; \dots; a_{1,m-1}$  за відомим коефіцієнтом  $a_{1,0}$  (2.59). Потім за формулою (2.62) знаходимо значення  $a_{2,0}; a_{2,1}; \dots; a_{2,m-2}$ . І, нарешті, з (2.61) знаходимо

$$\begin{aligned}a_{1,m-1} \cdot (x_m - x_{m-1}) + a_{2,m-1} \cdot (x_m - x_{m-1})^2 &= f(x_m) - f(x_{m-1}); \\ a_{2,m-1} &= \frac{f(x_m) - f(x_{m-1})}{(x_m - x_{m-1})^2} - \frac{a_{1,m-1}}{(x_m - x_{m-1})}.\end{aligned} \quad (2.64)$$

Таким чином, всі коефіцієнти (2.56) визначаються однозначно (див. співвідношення (2.59), (2.60), (2.62) – (2.64)). Побудований сплайн  $S_2(x)$  можна тепер використовувати для вирішення задачі інтерполяції, а саме визначення  $f(\bar{x})$  при  $\bar{x} \neq x_i$ .

Похибку квадратичної сплайн-інтерполяції можна оцінити таким чином.

Нехай функція  $f(x)$  при  $x \in (a, b)$  належить простору три рази безперервно диференційованих на відрізку  $(a, b)$  функцій. Тоді

$$|f(\bar{x}) - S_2(\bar{x})| \leq C \cdot h^3,$$

де  $h = \max|x_{i-1} - x_i|$ ,  $C$  – константа, незалежна від  $h$ .

### 2.4.5.3. Кубічні сплайни

На практиці широкого поширення набули сплайни третього ступеня.

Розглянемо один з найбільш поширених варіантів інтерполяції кубічними сплайнами. Використовуючи закони пружності, можна встановити, що пружно деформована лінійка між сусідніми вузлами проходить по лінії, що задовольняє рівняння

$$\varphi(x)^{(IV)} = 0. \quad (2.65)$$

Функцію  $\varphi(x)$  і будемо використовувати для апроксимації залежності  $f(x)$ , заданої в вузлах  $x_0, x_1, \dots, x_n$  значеннями  $f_0, f_1, \dots, f_n$ .

Якщо в якості функції  $\varphi(x)$  вибрати поліном, то відповідно до рівняння (2.65) ступінь полінома повинна бути не вище третьої. Цей поліном називають кубічним сплайном, який на інтервалі  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  записується у вигляді

$$S_{3,i}(x) = a_{i-1} + b_i \cdot (x - x_{i-1}) + c_i \cdot (x - x_{i-1})^2 + d_i \cdot (x - x_{i-1})^3, \quad (2.66)$$

де  $a_i, b_i, c_i, d_i$  – коефіцієнти сплайна, що визначаються з додаткових умов,  $i = 1, 2, \dots, n$  – номер сплайна.

На відміну від поліноміальної інтерполяції, коли вся апроксимована залежність описується одним поліномом, при сплайновій інтерполяції на кожному інтервалі  $[x_{i-1}, x_i]$  будується окремий поліном третього ступеня (2.66) зі своїми коефіцієнтами.

Коефіцієнти сплайнів визначаються з умов сполучення сусідніх сплайнів в вузлових точках:

1) рівність значень сплайнів  $S(x)$  і функції  $f(x)$ , що апроксимується, в вузлах – умови Лагранжа

$$S_i(x_{i-1}) = f_{i-1}, \quad S_i(x_i) = f_i; \quad (2.67)$$

2) безперервність першої і другої похідних від сплайнів в вузлах

$$S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i); \quad (2.68)$$

$$S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i). \quad (2.69)$$

Крім перерахованих умов необхідно задати умови на кінцях, тобто в точках  $x_0$  і  $x_n$ . У загальному випадку ці умови залежать від конкретної задачі. Досить часто використовуються умови вільних кінців сплайнів. Це має місце в разі, якщо лінійку не закріплено в точках поза інтервалу  $[x_0, x_n]$  і, отже, вона описується рівнянням прямої, тобто поліномом першого ступеня. Отже, виходячи з умов (2.69) безперервності других похідних сплайнів на кінцях інтервалу, запишемо співвідношення

$$S_1''(x_0) = 0; \quad (2.70)$$

$$S_n''(x_n) = 0. \quad (2.71)$$

Для поліпшення гладкості апроксимуючої кривої використовують і інші граничні умови.

Отримаємо алгоритм визначення коефіцієнтів кубічних сплайнів з умов (2.67) – (2.71). Умови (2.67) в вузлах  $x_{i-1}$  і  $x_i$  після підстановки  $i$ -го сплайна приймають вигляд

$$S_i(x_{i-1}) = a_i + b_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1}) + c_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1})^2 + d_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1})^3; \\ a_i = f_{i-1}; \quad (2.72)$$

$$S_i(x_i) = a_i + b_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + c_i \cdot (x_i - x_{i-1})^2 + d_i \cdot (x_i - x_{i-1})^3 = \\ = a_i + b_i \cdot h_i + c_i \cdot h_i^2 + d_i \cdot h_i^3; \\ a_i + b_i \cdot h_i + c_i \cdot h_i^2 + d_i \cdot h_i^3 = f_i, \quad (2.73)$$

де  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Продиференціювавши двічі сплайн (2.66) по змінній  $x$

$$S_i'(x) = b_i + 2 \cdot c_i \cdot (x - x_{i-1}) + 3 \cdot d_i \cdot (x - x_{i-1})^2; \quad (2.74)$$

$$S_i''(x) = 2 \cdot c_i + 6 \cdot d_i \cdot (x - x_{i-1}). \quad (2.75)$$

З умов безперервності похідних (2.68) і (2.69) при переході в точці  $x_i$  від  $i$ -го до  $(i + 1)$  сплайну з урахуванням виразів (2.74) і (2.75) отримаємо наступні співвідношення:

$$b_i + 2 \cdot c_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + 3 \cdot d_i \cdot (x_i - x_{i-1})^2 = b_{i+1} + 2 \cdot c_{i+1} \cdot (x_i - x_i) + 3 \cdot d_{i+1} \cdot (x_i - x_i)^2; \\ b_i + 2 \cdot c_i \cdot h_i + 3 \cdot d_i \cdot h_i^2 = b_{i+1}; \quad (2.76)$$

$$2 \cdot c_i + 6 \cdot d_i \cdot (x_i - x_{i-1}) = 2 \cdot c_{i+1} + 6 \cdot d_{i+1} \cdot (x_i - x_i);$$

$$c_i + 3 \cdot d_i \cdot h_i = c_{i+1}. \quad (2.77)$$

I, нарешті, з граничних умов (2.70) і (2.71) на підставі виразу для другої похідної (2.75) отримаємо, що

$$2 \cdot c_1 + 6 \cdot d_1 \cdot (x_0 - x_0) = 0;$$

$$c_1 = 0; \quad (2.78)$$

$$2 \cdot c_n + 6 \cdot d_n \cdot (x_n - x_{n-1}) = 0;$$

$$c_n + 3 \cdot d_n \cdot h_n = 0. \quad (2.79)$$

Співвідношення (2.72), (2.73), (2.76) – (2.79) являють собою повну систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів сплайнів  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  і  $d_i$ . Але перш ніж вирішувати цю систему, вигідно перетворити її так, щоб невідомими була тільки одна група коефіцієнтів  $c_i$ .

З рівняння (2.77) коефіцієнти  $d_i$  виразимо через коефіцієнти  $c_i$

$$d_i = (c_{i+1} - c_i) / (3 \cdot h_i). \quad (2.80)$$

Підставляючи в рівняння (2.73) співвідношення (2.72) і (2.80), представимо коефіцієнти  $b_i$  також через коефіцієнти  $c_i$

$$b_i = (f_i - f_{i-1}) / h_i - (c_{i+1} - 2 \cdot c_i) \cdot h_i / 3. \quad (2.81)$$

Після підстановки виразів (2.80) і (2.81) в співвідношення (2.76) отримаємо рівняння, в яке входять тільки невідомі коефіцієнти  $c_i$ :

$$(f_i - f_{i-1}) / h_i - (c_{i+1} - 2 \cdot c_i) \cdot h_i / 3 + 2 \cdot c_i \cdot h_i + 3 \cdot h_i^2 \cdot (c_{i+1} - c_i) / (3 \cdot h_i) =$$

$$= (f_{i+1} - f_i) / h_{i+1} - (c_{i+2} - 2 \cdot c_{i+1}) \cdot h_{i+1} / 3.$$

Розкриваємо дужки і множимо праву і ліву частини рівняння на 3 та для симетричності запису в отриманому рівнянні зменшуємо значення індексу на одиницю.

Після приведення подібних рівняння має наступний вигляд:

$$h_{i-1} \cdot c_{i-1} + 2 \cdot (h_{i-1} + h_i) \cdot c_i + h_i \cdot c_{i+1} = 3 \cdot [(f_i - f_{i-1}) / h_i - (f_{i-1} - f_{i-2}) / h_{i-1}], \quad (2.82)$$

де  $i = 2, 3, \dots, n$ .

При  $i = n$  співвідношення (2.77), з огляду на умову вільного кінця сплайна (2.79), в рівнянні (2.82) слід записати



$$h_{i-1} \cdot c_{i-1} + s_i \cdot c_i + h_i \cdot c_{i+1} = r_i. \quad (2.85)$$

Так само, як і метод Гауса, метод прогонки розділяється на два етапи – прямий і зворотній ходи. У процесі прямого ходу методу прогонки обчислюють значення коефіцієнтів лінійного зв'язку кожного попереднього невідомого  $c_i$  з наступним  $c_{i+1}$ .

З рівняння (2.85) при  $i = 2$  з урахуванням граничної умови (2.78) встановимо зв'язок коефіцієнта  $c_2$  з коефіцієнтом  $c_3$

$$c_2 = k_2 - l_2 \cdot c_3, \quad (2.86)$$

де  $k_2$  і  $l_2$  – прогоночні коефіцієнти

$$k_2 = r_2/s_2; \quad l_2 = h_2/s_2.$$

Потім, підставляючи вираз (2.86) в рівняння (2.85) при  $i = 3$ , отримаємо лінійну зв'язок коефіцієнта  $c_3$  з коефіцієнтом  $c_4$

$$c_3 = k_3 - l_3 \cdot c_4.$$

Поступаючи аналогічним чином для будь-яких сусідніх коефіцієнтів з номерами  $i$  та  $(i + 1)$ , можна встановити лінійну зв'язок у вигляді

$$c_i = k_i - l_i \cdot c_{i+1}. \quad (2.87)$$

В процесі виконання прямого ходу методу прогонки необхідно обчислити значення всіх прогоночних коефіцієнтів  $k_i$  та  $l_i$ , для яких отримаємо рекурентні співвідношення. Підставивши формулу зв'язку  $(i - 1)$ -го та  $i$ -го коефіцієнтів

$$c_{i-1} = k_{i-1} - l_{i-1} \cdot c_i$$

в рівняння (2.75), в результаті отримаємо

$$c_i = \frac{r_i - h_{i-1} \cdot k_{i-1}}{s_i - h_{i-1} \cdot l_{i-1}} - \frac{h_i}{s_i - h_{i-1} \cdot l_{i-1}} \cdot c_{i+1}.$$

Порівняння останнього співвідношення з формулою (2.87) дозволяє записати рекурентні формули для визначення прогоночних коефіцієнтів  $k_i$  і  $l_i$

$$k_i = \frac{r_i - h_{i-1} \cdot k_{i-1}}{s_i - h_{i-1} \cdot l_{i-1}}; \quad l_i = \frac{h_i}{s_i - h_{i-1} \cdot l_{i-1}}. \quad (2.88)$$

З огляду на граничну умову (2.78) і співвідношення

$$c_1 = k_1 - l_1 \cdot c_2,$$

а також вважаючи  $c_2 \neq 0$ , задаємо початкові коефіцієнти  $k_1 = 0$  та  $l_1 = 0$ . Потім за формулою (2.88) обчислюємо всі  $n$  пар прогоночних коефіцієнтів  $k_i$  і  $l_i$ .

На підставі співвідношення

$$c_n = k_n - l_n \cdot c_{n+1}$$

і граничної умови (2.83) отримаємо, що

$$c_n = k_n. \quad (2.89)$$

Далі послідовно застосуємо формулу (2.87) при  $i = n - 1, n - 2, \dots, 2$  і обчислимо значення шуканих величин  $c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_2$ . Ця процедура називається зворотнім ходом методу прогонки.

Метод прогонки застосовують не тільки для вирішення задачі сплайн-інтерполяції. Він широко використовується і при числовому інтегруванні граничних задач для лінійних диференціальних рівнянь методом кінцевих різниць.

Після визначення всіх коефіцієнтів  $c_i$  інші коефіцієнти сплайнів обчислюються за формулами (2.72), (2.80) і (2.81), після чого функцію  $\varphi(x)$ , що апроксимується, можна розрахувати за допомогою співвідношення (2.66) в будь-якій точці на інтервалі  $[x_0, x_n]$ .

### Контрольні питання

1. В яких випадках застосовують метод найменших квадратів для апроксимації функцій?
2. З якої умови знаходять коефіцієнти функцій при використанні методу найменших квадратів?
3. Чому в методі найменших квадратів підсумовують не власне значення помилок, а їх квадрати?
4. У чому відмінність екстраполяції від інтерполяції?
5. Як виглядають умови Лагранжа для інтерполяції?
6. Чому інтерполяційна формула Лагранжа на практиці використовується рідше, ніж інтерполяційні формули Ньютона?

7. На підставі чого можна стверджувати, що будь-яка безперервна функція  $f(x)$  на замкнутому інтервалі може бути добре наближена деяким поліномом ступеня  $n$ ?
8. Як довести єдиність полінома ступеня меншою або рівною  $n$ , що інтерполює довільну множину з  $(n + 1)$  точок?
9. Як виглядає інтерполяційна формула Лагранжа в загальному вигляді?
10. Який оптимальний розподіл вузлів інтерполяції, що забезпечує мінімальну оцінку похибки на всьому розглянутому відрізку?
11. Як виглядає інтерполяційна формула Лагранжа для рівномірного розташування вузлів?
12. Як оцінити похибку інтерполяції за формулою Лагранжа?
13. Чому інтерполяційні формули Ньютона зручніше використовувати на практиці, ніж інтерполяційну формулу Лагранжа?
14. Запишіть інтерполяційні формули Ньютона для інтерполяції вперед і назад для загального випадку.
15. Чому існує дві інтерполяційні формули Ньютона, а Лагранжу – одна?
16. Як кінцеві і розділені різниці використовуються при інтерполяції?
17. У чому перевага ітераційних методів інтерполяції?
18. Що таке сплайн?
19. На чому ґрунтується сплайн-інтерполяція?
20. Чому для інтерполяції використовують саме сплайн третьої ступеня?
21. Запишіть у загальному вигляді кубічний сплайн.
22. З яких умов знаходять коефіцієнти кубічного сплайна?

### 3. РІШЕННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

#### 3.1. Рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Із завданням рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) доволі часто доводиться стикатися в інженерній практиці. У загальному випадку система лінійних рівнянь має вигляд

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n &= c_1; \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n &= c_2; \\ \dots & \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{nn} \cdot x_n &= c_n. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Щоб ця система мала єдине рішення  $n$  рівнянь, що входять до неї повинні бути лінійно незалежними. Необхідною і достатньою умовою цього є умова нерівності нулю визначника цієї системи.

Алгоритми рішення задач такого типу поділяються на прямі та ітераційні [1–3, 16–20, 22–27, 44].

Ітераційні методи, засновано на отриманні та уточненні послідовних наближень до точного рішення, ефективні у випадку, коли багато нульових коефіцієнтів або високий порядок системи (метод Гауса ефективний до порядку  $10^4$ , ітераційні – до  $10^6$ ).

Метод Крамера для використання при вирішенні систем рівнянь не ефективний, так як вимагає великої кількості арифметичних операцій. Тому при вирішенні завдань на комп'ютерах цей метод не застосовується. Для порівняння, при вирішенні системи, що складається з 20 рівнянь з допомогою методу Крамера, треба було б обчислити 21 визначник порядку 20. Враховуючи, що визначник матриці  $A = (a_{ij})$  вводиться як сума членів виду  $\pm a_{1x} \cdot a_{2x} \cdot \dots \cdot a_{nx}$ , де пропущені індекси  $x$  потрібно заповнити довільною перестановкою цілих чисел  $1, \dots, n$ . В даному випадку мається  $20!$  членів, і кожен вимагає 19 помножень. Отже, рішення лінійної системи вимагає  $21 \times 20! \times 19$  помножень і приблизно стіль-

ки ж складань. Для реалізації методу Гауса потрібна кількість арифметичних операцій  $N \approx \frac{2}{3} \cdot n^3$ , тобто для  $n = 20$ ,  $N = \frac{2}{3} 20^3 \approx 5350$ .

### 3.1.1. Прямі методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

#### 3.1.1.1. Метод виключення Гауса

Найбільш поширені прямі методи засновано на приведенні системи рівнянь до «трикутного» виду. При цьому одне з рівнянь містить тільки одну невідому, а в кожному наступному додається ще по одній невідомій. Приведення до трикутного вигляду досягається складанням і відніманням рівнянь після множення їх на відповідні постійні множники.

Одним з використовуваних для цього методів є метод Гауса. Застосовуючи його, спочатку нормують перше рівняння, ділячи його на коефіцієнт  $a_{11}$ . Потім перше рівняння множать на перші коефіцієнти  $a_{i,1}$  всіх інших рівнянь і послідовно віднімають з інших рівнянь. В результаті перша змінна буде виключена з усіх рівнянь крім першого. На наступному етапі рішення така ж процедура застосовується до решти  $(n - 1)$  рівнянь. В результаті з решти  $(n - 2)$  рівнянь виключається друга невідома. Всю процедуру повторюють до тих пір, поки після  $n$  кроків всю систему не буде приведено до трикутного вигляду. Ця частина алгоритму називається прямим ходом методу Гауса. Зворотний хід методу Гауса дозволяє з останнього рівняння системи визначити одну невідому, а з кожного наступного ще по одній.

Математично цю процедуру можна описати таким чином.

На  $k$ -му кроці процесу виключення нові нормовані коефіцієнти  $k$ -го рівняння мають вигляд

$$b_{k,j} = \frac{a_{k,j}}{a_{k,k}},$$

а нові коефіцієнти в наступних рівняннях матимуть вигляд

$$b_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,k} \cdot b_{k,j}, \quad i > k.$$

Коефіцієнти рівнянь  $a_{i,j}$ , що стоять нижче, змінюються на кожному кроці.

### 3.1.1.2. Метод виключення Гауса-Жордана

Цей метод дає алгоритм приведення системи лінійних рівнянь до діагонального вигляду. Єдиною його формальною відмінністю від попереднього методу є те, що  $i \neq k$ , якщо  $k$ -й рядок є ведучим рядком. Тобто в методі Гауса перетворення зачіпають на  $k$ -му кроці тільки рівняння, що стоять нижче провідного рядка. У методі Гауса-Жордана перетворюються рівняння, що стоять і під провідним рядком, і над ним:

$$b_{k,j} = \frac{a_{k,j}}{a_{k,k}}; \quad b_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,k} \cdot b_{k,j}, \quad i \neq k.$$

Цілком очевидно, що цей метод полегшує отримання рішення. Його недоліком є збільшення обсягу обчислень.

Застосування обох описаних методів ускладнюється, якщо який-небудь з елементів провідного рядка дорівнює нулю. В останньому випадку ведучий рядок неможна нормувати. Однак, змінивши порядок, в якому розташовані рівняння системи, ці труднощі можна обійти. Можна показати, що найбільша точність досягається тоді, коли ведучий елемент має найбільше значення. Тому рядок з нульовим або малим провідним елементом треба замінити на рядок з тих, що стоять під ним, в якому в тому ж стовпці стоїть елемент, що має найбільше значення.

Хоча зазвичай прямі методи досить ефективні, в разі великих матриць вони поступаються ітераційним.

### 3.1.1.3. Рішення системи лінійних рівнянь для задачі апроксимації діаграми дійсних напружень

Вирішимо методами Гауса і Гауса-Жордана систему з чотирьох лінійних рівнянь для задачі апроксимації діаграми дійсних напружень з підрозділу 2.2.

Матриця коефіцієнтів системи рівнянь для даного завдання може бути записана як

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k^6 & \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k^5 & \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k^4 & \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k^3 & \sum_{k=1}^{11} (\sigma_k \cdot \varepsilon_k^3) \\ \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k^5 & \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k^4 & \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k^3 & \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k^2 & \sum_{k=1}^{11} (\sigma_k \cdot \varepsilon_k^2) \\ \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k^4 & \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k^3 & \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k^2 & \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k & \sum_{k=1}^{11} (\sigma_k \cdot \varepsilon_k) \\ \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k^3 & \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k^2 & \sum_{k=1}^{11} \varepsilon_k & 11 & \sum_{k=1}^{11} \sigma_k \end{bmatrix},$$

а при підстановці числових значень

$$\begin{bmatrix} 0,245405 & 0,360368 & 0,548325 & 0,882008 & 126,847738 \\ 0,360368 & 0,548325 & 0,882008 & 1,5604 & 217,87253 \\ 0,548325 & 0,882008 & 1,5604 & 3,32 & 433,499 \\ 0,882008 & 1,5604 & 3,32 & 11,0 & 1191,0 \end{bmatrix}.$$

Відповідно до алгоритму методу Гауса нормуємо перший рядок діленням на 0,245405

$$\begin{bmatrix} 1,0 & 1,468462 & 2,234368 & 3,594091 & 516,891416 \\ 0,360368 & 0,548325 & 0,882008 & 1,5604 & 217,87253 \\ 0,548325 & 0,882008 & 1,5604 & 3,32 & 433,499 \\ 0,882008 & 1,5604 & 3,32 & 11,0 & 1191,0 \end{bmatrix}.$$

Множимо послідовно перший рядок на  $(-0,360368)$ ,  $(-0,548325)$ ,  $(-0,882008)$  і складаємо відповідно з елементами другого, третього і четвертого рядків

$$\begin{bmatrix} 1,0 & 1,468462 & 2,234368 & 3,594091 & 516,891416 \\ 0,0 & 0,019138 & 0,076813 & 0,265204 & 31,601404 \\ 0,0 & 0,076813 & 0,33524 & 1,34927 & 150,074514 \\ 0,0 & 0,265204 & 1,34927 & 7,829983 & 735,097636 \end{bmatrix}.$$

Нормуємо другий рядок діленням на 0,019138

$$\begin{bmatrix} 1,0 & 1,468462 & 2,234368 & 3,594091 & 516,891416 \\ 0,0 & 1,0 & 4,013624 & 13,857362 & 1651,224416 \\ 0,0 & 0,076813 & 0,33524 & 1,34927 & 150,074514 \\ 0,0 & 0,265204 & 1,34927 & 7,829983 & 735,097636 \end{bmatrix}.$$

Множимо послідовно другий рядок на  $(-0,076813)$ ,  $(-0,265204)$  і складаємо відповідно з елементами третього і четвертого рядків

$$\begin{bmatrix} 1,0 & 1,468462 & 2,234368 & 3,594091 & 516,891416 \\ 0,0 & 1,0 & 4,013624 & 13,857362 & 1651,224416 \\ 0,0 & 0,0 & 0,02694 & 0,284839 & 23,238371 \\ 0,0 & 0,0 & 0,284839 & 4,154948 & 297,185539 \end{bmatrix}.$$

Нормуємо третій рядок діленням на 0,02694

$$\begin{bmatrix} 1,0 & 1,468462 & 2,234368 & 3,594091 & 516,891416 \\ 0,0 & 1,0 & 4,013624 & 13,857362 & 1651,224416 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 10,572963 & 862,587379 \\ 0,0 & 0,0 & 0,284839 & 4,154948 & 297,185539 \end{bmatrix}.$$

Множимо третій рядок на  $(-0,284839)$  і складаємо з елементами четвертого рядка

$$\begin{bmatrix} 1,0 & 1,468462 & 2,234368 & 3,594091 & 516,891416 \\ 0,0 & 1,0 & 4,013624 & 13,857362 & 1651,224416 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 10,572963 & 862,587379 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,143357 & 51,487099 \end{bmatrix}.$$

Нормуємо четвертий рядок діленням на 1,143357 і отримуємо «трикутну» матрицю

$$\begin{bmatrix} 1,0 & 1,468462 & 2,234368 & 3,594091 & 516,891416 \\ 0,0 & 1,0 & 4,013624 & 13,857362 & 1651,224416 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 10,572963 & 862,587379 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 & 1,0 & 45,03151 \end{bmatrix}.$$

На цьому прямий хід методу Гауса завершується і починається зворотній. Повертаючись до системи рівнянь, отримуємо з останнього рівняння  $A_0$ , з третього рівняння  $A_1$ , з другого  $A_2$ , а з першого  $A_3$ .

$$A_0 = 45,03151;$$

$$A_1 = 862,587379 - A_0 \cdot 10,572963;$$

$$A_2 = 1651,224416 - A_0 \cdot 13,857362 - A_1 \cdot 4,013624;$$

$$A_3 = 516,891416 - A_0 \cdot 3,594091 - A_1 \cdot 2,234368 - A_2 \cdot 1,468462.$$

Звідки послідовно знаходимо невідомі  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$

$$A_0 = 45,03151; \quad A_1 = 386,470888; \quad A_2 = -523,942219; \quad A_3 = 260,915408.$$

Перші три етапи методу Гауса-Жордана збігаються з аналогічними етапами методу Гауса.

Потім множимо послідовно другий рядок на  $(-1,468462)$ ,  $(-0,076813)$ ,  $(-0,265204)$  і складаємо відповідно з елементами першого, третього і четвертого рядків

$$\begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & -3,659487 & -16,754923 & -1907,86945 \\ 0,0 & 1,0 & 4,013624 & 13,857362 & 1651,224416 \\ 0,0 & 0,0 & 0,02694 & 0,284839 & 23,238371 \\ 0,0 & 0,0 & 0,284839 & 4,154948 & 297,185539 \end{bmatrix}.$$

Нормуємо третій рядок діленням на 0,02694

$$\begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & -3,659487 & -16,754923 & -1907,86945 \\ 0,0 & 1,0 & 4,013624 & 13,857362 & 1651,224416 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 & 10,572963 & 862,587379 \\ 0,0 & 0,0 & 0,284839 & 4,154948 & 297,185539 \end{bmatrix}.$$

Множимо третій рядок послідовно на  $3,659487$ ,  $(-4,013624)$ ,  $(-0,284839)$  і складаємо відповідно з елементами першого, другого і четвертого рядків



### 3.1.2.1. Метод Якобі (метод простої ітерації, метод одночасних зсувів)

У методі Якобі вихідні значення змінних використовуються для визначення нових значень  $x_1, x_2, \dots, x_n$  за допомогою наведених вище рівнянь. Процес припиняється, коли всі нові значення виявляються досить близькими до попередніх

$$\begin{aligned} |x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}| &\leq \varepsilon; \\ |x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)}| &\leq \varepsilon; \\ \cdot &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ |x_n^{(k+1)} - x_n^{(k)}| &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

або  $|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq \varepsilon$ , де  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

В іншому випадку нові значення використовуються замість вихідних. Цей процес повторюють до тих пір, поки не буде досягнута збіжність, або стане ясно, що процес розходиться. У цьому методі заміна значень всіх змінних проводиться одночасно (одночасне зміщення). Цей метод є найпростішим методом, але він має досить істотний недолік – повільна збіжність методу. Будь-який ітераційний метод вимагає завдання початкового наближення, яке може бути отримано будь-яким розумним способом. Очевидно, що чим ближче вихідне наближення до вирішення, тим менше ітерацій необхідно для його отримання.

### 3.1.2.2. Метод Гауса-Зейделя

Цей метод іноді називають методом Зейделя, методом послідовних зсувів або методом ітерацій Лібмана.

У методі Гауса-Зейделя уточнене значення  $x_1$  відразу ж використовується для обчислення  $x_2$ . Потім за новими значеннями  $x_1$  і  $x_2$  обчислюють  $x_3$  і так далі. Це невелике вдосконалення ітераційної процедури дозволяє істотно збільшити швидкість збіжності.

Справа в тому, що однією з причин, з якої метод одночасних зсувів володіє такою повільною збіжністю, полягає в тому, що уточнені значення змінних не використовуються, поки вони не знайдені для всіх змінних даної системи рівнянь. У методі Гауса-Зейделя уточнені значення змінних використовуються відразу після отримання, що забезпечує швидку збіжність.

### 3.1.2.3. Метод верхньої релаксації (метод послідовної верхньої релаксації)

У методі верхньої релаксації нові значення кожної змінної представляються у вигляді

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega \cdot (\bar{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}),$$

де  $\bar{x}_i^{(k+1)}$  – уточнене значення змінної за Гаусом-Зейделем, а  $\omega$  – параметр релаксації, що знаходиться на інтервалі  $1 \leq \omega \leq 2$ . При  $\omega = 1$  цей метод тотожний методу Гауса-Зейделя. Швидкість збіжності залежить від обраної величини  $\omega$ .

Основу даного методу складає послідовне зменшення нев'язок для всіх змінних даної системи рівнянь. Нев'язкою називається різниця між отриманим значенням змінної і її дійсним значенням.

В результаті досліджень було встановлено, що нерідко буває корисним змінити значення змінної на більш велику величину, ніж це необхідно для перетворення даної нев'язки в нуль.

Метод верхньої релаксації можна розглядати як розвиток методу Гауса-Зейделя.

В принципі можна знайти оптимальне значення  $\omega$ . Дане питання висвітлюється в спеціальній літературі, присвяченій рішенням систем лінійних алгебраїчних рівнянь і диференціальних рівнянь в часткових похідних.

Для всіх методів існує проблема збіжності.

### 3.1.3. Поняття норми матриці

Аналіз збіжності ітераційних методів розв'язання систем лінійних рівнянь пов'язано з поняттям норм матриці.

Нормою матриці називається таке дійсне число  $\|B\|$ , яке задовольняє наступним властивостям:

$$1) \|B\| > 0, \text{ якщо } B \neq 0 \text{ (причому } \|0\| = 0);$$

$$2) \|\lambda \cdot B\| = |\lambda| \cdot \|B\|;$$

$$3) \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|;$$

$$4) \|A \cdot B\| = \|A\| \cdot \|B\|,$$

де  $\lambda$  – будь-яке дійсне число,  $A$  і  $B$  – матриці з довільними дійсними елементами, для яких визначено операцію  $A \cdot B$ .

Норма називається мультиплікативною, якщо володіє всіма перерахованими властивостями, і адитивною (або узагальненою), якщо задовольняє тільки властивостям 1, 2 та 3.

Найбільшого поширення набули такі норми матриць:

$$\|B\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |b_{ij}| \text{ – 1-норма;}$$

$$\|B\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \text{ – } \infty\text{-норма;}$$

$$\|B\|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|^2} \text{ – E-норма (Евклідова).}$$

Існує правило: якщо хоча б одна з перерахованих норм матриці коефіцієнтів системи рівнянь менша одиниці, то ітераційний алгоритм для вирішення цього рівняння буде збіжним при довільному виборі початкового наближення.





$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ \vdots \\ -f_n \end{bmatrix},$$

в якій матрицю часткових похідних і вектор-стовпець правої частині можна оцінити для будь-якого наближеного рішення.

Знайдені значення  $\Delta x_i$  в подальшому використовуються як поправки до вихідного наближеного рішення

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= x_1^{(k)} + \Delta x_1^{(k)}; \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= x_n^{(k)} + \Delta x_n^{(k)}. \end{aligned}$$

Якщо всі коригувальні збільшення стають досить малими, розрахунок припиняється. В іншому випадку нові значення  $x_i$  використовуються як наближені значення коренів, і процес повторюється до тих пір, поки не буде знайдено рішення, або стане ясно, що отримати його не вдасться.

В даному методі також слід перевіряти збіжність. Якщо значення коренів значно відрізняються один від одного, то умова

$$\Delta x_i \leq \varepsilon, \text{ де } i = 1, 2, \dots, n$$

може виявитися занадто завищеною для коренів  $x_i$ , які мають великі значення.

У таких випадках слід користуватися нормованими корегуючими приростами

$$\frac{\Delta x_i}{x_i} \leq \varepsilon, \text{ де } i = 1, 2, \dots, n.$$

Хоча метод Ньютона має переваги в порівнянні з іншими ітераційними методами, для нього теж існує проблема збіжності. Величина області збіжності зворотно пропорційна ступеню складності і кількості рівнянь.

### 3.2.3. Застосування методу Ньютона для вирішення нелінійної системи рівнянь в задачі осадки циліндричної заготовки в умовах неоднорідної деформації

При осадці циліндричної заготовки з тертям (неоднорідна деформація) бокова поверхня заготовки приймає форму, близьку до параболічної (рис. 3.1), тому використовувати поле швидкостей для задачі з однорідною деформацією не представляється можливим.

Для побудови математичної моделі процесу осадки циліндричної заготовки в умовах неоднорідної деформації (див. рис. 3.1) використовуємо підхід І.Я. Тарновського [45] на основі варіаційного методу [4, 46–48] (розглядається половина заготовки за висотою).

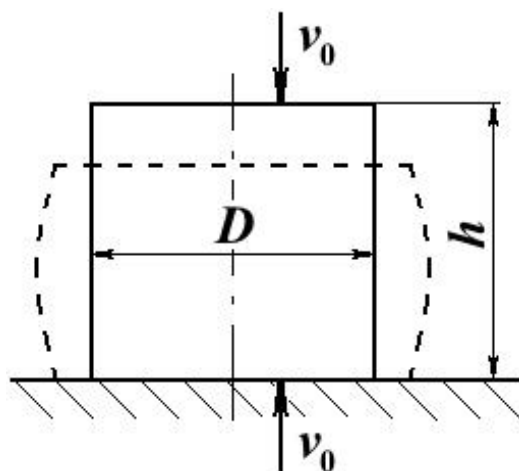


Рисунок 3.1 – Схема процесу осадки циліндричної заготовки з тертям

Для компоненти  $v_z$  поля швидкостей задаємо підходящу функцію, залежну від координат  $z$  і  $r$ :

$$v_z(z, r) = -\frac{a_0}{2} \cdot z \cdot \left[ 1 + (a_1 + a_2 \cdot r^2) \cdot \left( 1 - \frac{z^3}{h^3} \right) \right],$$

де  $a_0$ ,  $a_1$  і  $a_2$  – варійовані параметри.

Строго кажучи, параметр  $a_0$  не є варійованим, тому що його значення повинно бути таким, щоб компонента  $v_z$  збігалася з аналогічною компонентою для умов однорідної деформації

$$v_z(z, r) = -\frac{v_0}{2 \cdot h} \cdot z$$

$$a_0 = \frac{v_0}{h}.$$

Інша компонента швидкості знаходиться з умови сталості об'єму

$$v_r = \frac{a_0}{4} \cdot r \cdot \left[ 1 + (a_1 + 0,5 \cdot a_2 \cdot r^2) \cdot \left( 1 - 4 \cdot \frac{z^3}{h^3} \right) \right].$$

Компоненти тензора швидкостей деформації і інтенсивність швидкостей деформації визначаються як

$$\xi_r = \frac{a_0}{4} \cdot \left[ 1 + (a_1 + 1,5 \cdot a_2 \cdot r^2) \cdot \left( 1 - 4 \cdot \frac{z^3}{h^3} \right) \right];$$

$$\xi_\theta = \frac{a_0}{4} \cdot \left[ 1 + (a_1 + 0,5 \cdot a_2 \cdot r^2) \cdot \left( 1 - 4 \cdot \frac{z^3}{h^3} \right) \right];$$

$$\xi_z = -(\xi_r + \xi_\theta) = -\frac{a_0}{2} \cdot \left[ 1 + (a_1 + a_2 \cdot r^2) \cdot \left( 1 - 4 \cdot \frac{z^3}{h^3} \right) \right];$$

$$\xi_{rz} = -a_0 \cdot z \cdot r \cdot \left[ \frac{z}{h^3} \cdot (3 \cdot a_1 + 1,5 \cdot a_2 \cdot r^2) + a_2 \cdot \left( 1 - \frac{z^3}{h^3} \right) \right];$$

$$\xi_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{(\xi_r - \xi_\theta)^2 + (\xi_\theta - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_r)^2 + \frac{3}{2} \cdot \xi_{rz}^2}.$$

Потужності внутрішніх сил опору деформації і тертя дорівнюють

$$N_1 = 2 \cdot \pi \cdot \int_0^{0,5 \cdot h} \int_0^D \sigma_s \cdot \xi_i \cdot r dr dz;$$

$$N_2 = \pi \cdot \frac{D^2}{4} \mu \cdot \sigma_s \cdot a_0 \cdot \left| \frac{1}{3} - a_1 - 0,3 \cdot a_2 \right|.$$

Зусилля деформації і відносне зусилля деформації дорівнюють

$$F_{\text{д}} = \frac{1}{v_0} \cdot \left( \int_0^{0,5 \cdot h} \int_0^D \sigma_s \cdot \xi_i \cdot r dr dz + \mu \cdot \sigma_s \cdot a_0 \cdot \left| \frac{1}{3} - a_1 - 0,3 \cdot a_2 \right| \right);$$

$$\bar{p}(a_1, a_2) = \int_0^{0,5 \cdot \bar{h}} \int_0^1 \bar{\xi}_i \cdot r dr dz + \mu \cdot \bar{a}_0 \cdot \left| \frac{1}{3} - \bar{a}_1 - 0,3 \cdot \bar{a}_2 \right|.$$

Змінні параметри будемо шукати, використовуючи принцип мінімуму повної енергії деформації:

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{p}(a_1, a_2)}{\partial a_1} = 0; \\ \frac{\partial \bar{p}(a_1, a_2)}{\partial a_2} = 0. \end{cases}$$

Для вирішення цієї нелінійної системи рівнянь використовуємо метод Ньютона. Ітераційний процес методу Ньютона зводиться до багаторазового вирішення наступної лінійної системи щодо приросту змінних  $\Delta a_1$  і  $\Delta a_2$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{p}(a_1, a_2)^2}{\partial a_1^2} \cdot \Delta a_1 + \frac{\partial \bar{p}(a_1, a_2)^2}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} \cdot \Delta a_2 + \frac{\partial \bar{p}(a_1, a_2)}{\partial a_1} = 0; \\ \frac{\partial \bar{p}(a_1, a_2)^2}{\partial a_2 \cdot \partial a_1} \cdot \Delta a_1 + \frac{\partial \bar{p}(a_1, a_2)^2}{\partial a_2^2} \cdot \Delta a_2 + \frac{\partial \bar{p}(a_1, a_2)}{\partial a_2} = 0 \end{cases}$$

і уточнення значень варійованих параметрів

$$a_1^k = a_1^{k+1} + \Delta a_1;$$

$$a_2^k = a_2^{k+1} + \Delta a_2.$$

Матриця системи лінійних рівнянь має наступний вигляд:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{p}(a_1, a_2)^2}{\partial a_1^2} & \frac{\partial \bar{p}(a_1, a_2)^2}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} & \frac{\partial \bar{p}(a_1, a_2)}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \bar{p}(a_1, a_2)^2}{\partial a_2 \cdot \partial a_1} & \frac{\partial \bar{p}(a_1, a_2)^2}{\partial a_2^2} & \frac{\partial \bar{p}(a_1, a_2)}{\partial a_2} \end{bmatrix},$$

де елементи матриці – похідні функції відносного зусилля  $\bar{p}(a_1, a_2)$  по  $a_1$  та  $a_2$  (див. додаток Б).

На рис. 3.2 показано графік залежності відносного зусилля від варійованих параметрів  $a_1$  і  $a_2$  для  $\bar{h} = \frac{h}{D} = 1$  і коефіцієнта тертя  $\mu = 0,2$ . Результати роз-

рахунку змінних параметрів при початкових значеннях  $a_1^0 = 0,1$ ,  $a_2^0 = -0,1$  наведено в табл. 3.1. На рис. 3.3 показано графіки залежностей компонент швидкості  $v_z$  і  $v_r$  від координат  $z$  і  $r$  для отриманих з рішення системи рівнянь значень  $a_1 = 0,296678$ ,  $a_2 = -0,356427$ .

### 3.2.4. Метод збурювання параметрів

Цей метод являє собою алгоритм, що дозволяє за допомогою ітерацій отримати рішення системи нелінійних рівнянь. Його ефективність не залежить від «вдалого» вибору початкового наближення. Суть цього методу полягає в наступному.

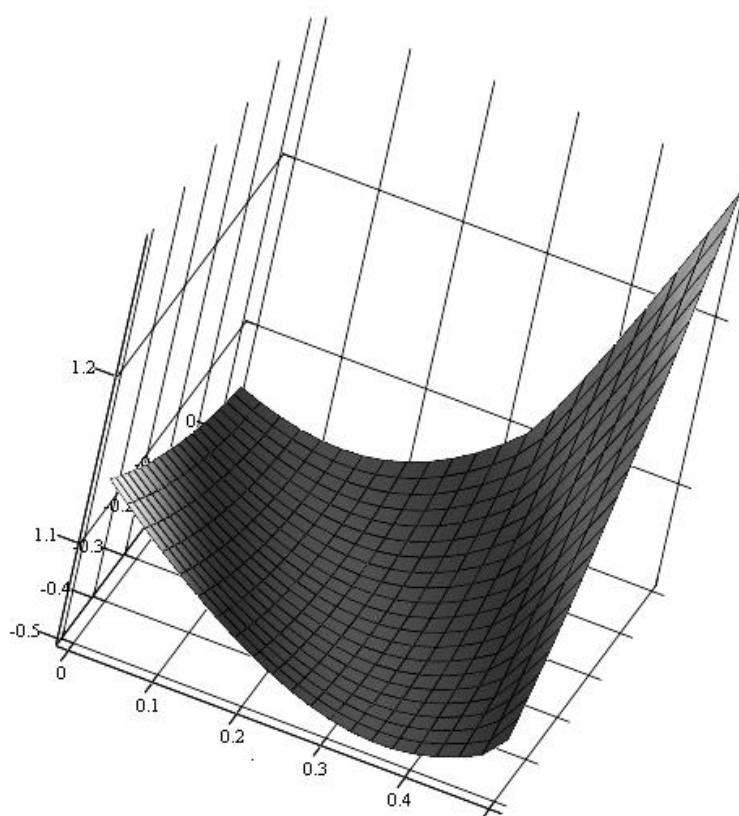
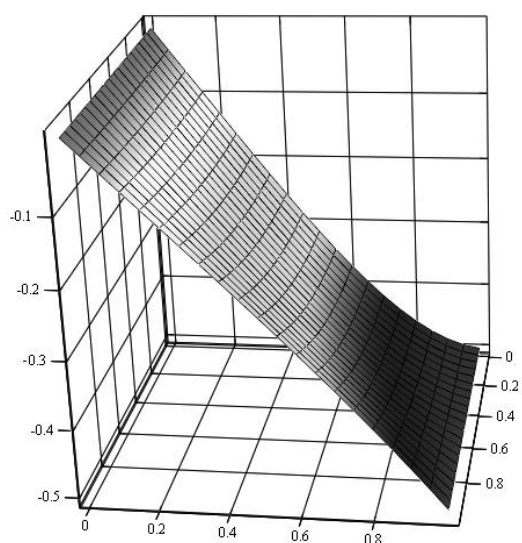


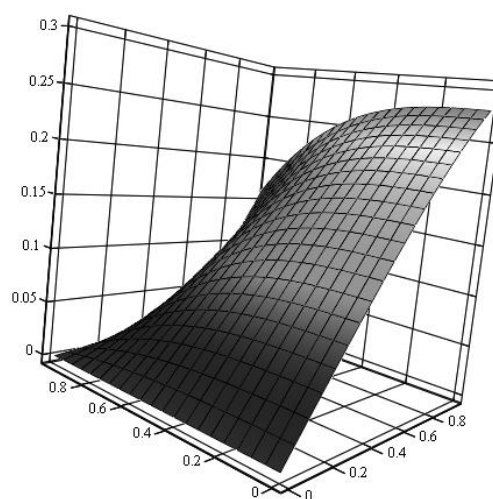
Рисунок 3.2 – Графік залежності відносного зусилля від варійованих параметрів  $a_1$  і  $a_2$  для процесу осадки циліндричної заготовки з тертям

Таблиця 3.1 – Результати розрахунку змінних параметрів  $a_1$  і  $a_2$   
при осадці в умовах неоднорідної деформації

Величина	Номер ітерації					
	0	1	2	3	4	5
$a_1$	0,1	0,349314	0,30146	0,29672	0,296678	0,296678
$a_2$	-0,1	-0,423331	-0,363906	-0,356493	-0,356427	-0,356427
$\Delta a_1$	0,249314	-0,047854	$-4,739909 \cdot 10^{-3}$	$-4,1682 \cdot 10^{-5}$	$-3,11622 \cdot 10^{-9}$	0,0
$\Delta a_2$	-0,323331	0,059425	$7,412870 \cdot 10^{-3}$	$6,5909 \cdot 10^{-5}$	$4,91519 \cdot 10^{-9}$	0,0
$\bar{p}$	1,054694	1,046293	1,045419	1,045414	1,04541	1,045414
$\frac{\partial \bar{p}}{\partial a_1}$	-0,133201	0,051207	$3,006061 \cdot 10^{-3}$	$2,53118 \cdot 10^{-5}$	$1,90366 \cdot 10^{-9}$	0,0
$\frac{\partial \bar{p}}{\partial a_2}$	-0,035438	0,013127	$3,743748 \cdot 10^{-4}$	$2,84303 \cdot 10^{-6}$	$2,19316 \cdot 10^{-10}$	0,0
$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial a_1^2}$	1,508576	2,293271	2,111468	2,097532	2,097413	2,097413
$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial a_1 \cdot \partial a_2}$	0,751268	0,985023	0,944588	0,942470	0,942453	0,942453
$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial a_2^2}$	0,469684	0,572323	0,553481	0,552897	0,552893	0,552893



а



б

Рисунок 3.3 – Залежність компонент швидкості  $v_z$  (а) і  $v_r$  (б) від координат при осадці в умовах неоднорідної деформації

Перш за все, поряд з системою рівнянь

$$f_j(x_i) = 0,$$

де  $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ ,

розглянемо іншу систему

$$g_j(x_i) = 0,$$

де  $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ ,

рішення якої відомо. Потім, модифікуючи рівняння  $g_j = 0$ , перетворимо їх у рівняння  $f_j = 0$  за допомогою кінцевого числа  $N$  послідовних малих приростів параметрів

$$g_j^{(k)}(x_i) = g_j^{(k-1)}(x_i) + [f_j(x_i) - g_j^{(k-1)}(x_i)] \cdot \frac{k}{N},$$

де  $k = 1, 2, \dots, N$ .

Рішення  $x_i^{(0)}$  вихідної системи рівнянь  $g_j^{(0)}(x_i)$  можна використовувати як вихідні значення змінних для ітераційного рішення системи  $g_j^{(1)}(x_i)$ . Так як ця система мало відрізняється від попередньої, досить імовірно, що збіжність буде забезпечено. В процесі розрахунку рішення  $x_i^{(k-1)}$  використовується як вихідне для отримання рішення  $x_i^{(k)}$ . В кінці розрахунку, коли  $k$  стає рівним  $N$ , розв'язувана система рівнянь стає еквівалентною вихідній системі. Так як для перетворення системи рівнянь, рішення якої відомо, може знадобитися велика кількість кроків (10 або навіть 100), то застосування цього методу може бути пов'язано з великими витратами машинного часу. Однак позитивну роль грає та обставина, що при малій величині кроків збіжність на кожному окремому етапі може бути досягнута лише кількома ітераціями.

### Контрольні питання

1. В яких випадках ефективно застосування для вирішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь прямих методів вирішення, а в яких – ітераційних.

2. У чому полягає алгоритм методу виключення Гауса?
3. У чому полягає відмінність методу Гауса-Жордана від методу Гауса?
4. Для чого в методі Гауса використовують прямий і зворотний хід?
5. Як перевірити правильність отриманого рішення СЛАР?
6. У чому основний недолік прямих методів вирішення СЛАР, побудованих на алгоритмі Гауса?
7. Які ітераційні методи рішення СЛАР Ви знаєте?
8. Як поняття норми матриці пов'язано з рішенням СЛАР?
9. Чому рішення систем нелінійних рівнянь при інших рівних умовах викликає більші труднощі, ніж рішення СЛАР?
10. Які основні методи вирішення систем нелінійних рівнянь Ви знаєте?
11. Що лежить в основі методу Ньютона для вирішення систем нелінійних рівнянь?
12. У чому переваги методу Ньютона для вирішення систем нелінійних рівнянь?

#### 4. ЧИСЛОВЕ ІНТЕГРУВАННЯ

При розгляді інтегрального числення виникає два принципових питання: чи всяка безперервна функція  $f(x)$  має невизначений інтеграл і яким способом можна знайти цей інтеграл, якщо він існує.

Відповіддю на перше питання служить теорема Коші, що є основною теоремою інтегрального числення [49]. **Теорема Коші:** *всяка безперервна функція має первісну.*

Іншими словами, для кожної безперервної на інтервалі  $(a, b)$  функції  $f(x)$  існує функція  $F(x)$ , похідна якої на інтервалі  $(a, b)$  в точності дорівнює даної функції  $f(x)$ , тобто  $F'(x) = f(x)$ .

Тим самим існує і невизначений інтеграл  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , де  $C$  – довільна постійна. Однак цим не вирішується друге питання: якщо дана безперервна функція  $f(x)$ , то як знайти її невизначений інтеграл. Теорема Коші зовсім не стверджує, що первісну даної функції можна фактично відшукати за допомогою кінцевого числа відомих операцій і виразити відповідь в елементарних функціях. Більш того, є безперервні елементарні функції, інтеграли від яких не є елементарними функціями.

Так, інтеграли

$$\int \frac{\sin(x)}{x} dx; \quad \int \frac{\cos(x)}{x} dx; \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-x^3}} dx; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}};$$

$$\int \frac{dx}{\ln(x)}; \quad \int \frac{x}{\ln(x)} dx; \quad \int e^{-x^2} dx \quad (4.1)$$

не можуть бути виражені через елементарні функції (так звані інтеграли, що «не беруться»), хоча подібні на вигляд інтеграли

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx; \quad \int \ln(x) dx; \quad \int x \cdot \ln(x) dx \quad (4.2)$$

є елементарними функціями.

Проте, для будь-якої неперервної функції невизначений інтеграл існує і притому є безперервною функцією (див. теорему Коші).

За правилами диференціального обчислення можна для будь-якої елементарної функції знайти похідну (так само елементарну функцію). У інтегральному обчисленні подібні правила для розрахунку первісної принципово неможливі.

До числового інтегрування звертаються, коли неможна через елементарні функції аналітично записати первісну інтеграла або коли ці обидва записи мають складний вигляд, а також, коли функцію задано в табличному вигляді або у вигляді графіка.

Сформулюємо задачу в такий спосіб: обчислити інтеграл виду

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

де  $a$  і  $b$  – нижні і верхні межі інтегрування,  $f(x)$  – безперервна функція на відрізку  $[a, b]$ .

Сутність більшості методів обчислення визначених інтегралів полягає в заміні підінтегральної функції  $f(x)$  апроксимуючої функцією  $\varphi(x)$ , для якої можна легко записати первісну в елементарних функціях, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + R = S + R,$$

де  $S$  – наближене значення інтеграла,  $R$  – похибка обчислення інтеграла.

Використовувані на практиці методи числового інтегрування можна згрупувати в залежності від способу апроксимації підінтегральної функції. Найбільш поширені методи можна класифікувати за такими групами.

Методи Ньютона-Котеса засновано на поліноміальній апроксимації підінтегральної функції [1–3, 17, 19, 20, 22, 23, 26–27, 30, 50]. Методи цього класу відрізняються один від одного ступенем використовуваного полінома, від якої залежить кількість вузлів, де необхідно обчислити функцію  $f(x)$ . Алгоритми цих методів прості і легко піддаються програмній реалізації.

Сплайнові методи базуються на апроксимації підінтегральної функції сплайнами, що представляють собою кусковий поліном [3, 19]. Методи різняться

ся типом обраних сплайнів. Такі методи є сенс використовувати в задачах, де алгоритми сплайнової апроксимації застосовуються для обробки даних.

У методах найвищої алгебраїчної точності (методи Гауса-Крістофеля і інші) використовують поліноміальну апроксимацію з нерівновіддаленими вузлами [1–3, 17, 18, 20, 22, 23, 25–27, 30, 50], розташованими за алгоритмом, що забезпечує мінімальну похибку інтегрування для найбільш складних функцій при заданій кількості вузлів. Методи розрізняються способами вибору вузлів і широко використовуються для інтегрування, в тому числі вони можуть бути застосовані для невластних інтегралів. Хоча через необхідність зберігання числових констант і стандартизації меж інтегрування програми для зазначених методів вимагають трохи більшого об'єму пам'яті в порівнянні з методами Ньютона-Котеса.

У методах Монте-Карло [3, 17, 20, 51] вузли обираються за допомогою генератора випадкових чисел, відповідь носить імовірнісний характер. Ці методи виявляються ефективними при обчисленнях інтегралів великої кратності.

В клас спеціальних групуються методи [19, 25], алгоритми яких розробляються на основі врахування особливостей конкретних підінтегральних функцій, що дозволяє істотно скоротити час і зменшити похибку обчислення інтегралів.

Незалежно від обраного методу в процесі числового інтегрування необхідно обчислити наближене значення  $S$  інтеграла  $I$  і оцінити похибку  $R$ . Похибка буде зменшуватися при збільшенні кількості розбиттів  $n$  інтервалу інтегрування  $[a, b]$  за рахунок більш точної апроксимації підінтегральної функції, однак при цьому буде зростати похибка за рахунок підсумовування часткових інтегралів, і остання похибка з деякого значення  $n_{\text{opt}}$  стає переважаючою (рис. 4.1). Ця обставина має застерігати від вибору надмірно великої кількості  $n$  і призводить до необхідності розробки способу оцінки похибки  $R$  обраного методу інтегрування.

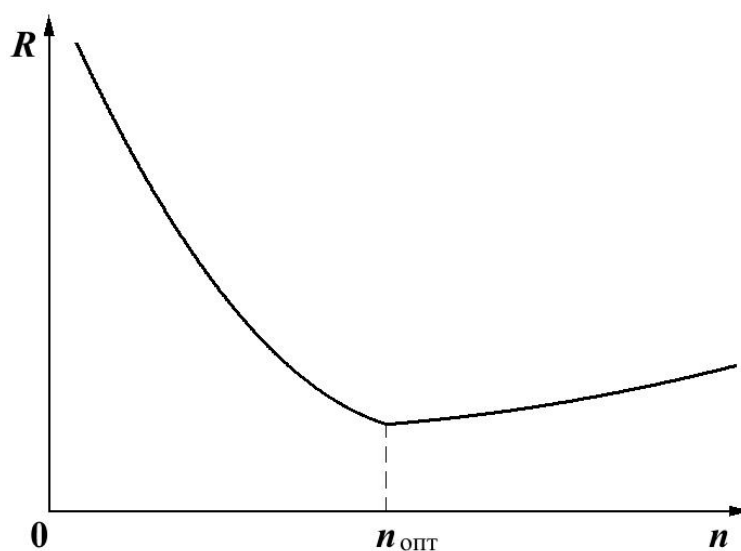


Рисунок 4.1 – Залежність похибки обчислення інтеграла від кількості підінтегралів

#### 4.1. Методи Ньютона-Котеса (методи механічних квадратур)

Метод Ньютона-Котеса полягає в заміні підінтегральної функції  $y = f(x)$  таким інтерполяційним багаточленом  $n$ -го ступеня

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n,$$

який при даних значеннях  $x = x_0, x = x_1, \dots, x = x_n$  (кількість яких дорівнює  $(n+1)$ ) має ті ж значення, що і функція  $f(x)$ . Геометрично це відповідає тому, що лінія  $y = f(x)$  замінюється параболою  $n$ -го ступеня

$$y(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n,$$

що проходить через  $(n+1)$  точку даної лінії. Інтегруючи інтерполяційний багаточлен, отримуємо наближений інтеграл функції  $f(x)$ , тобто площа криволінійної трапеції, що знаходиться під графіком функції  $f(x)$ , замінюється площею криволінійної трапеції, що знаходиться під графіком полінома  $P(x)$ , який апроксимує функцію  $f(x)$  на заданому відрізку.

В якості інтерполяційного полінома візьмемо поліном, записаний у вигляді, запропонованому Ньютоном

$$P(x) = c_0 + c_1 \cdot (x - x_0) + c_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots + c_n \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

### 4.1.1. Формули прямокутників

При одному даному значенні  $y_0 = f(x_0)$  отримуємо інтерполяційний поліном нульового ступеня (див. підрозділ 2.4.3.1. Інтерполяційні формули Ньютона)  $P(x) = c_0 = y_0$ .

Лінія  $y = f(x)$  замінюється горизонтальною прямою, що проходить через дану точку  $(x_0, y_0)$  (рис. 4.2).

Наближене значення інтеграла

$$\int_{x_0 - \frac{h}{2}}^{x_0 + \frac{h}{2}} f(x) dx \approx \int_{x_0 - \frac{h}{2}}^{x_0 + \frac{h}{2}} y_0 dx = y_0 \cdot h$$

дає площа прямокутника  $ABCD$  замість площі криволінійної трапеції  $AB'C'D$ .

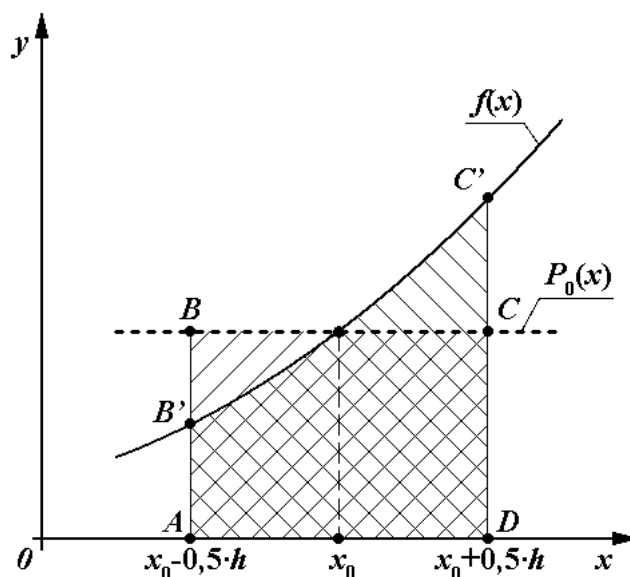


Рисунок 4.2 – Обчислення інтеграла по одному значенню функції в середній точці відрізка

Узагальнимо алгоритм обчислення визначеного інтеграла з використанням полінома нульового ступеня на довільний відрізок  $(a, b)$ .

Проміжок інтегрування  $(a, b)$  поділяємо точками  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  на  $n$  рівних частин, довжина кожної  $h = \frac{b-a}{n}$ , де  $a = x_0, b = x_n$ .

Через  $x_{1/2}$ ,  $x_{3/2}$ ,  $x_{5/2}$ , ...,  $x_{(2n-1)/2}$  позначимо середини ділянок  $(x_0, x_1)$ ;  $(x_1, x_2)$ ;  $(x_2, x_3)$ ; ...,  $(x_{n-1}, x_n)$ . Допустимо  $f(x_0) = y_0$ ;  $f(x_1) = y_1$ ;  $f(x_2) = y_2$ ; ...;  $f(x_n) = y_n$ ;  $f(x_{1/2}) = y_{1/2}$ ;  $f(x_{3/2}) = y_{3/2}$ ;  $f(x_{5/2}) = y_{5/2}$ ; ...;  $f(x_{(2n-1)/2}) = y_{(2n-1)/2}$ .

Інтеграл функції  $f(x)$  на відрізку  $(a, b)$  можна обчислити як суму інтегралів кожної з  $n$  частин, на які поділено відрізок.

Якщо в якості початкової точки взяти  $x_0$  (рис. 4.3), то отримаємо таку формулу:

$$I = y_0 \cdot h + y_1 \cdot h + \dots + y_{n-1} \cdot h = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} y_i, \quad (4.3)$$

яка називається формулою лівих прямокутників.

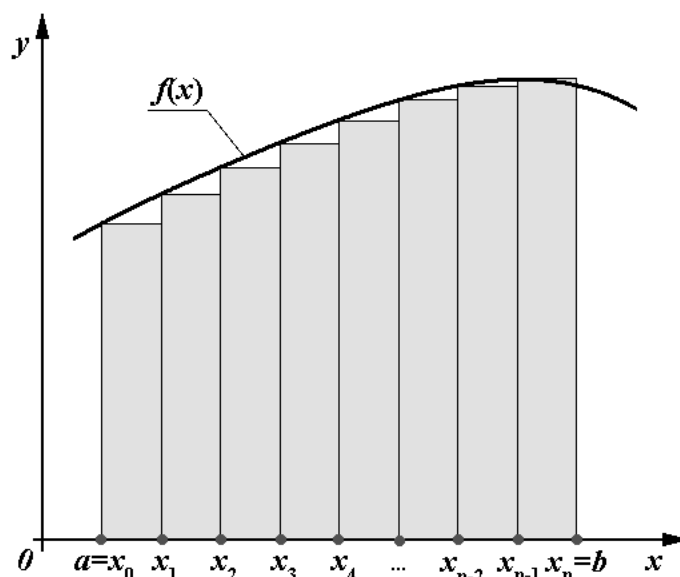


Рисунок 4.3 – Схема обчислення визначеного інтеграла методом лівих прямокутників

Якщо в якості початкової точки взяти  $x_1$  (рис. 4.4), то отримаємо формулу правих прямокутників

$$I = y_1 \cdot h + y_2 \cdot h + \dots + y_n \cdot h = h \cdot \sum_{i=1}^n y_i = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i. \quad (4.4)$$

Для вихідної точки  $x_{1/2}$ , що знаходиться в центрі відрізка  $(x_0, x_1)$ , рис. 4.5 формула має такий вигляд:

$$I = y_{1/2} \cdot h + y_{3/2} \cdot h + \dots + y_{\frac{2n-1}{2}} \cdot h = h \cdot \sum_{i=1}^n y_{\frac{2i-1}{2}} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_{\frac{2i-1}{2}}. \quad (4.5)$$

Вирази (4.3) – (4.5) дають площі східчастих фігур (див. рис. 4.3–4.5) і називаються формулами прямокутників.

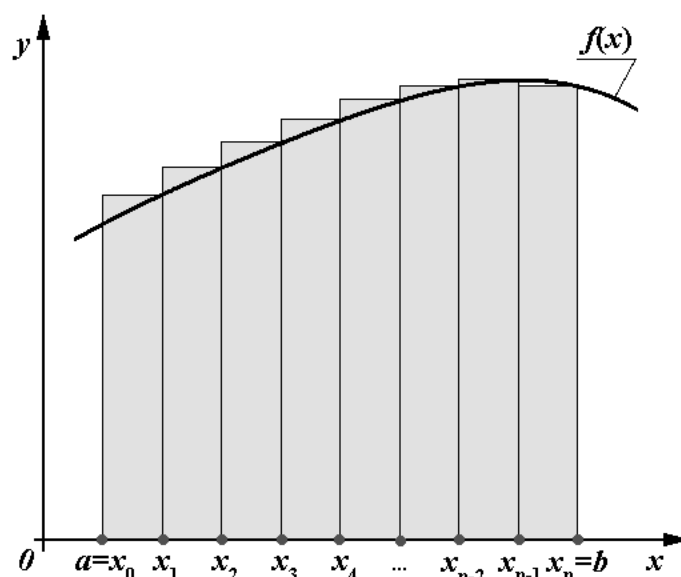


Рисунок 4.4 – Схема обчислення визначеного інтеграла методом правих прямокутників

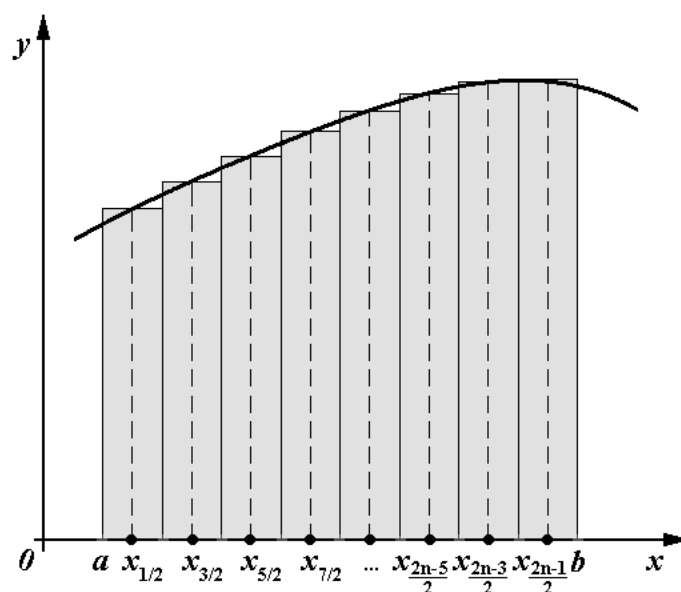


Рисунок 4.5 – Схема обчислення визначеного інтеграла методом середніх прямокутників

У більшості випадків при даному  $n$  формула (4.5) точніше, ніж (4.3) і (4.4).

Для оцінки похибки обчислення інтеграла за формулою (4.5) запишемо вираз для інтеграла на інтервалі  $[x_i, x_i + h]$ , отриманий вище:

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx = h \cdot f(\bar{x}) + R, \quad (4.6)$$

де  $\bar{x} = x_i + h/2$ ,  $R$  – похибка.

Розкладемо підінтегральну функції  $f(x)$  в ряд Тейлора біля середньої точки  $\bar{x}$

$$f(x) = f(\bar{x}) - (x - \bar{x}) \cdot f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2!} \cdot f''(\bar{x}) + \dots \quad (4.7)$$

У малій околиці точки  $x$  цей ряд з високою точністю представляє функцію  $f(x)$  при невеликій кількості членів розкладання. Тому, підставляючи під інтеграл замість функції  $f(x)$  її тейлоровське розкладання і інтегруючи його за членами, можна обчислити інтеграл з будь-якою наперед заданою точністю.

При інтегруванні і підстановці меж отримуємо, що всі інтеграли від членів ряду, що містять непарні ступеня  $(x - \bar{x})$ , перетворюються на нуль.

Порівнюючи співвідношення (4.5) і (4.7), можна записати вирази для похибки  $R$ . При малій величині кроку інтегрування  $h$  основний внесок в похибку  $R$  буде вносити перший доданок, який називається головним членом похибки  $R_{0i}$  обчислення інтеграла на інтервалі  $[x_i, x_i + h]$ :

$$R_{0i} = \frac{h^3}{24} \cdot f''(\bar{x}_i).$$

Головний член похибки для інтеграла на всьому інтервалі  $[a, b]$  визначається шляхом підсумовування похибок на кожному частковому інтервалі  $[x_i, x_i + h]$

$$R_{0i} = \sum_{i=1}^n R_{0i} = \frac{h^2}{24} \cdot \sum_{i=1}^n (h \cdot f''(\bar{x}_i)) = \frac{h^2}{24} \cdot \int_a^b f''(x) dx. \quad (4.8)$$

До останнього інтеграла переходимо, використовуючи метод середніх прямокутників для функції  $f''(x)$ .

Ступінь кроку  $h$ , якому пропорційна величина  $R_0$ , називається порядком методу інтегрування. Метод середніх прямокутників має другий порядок.

Інтеграл, що входить в формулу (4.8) можна записати, використовуючи теорему про середнє

$$\int_a^b f''(x) dx = (b - a) \cdot f''(\xi). \quad (4.9)$$

**Теорема про середнє.** Визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює добутку довжини проміжку інтегрування на значення підінтегральної функції при деякому проміжному значенні аргументу, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(\xi),$$

де  $\xi \in (a, b)$ .

З огляду на вираз (4.9), формулу головної похибки (4.8) можна записати як

$$R_0 = \frac{h^2 \cdot (b-a)}{24} \cdot f''(\xi)$$

або, позначаючи  $f''(\xi) = M_2$  і враховуючи, що  $h = \frac{b-a}{n}$ , можна записати

$$R_0^{\max} = \frac{(b-a)^3}{24 \cdot n^2} \cdot M_2. \quad (4.10)$$

Якщо точку  $\xi$  вибрати з умови, що  $M_2 = |f''(\xi)|$  є найбільшим по модулю значенням  $f''(x)$  у проміжку  $(a, b)$ , то формула (4.10) визначає граничну похибку формули (4.5). Для емпіричних функцій замість  $M_2$  беруть найбільше значення величини  $\frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2}$ , тобто розділеної різниці другого порядку.

Аналогічно можна провести оцінку похибки для методу лівих прямокутників

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx = h \cdot f(x_i) + R;$$

$$f(x) = f(x_i) - (x - x_i) \cdot f'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \cdot f''(x_i) + \dots;$$

$$I_{\text{точн.}} = f(x_i) \cdot h \Big|_{x_i}^{x_i+h} + \frac{(x - x_i)^2}{2} \Big|_{x_i}^{x_i+h} \cdot f'(x_i) + \dots = f(x_i) \cdot h + \frac{h^2}{2} \cdot f'(x_i) + \dots,$$

де перший доданок є наближене значення інтеграла, обчислений за методом лівих прямокутників, другий доданок є головним членом похибки

$$R_{0i} = \frac{h^2}{2} \cdot f'(x).$$

На інтервалі  $[a, b]$  головний член похибки інтегрування отримаємо підсумовуванням часткових похибок

$$R_0 = \frac{h^2}{2} \cdot \int_a^b f'(x) dx, \quad (4.11)$$

або, застосовуючи теорему про середнє,

$$R_0 = \frac{h \cdot (b - a)}{2} \cdot f'(x). \quad (4.12)$$

З формули (4.11) можна зробити висновок, що метод лівих прямокутників має перший порядок. Крім того, похибка буде більшою у порівнянні з методом середніх прямокутників і за рахунок інтеграла від похідної  $f'(x)$ , і коефіцієнта в знаменнику, так як для більшості функцій зазвичай виконується нерівність

$$\left| \int_a^b f'(x) dx \right| \geq \left| \int_a^b f''(x) dx \right|.$$

Однак, якщо підінтегральна функція  $f(x)$  визначається з експерименту в дискретному наборі вузлів, то метод середніх прямокутників застосувати не можна через відсутність значень  $f(x)$  в середніх точках  $x_i$ .

#### 4.1.2. Формула трапецій

При двох даних значеннях  $y_0 = f(x_0)$ ,  $y_1 = f(x_0 + h)$  отримуємо інтерполяційний багаточлен першого ступеня

$$P(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} \cdot (x - x_0).$$

Він являє собою пряму  $M_0M_1$  (рис. 4.6), що проходить через точки  $M_0(x_0, y_0)$  і  $M_1(x_0+h, y_1)$ .

Відповідне наближене значення інтеграла

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+h} P_1(x) dx = \frac{1}{2} \cdot (y_0 + y_1) \cdot h$$

дає площа прямолінійної трапеції  $x_0M_0M_1x_1$ .

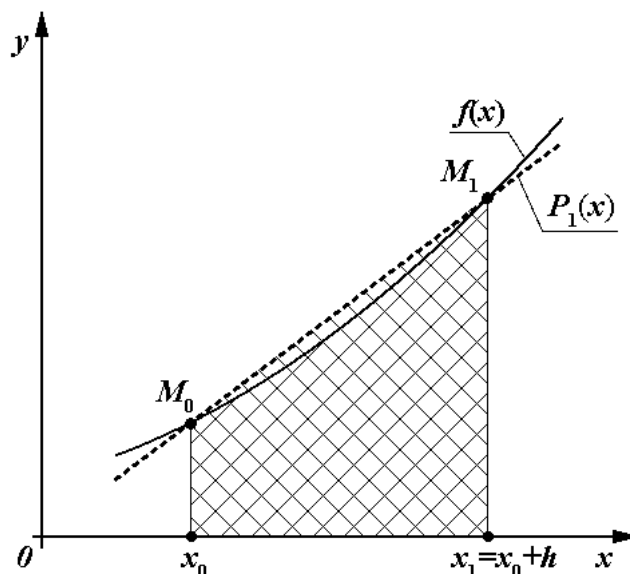


Рисунок 4.6 – Обчислення інтеграла за двома значеннями функції

Алгоритм використання інтерполяційного багаточлена першого ступеня можна також як і для полінома нульового ступеня узагальнити на довільний відрізок  $[a, b]$ .

Використовуючи вже введені позначення, наближене значення інтеграла на відрізку  $[a, b]$  можна записати

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \cdot \left[ \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right] = \frac{b-a}{n} \cdot \left[ \frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right]. \quad (4.13)$$

Вираз (4.13) являє собою формулу трапецій.

Для оцінки похибки даного методу запишемо формулу трапецій для інтервалу  $[a, b]$  функції  $f(x)$

$$\int_a^b f(x) dx = h \cdot [f(x_i) + f(x_i + h)]/2 + R. \quad (4.14)$$

Апріорну похибку  $R$  методу трапецій отримаємо шляхом інтегрування тейлоровського розкладання підінтегральної функції близько точки  $x_i$

$$f(x) = f(x_i) + (x - x_i) \cdot f'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2} \cdot f''(x_i) + \dots \quad (4.15)$$

Інтеграл від виразу (4.15) дорівнює

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx = h \cdot f(x_i) + \frac{h^2}{2} \cdot f'(x_i) + \frac{h^3}{6} \cdot f''(x_i) + \dots \quad (4.16)$$

За допомогою розкладання (4.15) обчислимо підінтегральної функції в точці  $x_i + h$

$$f(x_i + h) = f(x_i) + h \cdot f'(x_i) + \frac{h^2}{2} \cdot f''(x_i) + \dots \quad (4.17)$$

Звідки

$$h \cdot f'(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i) - \frac{h^2}{2} \cdot f''(x_i) + \dots \quad (4.18)$$

Підставляючи добуток (4.18) в вираз (4.16), отримаємо

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x) dx = h \cdot [f(x_i) + f(x_i + h)]/2 - h^3 \cdot f''(x_i)/12. \quad (4.19)$$

Порівнюючи вирази (4.14) і (4.19), знаходимо головний член похибки методу трапецій на одному інтервалі

$$R_{0i} = -h^3 \cdot f''(x_i)/12. \quad (4.20)$$

Головний член повної похибки на всьому інтервалі  $[a, b]$  визначається шляхом підсумовування похибок на кожному частковому інтервалі  $[x_i, x_i+h]$

$$R_0 = \sum_{i=1}^n R_{0i} = -\frac{h^2}{12} \cdot \sum_{i=1}^n h \cdot f''(x_i) \approx -\frac{h^2}{12} \cdot \int_a^b f''(x) dx. \quad (4.21)$$

До останнього інтеграла переходимо, використовуючи метод середніх прямокутників для функції  $f''(x)$ .

Отриманий результат на перший погляд виглядає дещо несподівано, так як з нього випливає, що метод трапецій має похибку в два рази більшу за абсолютною величиною в порівнянні з методом середніх прямокутників, хоча апроксимація підінтегральної функції проводилась поліномом більш високого ступеня.

Мабуть, обраний варіант апроксимації підінтегральної функції прямої, що проходить через її значення на границях, не є оптимальним. Задача вибору способу апроксимації поліномом заданого ступеня з найменшою можливою похибкою була вирішена Гаусом, що призвело до розвитку цілого класу методів.

Як видно з виразу (4.21), метод трапецій, як і метод середніх прямокутників, має другий порядок. Якщо підінтегральна функція задана аналітично, то

краще з методів другого порядку застосувати метод середніх прямокутників внаслідок його меншої похибки.

Використовуючи теорему про середнє, можна записати вираз (4.21) у вигляді

$$R_0 = \frac{h^2 \cdot (b-a)}{12} \cdot f'''(\xi).$$

Граничну похибку методу трапецій на відрізку  $[a, b]$  можна визначити як

$$R_0^{\max} = \frac{(b-a)^3}{12 \cdot n^2} \cdot M_2,$$

де  $M_2$  – див. підрозділ 1.1.1. Формули прямокутників.

### 4.1.3. Формула Сімпсона

При трьох заданих значеннях  $y_0 = f(x_0)$ ,  $y_1 = f(x_1)$ ,  $y_2 = f(x_2)$  отримуємо інтерполяційний поліном другого ступеня

$$P_2(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h} \cdot (x - x_0) + \frac{y_2 - 2 \cdot y_1 + y_0}{2 \cdot h^2} \cdot (x - x_0) \cdot (x - (x_0 + h)). \quad (4.22)$$

Багаточлен (4.22) являє собою параболу з вертикальною віссю (рис. 4.7), що проходить через точки  $M_0(x_0, y_0)$ ,  $M_1(x_0+h, y_1)$ ,  $M_2(x_0+2 \cdot h, y_2)$ .

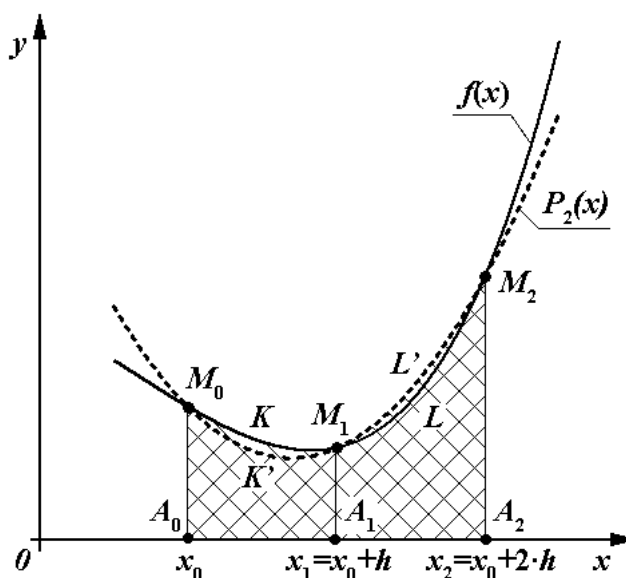


Рисунок 4.7 – Обчислення інтеграла за трьома значеннями функції

Наближене значення інтеграла

$$\int_{x_0}^{x_0+2\cdot h} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_0+2\cdot h} P_2(x)dx = \frac{1}{3} \cdot (y_0 + 4 \cdot y_1 + y_2) \cdot h \quad (4.23)$$

дає площа параболічної трапеції  $A_0M_0K'M_1L'M_2A_2$  (замість площі криволінійної трапеції  $A_0M_0KM_1LM_2A_2$ ).

В узагальненому вигляді для інтеграла функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$  формула (4.23) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{b-a}{3 \cdot n} \cdot \left[ \frac{y_0 + y_n}{2} + (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + 2 \cdot \left( y_{1/2} + y_{3/2} + \dots + y_{\frac{2\cdot n-1}{2}} \right) \right] \approx \\ &\approx \frac{b-a}{3 \cdot n} \cdot \left[ \frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i + 2 \cdot \sum_{i=1}^n y_{\frac{2\cdot i-1}{2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Ця формула називається формулою Сімпсона або параболічних трапецій.

Формула Сімпсона для інтервалу  $[x_i, x_{i+2}]$  має такий вигляд:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = [f(x_i) + 4 \cdot f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})] \cdot h/3. \quad (4.25)$$

Для оцінки похибки формули Сімпсона розкладемо підінтегральну функцію  $f(x)$  в ряд Тейлора близько точки  $x_{i+1}$  і проінтегруємо розкладання за членами в інтервалі  $[x_i; x_{i+2}]$

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = 2 \cdot h \cdot f(x_{i+1}) + \frac{h^3}{3} \cdot f''(x_{i+1}) + \frac{h^5}{3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot f^{IV}(x_{i+1}) + \dots + O(h^7). \quad (4.26)$$

Підсумовуючи розкладання близько точки  $x_{i+1}$  для функції  $f(x)$  в вузлах  $x_i$  і  $x_{i+2}$ , отримаємо, що

$$h^2 \cdot f''(x_{i+1}) = f(x_i) - 2 \cdot f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}) - \frac{h}{3 \cdot 4} \cdot f^{IV}(x_{i+1}) + \dots \quad (4.27)$$

Тоді інтеграл (4.25) набуває вигляду

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx = (f(x_i) + 4 \cdot f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})) \cdot h/3 - \frac{2 \cdot h^5}{180} \cdot f^{IV}(x_{i+1}). \quad (4.28)$$

Перший доданок формули (4.27) є інтеграл функції  $f(x)$  на інтервалі  $[x_0, x_2]$  (див. формулу (4.25)), отриманий за формулою Сімпсона. А другий доданок є головним членом похибки для інтеграла на інтервалі  $[x_i, x_{i+2}]$

$$R_{0i} = -\frac{2 \cdot h^5}{180} \cdot f^{IV}(x_{i+1}). \quad (4.29)$$

Якщо інтеграл обчислюється на відріжку  $[a, b]$ , шляхом розбиття його на парне число підінтегралів  $[x_i, x_{i+1}]$ , на кожній парі яких застосовується формула Сімпсона для вузлів  $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$ , то повна похибка буде сумою правих частин співвідношення (4.29). При малій величині кроку на підставі методу середніх прямокутників отримаємо

$$R_0 = -\frac{h^4}{180} \cdot \sum_{i=0}^n 2 \cdot h \cdot f^{IV}(x_{i+1}) \approx \frac{h^4}{180} \cdot \int_a^b f^{IV}(x) dx. \quad (4.30)$$

З формули (4.30) випливає, що формула Сімпсона має четвертий порядок точності з дуже малим коефіцієнтом в залишковому члені. Формула Сімпсона дозволяє отримати високу точність, якщо четверта похідна підінтегральної функції не дуже велика. В іншому випадку методи другого порядку можуть дати більшу точність, ніж метод Сімпсона. Так, для функції  $f(x) = -25 \cdot x^4 + 45 \cdot x^2 - 7$  формула трапецій при  $n = 2$  для інтеграла в межах  $[-1; 1]$  дає точний результат, рівний 4, тоді як за формулою Сімпсона отримаємо результат, неспівпадаючий навіть за знаком  $(-8/3)$ .

Якщо застосувати теорему про середнє, то формула (4.30) може бути записана як

$$R_0 = -\frac{h^4 \cdot (b-a)}{180} \cdot f^{IV}(\xi),$$

а гранична похибка

$$R_0^{\max} = -\frac{(b-a)^5}{180 \cdot (2 \cdot n)^4} \cdot M_4,$$

де  $M_4$  – найбільше значення  $|f^{IV}(x)|$  у проміжку  $(a, b)$ .

Аналогічно можна отримати формули для кількості значень функції більшому трьох, використовуючи для апроксимації інтегрованої функції поліноми більш високих порядків, підвищуючи при цьому точність. Сукупність усіх цих формул носить назву квадратурних формул Ньютона-Котеса.

## 4.2. Методи найвищої алгебраїчної точності

Квадратурною формулою називається всяка проста формула, що апроксимує окремий інтеграл  $I_i$ . Складова квадратурна формула – це формула, що дає наближення до інтеграла функції у вигляді суми наближень за даною квадратурною формулою до окремих інтегралів  $I_i$ .

У загальному вигляді квадратурну формулу для визначеного інтеграла  $I = \int_a^b f(x)dx$  від безперервної на відрізку  $[a, b]$  функції  $f(x)$  можна записати як

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n q_i \cdot f(x_i), \quad (4.31)$$

де  $q_i$  – деякі числа, так звані ваги,  $x_i$  – деякі точки відрізка  $[a, b]$ , так звані вузли.

Кажуть, що квадратурна формула точна для поліномів ступеня  $m$ , якщо при заміні функції  $f(x)$  на довільний алгебраїчний поліном ступеня  $m$  наближена рівність (4.31) стає точною. Так, з виразів залишкових членів в формулах середніх прямокутників і трапецій видно, що ці формули точні для поліномів першого ступеня, тобто для лінійних функцій, формула Сімпсона точна для багаточленів третього ступеня. У загальному випадку методи Ньютона-Котеса відносяться до методів числового інтегрування з довільним розбиттям інтервалу. У формулах прямокутників, трапецій і Сімпсона фактично розбиття проводилося на рівні відрізки. Виникає цілком виправдане питання: чи не можна зменшити похибку обчислення інтеграла при заданій кількості інтервалів, якщо розташовувати кінці інтервалів там, де це потрібно з умов досягнення найвищої точності інтегрування. Тобто підінтегральну функцію  $f(x)$ , так само як і в методах Ньютона-Котеса, будемо апроксимувати поліномами різних ступенів. Однак, на відміну від методів Ньютона-Котеса, вузли для побудови інтерполяційного полінома оберемо з умови забезпечення мінімальної похибки інтегрування. Вперше задача побудови квадратурних формул подібного типу була вирішена Гауссом, і потім це рішення було узагальнено Крістоффелем.

Для того щоб вузли квадратурних формул не залежали від меж інтегрування, лінійним перетворенням змінної  $x$  здійснюється перехід до стандартного інтервалу інтегрування  $[-1; 1]$  (рис. 4.8)

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{x-a} &= \frac{1-(-1)}{t-(-1)}; & \frac{b-a}{x-a} &= \frac{2}{t+1}; & 2 \cdot (x-a) &= (b-a) \cdot (t+1); \\ x &= \frac{b-a}{2} \cdot (t+1) + a; & x &= \frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{b-a}{2} + a; \\ & & x &= \frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{a+b}{2} + a, \end{aligned} \quad (4.32)$$

де  $t$  – нова змінна.

Відповідно

$$dx = \frac{b-a}{2} \cdot dt. \quad (4.33)$$

Тоді інтеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (4.34)$$

приймає вигляд

$$I = \frac{b-a}{2} \cdot \int_a^b f\left(\frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{a+b}{2}\right) dt = \frac{b-a}{2} \cdot \int_{-1}^1 \varphi(t) dt. \quad (4.35)$$

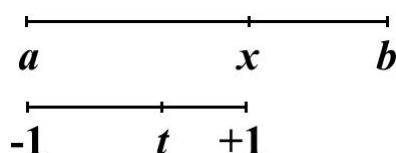


Рисунок 4.8 – Схема переходу до стандартного інтервалу інтегрування

Квадратурна формула Гауса-Крістоффеля при  $n$  вузлах містить  $2 \cdot n$  параметрів

$$I = \sum_{k=1}^n C_k \cdot f(x_k) + R, \quad (4.36)$$

де  $C_k$  – вагові коефіцієнти,  $x_k$  – вузли,  $R$  – похибка квадратури.

Поліном ступеня  $2 \cdot n - 1$  також має  $2 \cdot n$  коефіцієнтів. Отже, можна так підібрати параметри  $C_k$  і  $x_k$ , щоб формула (4.36) була точною, тобто  $R = 0$ , для будь-якого полінома ступеня не вище  $(2 \cdot n - 1)$ .

Так, при  $n = 1$  квадратура (4.36) буде точною для поліномів нульового і першого ступеня. Цій вимозі задовольняє метод середніх прямокутників, який і є найпростішим з методів Гауса-Крістоффеля.

У разі двох вузлових точок ( $n = 2$ ) квадратура буде точною для поліномів не вище третього ступеня ( $2 \cdot n - 1 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ ). Для порівняння формула трапецій (також для двох вузлових точок) з методів Ньютона-Котеса дозволяє знайти точне значення інтеграла лише від лінійної функції, тобто є точною для поліномів не вище першого порядку.

Нехай підінтегральну функцію інтеграла (4.35) представлено у вигляді кубічного полінома з коефіцієнтами  $a_k$  (рис. 4.9)

$$\varphi(t) = a_0 \cdot t + a_1 \cdot t^2 + a_2 \cdot t^3 + a_3 \cdot t^4, \quad (4.37)$$

тоді інтеграл від полінома приймає значення

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) dt = \left[ a_0 \cdot t + a_1 \cdot \frac{t^2}{2} + a_2 \cdot \frac{t^3}{3} + a_3 \cdot \frac{t^4}{4} \right]_{-1}^1 = 2(a_0 + a_2/3). \quad (4.38)$$

Інтерполяційний поліном Ньютона, що співпадає в вузлах  $t_0$  і  $t_1$  зі значеннями підінтегральної функції  $\varphi(t_0)$  і  $\varphi(t_1)$ , матиме першу ступінь (рис. 4.9)

$$P_1(t) = \varphi(t_0) + \varphi(t_0; t_1) \cdot (t - t_0), \quad (4.39)$$

де  $\varphi(t_0; t_1) = \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{t_1 - t_0}$  – розділена різниця першого порядку в точці  $t_0$ .

Візьмемо інтеграл від полінома (4.39) і підставимо в результат значення функції (4.37) для вузлів  $t_0$  і  $t_1$

$$\int_{-1}^1 P_1(t) dt = 2 \cdot [\varphi(t_0) - \varphi(t_0; t_1) \cdot t_0] = 2 \cdot [a_0 - a_2 \cdot t_0 \cdot t_1 - a_3 \cdot t_0 \cdot t_1 \cdot (t_0 + t_1)]. \quad (4.40)$$

Порівнюючи праві частини виразів (4.38) і (4.40), отримуємо систему двох рівнянь щодо вузлів  $t_0$  і  $t_1$

$$\begin{cases} t_0 \cdot t_1 = -1/3; \\ t_0 + t_1 = 0. \end{cases}$$

Звідси отримуємо

$$t_0 = -1/\sqrt{3} \text{ и } t_1 = 1/\sqrt{3} \quad (4.41)$$

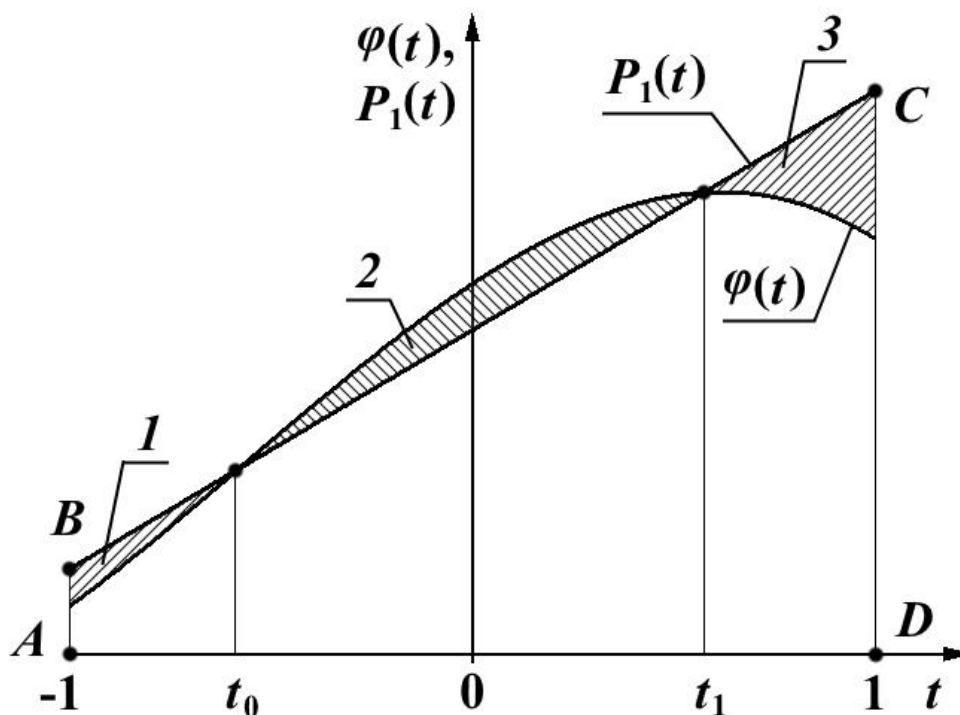


Рисунок 4.9 – Геометричне тлумачення методу Гауса-Крістоффеля

При таких вузлах формула (4.36) з урахуванням співвідношення (4.40) має вигляд

$$I = \frac{b-a}{2} \cdot (\varphi(t_0) + \varphi(t_1)), \quad (4.42)$$

де  $\varphi(t) = f\left(\frac{b-a}{2} \cdot t + \frac{a+b}{2}\right)$ .

Вузли  $t_0$  і  $t_1$  є коренями полінома Лежандра другого ступеня. Вагові коефіцієнти у формулі (4.42) дорівнюють одиниці.

Геометричне тлумачення методу Гауса-Крістоффеля можна дати на прикладі квадратурної формули цього методу для двох вузлів. Інтеграл, що стоїть в лівій частині виразу (4.40) являє собою площу трапеції  $ABCD$ . Якщо сума площ ділянок 1 і 2 (див. рис. 4.9) дорівнює площі ділянки 3, то площа трапеції в точності дорівнює площі під кривою  $\varphi(t)$ . Суть методу Гауса-Крістоффеля в даному випадку полягає в знаходженні такої прямої, для якої досягається це рівність.

Поліном Лежандра в загальному вигляді можна записати як

$$P_n(x) = \frac{1}{n!2^n} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (4.43)$$

Вагові коефіцієнти визначають за формулою (4.44)

$$C_k = \frac{2}{(1 - x_k^2) \cdot [P_n'(x_k)]^2}. \quad (4.44)$$

Поліноми Лежандра [31] володіють тією властивістю, що всі їх корені дійсні, прості і розташовані на інтервалі  $(-1; 1)$  (рис. 4.10).

Таким чином, прирівнявши поліном Лежандра до нуля і знайшовши корені отриманого рівняння, можна визначити значення вузлів і за формулою (4.44) значення вагових коефіцієнтів для  $n = 2, 3, \dots$ .

Зазвичай в обчислювальній практиці вагові коефіцієнти і вузли задаються у вигляді констант, їх можна взяти з таблиць в довідниках [28]. Абсциси вузлів і вагових коефіцієнтів для найбільш часто використовуваних квадратурних формул Гауса-Крістоффеля наведено в табл. 4.1.

Верхня межа похибки квадратурної формули Гауса оцінюється таким виразом:

$$\max |R| \approx \frac{b-a}{2,5 \cdot \sqrt{n}} \cdot \left( \frac{b-a}{3 \cdot n} \right)^{2 \cdot n} \cdot \max_{[a,b]} |f^{(2 \cdot n)}(x)|, \quad (4.45)$$

який дозволяє зробити висновок про ефективність методу для інтегрування функцій високої гладкості.

### **4.3. Застосування сплайнів для числового інтегрування (сплайн-квадратури)**

Розглянемо застосування сплайнів для обчислення визначених інтегралів або так звану сплайн-квадратуру. Для цього використовуємо інтерполяційні кубічні сплайни, коефіцієнти яких визначаються з умов Лагранжа, умов безперервності першої і другої похідних і умов на кінцях інтервалу. Внаслідок цього коефіцієнти всіх сплайнів виявляються пов'язаними системою лінійних алгебраїчних рівнянь з трьохдіагональною матрицею.

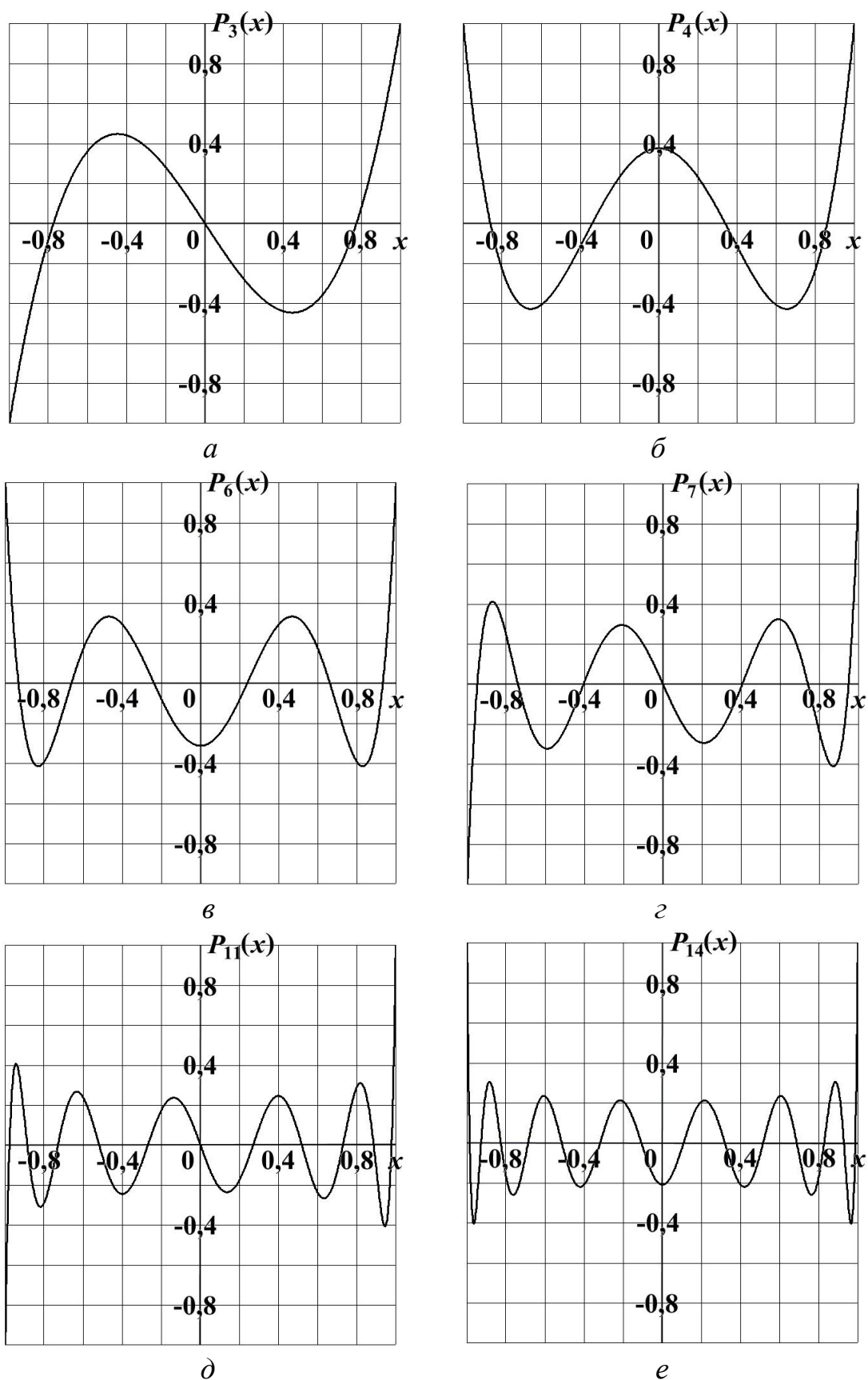


Рисунок 4.10 – Поліноми Лежандра третього (а), четвертого (б), шостого (в), сьомого (г), одинадцятого (д) та чотирнадцятого (е) ступеня

Таблиця 4.1 – Абсциси вузлів і вагових коефіцієнтів для квадратурних формул Гауса-Крістоффеля

$n$	Абсциси вузлів $t_i$	Вага $C_i$
1	0,0	2,0
2	$\pm 0,577350$	1,0
3	0,0	0,888889
	$\pm 0,774597$	0,555555
4	$\pm 0,339981$	0,652145
	$\pm 0,861136$	0,347855
5	0,0	0,568889
	$\pm 0,538469$	0,478629
	$\pm 0,906180$	0,236927
6	$\pm 0,238619$	0,467914
	$\pm 0,661209$	0,360762
	$\pm 0,9324695$	0,1713245
7	0,0	0,417959
	$\pm 0,405805$	0,381830
	$\pm 0,741531$	0,279705
	$\pm 0,949108$	0,129485
8	$\pm 0,183435$	0,362684
	$\pm 0,525531$	0,313707
	$\pm 0,7966665$	0,222381
	$\pm 0,960290$	0,1012285

Нехай необхідно обчислити інтеграл виду

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx. \quad (4.46)$$

Розіб'ємо інтервал  $[x_0; x_n]$  на ділянки  $h_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , на кожній з яких підінтегральну функції  $f(x)$  замінимо кубічним сплайном  $\varphi_i(x)$

$$\varphi_i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_{i-1}) + c_i \cdot (x - x_{i-1})^2 + d_i \cdot (x - x_{i-1})^3, \quad (4.47)$$

де  $x \in [x_{i-1}; x_i]$ .

Тоді інтеграл (4.46) можна записати як суму інтегралів від  $n$  сплайнів

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a_i + b_i \cdot (x - x_{i-1}) + c_i \cdot (x - x_{i-1})^2 + d_i \cdot (x - x_{i-1})^3] dx = \\ &= \left[ a_i \cdot (x - x_{i-1}) + b_i \cdot (x - x_{i-1})^2 / 2 + c_i \cdot (x - x_{i-1})^3 / 3 + d_i \cdot (x - x_{i-1})^4 / 4 \right] \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} = \\ &= a_i \cdot (x_i - x_{i-1}) + b_i \cdot (x_i - x_{i-1})^2 / 2 + c_i \cdot (x_i - x_{i-1})^3 / 3 + d_i \cdot (x_i - x_{i-1})^4 / 4 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1}) - b_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1})^2 / 2 - c_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1})^3 / 3 - d_i \cdot (x_{i-1} - x_{i-1})^4 / 4 = \\
& = a_i \cdot h_i + b_i \cdot h_i^2 / 2 + c_i \cdot h_i^3 / 3 + d_i \cdot h_i^4 / 4;
\end{aligned}$$

$$I \approx \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx = \sum_{i=1}^n \left( a_i \cdot h_i + b_i \cdot h_i^2 / 2 + c_i \cdot h_i^3 / 3 + d_i \cdot h_i^4 / 4 \right). \quad (4.48)$$

Спростуємо формулу (4.48), використовуючи вирази (2.72), (2.80), (2.81) (див. розд. 2. Наближення функцій)

$$a_i = f_{i-1}; \quad (4.49)$$

$$d_i = (c_{i+1} - c_i) / (3 \cdot h_i); \quad (4.50)$$

$$b_i = (f_i - f_{i-1}) / h_i - (c_{i+1} + 2 \cdot c_i) \cdot h_i / 3; \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \left[ f_i \cdot h_i + \left( (f_i - f_{i-1}) / h_i - (c_{i+1} + 2 \cdot c_i) \cdot h_i / 3 \right) \cdot h_i^2 / 2 + c_i \cdot h_i^3 / 3 + \right. \\
& \left. + (c_{i+1} - c_i) / (3 \cdot h_i) \cdot h_i^4 / 4 \right] = \\
& = \sum_{i=1}^n h_i \cdot (f_i + f_{i-1}) / 2 + \sum_{i=1}^n \left[ - (c_{i+1} + 2 \cdot c_i) \cdot h_i^3 / 6 + c_i \cdot h_i^3 / 3 + (c_{i+1} - c_i) \cdot h_i^3 / 12 \right] = \\
& = \sum_{i=1}^n h_i \cdot (f_i + f_{i-1}) / 2 + \sum_{i=1}^n h_i^3 \cdot \left[ -c_{i+1} / 6 - c_i / 3 + c_i / 3 + c_{i+1} / 12 - c_i / 12 \right] = \\
& = \sum_{i=1}^n h_i \cdot (f_i + f_{i-1}) / 2 - \sum_{i=1}^n h_i^3 \cdot (c_i + c_{i+1}) / 12
\end{aligned}$$

і отримуємо

$$I \approx \sum_{i=1}^n \left( h_i \cdot (f_i + f_{i-1}) / 2 \right) - \sum_{i=1}^n \left( h_i^3 \cdot (c_i + c_{i+1}) / 12 \right). \quad (4.52)$$

Очевидно, що перша сума у формулі (4.52) є формула трапецій, а друга сума – поправочний доданок для формули трапецій, застосованої до сплайнів.

Так як при малих значеннях  $h_i$  у формулі (4.53)

$$c_i + 3 \cdot d_i \cdot h_i = c_{i+1}; \quad (4.53)$$

доданок  $3 \cdot d_i \cdot h_i \rightarrow 0$ , то коефіцієнти  $c_i$  і  $c_{i-1}$  близькі за величиною і, відповідно, маємо

$$\varphi_i''(x) = 2 \cdot c_i + 6 \cdot d_i \cdot (x - x_i);$$

$$\varphi_i''(x) = 2 \cdot c_i + 6 \cdot d_i \cdot h_i \approx 2 \cdot c_i \approx c_i + c_{i+1};$$

$$c_i + c_{i+1} \approx \varphi_i''(x). \quad (4.54)$$

Значить похибка сплайн-квадратури менша ніж похибка методу трапецій (похибка інтегрування кубічними сплайнами пропорційна  $h^3$  проти пропорційності  $h^2$  для методу трапецій).

Однак алгоритм інтегрування за допомогою сплайнів складніше алгоритмів методів трапецій і Сімпсона за рахунок необхідності вирішення системи лінійних рівнянь для визначення коефіцієнтів сплайнів  $c_i$ . Тому раціонально використовувати сплайн-квадратуру в комплексі, коли сплайни застосовуються для інтерполяції залежностей, згладжування кривих, обробки експериментальних даних і т.п.

#### 4.4. Апостеріорні оцінки похибок за Рунге і Ейткенем

Апріорні оцінки похибок можна записати у вигляді

$$R_0 = A \cdot h^p, \quad (4.55)$$

де  $A$  – коефіцієнт, що залежить від методу інтегрування і виду підінтегральної функції;  $h$  – крок інтегрування;  $p$  – порядок методу.

Залежності (4.55) підпорядковується головний член похибки більшості методів числового інтегрування. При числовому диференціюванні похибка також може бути оцінена за допомогою формули (4.55), при цьому порядок  $p$  залежить від кількості вузлових точок.

Нехай обчислюється значення деякої змінної  $w$  з кроком  $h$ , тоді

$$w = w_h + A \cdot h^p + O(h^{p+1}), \quad (4.56)$$

де  $w_h$  – наближене значення  $w$ ;  $A \cdot h^p$  – головний член похибки;  $O(h^{p+1})$  – нескінченно мала величина порядку  $h^{p+1}$ .

Обчислюємо ту ж саму змінну  $w$  з кроком  $k \cdot h$

$$w = w_{k \cdot h} + A(k \cdot h)^p + O((k \cdot h)^{p+1}), \quad (4.57)$$

де коефіцієнт пропорційності  $k$  може бути як більше, так і менше одиниці. Коефіцієнт  $A$  у виразах (4.56) і (4.57) буде однаковим, так як обчислюється одна і та

ж змінна, одним і тим же методом, а від величини кроку  $h$  значення  $A$  не залежить.

Нехтуючи нескінченно малими величинами, прирівняємо праві частини співвідношень (4.56) і (4.57) з урахуванням формули (4.55) і отримаємо

$$w_h + R_0 = w_{k \cdot h} + k^p \cdot R_0,$$

звідки знайдемо головний член похибки

$$R_0 = \frac{w_h - w_{k \cdot h}}{k^p - 1}. \quad (4.58)$$

Формула (4.58) називається першою формулою Рунге і дозволяє шляхом подвійного прорахунку величини  $w$  з кроками  $h$  і  $k \cdot h$  оцінити похибку. Так як оцінка здійснюється після обчислення, то вона є апостеріорною [3]. Формула (4.58) має велике практичне значення, так як дозволяє провести оцінку похибки без зміни алгоритму використовуваного обчислювального процесу. При зменшенні кроку  $h$  головний член похибки  $R_0$  буде прагнути до повної похибки  $R$ .

Після визначення  $R_0$  можна обчислити уточнене значення шуканої величини

$$w_{\text{ут}} = w_h + R_0, \quad (4.59)$$

останнє співвідношення називають другою формулою Рунге [3]. На жаль, похибка уточненого значення залишається невизначеною, хоча, як правило, вона менше значення  $R_0$ .

Формули Рунге справедливі для всіх обчислювальних процесів, для яких виконується ступеневий закон (4.55). Для визначення порядку методу  $p$  необхідне проведення апріорної оцінки похибки, що не завжди легко здійснити.

Англійський математик Ейткен запропонував спосіб оцінки похибки для випадку, коли порядок  $p$  методу невідомий [3]. Більш того, алгоритм Ейткена дозволяє дослідним шляхом визначити і порядок методу. Для цього необхідно втретє обчислити значення величини  $w$  з кроком  $k^2 \cdot h$ , тобто

$$w = w_{k^2 \cdot h} + A \cdot (k^2 \cdot h)^p$$

або

$$w = w_{k^2 \cdot h} + k^{2 \cdot p} \cdot R_0. \quad (4.60)$$

Прирівнюючи праві частини виразів (4.57) і (4.60), отримаємо співвідношення

$$w_{k \cdot h} - w_{k^2 \cdot h} = R_0 \cdot k^p \cdot (k^p - 1),$$

підставляючи в яке значення  $R_0$  з першої формули Рунге (4.58), знайдемо

$$k^p = \frac{w_{k \cdot h} - w_{k^2 \cdot h}}{w_h - w_{k \cdot h}}. \quad (4.61)$$

Отримане співвідношення (4.61) спільно з першою формулою Рунге (4.58) дозволяє оцінити похибку при використанні обчислювального методу з невідомим порядком  $p$ . Більш того, порядок  $p$  можна визначити, логарифмуючи ліву і праву частини формули (4.61),

$$p = \ln \left( \frac{w_{k \cdot h} - w_{k^2 \cdot h}}{w_h - w_{k \cdot h}} \right) / \ln(k). \quad (4.62)$$

Для обраного обчислювального процесу алгоритм Ейткена досить застосувати тільки один раз для визначення порядку методу, а потім використовувати формулу Рунге, що вимагає тільки дворазового обчислення шуканої величини. Формулу (4.62) можна використовувати для тестування програм, що реалізують числові методи з відомою апріорною похибкою. Апріорний і апостеріорний порядки повинні бути тими, що збігаються, для правильно працюючих програм. Звичайно, ця збіжність буде наближеною, так як при отриманні алгоритмів Рунге і Ейткена враховувалися тільки головні члени похибки.

#### 4.5. Методи Монте-Карло

Маючи під рукою комп'ютер, можна проводити розрахунки за алгоритмами, на реалізацію яких в докомп'ютерну еру вирішувалися тільки одержимі якоюсь ідеєю одиниці.

З літератури відомо, що французький натураліст Ж. Л. Бюффон (XVIII століття) підкинув 4040 раз монету і підрахував, що «орел» випав 2048 разів, а

«решка» – 1992. Англійський статистик Пірсон описав серії підкидання монети в 12000 і 24000 раз. У першому випадку «орел» випав 6019, а в другому – 12013.

Той же Бюффон визначив число  $\pi$  дуже цікавим способом: провів на аркуші паперу паралельні рівновіддалені прямі лінії, став кидати на нього випадковим чином голку, що мала довжину, рівну кроку між лініями, і підраховувати загальне число підкидувань  $N$  і число влучень голки на одну з ліній  $n$ .

Теорія ймовірностей підказує, що у співвідношенні  $n/N$  закладено число  $\pi$ , яке і намагався визначити Бюффон таким незвичайним способом. Встановимо факт того, що якщо голку кидати випадковим чином на розліняну поверхню, то ймовірність того, що голка перетнеться з якою-небудь лінією, пов'язано з числом  $\pi$ .

Нехай дано сімейство рівновіддалених паралельних прямих ліній з відстанню між ними, рівним  $L$ .

Нехай довжина голки  $l < L$ . Коли голку кидають, то точка, відповідна її центру тяжіння  $C$  (рис. 4.11, *a*), може впасти від прямої на будь-якій відстані від 0 до  $L/2$ . Позначимо цю відстань як змінну  $x$ . Кут нахилу голки до прямих (див. рис. 4.11, *a*) розглядатимемо як другу змінну  $\varphi$ . Змінні  $x$  та  $\varphi$  є незалежними, а їх значення можна вважати випадковими величинами.

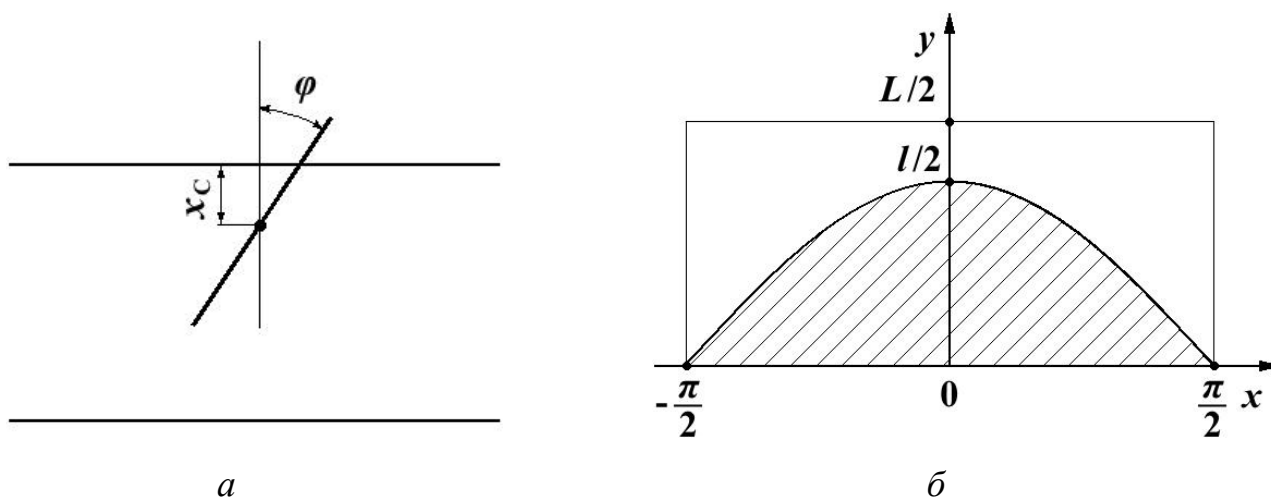


Рисунок 4.11 – Визначення числа  $\pi$  за методом Бюффона

Умова перетину голки з однієї з ліній є  $x < \frac{l}{2} \cdot \cos\varphi$ .

На рис. 4.11, б заштрихована область, обмежена кривою  $x = \frac{l}{2} \cdot \cos\varphi$ , в яку повинна потрапити точка  $C$  з координатами  $(x, \varphi)$ , щоб голка перетнула лінію. Співвідношення площі цієї області до площі всього прямокутника (область можливих значень координат точки  $C$ ) і є ймовірність цього перетину

$$p = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \cdot \cos\varphi d\varphi \bigg/ \frac{L}{2} \cdot \pi = \frac{l}{\pi} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = \frac{2 \cdot l}{\pi \cdot L}.$$

З іншого боку ця ймовірність може бути визначена експериментально  $p = n/N$ ,

число  $\pi$  – зі співвідношення  $\pi = \frac{2 \cdot l}{p \cdot L} = \frac{2 \cdot l \cdot N}{L \cdot n}$ .

Існує більш простий спосіб статистичного розрахунку числа  $\pi$ , ніж той, який використовував Бюффон. Можна намалювати квадрат, вписати в нього коло і кидати «наосліп» туди камінці. Так як в площі кола «заховано» число  $\pi$ , то через підрахунок влучень в коло можна визначити число  $\pi$ . Бюффон цей метод не використовував, напевно, через те, що важко домогтися рівномірного попадання камінців у квадрат.

Звичайно, описані вище приклади використання статистичних методів так і залишилися б в історії науки як курйозів, якби ідея, закладена в них, не знайшла «друге дихання» в комп'ютерну епоху.

Знайти, наприклад, значення визначеного інтеграла методом статистичних випробувань (або методом Монте-Карло) можна наступним чином. Потрібно в прямокутник вписати функцію, що інтегрується, і кидати в нього «камінці» (рис. 4.12). Відомий літературний герой Козьма Прутков в подібній ситуації, коли камінці кидалися в воду, рекомендував «дивитися на кола ними утворені, інакше таке заняття буде пустою забавою». В даному випадку будемо рахувати кількість «камінців», які потрапили під графік функції (рис. 4.13). Кількість та-

ких влучень  $n$  до загальної кількості кидків  $N$  має, якщо вірити теорії ймовірностей, давати значення інтеграла.

Генератор випадкових чисел сучасного комп'ютера цілком може замінити «камінці». Числа генеруються дійсно випадкові, але ряд цих чисел псевдовипадковий, так як його в будь-який момент можна повторити. Від дійсно випадкових чисел відмовилися ще на зорі комп'ютерної ери, коли намагалися монтувати в ЕОМ щось схоже на рулетку. Цей пристрій виявився занадто неповоротким, а головне, з його допомогою неможливо було отримувати повторювані ряди випадкових (псевдовипадкових) чисел, що необхідно при налагодженні програм. Тому і відмовилися від генерування випадкових чисел на фізичних моделях (рулетка) і перейшли до їх математичного моделювання.

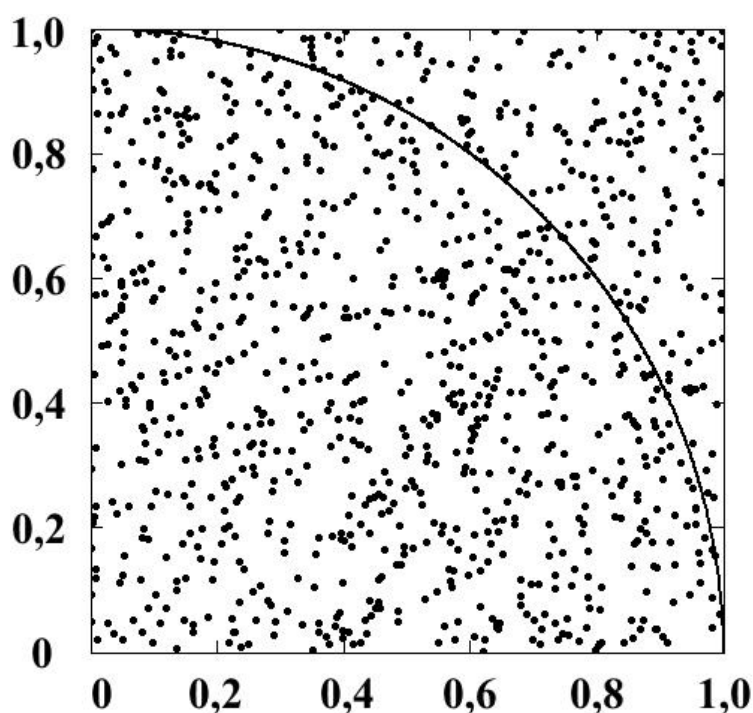


Рисунок 4.12 – Визначення числа  $\pi$  з використанням генератора випадкових чисел

Метод Монте-Карло полягає в використанні випадкових чисел для моделювання різних об'єктів, ситуацій і фізичних явищ, реалізації ігор (подібних гри в карти) та ін.

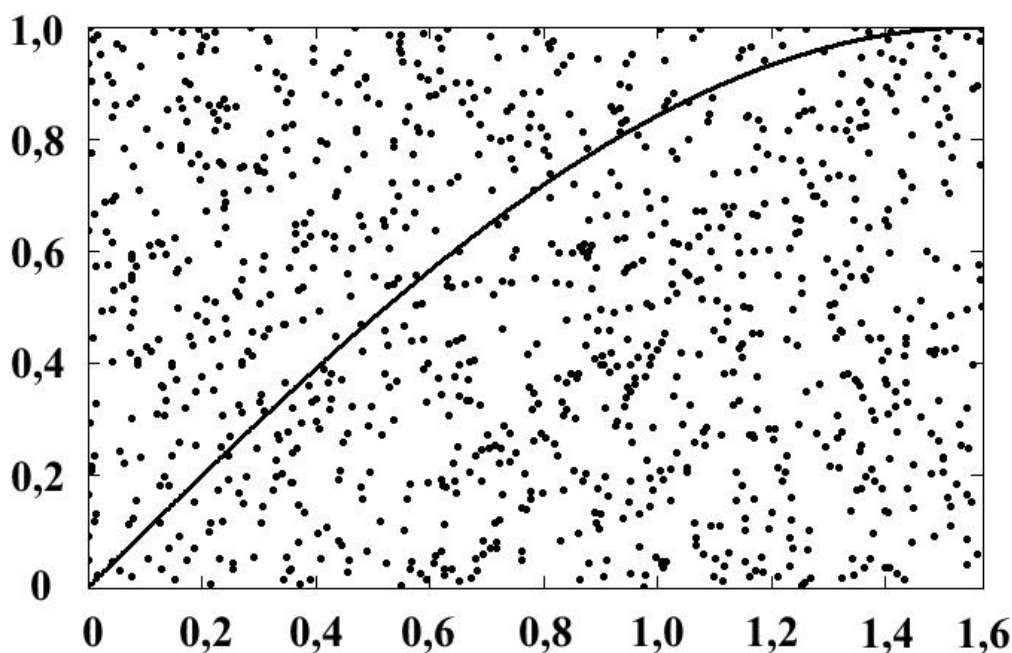


Рисунок 4.13 – Визначення значення інтеграла  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx$

з використанням генератора випадкових чисел

Рівномірно розподілені випадкові числа зазвичай генеруються комп'ютером на відрізку значень  $[0; 1]$ , причому будь-яке значення  $q_i$  на цьому інтервалі рівноімовірно. Найчастіше для реалізації такої послідовності псевдовипадкових чисел використовується операція відокремлення дробової частини від складного арифметичного виразу, що містить число, що передує  $q_i$ . Наприклад, може використовуватися співвідношення виду

$$q_{i+1} = \text{Frac}(k \cdot q_i),$$

де  $\text{Frac}$  – оператор функції, що повертає дробову частину аргументу,  $k = 8 \cdot t \pm 3$  і  $t$  – непарне ціле число (так, при  $t = 5$ ,  $k = 37$  або  $43$ ).

Зазвичай перед використанням датчика випадкових чисел задається початкове значення  $q_0$  на відрізку  $[0; 1]$ . Завдання різних  $q_0$  дозволяє формувати різні послідовності випадкових чисел. Як підкреслювалося вище, насправді виходять псевдовипадкові або квазівипадкові числа, тобто через деяке число циклів послідовності чисел повторюються. Кількість неповторюваних чисел знаходиться в межах від декількох тисяч до сотень тисяч.

Перерахунок рівномірно розподілених випадкових чисел для відрізка  $[a, b]$  проводиться за допомогою формули

$$x_{i+1} = a + (b - a) \cdot q_{i+1}.$$

В багатьох мовах програмування вбудовані функції, які повертають випадкове число. Який алгоритм закладений в ці функції, строго кажучи, користувача хвилює мало – головне, щоб ряд чисел, що генерується, не вироджується, а самі числа розподілялися на заданому інтервалі рівномірно.

Використання методів Монте-Карло для обчислення значень інтегралів особливо ефективно, якщо інтеграл – кратний. Природно, що обчислення кратних інтегралів можна здійснити повторним застосуванням алгоритмів, розглянутих вище. Однак з підвищенням кратності інтегралів різко зростає обсяг обчислювальної роботи. Методи статистичних випробувань (методи Монте-Карло) вільні від цього недоліку, хоча і забезпечують порівняно невисоку точність.

Розглянемо два варіанти методу Монте-Карло для обчислення інтегралів.

Перший спосіб можна інтерпретувати як статистичний варіант методу прямокутників, коли в якості вузла  $x_0$  береться випадкове число (рис. 4.14), рівномірно розподілене на інтервалі інтегрування  $[a, b]$ . Внаслідок випадковості вибору вузла  $x_0$  похибка обчислення інтеграла також буде носити випадковий характер. Провівши  $N$  обчислень з випадковими вузлами  $x_i$ , усереднимо результат, який і приймаємо за наближене значення інтеграла

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{N} \cdot \sum_{i=1}^N f(x_i). \quad (4.64)$$

Похибка інтеграла буде зменшуватися з ростом числа випробувань  $N$  за законом  $\varepsilon \sim N^{-0,5}$ .

Формула (4.64) узагальнюється на кратні інтеграли

$$\int \int \dots \int_V f(x_1, x_2, \dots, x_k) dV \approx \frac{V_k}{N} \cdot \sum_{i=1}^N f(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ki}),$$

де  $V_k$  –  $k$ -мірний об'єм області інтегрування.

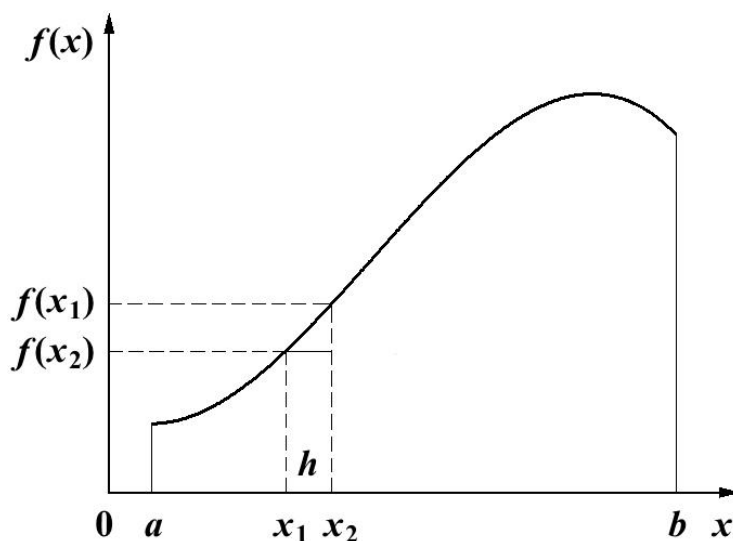


Рисунок 4.14 – Застосування методу Монте-Карло до обчислення значення визначеного інтеграла

Число вузлів, в яких доведеться обчислити підінтегральної функції, буде пропорційно  $\varepsilon^{-2}$  незалежно від кратності інтеграла.

Перевагу методу Монте-Карло перед іншими числовими методами при обчисленні інтеграла можна показати на наступному прикладі: обчислення десятикратного інтеграла в одиничному обсязі з кроком  $h = 0,1$  вимагає обчислення суми приблизно  $10^{10}$  доданків при використанні методу прямокутників.

У другому варіанті методу Монте-Карло інтеграл приводиться до вигляду

$$\int_0^1 f(x) dx, \text{ де } 0 \leq f(x) \leq 1 \text{ на інтервалі } [0;1]. \text{ Тоді дві випадкові величини } x_i \text{ і } y_i$$

можна розглядати як координати точок в одиничному квадраті. При рівномірному розподілі точок в квадраті за наближене значення інтеграла приймається відношення кількості точок  $s$ , потрапили під криву  $y = f(x)$ , до загальної кількості випробувань  $n$   $I = \frac{s}{n}$ . Цей варіант також узагальнюється на кратні інтеграли.

рали.

Числове інтегрування не обмежує сферу застосування методу статистичних випробувань в інженерних розрахунках. Відомі його досить ефективні програми нелінійних рівнянь, систем алгебраїчних і диференціальних рівнянь, для

обчислення екстремумів функцій декількох змінних (в тому числі і глобальних у багатоекстремальних функцій).

#### 4.6. Числове інтегрування з використанням адаптивних методів

Поява комп'ютерів дало поштовх у розвитку адаптивних методів числового інтегрування. З цією метою розроблено різні програми. Першу з них написано В. Маккінаманом ще в 1962 році.

Ці програми використовують одну або дві основні квадратурні формули і автоматично визначають величини підінтегралів так, щоб обчислений результат задовольняв запропонованій точності.

У різних частинах інтегрувального інтервалу можуть використовуватися сітки різних розмірів, порівняно грубі там, де інтегрована функція гладка і змінюється повільно, і порівняно дрібні в областях, де інтегрування стає складним.

Таким чином, робиться спроба отримати результат з запропонованої точністю за можливе мале машинний час.

Розглянемо обчислення інтеграла з точністю  $\varepsilon$

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

1. Розіб'ємо інтервал  $[a, b]$  на мале число підінтегралів ( $n = 10$ )  $[x_i, x_{i+1}]$ . Довжина підінтегралу  $h_i = x_{i+1} - x_i$ .

2. Застосуємо до кожного з підінтегралів дві різні квадратурні формули. Наприклад, формулу Сімпсона (засновану на інтерполяційному поліномі, побудованому за трьома точками) і формулу, отриману інтерполяцією полінома за п'ятьма точками.

Позначимо два відповідних результати через  $Q_i$  і  $P_i$

$$P_i = \frac{h}{6} \cdot \left[ f(x_i) + 4 \cdot f\left(x_i + \frac{h_i}{2}\right) + f(x_i + h_i) \right];$$

$$Q_i = \frac{h}{12} \cdot \left[ f(x_i) + 4 \cdot f\left(x_i + \frac{h_i}{4}\right) + 2 \cdot f\left(x_i + \frac{h_i}{2}\right) + 4 \cdot f\left(x_i + \frac{3 \cdot h_i}{4}\right) + f(x_i + h_i) \right].$$

Вирази  $P_i$  і  $Q_i$  є наближеннями до інтеграла  $I = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$ .

Основна ідея адаптивних програм полягає в порівнянні двох наближень  $P_i$  і  $Q_i$  і отриманні при цьому оцінки їх точності.

3. Якщо точність прийнятна, то  $Q_i$  приймається за значення інтеграла на даному підінтервалі. Якщо ж точність недостатня, то підінтеграл ділиться на дві частини і процес повторюється для менших підінтегралів.

4. Точність обчислень на підінтервалі можна оцінити таким чином:

$$|P_i + Q_i| \leq \varepsilon.$$

#### 4.7. Застосування числового інтегрування для вирішення задачі осадки кільцевої заготовки на плоских плитах

Для побудови математичної моделі осадки кільцевої заготовки використовували енергетичний метод [4–7, 35, 45].

Поле швидкостей для осадки кільцевої заготовки описується наступними залежностями (рис. 4.14)

$$v_z(z) = -\frac{v_0}{h} \cdot z; \quad v_r(r) = \frac{v_0}{2 \cdot h} \cdot \frac{r^2 - R_p^2}{r}.$$

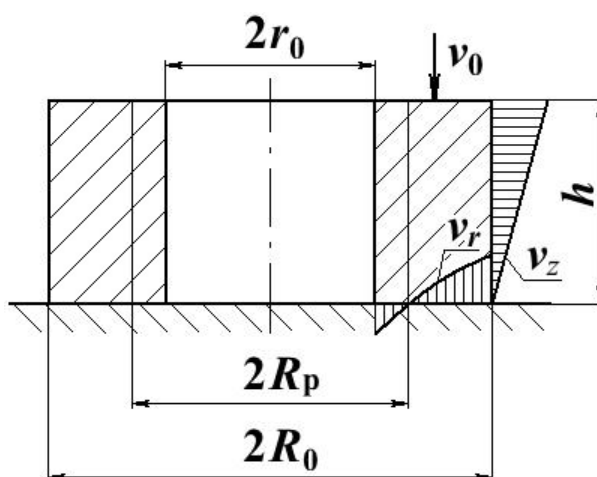


Рисунок 4.15 – Осадка кільця і поле швидкостей

Компоненти тензора швидкостей деформації і інтенсивність деформації дорівнюють

$$\xi_z = -\frac{v_0}{h}; \quad \xi_r = \frac{v_0}{2 \cdot h} \cdot \left(1 - \frac{r^2 - R_p^2}{2 \cdot r^2}\right); \quad \xi_\theta = \frac{v_0}{2 \cdot h} \cdot \frac{r^2 - R_p^2}{2 \cdot r^2};$$

$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{v_0}{h \cdot r^2} \cdot \sqrt{R_p^4 + 3 \cdot r^4}.$$

Потужності внутрішніх сил опору деформації і сил тертя на поверхнях контакту інструменту і заготовки

$$N_1 = \int_{r_0}^{R_0} \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{v_0}{h \cdot r^2} \cdot \sqrt{R_p^4 + 3 \cdot r^4} \cdot \sigma_s \cdot r \cdot dr d\theta dz;$$

$$N_1 = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{3}} \cdot \sigma_s \cdot v_0 \cdot \int_{r_0}^{R_0} \frac{\sqrt{R_p^4 + 3 \cdot r^4}}{r} dr;$$

$$N'_2 = 2 \cdot \int_{r_0}^{R_p} \int_0^{2\pi} \mu \cdot \sigma_s \cdot \left| \frac{v_0}{2 \cdot h} \cdot \frac{r^2 - R_p^2}{r} \right| \cdot r \cdot dr d\theta;$$

$$N'_2 = 2 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \sigma_s \cdot \frac{v_0}{h} \cdot \left| \frac{R_p^3 - r_0^3}{3} - R_p^2 \cdot (R_p - r_0) \right|;$$

$$N''_2 = 2 \cdot \int_{R_p}^{R_0} \int_0^{2\pi} \mu \cdot \sigma_s \cdot \left| \frac{v_0}{2 \cdot h} \cdot \frac{r^2 - R_p^2}{r} \right| \cdot r \cdot dr d\theta;$$

$$N''_2 = 2 \cdot \pi \cdot \mu \cdot \sigma_s \cdot \frac{v_0}{h} \cdot \left| \frac{R_0^3 - R_p^3}{3} - R_p^2 \cdot (R_0 - R_p) \right|.$$

Зусилля деформації визначається за такою залежністю:

$$F = 2 \cdot \pi \cdot \sigma_s \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int_{r_0}^{R_0} \frac{\sqrt{R_p^4 + 3 \cdot r^4}}{r} dr + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{h} \cdot \left( \left| \frac{R_p^3 - r_0^3}{3} - R_p^2 \cdot (R_p - r_0) \right| + \left| \frac{R_0^3 - R_p^3}{3} - R_p^2 \cdot (R_0 - R_p) \right| \right) \right].$$

Питоме зусилля деформації дорівнює

$$\bar{p} = \frac{F_{\pi}(\bar{R}_p)}{\sigma_s \cdot \pi \cdot (\bar{R}_0^2 - \bar{r}_0^2)},$$

$$\text{де } \bar{R}_0 = 1; \quad \bar{h} = \frac{h}{R_0}; \quad \bar{r}_0 = \frac{r_0}{R_0}; \quad \bar{R}_p = \frac{R_p}{R_0};$$

$$\begin{aligned} \bar{p} = & \frac{2}{1 - \bar{r}_0^2} \cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \int_{\bar{r}_0}^1 \frac{\sqrt{\bar{R}_p^4 + 3 \cdot \bar{r}^4}}{\bar{r}} dr + \right. \\ & \left. + \frac{\mu}{h} \cdot \left( \left| \frac{\bar{R}_p^3 - \bar{r}_0^3}{3} - \bar{R}_p^2 \cdot (\bar{R}_p - \bar{r}_0) \right| + \left| \frac{1 - \bar{R}_p^3}{3} - \bar{R}_p^2 \cdot (1 - \bar{R}_p) \right| \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Особливістю задачі осадки кільцевої заготовки (див. рис. 4.15) є наявність змінного параметра  $R_p$ , який визначає положення поверхні розділу течії металу. Його значення можна визначити, використовуючи принцип мінімуму повної енергії деформації [4, 8] або вирішуючи рівняння  $\frac{\partial \bar{p}(R_p)}{\partial R_p} = 0$ , або через мінімі-

зацію функції питомого зусилля  $\bar{p}(R_p)$  (4.65).

У табл. 4.2–4.8 наведено результати розрахунків значення визначеного ін-

теграла  $\int_{\bar{r}_0}^1 \frac{\sqrt{\bar{R}_p^4 + 3 \cdot \bar{r}^4}}{\bar{r}} dr$  для  $r_0 = 0,5$  і  $R_p = 0,6$  і відносної помилки обчислень ( $I$

– значення інтеграла,  $N$  – кількість підінтервалів,  $n$  – кількість точок для квадратур Гауса-Крістоффеля і сплайнів для сплайн-квадратур). Результати порівнювали зі значенням, отриманими з аналітичного виразу для розглянутого інтеграла:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \cdot \left[ 2 \cdot \left( \sqrt{R_p^4 + 3} - \sqrt{R_p^4 + 3 \cdot r_0^4} \right) + \right. \\ & \left. + R_p^2 \cdot \ln \left( \frac{\left( \sqrt{R_p^4 + 3} - R_p^2 \right) \cdot \left( \sqrt{R_p^4 + 3 \cdot r_0^4} + R_p^2 \right)}{\left( \sqrt{R_p^4 + 3} + R_p^2 \right) \cdot \left( \sqrt{R_p^4 + 3 \cdot r_0^4} - R_p^2 \right)} \right) \right] \end{aligned}$$

Застосуємо для знаходження значення інтеграла метод Монте-Карло (рис. 4.16).

Таблиця 4.2 – Значення інтеграла, отримані з використанням формули лівих прямокутників

$N$	$I$	$\varepsilon, \%$
10	0,686266	-2,25
20	0,694113	-1,14
50	0,698881	-0,46
100	0,702085	-0,23
200	0,701283	-0,11
500	0,701764	-0,05
1000	0,701925	-0,02

Таблиця 4.3 – Значення інтеграла, отримані з використанням формули правих прямокутників

$N$	$I$	$\varepsilon, \%$
10	0,718408	2,32
20	0,710184	1,15
50	0,705310	0,46
100	0,703695	0,23
200	0,702890	0,11
500	0,702407	0,05
1000	0,702246	0,02

Таблиця 4.4 – Значення інтеграла, отримані з використанням формули трапецій

№	$N$	$I$	$\varepsilon, \%$
1	10	0,702337	0,04
2	20	0,702149	$8,98 \cdot 10^{-3}$
3	50	0,702096	$1,44 \cdot 10^{-3}$
4	100	0,702088	$3,59 \cdot 10^{-4}$
5	200	0,702086	$8,99 \cdot 10^{-5}$
6	500	0,702086	$1,44 \cdot 10^{-5}$
7	1000	0,702085	$3,59 \cdot 10^{-6}$

Таблиця 4.5 – Значення інтеграла, отримані з використанням формули Сімпсона

№	$N$	$I$	$\varepsilon, \%$
1	10	0,702086	$1,6 \cdot 10^{-5}$
2	20	0,702085	$9,8 \cdot 10^{-7}$
3	50	0,702085	$2,5 \cdot 10^{-8}$
4	100	0,702085	$1,6 \cdot 10^{-9}$
5	200	0,702085	$9,8 \cdot 10^{-11}$
6	500	0,702085	$2,6 \cdot 10^{-12}$
7	1000	0,702085	$-2,6 \cdot 10^{-12}$

Таблиця 4.6 – Значення інтеграла, отримані з використанням формул Гауса-Крістоффеля

№	$n$	$I$	$\varepsilon, \%$
1	2	0,701553	-0,08
2	3	0,702072	$-1,97 \cdot 10^{-3}$
3	4	0,702085	$-7,88 \cdot 10^{-6}$
4	5	0,702086	$5,0 \cdot 10^{-5}$
5	6	0,702086	$4,91 \cdot 10^{-5}$
6	7	0,702085	$-9,87 \cdot 10^{-5}$
7	8	0,702086	$4,79 \cdot 10^{-5}$

Таблиця 4.7 – Значення інтеграла, отримані з використанням сплайн-квадратур

№	$n$	$I$	$\varepsilon, \%$
1	2	0,704210	0,3
2	3	0,702628	0,08
3	4	0,702252	0,02
4	5	0,702135	$7,01 \cdot 10^{-3}$
5	6	0,702091	$8,44 \cdot 10^{-4}$
6	7	0,702074	$-1,57 \cdot 10^{-3}$
7	8	0,702068	$-2,5 \cdot 10^{-3}$
8	9	0,702066	$-2,78 \cdot 10^{-3}$
9	10	0,702066	$-2,79 \cdot 10^{-3}$

Таблиця 4.8 – Значення інтеграла, отримані з використанням формули середніх прямокутників

№	$N$	$I$	$\varepsilon, \%$
1	10	0,701960	-0,02
2	20	0,702054	$-4,5 \cdot 10^{-3}$
3	50	0,702080	$-7,2 \cdot 10^{-4}$
4	100	0,702084	$-1,8 \cdot 10^{-4}$
5	200	0,702085	$-4,5 \cdot 10^{-5}$
6	500	0,702085	$-7,2 \cdot 10^{-6}$
7	1000	0,702085	$-1,8 \cdot 10^{-6}$

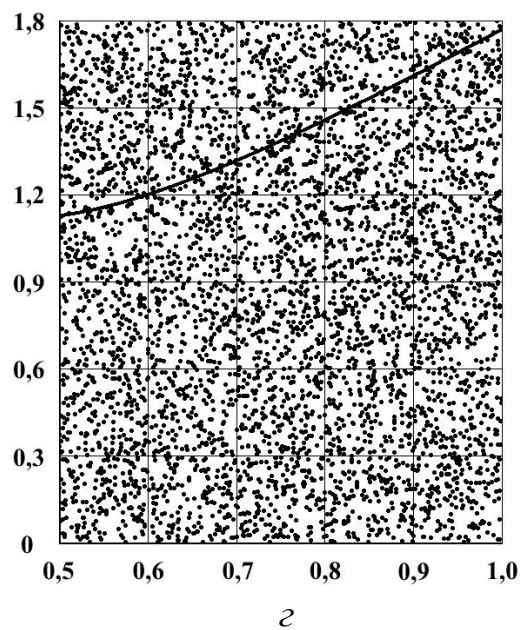
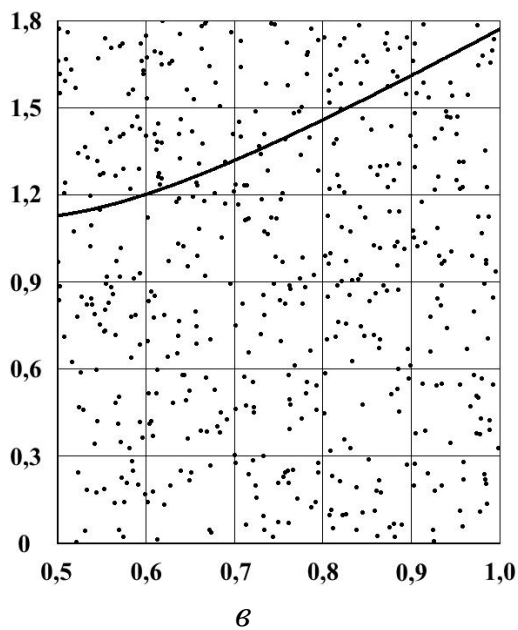
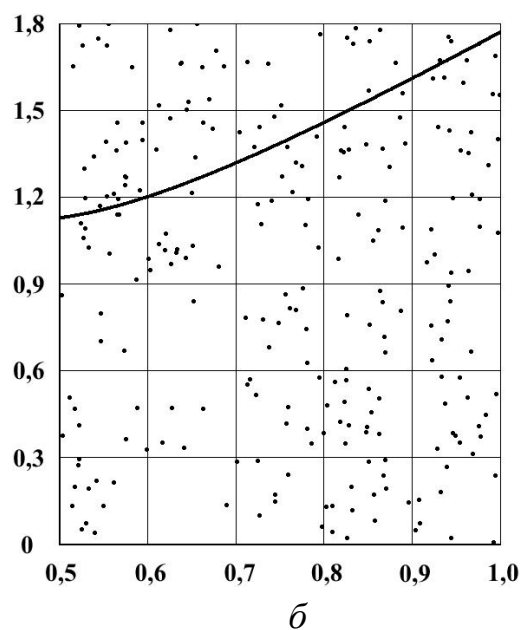
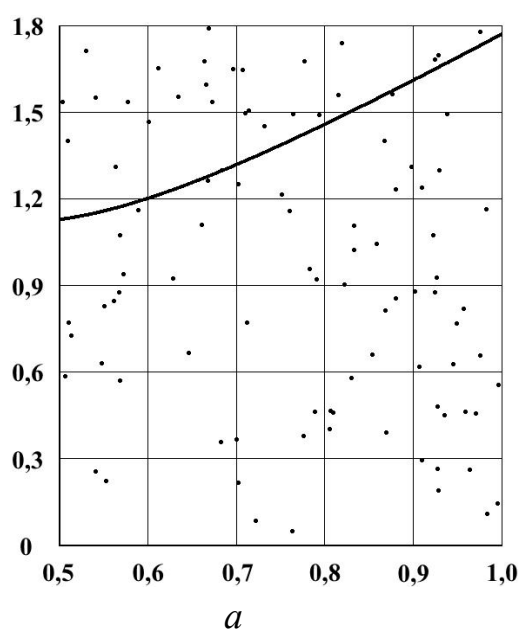


Рисунок 4.16 – Графічна інтерпретація результатів обчислення інтеграла методом Монте-Карло для  $N = 200$  (а),  $N = 500$  (б),  $N = 1000$  (в) и  $N = 10000$  (г)

В табл. 4.9 наведено результати для різних кількостей випробувань:  $N$  – загальна кількість точок,  $n$  – кількість точок, що потрапили під криву підінтегральної функції,  $I$  – розрахункове значення інтеграла,  $\varepsilon$  – відносна похибка.

Таблиця 4.9 – Результати обчислення інтеграла методом Монте-Карло

$N$	$n$	$I$	$\varepsilon$
200	164	0,738	5,12%
200	168	0,756	7,68%
200	156	0,702	-0,01%
200	174	0,783	11,52%
200	154	0,693	-1,29%
200	172	0,774	10,24%
200	150	0,675	-3,86%
200	147	0,6615	-5,78%
500	390	0,702	-0,01%
500	418	0,7524	7,17%
500	427	0,7686	9,47%
500	380	0,684	-2,58%
1000	825	0,7425	5,76%
1000	829	0,7461	6,27%
1000	778	0,7002	-0,27%

### Контрольні питання

1. На підставі чого можна стверджувати, що будь-яка безперервна функція має невизначений інтеграл?
2. В яких випадках використовують числові методи інтегрування?
3. Які основні групи методів числового інтегрування Ви знаєте?
4. Що лежить в основі числових методів Ньютона-Котеса, використовуваних для знаходження значень визначених інтегралів?
5. Яка інтерполяційна формула застосовується в методах прямокутників?
6. Запишіть формули правих, лівих і середніх прямокутників для числового інтегрування.
7. Запишіть формули трапецій і Сімпсона для числового інтегрування.
8. Що означає поняття «порядок методу інтегрування»?
9. Які порядки методів прямокутників, трапецій і Сімпсона?
10. Як оцінити похибку інтегрування для методів Ньютона-Котеса?

11. Чому на практиці формули Ньютона-Котеса вищих порядків використовуються набагато рідше ніж формула Сімпсона?
12. Що означає поняття «квадратура»?
13. Що означає поняття «складова квадратурна формула»?
14. За рахунок чого методи найвищого алгебраїчної точності дозволяють обчислювати значення визначених інтегралів з мінімальною похибкою?
15. Як виглядає квадратурна формула Гауса-Крістоффеля для  $n$  вузлів?
16. За рахунок чого формула середніх прямокутників забезпечує більш точний результат інтегрування, ніж формули правих і лівих прямокутників.
17. Що означає поняття «вагові коефіцієнти» або «ваги»?
18. Який порядок квадратурної формули Гауса-Крістоффеля, аналогічної формулі Сімпсона з методів Ньютона-Котеса.
19. З яких умов в методах числового інтегрування Гауса-Крістоффеля отримано значення вузлів і вагових коефіцієнтів?
20. У чому особливості поліномів Лежандра?
21. У яких випадках раціонально використовувати для числового інтегрування сплайн-квадратури?
22. Як виглядає формула для апріорної оцінки похибки методу числового інтегрування?
23. Для чого використовують першу і другу формули Рунге?
24. Як визначити порядок методу числового інтегрування?
25. У яких випадках раціонально застосування методів Монте-Карло?
26. Що таке генератор випадкових чисел?
27. Чому в сучасних комп'ютерах використовують генератори послідовностей не випадкових, а псевдовипадкових (квазівипадкових) чисел?
28. На чому ґрунтується використання в числовому інтегруванні адаптивних методів?

## 5. ЧИСЛОВЕ ДИФЕРЕНЦІУВАННЯ

Іноді потрібно визначити наближену похідну функції, заданої таблицею [1, 2, 17, 18, 22, 23, 25, 30].

При обчисленні похідної функції, заданої у вигляді множини табличних значень, слід мати на увазі, що кращий спосіб знайти похідну  $y'(x)$  за двома значеннями функції – це використовувати значення функції, що знаходяться праворуч і ліворуч на рівній відстані від того значення  $x$ , для якого необхідно обчислити величину похідної, тобто

$$y'(x) = \frac{y(x + 0,5 \cdot h) - y(x - 0,5 \cdot h)}{h}. \quad (5.1)$$

Таким чином, якщо дані значення  $y$  для  $x$ , розташованих через рівні проміжки, то зручно обчислювати похідні в середині проміжків (табл. 5.1). За значеннями  $y'(x)$  можна таким способом знайти похідну від  $y'(x)$ , тобто  $y''(x)$ . При цьому значення  $y''(x)$  вийдуть знову для вихідних значень  $x$ . Можна висловити  $y''(x)$  безпосередньо через  $y$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{y'(x + 0,5 \cdot h) - y'(x - 0,5 \cdot h)}{h}; \\ y''(x) &= \frac{\frac{y(x + h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x - h)}{h}}{h}; \\ y''(x) &= \frac{y(x + h) - 2 \cdot y(x) + y(x - h)}{h^2}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Формули (5.1) та (5.2) зручно записати, використовуючи кінцеві і розділені різниці

$$\begin{aligned} y'_{k+0,5} &= y'(x_{k+0,5}) = y'(x_k + 0,5 \cdot h) = \frac{y(x_k + 0,5 \cdot h) - y(x_k)}{h} = \frac{\Delta y_{k+0,5}}{h} = y(x_k; x_k + h) \\ y''_k &= \frac{\Delta^2 y_k}{h^2} = y(x_k - h; x_k; x_k + h). \end{aligned}$$

Якщо потрібні значення  $y'(x)$  для інших  $x$ , то їх можна отримати інтерполяцією. Наприклад, для заданих табличних значень  $x$  можна отримати за допомогою інтерполяції першу похідну

$$y'_k(x) = \frac{1}{2} \cdot \left( y_{k-\frac{1}{2}} - y_{k+\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{y_k - y_{k-1}}{h} + \frac{y_{k+1} - y_k}{h} \right) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2 \cdot h}.$$

Таким чином, можна відразу визначати значення  $y'(x)$  для вихідних  $x$  за значеннями  $y$  від вихідних  $x$ , знаходяться праворуч і ліворуч в таблиці. Однак при такому способі, по-перше, отримуємо значень похідних на одне менше (табл. 5.2), ніж при першому способі, по-друге, маємо менше відомостей про поведінку похідної на кінцях проміжку. Крім того, при обчисленні значень  $y'(x)$  для аргументів, неспівпадаючих з табличними (зокрема, що знаходяться посередині між табличними аргументами  $x$ ), достовірність виявляється більше, ніж при першому способі. Це пояснюється тим, що маленькі хорди більш точно передають нахил кривої ніж великі.

Таблиця 5.1 – Обчислення похідних для точок, що знаходяться в середині проміжків

$x$	$y$	$y'$	$y''$
$x_1$	$y_1$	$y'_1$	–
$x_2$	$y_2$	$y'_2$	$y''_2$
$x_3$	$y_3$	$y'_3$	$y''_3$
$x_4$	$y_4$	$y'_4$	$y''_4$
$x_5$	$y_5$	$y'_5$	$y''_5$
$x_6$	$y_6$	–	–

Таблиця 5.2 – Обчислення похідних безпосередньо для вузлів

$x$	$y$	$y'$	$y''$
$x_1$	$y_1$	–	–
$x_2$	$y_2$	$y'_2$	–
$x_3$	$y_3$	$y'_3$	$y''_3$
$x_4$	$y_4$	$y'_4$	$y''_4$
$x_5$	$y_5$	$y'_5$	–
$x_6$	$y_6$	–	–

Між числовим інтегруванням і диференціюванням є суттєва відмінність, яка визначає точність і помилки виконання цих процедур.

Справа в тому, що при обчисленні інтеграла кожне окремо виміряне значення  $y$  множиться на величину  $\Delta x$ . Тому при збільшенні числа окремих вимірювань значень функцій  $y$  коефіцієнт, з яким в вираз інтеграла входить кожне окреме значення, зменшується пропорційно збільшенню числа проміжків  $\Delta x$ .

Отже, зменшується і помилка в інтегралі, яка відбувається за рахунок помилок при кожному окремому вимірі величини  $y$ .

При обчисленні похідної різниця двох значень  $y$  ділиться на  $\Delta x$ . Чим менше проміжок  $\Delta x$ , тобто менше знаменник, тим більшу помилку в величину похідної вносить дана помилка в кожному вимірюваному значенні  $y$ . Тому похідна функції, заданої експериментальними значеннями, виявляється відомою з меншою точністю, ніж сама функція.

Різницю між диференціюванням та інтегруванням можна проілюструвати на такому прикладі. На рис. 5.1 зображено дві криві: суцільна лінія – графік функції  $y = x - 0,1x^2$ , пунктирна лінія – графік функції  $y_1 = x - 0,1 \cdot x^2 + 0,5 \cdot e^{-8 \cdot (x-3)^2}$ . З рис. 5.1 видно, що одна крива помітно відрізняється від іншої лише на невеликому проміжку зміни  $x$ .

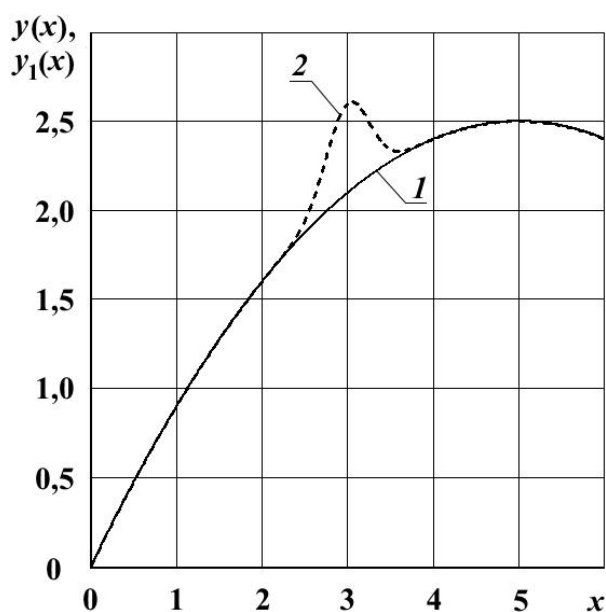


Рисунок 5.1 – Графіки функцій: 1 –  $y = x - 0,1x^2$ ; 2 –  $y_1 = x - 0,1 \cdot x^2 + 0,5 \cdot e^{-8 \cdot (x-3)^2}$

На рис. 5.2 показано графіки інтегралів  $\int_0^x y dx$  та  $\int_0^x y_1 dx$ . В цілому криві відрізняються мало. Відмінність між вихідними функціями  $y(x)$  та  $y_1(x)$  дає невелику добавку в інтеграл  $\int_0^x y_1 dx$ , помітну лише в правій частині графіка.

На рис. 5.3 показано графіки похідних  $y'(x)$  та  $y_1'(x)$ . З цього рисунка видно, що невелика зміна функції в малому проміжку викликали в цьому проміжку великі зміни похідної. З рис. 5.4 можна побачити, що ще сильніше різняться другі похідні функцій  $y''(x)$  та  $y_1''(x)$ .

У разі, коли криву отримано з досліду, невелика зміна кривої на будь-якому проміжку може бути результатом помилки окремого досліду. З попереднього прикладу видно, що на величині інтеграла такі окремі помилки позначаються незначно, а на величину похідної (і особливо вищих порядків) вони впливають сильно.

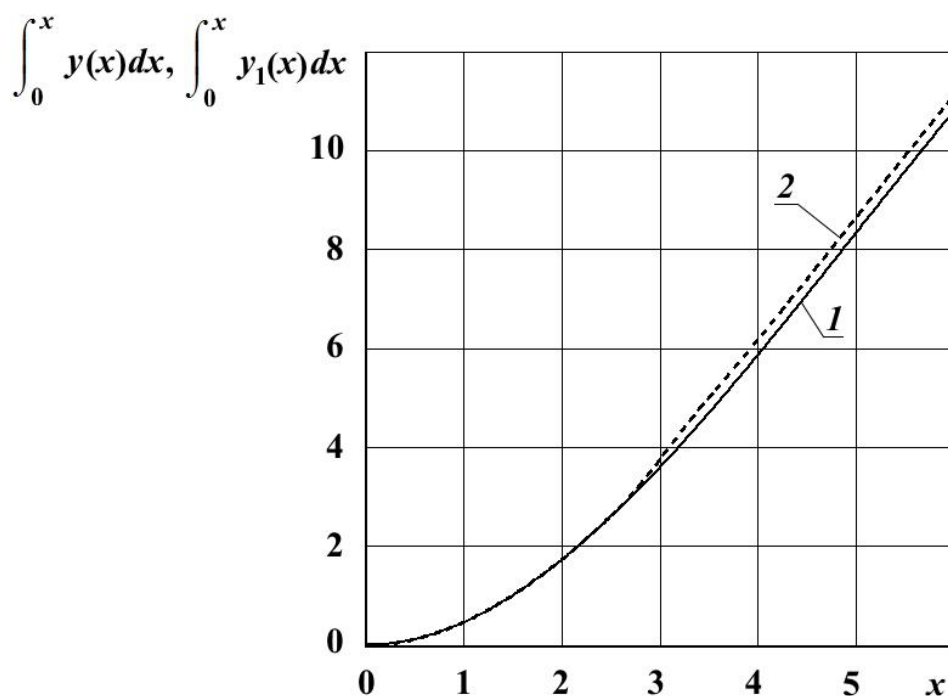


Рисунок 5.2 – Графіки інтегралів від функцій  $y(1)$  та  $y_1(2)$

Тому для того щоб отримати надійні значення похідної, потрібно спершу підібрати формулу, яка добре описує дослідні дані, а потім знаходити похідну, користуючись цією формулою. Так як формула будується з урахуванням всіх дослідних даних, то значення похідної при кожному значенні  $x$  буде знайдено за формулою з урахуванням всіх даних, а не тільки двох-трьох найближчих значень функції. Тому природно очікувати, що випадкові помилки в окремих вимірюваннях менше позначаються на величині похідної. Відповідні формули

можна отримати за допомогою ряду Тейлора або диференціюючи інтерполяційні поліноми, а також диференціюючи апроксимаційні формули, одержувані, наприклад, за допомогою методу найменших квадратів.

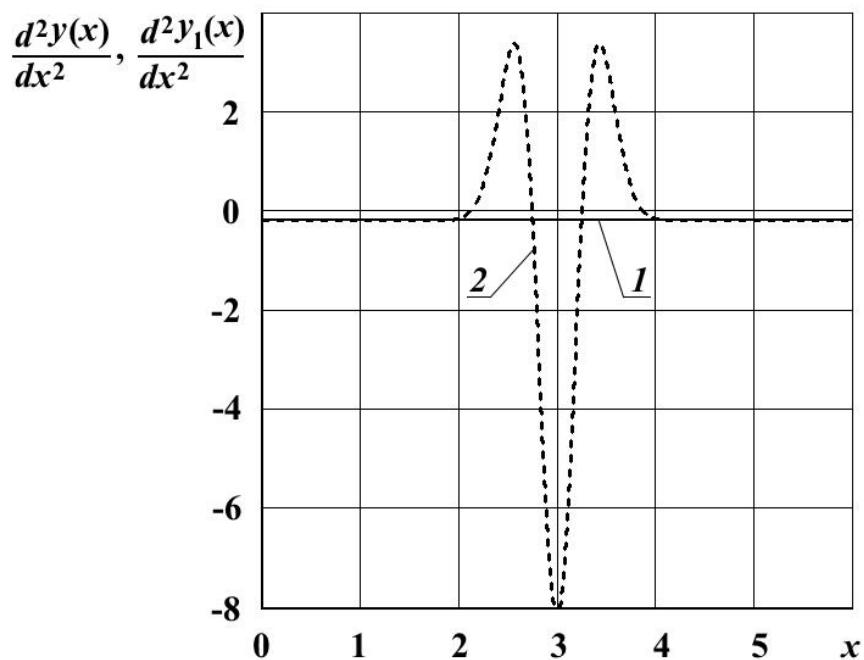


Рисунок 5.3 – Графіки перших похідних від функцій  $y(1)$  та  $y_1(2)$

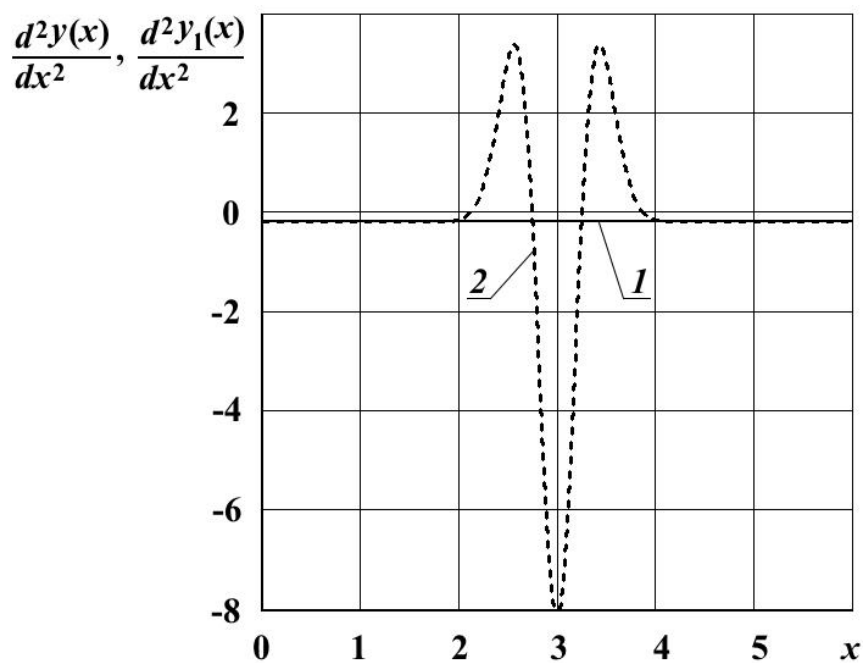


Рисунок 5.4 – Графіки других похідних від функцій  $y(1)$  та  $y_1(2)$

Числове диференціювання табличних функцій може дати абсолютно безглузді результати, тому його слід по можливості уникати.

Крім окремих помилок, при вимірах в ході експерименту завжди присутній так званий шум, тобто отримана інформація, рис. 5.5, *а* (результати вимірювань дійсного сигналу) містить шумову компоненту (рис. 5.5, *б*). Якщо сигнал з шумовою компонентою продиференціювати, то похибка різко зростає (рис. 5.5, *в*). І, навпаки, при інтегруванні сигналу, похибка зменшується (рис. 5.5, *г*). Це ще одне свідчення того, що числове інтегрування – процес набагато більш стійкий, ніж числове диференціювання [18].

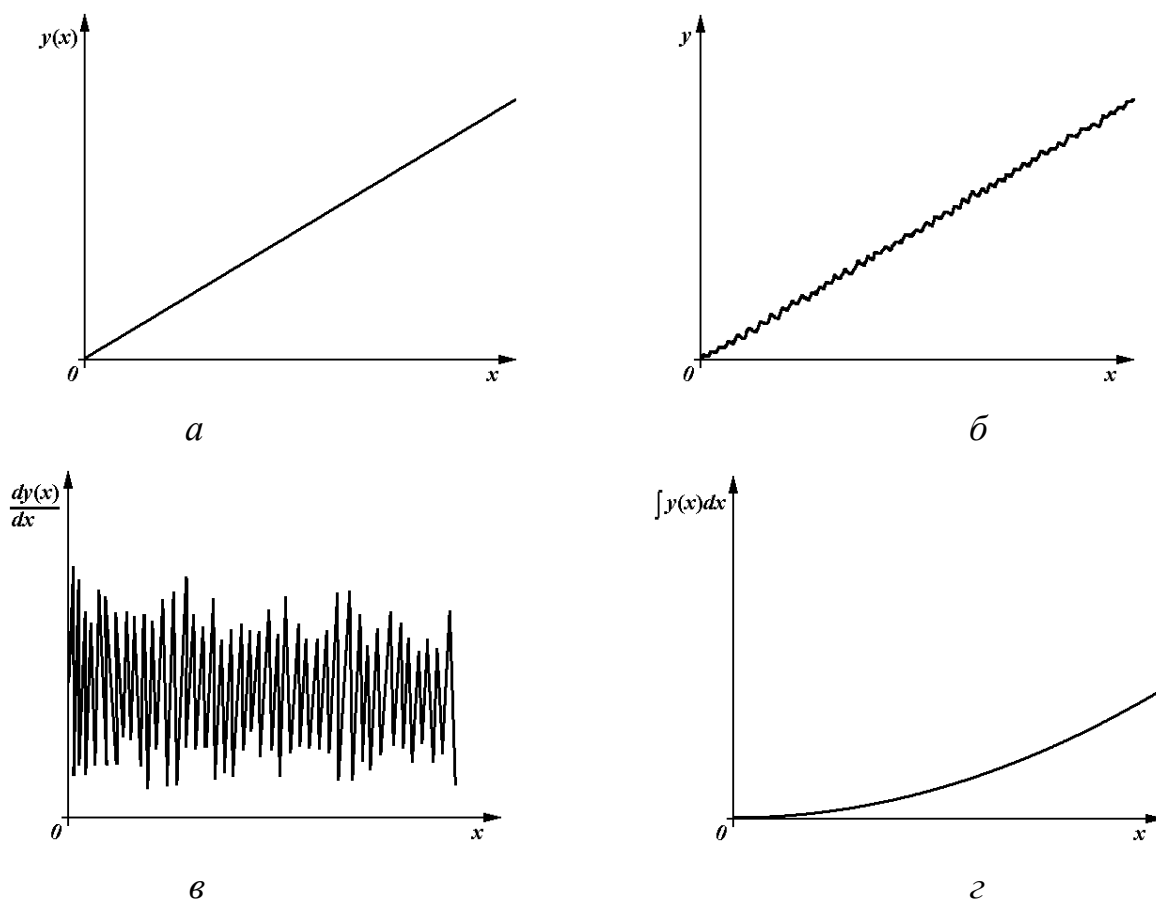


Рисунок 5.5 – Числове диференціювання та інтегрування емпіричної функції:  
*а* – графік функції сигналу, побудований для дійсних значень; *б* – графік функції сигналу з шумовою компонентою; *в* – графік похідної функції сигналу з шумовою компонентою; *г* – графік інтеграла функції сигналу з шумовою компонентою

Найпростіші формули числового диференціювання отримують в результаті диференціювання інтерполяційних формул

$$f^{(k)}(x) \approx P_n^{(k)}(x). \quad (5.3)$$

Ще одна складність, яка трапляється при числовому диференціюванні з використанням інтерполяційних поліномів, ілюструється на рис. 5.6. Навіть в разі, коли інтерполяційний багаточлен добре апроксимує табличну функцію, його похідні вищих порядків можуть не мати нічого спільного з похідними функції, що апроксимується. Це добре видно з рис. 5.6 при порівнянні нахилу і кривизни двох кривих.

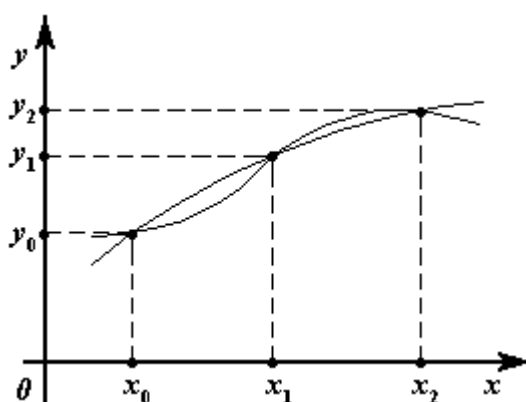


Рисунок 5.6 – Інтерполяція функції алгебраїчним поліномом

Покажемо на простому прикладі, як можна отримати формули числового диференціювання, виходячи з формул інтерполяції. Нехай апроксимуючий багаточлен другого ступеня (формула Ньютона)

$$P_2(x) = c_0 + c_1 \cdot (x - x_0) + c_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

обраний так, що відповідна крива проходить через точки  $(x_0, y_0)$ ;  $(x_1, y_1)$  і  $(x_2, y_2)$ . Для даного багаточлена Ньютона можна визначити значення постійних, що входять в нього, використовуючи поняття кінцевих і розділених різниць, як

$$c_0 = y_0; \quad c_1 = \frac{y_1 - y_0}{h}; \quad c_2 = \frac{y_0 - 2 \cdot y_1 + y_2}{2 \cdot h^2}.$$

Продиференціювавши багаточлен  $P_2(x)$ , отримуємо  $P_2'(x)$

$$P_2'(x) = c_1 + c_2 \cdot (2 \cdot x - x_0 - x_1).$$

При  $x = x_0$ , приймаючи до уваги, що  $x_0 - x_1 = -h$ , знаходимо

$$P_2'(x_0) = \frac{-3 \cdot y_0 + 4 \cdot y_1 - y_2}{2 \cdot h}.$$

Отримана величина називається наближенням другого порядку для похідної в точці  $x = x_0$ .

У всіх випадках, коли доводиться користуватися похідною, отриманою шляхом числового диференціювання, слід оцінювати порядок величини помилки апроксимації. Для цього використовують розкладання функції в ряд Тейлора

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + \varepsilon \cdot f'(x) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \cdot f''(x) + \frac{\varepsilon^3}{3!} \cdot f'''(x).$$

Прийняв  $x = x_0$ ,  $\varepsilon = h$  (тобто кроку таблиці), отримуємо  $f(x + h) = y_1$ . Отже,

$$y_1 = y_0 + h \cdot y_0' + \frac{h^2}{2!} \cdot y_0'' + \frac{h^3}{3!} \cdot y_0'''.$$

Аналогічним чином при  $\varepsilon = 2 \cdot h$  маємо

$$y_2 = y_0 + 2 \cdot h \cdot y_0' + \frac{4}{2!} \cdot h^2 \cdot y_0'' + \frac{8}{3!} \cdot h^3 \cdot y_0'''.$$

Якщо з цих двох рівнянь виключимо другу похідну  $y_0''$ , помноживши перше з них на 4, а друге на  $-1$ , і потім складемо обидва, то отримаємо

$$y_0' = \frac{4 \cdot y_1 - y_2 - 3 \cdot y_0}{2 \cdot h} \cdot y_0'' + \frac{h^2}{3} \cdot y_0'''.$$

Це наближення другого порядку для першої похідної відрізняється від отриманого раніше членом, який і визначає величину помилки.

Аналогічним чином можна отримати похідні вищих порядків, застосовуючи апроксимацію правими, центральними і лівими різницями. У табл. 5.3–5.5 наведено формули, отримані для першої, другої і третьої похідних при їх апроксимації відповідними різницями і використанні різної кількості точок з відповідними похибками [18].

Таблиця 5.3 – Формули для обчислення похідних на основі апроксимації правими різницями

Порядок похідної	Кількість точок			
	дві	три	чотири	п'ять
Перша	$\frac{1}{h} \cdot [y_1 - y_0]$	$\frac{1}{2 \cdot h} \cdot [(-y_2) + 4 \cdot y_1 - 3 \cdot y_0]$	$\frac{1}{6 \cdot h} \cdot [2 \cdot y_3 - 9 \cdot y_2 + 18 \cdot y_1 - 11 \cdot y_0]$	$\frac{1}{12 \cdot h} \cdot [(-3 \cdot y_4) + 16 \cdot y_3 - 36 \cdot y_2 + 48 \cdot y_1 - 25 \cdot y_0]$
	$-\frac{h}{2} \cdot y_0''$	$\frac{h^2}{3} \cdot y_0'''$	$-\frac{h^3}{4} \cdot y_0^{IV}$	$\frac{h^4}{5} \cdot y_0^V$
Друга	—	$\frac{1}{h^2} \cdot [y_2 - 2 \cdot y_1 + y_0]$	$\frac{1}{h^2} \cdot [(-y_3) + 4 \cdot y_2 - 5 \cdot y_1 + 2 \cdot y_0]$	$\frac{1}{12 \cdot h^2} \cdot [11 \cdot y_4 - 56 \cdot y_3 + 114 \cdot y_2 - 104 \cdot y_1 + 35 \cdot y_0]$
		$-h \cdot y_0'''$	$\frac{11}{12} \cdot h^2 \cdot y_0^{IV}$	$\frac{5}{6} \cdot h^3 \cdot y_0^V$
Третя	—	—	$\frac{1}{h^3} \cdot [y_3 - 3 \cdot y_2 + 5 \cdot y_1 - y_0]$	$\frac{1}{2 \cdot h^3} \cdot [(-3 \cdot y_4) + 14 \cdot y_3 - 24 \cdot y_2 + 18 \cdot y_1 - 5 \cdot y_0]$
			$-\frac{3}{2} \cdot h \cdot y_0^{IV}$	$\frac{21}{12} \cdot h^2 \cdot y_0^V$

Таблиця 5.4 – Формули для обчислення похідних на основі апроксимації центральними різницями

Порядок похідної	Кількість точок		
	три	п'ять	сім
Перша	$\frac{1}{2 \cdot h} \cdot [y_1 - y_{-1}]$	$\frac{1}{12 \cdot h} \cdot [(-y_2) + 8 \cdot y_1 - 8 \cdot y_{-1} + y_{-2}]$	$\frac{1}{60 \cdot h} \cdot [y_3 - 9 \cdot y_2 + 45 \cdot y_1 - 45 \cdot y_{-1} + 9 \cdot y_{-2} - y_{-3}]$
	$-\frac{h^2}{6} \cdot y_0'''$	$\frac{h^4}{30} \cdot y_0^V$	$-\frac{h^6}{140} \cdot y_0^{VII}$
Друга	$\frac{1}{2 \cdot h^2} \cdot [y_1 - 2 \cdot y_0 + y_{-1}]$	$\frac{1}{12 \cdot h^2} \cdot [(-y_2) + 16 \cdot y_1 - 30 \cdot y_0 + 16 \cdot y_{-1} - y_{-2}]$	$\frac{1}{180 \cdot h^2} \cdot [2 \cdot y_3 - 27 \cdot y_2 + 270 \cdot y_1 - 490 \cdot y_0 + 270 \cdot y_{-1} - 27 \cdot y_{-2} + 2 \cdot y_{-3}]$
	$-\frac{h^2}{12} \cdot y_0^{IV}$	$-\frac{h^4}{90} \cdot y_0^{VI}$	$-\frac{h^6}{560} \cdot y_0^{VIII}$
Третя	—	$\frac{1}{12 \cdot h^3} \cdot [y_2 - 2 \cdot y_1 + 2 \cdot y_{-1} - y_{-2}]$	$\frac{1}{8 \cdot h^3} \cdot [(-y_3) + 8 \cdot y_2 - 13 \cdot y_1 + 13 \cdot y_{-1} - 8 \cdot y_{-2} + y_{-3}]$
	—	$-\frac{h^2}{4} \cdot y_0^V$	$\frac{7}{120} \cdot h^4 \cdot y_0^{VII}$

Таблиця 5.5 – Формули для обчислення похідних на основі апроксимації лівими різницями

Порядок похідної	Кількість точок			
	дві	три	чотири	п'ять
Перша	$\frac{1}{h} \cdot [y_0 - y_{-1}]$	$\frac{1}{2 \cdot h} \cdot [3 \cdot y_0 - 4 \cdot y_{-1} + y_{-2}]$	$\frac{1}{6 \cdot h} \cdot [11 \cdot y_0 - 18 \cdot y_{-1} + 9 \cdot y_{-2} - 2 \cdot y_{-3}]$	$\frac{1}{12 \cdot h} \cdot [25 \cdot y_0 - 48 \cdot y_{-1} + 36 \cdot y_{-2} - 16 \cdot y_{-3} + 3 \cdot y_{-4}]$
	$\frac{h}{2} \cdot y_0''$	$\frac{h^2}{3} \cdot y_0'''$	$\frac{h^3}{4} \cdot y_0^{IV}$	$\frac{h^4}{5} \cdot y_0^V$
Друга	—	$\frac{1}{h^2} \cdot [y_0 - 2 \cdot y_{-1} + y_{-2}]$	$\frac{1}{h^2} \cdot [2 \cdot y_0 - 5 \cdot y_{-1} + 4 \cdot y_{-2} - y_{-3}]$	$\frac{1}{h^2} \cdot [35 \cdot y_0 - 104 \cdot y_{-1} + 104 \cdot y_{-2} - 56 \cdot y_{-3} + 11 \cdot y_{-4}]$
	—	$h \cdot y_0'''$	$\frac{11}{12} \cdot h^2 \cdot y_0^{IV}$	$\frac{5}{6} \cdot h^3 \cdot y_0^V$
Третя	—	—	$\frac{1}{h^3} \cdot [y_0 - 3 \cdot y_{-1} + 3 \cdot y_{-2} - y_{-3}]$	$\frac{1}{2 \cdot h^3} \cdot [5 \cdot y_0 - 18 \cdot y_{-1} + 24 \cdot y_{-2} - 14 \cdot y_{-3} + 3 \cdot y_{-4}]$
	—	—	$\frac{3}{2} \cdot h \cdot y_0^{IV}$	$\frac{7}{4} \cdot h^2 \cdot y_0^V$

## Контрольні питання

1. В яких випадках доводиться використовувати числове диференціювання функцій?
2. Чому числове інтегрування функцій в загальному випадку дає кращі результати, ніж числове диференціювання?
3. Що лежить в основі числових методів диференціювання функцій?
4. Як оцінюють порядок величини помилки при числовому диференціюванні?
5. Чим визначається точність обчислення похідної при використанні числових методів?
6. Які різниці застосовують для апроксимації функцій при числовому диференціюванні?

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

1. Демидович Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М.: Физматгиз, 1960. – 659 с.
2. Дьяконов В. П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ / В. П. Дьяконов. – М.: Наука, 1989. – 240 с.
3. Мудров А. Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль / А. Е. Мудров. – Томск: МП Раско, 1991. – 272 с.
4. Евстратов В. А. Теория обработки металлов давлением / В. А. Евстратов. – Харьков: Выща шк., 1986. – 248 с.
5. Овчинников А. Г. Основы теории штамповки и выдавливания на прессах / А. Г. Овчинников. – М.: Машиностроение, 1983. – 200 с.
6. Степанский Л. Г. Расчеты процессов обработки металлов давлением / Л. Г. Степанский. – М.: Машиностроение, 1979. – 215 с.
7. Теория пластических деформаций металлов / [Е. П. Унксов, У. Джонсон, В. Л. Колмогоров и др.]. – М.: Машиностроение, 1983. – 598 с.
8. Качанов Л. М. Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
9. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – М.: Высш. школа, 1968. – 512 с.
10. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз. – М.: Мир, 1974. – 318 с.
11. Седов Л. И. Механика сплошной среды. В 2-х томах. Т. 1 / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1970. – 492 с.
12. Новожилов В. В. Теория упругости / В. В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 287 с.
13. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости / М. М. Филоненко-Бородич. – М.: Физматгиз, 1959. – 364 с.
14. Сторожев М. В. Теория обработки металлов давлением / М. В. Сторожев, Е. А. Попов. – М.: Машиностроение, 1971. – 424 с.

15. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике / М. Я. Выгодский. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 991 с.
16. Загускин В. Л. Справочник по численным методам решения уравнений / В. Л. Загускин. – М.: Физматгиз, 1960. – 216 с.
17. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1978. – 512 с.
18. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. Практическое руководство. / Т. Шуп. – М.: Мир, 1982. – 238 с.
19. Форсайт Д. Машинные методы математических вычислений / Д. Форсайт, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
20. Хэмминг Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров / Р. В. Хэмминг. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
21. Архангельский А. Я. Приемы программирования в Delphi. Версии 5–7 / А. Я. Архангельский. – М.: ООО «Бином-Пресс», 2003. – 784 с.
22. Крылов В. И. Вычислительные методы. В 2-х томах. Т. 1 / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский. – М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1976. – 304 с.
23. Краскевич В. Е. Численные методы в инженерных исследованиях / В. Е. Краскевич, К. Х. Зеленский, В. И. Гречко. – Киев: Выща шк., 1986. – 263 с.
24. Березин И. С. Методы вычислений. В 2-х томах. Т. 2 / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 620 с.
25. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. – М.: Наука, 1975. – 631 с.
26. Мак-Кракен Д. Численные методы и программирование на Фортране / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. – М.: Мир, 1977. – 584 с.
27. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство / К. Ланцош. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 524 с.
28. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инже-

неров. Определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1970. – 720 с.

29. Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев. – М.: Астрель: АСТ, 2005. – 654 с.

30. Березин И. С. Методы вычислений. В 2-х томах. Т. 1 / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 464 с.

31. Демидович Б. П. Численные методы анализа / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. – М.: Физматгиз, 1967. – 368 с.

32. Зельдович Я. Б. Элементы прикладной математики / Я. Б. Зельдович, А. Д. Мышкис. – М.: Наука, Глав. ред. физ-мат. лит., 1972. – 592 с.

33. Кроха В. А. Кривые упрочнения металлов при холодной деформации / В. А. Кроха. – М.: Машиностроение, 1968. – 131 с.

34. Кроха В. А. Упрочнение металлов при холодной пластической деформации: справочник / В. А. Кроха. – М.: Машиностроение, 1980. – 156 с.

35. Євстратов В. О. Теорія пластичної деформації. Збірник задач і вправ / В. О. Євстратов, В. М. Левченко. – Харків: ДП УКРНДІМЕТ-СЕРТ, 2007. – 157 с.

36. Євстратов В. О. Ефективний спосіб апроксимації діаграм плинину / В. О. Євстратов, В. М. Левченко // Ресурсозберігаючі технології виробництва та обробки тиском матеріалів у машинобудуванні: Зб. наук. пр. В 2-х ч., Ч. 1 / В. О. Євстратов, В. М. Левченко. – Луганськ: Видавництво СНУ ім. Даля, 2004. – С. 23–28.

37. Левченко В. Н. Совершенствование технологии листовой штамповки осесимметричных деталей на базе разработанных математических моделей процессов вытяжки : дис. канд. техн. наук : 05.03.05 / Левченко В. Н. – Краматорск, 2001. – 203 с.

38. Воробьева Г. Н. Практикум по вычислительной математике / Г. Н. Воробьева, А. Н. Данилова. – М.: Высш. школа, 1990. – 208 с.

39. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Ква-

сов, В. Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980. – 352 с.

40. Малоземов В. Н. Полиномиальные сплайны / В. Н. Малоземов, А. Б. Певный. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. – 120 с.

41. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам / К. Де Бор. – М.: Радио и связь, 1985. – 304 с.

42. Квасов Б. И. Методы изометрической аппроксимации сплайнами / Б. И. Квасов. – М.: Физматлит, 2006. – 360 с.

43. Алберг Д. Теория сплайнов и ее приложения / Д. Алберг, Э. Нильсон, Д. Уолш. – М.: Мир, 1972. – 319 с.

44. Форсайт Д. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений / Д. Форсайт, К. Молер. – М.: Мир, 1969. – 167 с.

45. Теория обработки металлов давлением (вариационные методы расчета усилий и деформаций) / [И. Я. Тарновский, А. А. Поздеев, О. А. Ганаго та ін.]. – М.: Metallurgizdat, 1963. – 673 с.

46. Тарновский И. Я. Деформации и усилия при обработке металлов давлением / И. Я. Тарновский, А. А. Поздеев, О. А. Ганаго. – М.: Машгиз, 1959. – 304 с.

47. Васизду К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васизду. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

48. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды / А. А. Ильюшин. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. – 247 с.

49. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. Т. 2. / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Физматлит, 2003. – 864 с.

50. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.

51. Очков В. Ф. MathCAD 14 для студентов, инженеров и конструкторов / В. Ф. Очков. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 368 с.

## ДОДАТОК А

**Формули для визначення функції відносного зусилля  
для видавлювання штаби через клинову матрицю  
і чотирьох похідних цієї функції по параметру  $\gamma$**

Функція відносного зусилля від параметра  $\gamma$

$$\bar{p}(\gamma) = \mu \cdot (1 + \bar{l}_2 \cdot \bar{v}_2(\gamma) + \bar{l}_3 \cdot \bar{v}_3(\gamma)) + 0,5 \cdot (\overline{BQ}(\gamma) \cdot \bar{v}_{2-1}(\gamma) + \overline{QC}(\gamma) \cdot \bar{v}_{3-2}(\gamma)),$$

де

$$\beta = \arctan \frac{\bar{b}_0}{\bar{l}_2 \cdot \cos(\alpha) - \bar{b}_d \cdot \cot(\gamma)};$$

$$\bar{v}_2 = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha)};$$

$$\bar{v}_3 = \frac{\sin\beta \cdot \sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\beta - \alpha) \cdot \sin(\gamma)};$$

$$\overline{BQ} = \bar{l}_2 \cdot \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\sin(\gamma + \beta)};$$

$$\bar{v}_{2-1} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta - \alpha)};$$

$$\overline{QC} = \bar{l}_2 \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\gamma + \beta)};$$

$$\bar{v}_{3-2} = \frac{\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{\sin(\beta - \alpha) \cdot \sin(\gamma)}.$$

Перша похідна зусилля за параметром  $\gamma$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}}{d\gamma} = & \mu \cdot \left( \bar{l}_2 \cdot \frac{d\bar{v}_2}{d\gamma} + \bar{l}_3 \cdot \frac{d\bar{v}_3}{d\gamma} \right) + \\ & + 0,5 \cdot \left( \frac{d\overline{BQ}}{d\gamma} \cdot \bar{v}_{2-1} + \overline{BQ} \cdot \frac{d\bar{v}_{2-1}}{d\gamma} + \frac{d\overline{QC}}{d\gamma} \cdot \bar{v}_{3-2} + \overline{QC} \cdot \frac{d\bar{v}_{3-2}}{d\gamma} \right), \end{aligned}$$

де

$$\frac{d\beta}{d\gamma} = -\bar{b}_0 \cdot \bar{b}_d \cdot \frac{1 + \operatorname{ctg}(\gamma)^2}{(\bar{l}_2 \cdot \cos(\alpha) - \bar{b}_d \cdot \operatorname{ctg}(\gamma))^2 + \bar{b}_0^2};$$

$$\frac{d\bar{v}_2}{d\gamma} = \bar{v}_2 \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot (\operatorname{ctg}(\beta) + \operatorname{ctg}(\alpha - \beta));$$

$$\frac{d\bar{v}_{3a}}{d\gamma} = \bar{v}_3;$$

$$\frac{d\bar{v}_{3b}}{d\gamma} = \operatorname{ctg}(\gamma) - \operatorname{ctg}(\alpha + \gamma) - \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot (\operatorname{ctg}(\beta) + \operatorname{ctg}(\alpha - \beta));$$

$$\frac{d\bar{v}_3}{d\gamma} = \frac{d\bar{v}_{3a}}{d\gamma} \cdot \frac{d\bar{v}_{3b}}{d\gamma};$$

$$\frac{d\overline{BQ}}{d\gamma} = \frac{d\overline{BQ}_a}{d\gamma} \cdot \frac{d\overline{BQ}_b}{d\gamma};$$

$$\frac{d\overline{BQ}_a}{d\gamma} = \overline{BQ};$$

$$\frac{d\overline{BQ}_b}{d\gamma} = \cot(\alpha + \gamma) - \cot(\gamma + \beta) \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right);$$

$$\frac{d\bar{v}_{2-1}}{d\gamma} = \bar{v}_{2-1} \cdot \cot(\alpha - \beta) \cdot \frac{d\beta}{d\gamma};$$

$$\frac{d\overline{QC}}{d\gamma} = \frac{d\overline{QC}_a}{d\gamma} \cdot \frac{d\overline{QC}_b}{d\gamma};$$

$$\frac{d\overline{QC}_a}{d\gamma} = -\overline{QC};$$

$$\frac{d\overline{QC}_b}{d\gamma} = \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \cot(\alpha - \beta) + \cot(\gamma + \beta) \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right);$$

$$\frac{d\bar{v}_{3-2}}{d\gamma} = \frac{d\bar{v}_{3-2a}}{d\gamma} \cdot \frac{d\bar{v}_{3-2b}}{d\gamma};$$

$$\frac{d\bar{v}_{3-2a}}{d\gamma} = -\bar{v}_{3-2};$$

$$\frac{d\bar{v}_{3-2b}}{d\gamma} = \operatorname{ctg}(\gamma) - [\operatorname{ctg}(\beta) + \operatorname{ctg}(\alpha - \beta)] \cdot \frac{d\beta}{d\gamma}.$$

Друга похідна зусилля за параметром  $\gamma$

$$\frac{d^2 \bar{p}}{d\gamma^2} = \mu \cdot \left( \bar{l}_2 \cdot \frac{d^2 \bar{v}_2}{d\gamma^2} + \bar{l}_3 \cdot \frac{d^2 \bar{v}_3}{d\gamma^2} \right) + \frac{d\bar{BQ}}{d\gamma} \cdot \frac{d\bar{v}_{2-1}}{d\gamma} + \frac{d\bar{QC}}{d\gamma} \cdot \frac{d\bar{v}_{2-1}}{d\gamma} +$$

$$+ 0,5 \cdot \left( \frac{d^2 \bar{BQ}}{d\gamma^2} \cdot \bar{v}_{2-1} + \bar{BQ} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{2-1}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \bar{QC}}{d\gamma^2} \cdot \bar{v}_{3-2} + \bar{QC} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3-2}}{d\gamma^2} \right),$$

де

$$\frac{d^2 \beta_a}{d\gamma^2} = -2 \cdot d\beta;$$

$$\frac{d^2 \beta_b}{d\gamma^2} = \cot(\gamma) - \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \cot(\beta);$$

$$\frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} = \frac{d^2 \beta_a}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \beta_b}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{2a}}{d\gamma^2} = \frac{d\bar{v}_2}{d\gamma^2} \Big/ \frac{d\beta}{d\gamma};$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{2b}}{d\gamma^2} = \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} + 2 \cdot \cot(\alpha - \beta) \cdot \left( \frac{d\beta}{d\gamma} \right)^2;$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_2}{d\gamma^2} = \frac{d^2 \bar{v}_{2a}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{2b}}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{3a1}}{d\gamma^2} = \bar{v}_3;$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{3a2}}{d\gamma^2} = -\frac{d\bar{v}_{3b}}{d\gamma};$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{3b1}}{d\gamma^2} = \cot(\alpha + \gamma)^2 - \cot(\gamma)^2;$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{3b2}}{d\gamma^2} = -(\cot(\beta) + \cot(\alpha - \beta)) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{3b3}}{d\gamma^2} = (\cot(\beta)^2 - \cot(\alpha - \beta)^2) \cdot \left( \frac{d\beta}{d\gamma} \right)^2;$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{3b}}{d\gamma^2} = \frac{d^2 \bar{v}_{3b1}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \bar{v}_{3b2}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \bar{v}_{3b3}}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_3}{d\gamma^2} = \frac{d^2 \bar{v}_{3a}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d\bar{v}_{3b}}{d\gamma} + \frac{d\bar{v}_{3a}}{d\gamma} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3b}}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^2 \overline{BQ}_{a1}}{d\gamma^2} = \overline{BQ};$$

$$\frac{d^2 \overline{BQ}_{a2}}{d\gamma^2} = \frac{d\overline{BQ}_b}{d\gamma};$$

$$\frac{d^2 \overline{BQ}_a}{d\gamma^2} = \frac{d^2 \overline{BQ}_{a1}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \overline{BQ}_{a2}}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^2 \overline{BQ}_{b1}}{d\gamma^2} = \left(1 + \cot(\gamma + \beta)^2\right) \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2;$$

$$\frac{d^2 \overline{BQ}_{b2}}{d\gamma^2} = -1 - \cot(\alpha + \gamma)^2 - \cot(\gamma + \beta) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^2 \overline{BQ}_b}{d\gamma^2} = \frac{d^2 \overline{BQ}_{b1}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \overline{BQ}_{b2}}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^2 \overline{BQ}}{d\gamma^2} = \frac{d^2 \overline{BQ}_a}{d\gamma^2} \cdot \frac{d\overline{BQ}_b}{d\gamma} + \frac{d\overline{BQ}_a}{d\gamma} \cdot \frac{d^2 \overline{BQ}_b}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d\bar{v}_{2-1a}}{d\gamma} = \bar{v}_{2-1};$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{2-1b1}}{d^2 \gamma} = \cot(\alpha - \beta) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{2-1b2}}{d^2 \gamma} = \left(1 + 2 \cdot \cot(\alpha - \beta)^2\right) \cdot \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2;$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{2-1b}}{d^2 \gamma} = \frac{d^2 \bar{v}_{2-1b1}}{d^2 \gamma} + \frac{d^2 \bar{v}_{2-1b2}}{d^2 \gamma};$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{2-1}}{d^2 \gamma} = \frac{d^2 \bar{v}_{2-1a}}{d^2 \gamma} + \frac{d^2 \bar{v}_{2-1b}}{d^2 \gamma};$$

$$\frac{d^2 \overline{QC}_{a1}}{d\gamma^2} = \overline{QC} \cdot \cot(\alpha - \beta) \cdot \frac{d\beta}{d\gamma};$$

$$\frac{d^2 \overline{QC}_{a2}}{d\gamma^2} = \overline{QC} \cdot \cot(\gamma + \beta) \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right);$$

$$\frac{d^2 \overline{QC}_a}{d\gamma^2} = \frac{d^2 \overline{QC}_{a1}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \overline{QC}_{a2}}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^2 \overline{QC}_{b1}}{d\gamma^2} = \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \cdot [\cot(\alpha - \beta) + \cot(\gamma + \beta)];$$

$$\frac{d^2 \overline{QC}_{b2}}{d\gamma^2} = [1 + \cot(\alpha - \beta)^2] \cdot \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2;$$

$$\frac{d^2 \overline{QC}_{b3}}{d\gamma^2} = -[1 + \cot(\gamma + \beta)^2] \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2;$$

$$\frac{d^2 \overline{QC}_b}{d\gamma^2} = \frac{d^2 \overline{QC}_{b1}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \overline{QC}_{b2}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \overline{QC}_{b3}}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^2 \overline{QC}}{d\gamma^2} = \frac{d^2 \overline{QC}_a}{d\gamma^2} \cdot \frac{d\overline{QC}_b}{d\gamma} + \frac{d\overline{QC}_a}{d\gamma} \cdot \frac{d^2 \overline{QC}_b}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{3-2a}}{d\gamma^2} = -\bar{v}_{3-2};$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{3-2b1}}{d\gamma^2} = \cot(\beta) + \cot(\alpha - \beta);$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{3-2b2}}{d\gamma^2} = [\cot(\beta) - \cot(\alpha - \beta)] \cdot \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 - \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{3-2b3}}{d\gamma^2} = -\left(\cot(\gamma) - \frac{d^2 \bar{v}_{3-2b1}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2;$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{3-2b4}}{d\gamma^2} = -\cot(\gamma)^2 - 1;$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{3-2b}}{d\gamma^2} = \frac{d^2 \bar{v}_{3-2b1}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3-2b2}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \bar{v}_{3-2b3}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \bar{v}_{3-2b4}}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{3-2}}{d\gamma^2} = \frac{d^2 \bar{v}_{3-2a}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3-2b}}{d\gamma^2}.$$

Третя похідна зусилля за параметром  $\gamma$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \bar{p}}{d\gamma^3} &= \mu \cdot \left( \bar{l}_2 \cdot \frac{d^3 \bar{v}_2}{d\gamma^3} + \bar{l}_3 \cdot \frac{d^3 \bar{v}_3}{d\gamma^3} \right) + \\ &+ 0,5 \cdot \left( \frac{d^3 \overline{BQ}}{d\gamma^3} \cdot \bar{v}_{2-1} + \overline{BQ} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{2-1}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \overline{QC}}{d\gamma^3} \cdot \bar{v}_{3-2} + \overline{QC} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{3-2}}{d\gamma^3} \right) + \\ &+ 1,5 \cdot \left( \frac{d^2 \overline{BQ}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d \bar{v}_{2-1}}{d\gamma} + \frac{d \overline{BQ}}{d\gamma} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{2-1}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \overline{QC}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d \bar{v}_{3-2}}{d\gamma} + \frac{d \overline{QC}}{d\gamma} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3-2}}{d\gamma^2} \right), \end{aligned}$$

де

$$\frac{d^3 \beta_a}{d\gamma^3} = 4 \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \frac{d^2 \beta_b}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^3 \beta_{b1}}{d\gamma^3} = \bar{b}_\pi \cdot (1 + \cot(\gamma)^2) - 2 \cdot (\bar{l}_2 \cdot \cos(\alpha) - \bar{b}_\pi \cdot \cot(\gamma)) \cdot \frac{d^2 \beta_b}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^3 \beta_b}{d\gamma^3} = -\frac{1}{\bar{b}_0} \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \frac{d^3 \beta_{b1}}{d\gamma^3} - 1 - \cot(\gamma)^2;$$

$$\frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \beta_a}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^2 \beta_b}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \beta_a}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^3 \beta_b}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \bar{v}_{2a}}{d\gamma^3} = 2 \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \cot(\alpha - \beta) \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3-2a}}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^3 \bar{v}_{2b1}}{d\gamma^3} = (1 + \cot(\alpha - \beta)^2) \cdot \left( \frac{d\beta}{d\gamma} \right)^2 + 2 \cdot \cot(\alpha - \beta) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^3 \bar{v}_{2b}}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} + 2 \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{2b1}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \bar{v}_2}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \bar{v}_{2a}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{2b}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \bar{v}_{2a}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{2b}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \bar{v}_{3a1}}{d\gamma^3} = v_3 \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3a2}}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^3 \bar{v}_{3a2}}{d\gamma^3} = -\frac{d^2 \bar{v}_{3b1}}{d\gamma^2} - \frac{d^2 \bar{v}_{3b2}}{d\gamma^2} - \frac{d^2 \bar{v}_{3b3}}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^3 \bar{v}_{3b1}}{d\gamma^3} = 2 \cdot \left[ \cot(\gamma) \cdot (1 + \cot(\gamma)^2) - \cot(\alpha + \gamma) \cdot (1 + \cot(\alpha + \gamma)^2) \right];$$

$$\frac{d^3 \bar{v}_{3b2}}{d\gamma^3} = \frac{d^2 \bar{v}_{3b3}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \Big/ \frac{d\beta}{d\gamma} - [\cot(\beta) + \cot(\alpha - \beta)] \cdot \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \bar{v}_{3b31}}{d\gamma^3} = \cot(\beta) \cdot (1 + \cot(\beta))^2;$$

$$\frac{d^3 \bar{v}_{3b32}}{d\gamma^3} = \cot(\alpha - \beta) \cdot (1 + \cot(\alpha - \beta))^2;$$

$$\frac{d^3 \bar{v}_{3b3}}{d\gamma^3} = \left( \frac{d^3 \bar{v}_{3b41}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \bar{v}_{3b42}}{d\gamma^3} \right) \cdot \left( \frac{d\beta}{d\gamma} \right)^3;$$

$$\frac{d^3 \bar{v}_{3b4}}{d\gamma^3} = 2 \cdot \left( \frac{d^2 \bar{v}_{3b3}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \Big/ \frac{d\beta}{d\gamma} - \frac{d^3 \bar{v}_{3b3}}{d\gamma^3} \right);$$

$$\frac{d^3 \bar{v}_{3a}}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \bar{v}_{3a1}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3a2}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \bar{v}_{3a1}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{3a2}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \bar{v}_{3b}}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \bar{v}_{3b1}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \bar{v}_{3b2}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \bar{v}_{3b4}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \bar{v}_3}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \bar{v}_{3a}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d\bar{v}_{3b}}{d\gamma} + 2 \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3a}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3b}}{d\gamma^2} + \frac{d\bar{v}_{3a}}{d\gamma} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{3b}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \overline{BQ}_{a1}}{d\gamma^3} = \overline{BQ} \cdot \frac{d\overline{BQ}_b}{d\gamma};$$

$$\frac{d^3 \overline{BQ}_{a2}}{d\gamma^3} = \frac{d^2 \overline{BQ}_{b1}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \overline{BQ}_{b2}}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^3 \overline{BQ}_a}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \overline{BQ}_{a1}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^2 \overline{BQ}_{a2}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \overline{BQ}_{a1}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^3 \overline{BQ}_{a2}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \overline{BQ}_{b1}}{d\gamma^3} = 2 \cdot \frac{d^2 \overline{BQ}_{b1}}{d\gamma^2} \cdot \left( \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \Big/ \left( 1 + \frac{d\beta}{d\gamma} \right) + \frac{d\overline{BQ}_b}{d\gamma} - \cot(\alpha + \gamma) \right);$$

$$\frac{d^3 \overline{BQ}_{b2}}{d\gamma^3} = 2 \cdot \cot(\alpha + \gamma) \cdot [1 + \cot(\alpha + \gamma)^2] + \frac{d^2 \overline{BQ}_{b1}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \Big/ \left( 1 + \frac{d\beta}{d\gamma} \right) -$$

$$- \cot(\gamma + \beta) \cdot \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \overline{BQ}_b}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \overline{BQ}_{b1}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \overline{BQ}_{b2}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \overline{BQ}}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \overline{BQ}_a}{d\gamma^3} \cdot \frac{d \overline{BQ}_b}{d\gamma} + 2 \cdot \frac{d^2 \overline{BQ}_a}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \overline{BQ}_b}{d\gamma^2} + \frac{d \overline{BQ}_a}{d\gamma} \cdot \frac{d^3 \overline{BQ}_b}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{2-1a}}{d^3 \gamma} = \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \overline{v}_{2-1} \cdot \cot(\alpha - \beta);$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{2-1b11}}{d^3 \gamma} = \cot(\alpha - \beta) \cdot \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{2-1b12}}{d^3 \gamma} = (1 + \cot(\alpha - \beta)^2) \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{2-1b21}}{d^3 \gamma} = 4 \cdot \cot(\alpha - \beta) \cdot (1 + \cot(\alpha - \beta)^2) \cdot \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{2-1b22}}{d^3 \gamma} = 2 \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot (1 + 2 \cdot \cot(\alpha - \beta)^2) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{2-1b1}}{d^3 \gamma} = \frac{d^3 \overline{v}_{2-1b11}}{d^3 \gamma} + \frac{d^3 \overline{v}_{2-1b12}}{d^3 \gamma};$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{2-1b2}}{d^3 \gamma} = \frac{d^3 \overline{v}_{2-1b21}}{d^3 \gamma} + \frac{d^3 \overline{v}_{2-1b22}}{d^3 \gamma};$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{2-1b}}{d^3 \gamma} = \frac{d^3 \overline{v}_{2-1b1}}{d^3 \gamma} + \frac{d^3 \overline{v}_{2-1b2}}{d^3 \gamma};$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{2-1}}{d^3 \gamma} = \frac{d^3 \overline{v}_{2-1a}}{d^3 \gamma} \cdot \frac{d^2 \overline{v}_{2-1b}}{d^2 \gamma} + \frac{d^2 \overline{v}_{2-1a}}{d^2 \gamma} \cdot \frac{d^3 \overline{v}_{2-1b}}{d^3 \gamma};$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_{a11}}{d\gamma^3} = \frac{d \overline{QC}}{d\gamma} \cdot \cot(\alpha - \beta) \cdot \frac{d\beta}{d\gamma};$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_{a12}}{d\gamma^3} = \overline{QC} \cdot (1 + \cot(\alpha - \beta)^2) \cdot \left( \frac{d\beta}{d\gamma} \right)^2;$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_{a13}}{d\gamma^3} = \overline{QC} \cdot \cot(\alpha - \beta) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_{a1}}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \overline{QC}_{a11}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \overline{QC}_{a12}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \overline{QC}_{a13}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_{a21}}{d\gamma^3} = \frac{d\overline{QC}}{d\gamma} \cdot \cot(\gamma + \beta) \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right);$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_{a22}}{d\gamma^3} = -\overline{QC} \cdot (1 + \cot(\gamma + \beta))^2 \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2;$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_{a23}}{d\gamma^3} = \overline{QC} \cdot \cot(\gamma + \beta) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_{a2}}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \overline{QC}_{a21}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \overline{QC}_{a22}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \overline{QC}_{a23}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_a}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \overline{QC}_{a1}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \overline{QC}_{a2}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_{b11}}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} \cdot [\cot(\alpha - \beta) + \cot(\gamma + \beta)];$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_{b12}}{d\gamma^3} = \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \cdot [1 + \cot(\alpha - \beta)^2];$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_{b13}}{d\gamma^3} = -\frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \cdot [1 + \cot(\gamma + \beta)^2] \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right);$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_{b11}}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \overline{QC}_{b11}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \overline{QC}_{b12}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \overline{QC}_{b13}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_{b21}}{d\gamma^3} = \cot(\alpha - \beta) \cdot [1 + \cot(\alpha - \beta)^2] \cdot \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^3;$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_{b22}}{d\gamma^3} = [1 + \cot(\alpha - \beta)^2] \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_{b2}}{d\gamma^3} = 2 \cdot \left(\frac{d^3 \overline{QC}_{b21}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \overline{QC}_{b22}}{d\gamma^3}\right);$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_{b31}}{d\gamma^3} = \cot(\gamma + \beta) \cdot [1 + \cot(\gamma + \beta)^2] \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right)^3;$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_{b32}}{d\gamma^3} = -\left[1 + \cot(\gamma + \beta)^2\right] \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_{b3}}{d\gamma^3} = 2 \cdot \left(\frac{d^3 \overline{QC}_{b31}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \overline{QC}_{b32}}{d\gamma^3}\right);$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}_b}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \overline{QC}_{b1}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \overline{QC}_{b2}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \overline{QC}_{b3}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \overline{QC}}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \overline{QC}_a}{d\gamma^3} \cdot \frac{d \overline{QC}_b}{d\gamma} + 2 \cdot \frac{d^2 \overline{QC}_a}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \overline{QC}_b}{d\gamma^2} + \frac{d \overline{QC}_a}{d\gamma} \cdot \frac{d^3 \overline{QC}_b}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{3-2a}}{d\gamma^3} = \overline{v}_{3-2} \cdot \left(\cot(\gamma) - \frac{d^2 \overline{v}_{3-2b1}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d\beta}{d\gamma}\right);$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{3-2b1}}{d\gamma^3} = \left(\cot(\alpha - \beta)^2 - \cot(\beta)^2\right) \cdot \frac{d\beta}{d\gamma};$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{3-2b21}}{d\gamma^3} = 2 \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \left[\cot(\beta) - \cot(\alpha - \beta)^2\right] \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{3-2b22}}{d\gamma^3} = -\left[2 + \cot(\beta)^2 + \cot(\alpha - \beta)^2\right] \cdot \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^3 - \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{3-2b2}}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \overline{v}_{3-2b21}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \overline{v}_{3-2b22}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{3-2b31}}{d\gamma^3} = \left(\cot(\gamma) - \frac{d^2 \overline{v}_{3-2b1}}{d\gamma^2}\right) \cdot \frac{d\beta}{d\gamma};$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{3-2b32}}{d\gamma^3} = \frac{d^2 \overline{v}_{3-2b4}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \overline{v}_{3-2b1}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \overline{v}_{3-2b2}}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{3-2b3}}{d\gamma^3} = -2 \cdot \frac{d^3 \overline{v}_{3-2b31}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^3 \overline{v}_{3-2b32}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{3-2b4}}{d\gamma^3} = 2 \cdot \cot(\gamma) \cdot \left(1 + \cot(\gamma)^2\right);$$

$$\frac{d^3 \overline{v}_{3-2b}}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \overline{v}_{3-2b1}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^2 \overline{v}_{3-2b2}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \overline{v}_{3-2b1}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^3 \overline{v}_{3-2b2}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \overline{v}_{3-2b3}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \overline{v}_{3-2b4}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^3 \bar{v}_{3-2}}{d\gamma^3} = \frac{d^3 \bar{v}_{3-2a}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3-2b}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \bar{v}_{3-2a}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{3-2b}}{d\gamma^3}.$$

Четверта похідна зусилля за параметром  $\gamma$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \bar{p}}{d\gamma^4} = & \mu \cdot \left( \bar{l}_2 \cdot \frac{d^4 \bar{v}_2}{d\gamma^4} + \bar{l}_3 \cdot \frac{d^4 \bar{v}_3}{d\gamma^4} \right) + \\ & + 0,5 \cdot \left( \frac{d^4 \overline{BQ}}{d\gamma^4} \cdot \bar{v}_{2-1} + \overline{BQ} \cdot \frac{d^4 \bar{v}_{2-1}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \overline{QC}}{d\gamma^4} \cdot \bar{v}_{3-2} + \overline{QC} \cdot \frac{d^4 \bar{v}_{3-2}}{d\gamma^4} \right) + \\ & + 2 \cdot \left( \frac{d^3 \overline{BQ}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d \bar{v}_{2-1}}{d\gamma} + \frac{d \overline{QC}}{d\gamma} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{3-2}}{d\gamma^3} + \frac{d \overline{BQ}}{d\gamma} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{2-1}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \overline{BQ}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d \bar{v}_{3-2}}{d\gamma} \right) + \\ & + 3 \cdot \left( \frac{d^2 \overline{BQ}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{2-1}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \overline{QC}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3-2}}{d\gamma^2} \right), \end{aligned}$$

де

$$\frac{d^4 \beta_a}{d\gamma^4} = 4 \cdot \left( \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \beta_b}{d\gamma^2} + \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \frac{d^3 \beta_b}{d\gamma^3} \right);$$

$$\frac{d^4 \beta_{b1}}{d\gamma^4} = -2 \cdot \left[ \bar{b}_\pi \cdot (1 + \cot(\gamma))^2 \cdot \left( \cot(\gamma) + \frac{d^2 \beta_b}{d\gamma^2} \right) + (\bar{l}_2 \cdot \cos(\alpha) - \bar{b}_\pi \cdot \cot(\gamma)) \cdot \frac{d^3 \beta_b}{d\gamma^3} \right];$$

$$\frac{d^4 \beta_b}{d\gamma^4} = - \left( \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^3 \beta_{b1}}{d\gamma^3} + \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \frac{d^4 \beta_{b1}}{d\gamma^4} \right) / \bar{b}_0 + 2 \cdot \cot(\gamma) \cdot (1 + \cot(\gamma))^2;$$

$$\frac{d^4 \beta}{d\gamma^4} = \frac{d^4 \beta_a}{d\gamma^4} \cdot \frac{d^2 \beta_b}{d\gamma^2} + 2 \cdot \frac{d^3 \beta_a}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^3 \beta_b}{d\gamma^3} + \frac{d^2 \beta_a}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^4 \beta_b}{d\gamma^4};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{2a}}{d\gamma^4} = 2 \cdot \left[ \frac{d^2 \bar{v}_{2a}}{d\gamma^2} \cdot \left( \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \cdot \cot(\alpha - \beta) + \left( \frac{d\beta}{d\gamma} \right)^2 \cdot (1 + \cot(\alpha - \beta))^2 \right) \right] +$$

$$+ \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \cot(\alpha - \beta) \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{2a}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{2b1}}{d\gamma^4} = 2 \cdot \left[ \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot (1 + \cot(\alpha - \beta))^2 \cdot \left( \cot(\alpha - \beta) \cdot \left( \frac{d\beta}{d\gamma} \right)^2 + 2 \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \right) \right] +$$

$$+ \cot(\alpha - \beta) \cdot \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{2b}}{d\gamma^4} = \frac{d^4 \beta}{d\gamma^4} + 2 \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{2b1}}{d\gamma^3} + \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \frac{d^4 \bar{v}_{2b1}}{d\gamma^4};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_2}{d\gamma^4} = \frac{d^4 \bar{v}_{2a}}{d\gamma^4} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{2b}}{d\gamma^2} + 2 \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{2a}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{2b}}{d\gamma^3} + \frac{d^2 \bar{v}_{2a}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^4 \bar{v}_{2b}}{d\gamma^4};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3a1}}{d\gamma^4} = \frac{d\bar{v}_3}{d\gamma} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3a2}}{d\gamma^2} + \bar{v}_3 \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{3a2}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3a2}}{d\gamma^4} = -\frac{d^3 \bar{v}_{3b1}}{d\gamma^3} - \frac{d^3 \bar{v}_{3b2}}{d\gamma^3} - \frac{d^3 \bar{v}_{3b3}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3a}}{d\gamma^4} = \frac{d^4 \bar{v}_{3a1}}{d\gamma^4} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3a2}}{d\gamma^2} + 2 \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{3a1}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{3a2}}{d\gamma^3} + \frac{d^2 \bar{v}_{3a1}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^4 \bar{v}_{3a2}}{d\gamma^4};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3b1}}{d\gamma^4} = -2 \cdot \left[ (1 + \cot(\gamma)^2) \cdot (1 + 3 \cdot \cot(\gamma)^2) - (1 + \cot(\alpha + \gamma)^2) \cdot (1 + 3 \cdot \cot(\alpha + \gamma)^2) \right];$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3b2}}{d\gamma^4} = \left[ \frac{d^3 \bar{v}_{3b3}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \bar{v}_{3b3}}{d\gamma^2} \cdot \left( \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} - \left( \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \right)^2 \Big/ \frac{d\beta}{d\gamma} \right) \right] \Big/ \frac{d\beta}{d\gamma} -$$

$$- \left( \cot(\alpha - \beta)^2 - \cot(\beta)^2 \right) \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} - \left( \cot(\beta) + \cot(\alpha - \beta) \right) \cdot \frac{d^4 \beta}{d\gamma^4};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3b41}}{d\gamma^4} = - \left( 1 + \cot(\beta)^2 \right) \cdot \left( 1 + 3 \cdot \cot(\beta)^2 \right) \cdot \frac{d\beta}{d\gamma};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3b42}}{d\gamma^4} = \left( 1 + 3 \cdot \cot(\alpha - \beta)^2 \right) \cdot \left( 1 + \cot(\alpha - \beta)^2 \right) \cdot \frac{d\beta}{d\gamma};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3b4}}{d\gamma^4} = \left( \frac{d^4 \bar{v}_{3b41}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \bar{v}_{3b42}}{d\gamma^4} \right) \cdot \left( \frac{d\beta}{d\gamma} \right)^3 + 3 \cdot \left( \frac{d^3 \bar{v}_{3b41}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \bar{v}_{3b42}}{d\gamma^3} \right) \cdot \left( \frac{d\beta}{d\gamma} \right)^2 \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3b3}}{d\gamma^4} = 2 \cdot \left[ \frac{d^3 \bar{v}_{3b3}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \bar{v}_{3b3}}{d\gamma^2} \cdot \left( \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} - \left( \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \right)^2 \Big/ \frac{d\beta}{d\gamma} \right) - \frac{d^4 \bar{v}_{3b4}}{d\gamma^4} \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} \right] \Big/ \frac{d\beta}{d\gamma};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3b}}{d\gamma^4} = \frac{d^4 \bar{v}_{3b1}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \bar{v}_{3b2}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \bar{v}_{3b3}}{d\gamma^4};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_3}{d\gamma^4} = \frac{d^4 \bar{v}_{3a}}{d\gamma^4} \cdot \frac{d\bar{v}_3}{d\gamma} + 3 \cdot \left( \frac{d^3 \bar{v}_{3a}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3b}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \bar{v}_{3a}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{3b}}{d\gamma^3} \right) + \frac{d\bar{v}_{3a}}{d\gamma} \cdot \frac{d^4 \bar{v}_{3b}}{d\gamma^4};$$

$$\frac{d^4 \overline{BQ}_{a1}}{d\gamma^4} = \frac{d\overline{BQ}}{d\gamma} \cdot \frac{d\overline{BQ}_b}{d\gamma} + \overline{BQ} \cdot \frac{d^2 \overline{BQ}_b}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^4 \overline{BQ}_{a2}}{d\gamma^4} = \frac{d^3 \overline{BQ}_{b1}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \overline{BQ}_{b2}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^4 \overline{BQ}_a}{d\gamma^4} = \frac{d^4 \overline{BQ}_{a1}}{d\gamma^4} \cdot \frac{d^2 \overline{BQ}_{a2}}{d\gamma^2} + 2 \cdot \frac{d^3 \overline{BQ}_{a1}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^3 \overline{BQ}_{a2}}{d\gamma^3} + \frac{d^2 \overline{BQ}_{a1}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^4 \overline{BQ}_{a2}}{d\gamma^4};$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \overline{BQ}_{b1}}{d\gamma^4} = & 2 \cdot \frac{d^3 \overline{BQ}_{b1}}{d\gamma^3} \cdot \left( \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} / \left( 1 + \frac{d\beta}{d\gamma} \right) + \frac{d\overline{BQ}_b}{d\gamma} - \cot(\alpha + \gamma) \right) + \\ & + 2 \cdot \frac{d^2 \overline{BQ}_{b1}}{d\gamma^2} \cdot \left( \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} / \left( 1 + \frac{d\beta}{d\gamma} \right) - \left( \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \right)^2 / \left( 1 + \frac{d\beta}{d\gamma} \right)^2 + \frac{d^2 \overline{BQ}_b}{d\gamma^2} + 1 + \cot(\alpha + \gamma)^2 \right); \end{aligned}$$

$$\frac{d^4 \overline{BQ}_{b21}}{d\gamma^4} = -2 \cdot \left( 1 + \cot(\alpha + \gamma)^2 \right) \cdot \left( 1 + 3 \cdot \cot(\alpha + \gamma)^2 \right) +$$

$$+ \left[ \frac{d^3 \overline{BQ}_{b1}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \overline{BQ}_{b1}}{d\gamma^2} \cdot \left( \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} - \left( \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \right)^2 / \left( 1 + \frac{d\beta}{d\gamma} \right) \right) \right] / \left( 1 + \frac{d\beta}{d\gamma} \right);$$

$$\frac{d^4 \overline{BQ}_{b22}}{d\gamma^4} = \left( 1 + \cot(\gamma + \beta)^2 \right) \cdot \left( 1 + \frac{d\beta}{d\gamma} \right) \cdot \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} - \cot(\gamma + \beta) \cdot \frac{d^4 \beta}{d\gamma^4};$$

$$\frac{d^4 \overline{BQ}_{b2}}{d\gamma^4} = \frac{d^4 \overline{BQ}_{b21}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \overline{BQ}_{b22}}{d\gamma^4};$$

$$\frac{d^4 \overline{BQ}_b}{d\gamma^4} = \frac{d^4 \overline{BQ}_{b1}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \overline{BQ}_{b2}}{d\gamma^4};$$

$$\frac{d^4 \overline{BQ}}{d\gamma^4} = \frac{d^4 \overline{BQ}_a}{d\gamma^4} \cdot \frac{d\overline{BQ}_b}{d\gamma} + 3 \cdot \left( \frac{d^3 \overline{BQ}_a}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^2 \overline{BQ}_b}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \overline{BQ}_a}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^3 \overline{BQ}_b}{d\gamma^3} \right) +$$

$$+ \frac{d\overline{BQ}_a}{d\gamma} \cdot \frac{d^4 \overline{BQ}_b}{d\gamma^4};$$

$$\frac{d^4 \overline{v}_{2-1a}}{d^4 \gamma} = \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \cdot \overline{v}_{2-1} \cdot \cot(\alpha - \beta) +$$

$$+ \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \left[ \frac{d\overline{v}_{2-1}}{d\gamma} \cdot \cot(\alpha - \beta) + \overline{v}_{2-1} \cdot \left( 1 + \cot(\alpha - \beta)^2 \right) \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} \right];$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{2-1b11}}{d^4 \gamma} = \left(1 + \cot(\alpha - \beta)^2\right) \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} + \cot(\alpha - \beta) \cdot \frac{d^4 \beta}{d\gamma^4};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{2-1b12}}{d^4 \gamma} = \left(1 + \cot(\alpha - \beta)^2\right) \cdot \left[ \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 \cdot \cot(\alpha - \beta) + \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2}\right) + \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} \right];$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{2-1b1}}{d^4 \gamma} = \frac{d^4 \bar{v}_{2-1b11}}{d^4 \gamma} + \frac{d^4 \bar{v}_{2-1b12}}{d^4 \gamma};$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \bar{v}_{2-1b21}}{d^4 \gamma} &= 4 \cdot \left(1 + \cot(\alpha - \beta)^2\right) \cdot \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 \times \\ &\times \left[ \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 \cdot \left(1 + 3 \cdot \cot(\alpha - \beta)^2\right) + 3 \cdot \cot(\alpha - \beta) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \bar{v}_{2-1b22}}{d^4 \gamma} &= 2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \cot(\alpha - \beta)^2\right) \cdot \left[ \left(\frac{d^2 \beta}{d\gamma^2}\right)^2 + \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} \right] + \\ &+ 4 \cdot \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 \cdot \cot(\alpha - \beta) \cdot \left(1 + \cot(\alpha - \beta)^2\right) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2}; \end{aligned}$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{2-1b2}}{d^4 \gamma} = \frac{d^4 \bar{v}_{2-1b21}}{d^4 \gamma} + \frac{d^4 \bar{v}_{2-1b22}}{d^4 \gamma};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{2-1b}}{d^4 \gamma} = \frac{d^4 \bar{v}_{2-1b1}}{d^4 \gamma} + \frac{d^4 \bar{v}_{2-1b2}}{d^4 \gamma};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{2-1}}{d^4 \gamma} = \frac{d^4 \bar{v}_{2-1a}}{d^4 \gamma} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{2-1b}}{d^2 \gamma} + 2 \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{2-1a}}{d^3 \gamma} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{2-1b}}{d^3 \gamma} + \frac{d^2 \bar{v}_{2-1a}}{d^2 \gamma} \cdot \frac{d^4 \bar{v}_{2-1b}}{d^4 \gamma};$$

$$\frac{d^4 \overline{QC}_{a11}}{d\gamma^4} = \frac{d^2 \overline{QC}}{d\gamma^2} \cdot \cot(\alpha - \beta) \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} +$$

$$+ \frac{d\overline{QC}}{d\gamma} \cdot \left[ \left(1 + \cot(\alpha - \beta)^2\right) \cdot \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 + \cot(\alpha - \beta) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \right];$$

$$\frac{d^4 \overline{QC}_{a12}}{d\gamma^4} = \left(1 + \cot(\alpha - \beta)^2\right) \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \left[ \frac{d\overline{QC}}{d\gamma} \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} + 2 \cdot \overline{QC} \cdot \left( \cot(\alpha - \beta) \cdot \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 + \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \right) \right];$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^4 \overline{QC}_{a13}}{d\gamma^4} &= \frac{d\overline{QC}}{d\gamma} \cdot \cot(\alpha - \beta) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} + \\
&+ \overline{QC} \cdot \left[ \left(1 + \cot(\alpha - \beta)^2\right) \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} + \cot(\alpha - \beta) \cdot \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} \right]; \\
\frac{d^4 \overline{QC}_{a1}}{d\gamma^4} &= \frac{d^4 \overline{QC}_{a11}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \overline{QC}_{a12}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \overline{QC}_{a13}}{d\gamma^4}; \\
\frac{d^4 \overline{QC}_{a21}}{d\gamma^4} &= \frac{d^2 \overline{QC}}{d\gamma^2} \cdot \cot(\gamma + \beta) \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right) + \\
&+ \frac{d\overline{QC}}{d\gamma} \cdot \left[ \cot(\gamma + \beta) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} - \left(1 + \cot(\gamma + \beta)^2\right) \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 \right]; \\
\frac{d^4 \overline{QC}_{a22}}{d\gamma^4} &= \left(1 + \cot(\gamma + \beta)^2\right) \times \\
&\times \left[ 2 \cdot \overline{QC} \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right) \cdot \left( \cot(\gamma + \beta) \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 - \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \right) - \frac{d\overline{QC}}{d\gamma} \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 \right]; \\
\frac{d^4 \overline{QC}_{a23}}{d\gamma^4} &= \frac{d\overline{QC}}{d\gamma} \cdot \cot(\gamma + \beta) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} + \\
&+ \overline{QC} \cdot \left[ \cot(\gamma + \beta) \cdot \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} - \left(1 + \cot(\gamma + \beta)^2\right) \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \right]; \\
\frac{d^4 \overline{QC}_{a2}}{d\gamma^4} &= \frac{d^4 \overline{QC}_{a21}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \overline{QC}_{a22}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \overline{QC}_{a23}}{d\gamma^4}; \\
\frac{d^4 \overline{QC}_a}{d\gamma^4} &= \frac{d^4 \overline{QC}_{a1}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \overline{QC}_{a2}}{d\gamma^4}; \\
\frac{d^4 \overline{QC}_{b11}}{d\gamma^4} &= \frac{d^4 \beta}{d\gamma^4} \cdot [\cot(\alpha - \beta) + \cot(\gamma + \beta)] + \\
&+ \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} \cdot \left[ \left(1 + \cot(\alpha - \beta)^2\right) \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} - \left(1 + \cot(\gamma + \beta)^2\right) \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right) \right]; \\
\frac{d^4 \overline{QC}_{b12}}{d\gamma^4} &= \left(1 + \cot(\alpha - \beta)^2\right) \cdot \left[ \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} + 2 \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \cdot \cot(\alpha - \beta) \cdot \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 + \left(\frac{d^2 \beta}{d\gamma^2}\right)^2 \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^4 \overline{QC}_{b13}}{d\gamma^4} &= (1 + \cot(\gamma + \beta))^2 \times \\
&\times \left[ 2 \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \cdot \cot(\gamma + \beta) \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 - \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right) - \left(\frac{d^2 \beta}{d\gamma^2}\right)^2 \right]; \\
\frac{d^4 \overline{QC}_{b1}}{d\gamma^4} &= \frac{d^4 \overline{QC}_{b11}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \overline{QC}_{b12}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \overline{QC}_{b13}}{d\gamma^4}; \\
\frac{d^4 \overline{QC}_{b21}}{d\gamma^4} &= \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 \cdot (1 + \cot(\alpha - \beta))^2 \times \\
&\times \left[ (1 + 3 \cdot \cot(\alpha - \beta))^2 \cdot \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 + 3 \cdot \cot(\alpha - \beta) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \right]; \\
\frac{d^4 \overline{QC}_{b22}}{d\gamma^4} &= (1 + \cot(\alpha - \beta))^2 \cdot \left[ 2 \cdot \cot(\alpha - \beta) \cdot \left(\frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} + \left(\frac{d^2 \beta}{d\gamma^2}\right)^2 + \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} \right]; \\
\frac{d^4 \overline{QC}_{b2}}{d\gamma^4} &= \frac{d^4 \overline{QC}_{b21}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \overline{QC}_{b22}}{d\gamma^4}; \\
\frac{d^4 \overline{QC}_{b31}}{d\gamma^4} &= (1 + \cot(\gamma + \beta))^2 \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 \times \\
&\times \left[ 3 \cdot \cot(\gamma + \beta) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} - \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 \cdot (1 + 3 \cdot \cot(\gamma + \beta))^2 \right]; \\
\frac{d^4 \overline{QC}_{b32}}{d\gamma^4} &= (1 + \cot(\gamma + \beta))^2 \times \\
&\times \left[ 2 \cdot \cot(\gamma + \beta) \cdot \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right)^2 \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} - \left(\frac{d^2 \beta}{d\gamma^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{d\beta}{d\gamma}\right) \cdot \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3} \right]; \\
\frac{d^4 \overline{QC}_{b3}}{d\gamma^4} &= 2 \cdot \left( \frac{d^4 \overline{QC}_{b31}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \overline{QC}_{b32}}{d\gamma^4} \right); \\
\frac{d^4 \overline{QC}_b}{d\gamma^4} &= \frac{d^4 \overline{QC}_{b1}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \overline{QC}_{b2}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \overline{QC}_{b3}}{d\gamma^4};
\end{aligned}$$

$$\frac{d^4 \overline{QC}}{d\gamma^4} = \frac{d^4 \overline{QC}_a}{d\gamma^4} \cdot \frac{d \overline{QC}_b}{d\gamma} + 3 \cdot \left[ \frac{d^3 \overline{QC}_a}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^2 \overline{QC}_b}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \overline{QC}_a}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^3 \overline{QC}_b}{d\gamma^3} \right] + \frac{d \overline{QC}_a}{d\gamma} \cdot \frac{d^4 \overline{QC}_b}{d\gamma^4};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3-2a}}{d\gamma^4} = \frac{d \bar{v}_{3-2}}{d\gamma} \left( \cot(\gamma) - \frac{d^2 \bar{v}_{3-2b1}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} \right) - \bar{v}_{3-2} \cdot \left( 1 + \cot(\gamma)^2 + \frac{d^3 \bar{v}_{3-2b1}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} + \frac{d^2 \bar{v}_{3-2b1}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \right);$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3-2b1}}{d\gamma^4} = 2 \cdot \left[ \cot(\alpha - \beta) \cdot (1 + \cot(\alpha - \beta)^2) + \cot(\beta) \cdot (1 + \cot(\beta)^2) \right] \cdot \left( \frac{d\beta}{d\gamma} \right)^2 + \left( \cot(\alpha - \beta)^2 - \cot(\beta)^2 \right) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3-2b21}}{d\gamma^4} = 2 \cdot \left[ (\cot(\beta) - \cot(\alpha - \beta)) \cdot \left( \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \right)^2 - \left( \frac{d\beta}{d\gamma} \right)^2 \cdot (2 + \cot(\beta)^2 + \cot(\alpha - \beta)^2) \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} \right] +$$

$$+ 2 \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} \cdot (\cot(\beta) - \cot(\alpha - \beta)) \cdot \frac{d^3 \beta}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3-2b22}}{d\gamma^4} = 2 \cdot \left[ \cot(\beta) \cdot (1 + \cot(\beta)^2) - \cot(\alpha - \beta) \cdot (1 + \cot(\alpha - \beta)^2) \right] \cdot \left( \frac{d\beta}{d\gamma} \right)^4 +$$

$$+ 3 \cdot \left[ 2 + \cot(\beta)^2 + \cot(\alpha - \beta)^2 \right] \cdot \left( \frac{d\beta}{d\gamma} \right)^2 \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2} - \frac{d^4 \beta}{d\gamma^4};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3-2b2}}{d\gamma^4} = \frac{d^4 \bar{v}_{3-2b21}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \bar{v}_{3-2b22}}{d\gamma^4};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3-2b31}}{d\gamma^4} = -1 - \cot(\gamma)^2 - \frac{d^3 \bar{v}_{3-2b1}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d\beta}{d\gamma} - \frac{d^2 \bar{v}_{3-2b1}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^2 \beta}{d\gamma^2};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3-2b32}}{d\gamma^4} = \frac{d^3 \bar{v}_{3-2b4}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \bar{v}_{3-2b1}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3-2b2}}{d\gamma^2} + \frac{d^2 \bar{v}_{3-2b1}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{3-2b2}}{d\gamma^3};$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3-2b3}}{d\gamma^4} = -2 \cdot \left[ \frac{d^4 \bar{v}_{3-2b31}}{d\gamma^4} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{3-2b32}}{d\gamma^3} + \frac{d^3 \bar{v}_{3-2b31}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^4 \bar{v}_{3-2b32}}{d\gamma^4} \right];$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3-2b4}}{d\gamma^4} = -2 \cdot (1 + \cot(\gamma)^2) \cdot (1 + 3 \cdot \cot(\gamma)^2);$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \bar{v}_{3-2b}}{d\gamma^4} &= \frac{d^4 \bar{v}_{3-2b1}}{d\gamma^4} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3-2b2}}{d\gamma^2} + 2 \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{3-2b1}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{3-2b2}}{d\gamma^3} + \\ &+ \frac{d^2 \bar{v}_{3-2b1}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^4 \bar{v}_{3-2b2}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \bar{v}_{3-2b3}}{d\gamma^4} + \frac{d^4 \bar{v}_{3-2b4}}{d\gamma^4}; \end{aligned}$$

$$\frac{d^4 \bar{v}_{3-2}}{d\gamma^4} = \frac{d^4 \bar{v}_{3-2a}}{d\gamma^4} \cdot \frac{d^2 \bar{v}_{3-2b}}{d\gamma^2} + 2 \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{3-2a}}{d\gamma^3} \cdot \frac{d^3 \bar{v}_{3-2b}}{d\gamma^3} + \frac{d^2 \bar{v}_{3-2a}}{d\gamma^2} \cdot \frac{d^4 \bar{v}_{3-2b}}{d\gamma^4}.$$

## ДОДАТОК Б

**Функція питомого зусилля для осадки циліндричної заготовки в умовах нерівномірної деформації і її дві похідні за параметрами  $a_1$  та  $a_2$**

$$a_0 = \frac{v_0}{h};$$

$$v_r = a_0 \cdot \left[ r + r \cdot (a_1 + 0,5 \cdot a_2 \cdot r^2) \cdot \left( 1 - 4 \cdot \frac{z^3}{h^3} \right) \right];$$

$$v_z = a_0 \cdot z \cdot \left[ 2 + (2 \cdot a_1 + 3 \cdot a_2 \cdot r^2) \cdot \left( 1 - \frac{z^3}{h^3} \right) \right];$$

$$\xi_r = a_0 \cdot \left[ 1 + (a_1 + 1,5 \cdot a_2 \cdot r^2) \cdot \left( 1 - 4 \cdot \frac{z^3}{h^3} \right) \right];$$

$$\xi_\theta = a_0 \cdot \left[ 1 + (a_1 + 0,5 \cdot a_2 \cdot r^2) \cdot \left( 1 - 4 \cdot \frac{z^3}{h^3} \right) \right];$$

$$\xi_z = -(\xi_r + \xi_\theta);$$

$$\xi_{rz} = -6 \cdot a_0 \cdot z \cdot r \cdot \left[ \frac{z}{h^3} \cdot (2 \cdot a_1 + a_2 \cdot r^2) + a_2 \cdot \left( 1 - \frac{z^3}{h^3} \right) \right];$$

$$\xi_{iA}^* = (\xi_r - \xi_\theta)^2;$$

$$\xi_{iB}^* = (\xi_\theta - \xi_z)^2;$$

$$\xi_{iC}^* = (\xi_z - \xi_r)^2;$$

$$\xi_{iD}^* = \frac{3}{2} \cdot \xi_{rz}^2;$$

$$\xi_i^* = \xi_{iA}^* + \xi_{iB}^* + \xi_{iC}^* + \xi_{iD}^*;$$

$$\xi_i = \sqrt{\xi_i^*};$$

$$N_1 = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \int_0^{\bar{h}} \int_0^1 \xi_i \cdot r dr dz;$$

$$N_2 = 4 \cdot \mu \cdot a_0 \cdot \left( \frac{1}{3} - a_1 - 0,3 \cdot a_2 \right);$$

$$\bar{p} = \frac{1}{v_0} \cdot (N_1 + N_2);$$

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial a_1} = a_0 \cdot \left( 1 - 4 \cdot \frac{z^3}{h^3} \right);$$

$$\frac{\partial \xi_\theta}{\partial a_1} = a_0 \cdot \left( 1 - 4 \cdot \frac{z^3}{h^3} \right);$$

$$\frac{\partial \xi_z}{\partial a_1} = -2 \cdot a_0 \cdot \left( 1 - 4 \cdot \frac{z^3}{h^3} \right);$$

$$\frac{\partial \xi_{rz}}{\partial a_1} = -a_0 \cdot \frac{12}{h^3} \cdot z^2 \cdot r;$$

$$\frac{\partial \xi_{iA}^*}{\partial a_1} = 2 \cdot (\xi_r - \xi_\theta) \cdot \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial a_1} - \frac{\partial \xi_\theta}{\partial a_1} \right);$$

$$\frac{\partial \xi_{iB}^*}{\partial a_1} = 2 \cdot (\xi_\theta - \xi_z) \cdot \left( \frac{\partial \xi_\theta}{\partial a_1} - \frac{\partial \xi_z}{\partial a_1} \right);$$

$$\frac{\partial \xi_{iC}^*}{\partial a_1} = 2 \cdot (\xi_z - \xi_r) \cdot \left( \frac{\partial \xi_z}{\partial a_1} - \frac{\partial \xi_r}{\partial a_1} \right);$$

$$\frac{\partial \xi_{iD}^*}{\partial a_1} = 3 \cdot \xi_{rz} \cdot \frac{\partial \xi_{rz}}{\partial a_1};$$

$$\frac{\partial \xi_i^*}{\partial a_1} = \frac{\partial \xi_{iA}^*}{\partial a_1} + \frac{\partial \xi_{iB}^*}{\partial a_1} + \frac{\partial \xi_{iC}^*}{\partial a_1} + \frac{\partial \xi_{iD}^*}{\partial a_1};$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial a_1} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\xi_i^*}} \cdot \frac{\partial \xi_i^*}{\partial a_1};$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial a_1} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \int_0^{\bar{h}} \int_0^1 \frac{\partial \xi_i}{\partial a_1} \cdot r dr dz;$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial a_1} = -4 \cdot \mu \cdot a_0;$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial a_1} = \frac{1}{v_0} \cdot \left( \frac{\partial N_1}{\partial a_1} + \frac{\partial N_2}{\partial a_1} \right);$$

$$\frac{\partial \xi_r}{\partial a_2} = 1,5 \cdot a_0 \cdot r^2 \cdot \left( 1 - 4 \cdot \frac{z^3}{h^3} \right);$$

$$\frac{\partial \xi_\theta}{\partial a_2} = 0,5 \cdot a_0 \cdot r^2 \cdot \left( 1 - 4 \cdot \frac{z^3}{h^3} \right);$$

$$\frac{\partial \xi_z}{\partial a_2} = -2 \cdot a_0 \cdot r^2 \cdot \left( 1 - 4 \cdot \frac{z^3}{h^3} \right);$$

$$\frac{\partial \xi_{rz}}{\partial a_2} = -6 \cdot a_0 \cdot z \cdot r^2 \cdot \left[ \frac{z}{h^3} \cdot (r^2 - z^2) + 1 \right];$$

$$\frac{\partial \xi_{iA}^*}{\partial a_2} = 2 \cdot (\xi_r - \xi_\theta) \cdot \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial a_2} - \frac{\partial \xi_\theta}{\partial a_2} \right);$$

$$\frac{\partial \xi_{iB}^*}{\partial a_2} = 2 \cdot (\xi_\theta - \xi_z) \cdot \left( \frac{\partial \xi_\theta}{\partial a_2} - \frac{\partial \xi_z}{\partial a_2} \right);$$

$$\frac{\partial \xi_{iC}^*}{\partial a_2} = 2 \cdot (\xi_z - \xi_r) \cdot \left( \frac{\partial \xi_z}{\partial a_2} - \frac{\partial \xi_r}{\partial a_2} \right);$$

$$\frac{\partial \xi_{iD}^*}{\partial a_2} = 3 \cdot \xi_{rz} \cdot \frac{\partial \xi_{rz}}{\partial a_2};$$

$$\frac{\partial \xi_i^*}{\partial a_2} = \frac{\partial \xi_{iA}^*}{\partial a_2} + \frac{\partial \xi_{iB}^*}{\partial a_2} + \frac{\partial \xi_{iC}^*}{\partial a_2} + \frac{\partial \xi_{iD}^*}{\partial a_2};$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial a_2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\xi_i^*}} \cdot \frac{\partial \xi_i^*}{\partial a_2};$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial a_2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \int_0^{\bar{h}} \int_0^1 \frac{\partial \xi_i}{\partial a_2} \cdot r dr dz;$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial a_2} = -1,2 \cdot \mu \cdot a_0;$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial a_2} = \frac{1}{v_0} \cdot \left( \frac{\partial N_1}{\partial a_2} + \frac{\partial N_2}{\partial a_2} \right);$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{iA}^*}{\partial a_1^2} = 2 \cdot \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial a_1} - \frac{\partial \xi_\theta}{\partial a_1} \right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{iB}^*}{\partial a_1^2} = 2 \cdot \left( \frac{\partial \xi_\theta}{\partial a_1} - \frac{\partial \xi_z}{\partial a_1} \right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{iC}^*}{\partial a_1^2} = 2 \cdot \left( \frac{\partial \xi_z}{\partial a_1} - \frac{\partial \xi_r}{\partial a_1} \right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{iD}^*}{\partial a_1^2} = 3 \cdot \left( \frac{\partial \xi_{rz}}{\partial a_1} \right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 \xi_i^*}{\partial a_1^2} = \frac{\partial^2 \xi_{iA}^*}{\partial a_1^2} + \frac{\partial^2 \xi_{iB}^*}{\partial a_1^2} + \frac{\partial^2 \xi_{iC}^*}{\partial a_1^2} + \frac{\partial^2 \xi_{iD}^*}{\partial a_1^2};$$

$$\frac{\partial^2 \xi_i^*}{\partial a_1^2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\xi_i^*}} \cdot \left( \frac{\partial^2 \xi_i^*}{\partial a_1^2} - \frac{1}{2 \cdot \xi_i^*} \cdot \left( \frac{\partial \xi_i^*}{\partial a_1} \right)^2 \right);$$

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial a_1^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \int_0^{\bar{h}} \int_0^1 \frac{\partial^2 \xi_i^*}{\partial a_1^2} \cdot r dr dz;$$

$$\frac{\partial^2 N_2}{\partial a_1^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial a_1^2} = \frac{1}{v_0} \cdot \frac{\partial^2 N_1}{\partial a_1^2};$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{iA}^*}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} = 2 \cdot \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial a_1} - \frac{\partial \xi_\theta}{\partial a_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial a_2} - \frac{\partial \xi_\theta}{\partial a_2} \right);$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{iB}^*}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} = 2 \cdot \left( \frac{\partial \xi_\theta}{\partial a_1} - \frac{\partial \xi_z}{\partial a_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial \xi_\theta}{\partial a_2} - \frac{\partial \xi_z}{\partial a_2} \right);$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{iC}^*}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} = 2 \cdot \left( \frac{\partial \xi_z}{\partial a_1} - \frac{\partial \xi_r}{\partial a_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial \xi_z}{\partial a_2} - \frac{\partial \xi_r}{\partial a_2} \right);$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{iD}^*}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} = 3 \cdot \frac{\partial \xi_{rz}}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial \xi_{rz}}{\partial a_2};$$

$$\frac{\partial^2 \xi_i^*}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} = \frac{\partial^2 \xi_{iA}^*}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} + \frac{\partial^2 \xi_{iB}^*}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} + \frac{\partial^2 \xi_{iC}^*}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} + \frac{\partial^2 \xi_{iD}^*}{\partial a_1 \cdot \partial a_2};$$

$$\frac{\partial^2 \xi_i^*}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\xi_i^*}} \cdot \left( \frac{\partial^2 \xi_i^*}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} - \frac{1}{2 \cdot \xi_i^*} \cdot \left( \frac{\partial \xi_i^*}{\partial a_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial \xi_i^*}{\partial a_2} \right) \right);$$

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \int_0^{\bar{h}} \int_0^1 \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} \cdot r dr dz;$$

$$\frac{\partial^2 N_2}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} = \frac{1}{v_0} \cdot \frac{\partial^2 N_1}{\partial a_1 \cdot \partial a_2};$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{iA}^*}{\partial a_2^2} = 2 \cdot \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial a_2} - \frac{\partial \xi_\theta}{\partial a_2} \right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{iB}^*}{\partial a_2^2} = 2 \cdot \left( \frac{\partial \xi_\theta}{\partial a_2} - \frac{\partial \xi_z}{\partial a_2} \right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{iC}^*}{\partial a_2^2} = 2 \cdot \left( \frac{\partial \xi_z}{\partial a_2} - \frac{\partial \xi_r}{\partial a_2} \right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{iD}^*}{\partial a_2^2} = 3 \cdot \left( \frac{\partial \xi_{rz}}{\partial a_2} \right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 \xi_i^*}{\partial a_2^2} = \frac{\partial^2 \xi_{iA}^*}{\partial a_2^2} + \frac{\partial^2 \xi_{iB}^*}{\partial a_2^2} + \frac{\partial^2 \xi_{iC}^*}{\partial a_2^2} + \frac{\partial^2 \xi_{iD}^*}{\partial a_2^2};$$

$$\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial a_2^2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\xi_i^*}} \cdot \left( \frac{\partial^2 \xi_i^*}{\partial a_2^2} - \frac{1}{2 \cdot \xi_i^*} \cdot \left( \frac{\partial \xi_i^*}{\partial a_2} \right)^2 \right);$$

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial a_2^2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \int_0^{\bar{h}} \int_0^1 \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial a_2^2} \cdot r dr dz;$$

$$\frac{\partial^2 N_2}{\partial a_2^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial a_2^2} = \frac{1}{v_0} \cdot \frac{\partial^2 N_1}{\partial a_2^2};$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{iA}^*}{\partial a_2 \cdot \partial a_1} = 2 \cdot \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial a_1} - \frac{\partial \xi_\theta}{\partial a_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial \xi_r}{\partial a_2} - \frac{\partial \xi_\theta}{\partial a_2} \right);$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{iB}^*}{\partial a_2 \cdot \partial a_1} = 2 \cdot \left( \frac{\partial \xi_\theta}{\partial a_1} - \frac{\partial \xi_z}{\partial a_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial \xi_\theta}{\partial a_2} - \frac{\partial \xi_z}{\partial a_2} \right);$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{iC}^*}{\partial a_2 \cdot \partial a_1} = 2 \cdot \left( \frac{\partial \xi_z}{\partial a_1} - \frac{\partial \xi_r}{\partial a_1} \right) \cdot \left( \frac{\partial \xi_z}{\partial a_2} - \frac{\partial \xi_r}{\partial a_2} \right);$$

$$\frac{\partial^2 \xi_{iD}^*}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} = 3 \cdot \frac{\partial \xi_{rz}}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial \xi_{rz}}{\partial a_2};$$

$$\frac{\partial^2 \xi_i^*}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} = \frac{\partial^2 \xi_{iA}^*}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} + \frac{\partial^2 \xi_{iB}^*}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} + \frac{\partial^2 \xi_{iC}^*}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} + \frac{\partial^2 \xi_{iD}^*}{\partial a_1 \cdot \partial a_2};$$

$$\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\xi_i^*}} \cdot \left( \frac{\partial^2 \xi_i^*}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} - \frac{1}{2 \cdot \xi_i^*} \cdot \frac{\partial \xi_i^*}{\partial a_1} \cdot \frac{\partial \xi_i^*}{\partial a_2} \right);$$

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \int_0^{\bar{h}} \int_0^1 \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} \cdot r dr dz;$$

$$\frac{\partial^2 N_2}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial a_1 \cdot \partial a_2} = \frac{1}{v_0} \cdot \frac{\partial^2 N_1}{\partial a_1 \cdot \partial a_2}.$$

*Навчальне видання*

**ЛЕВЧЕНКО Володимир Миколайович**

**АЛІЄВА Лейла Іграмотдіновна**

**МАЛІЙ Христина Василівна**

**МЕТОДИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ  
В ОБРОБЦІ МЕТАЛІВ ТИСКОМ**

**Посібник**

**для студентів галузі знань 13 «Механічна інженерія»  
денної та заочної форм навчання**

За авторською редакцією

Комп'ютерне верстання

І. І. Дьякова

27/2019. Формат 60 x 84/16. Ум. друк. арк.. 5,60.  
Обл.-вид. арк. 3,65. . Тираж 25 пр. Зам. №14

Видавець і виготівник

Донбаська державна машинобудівна академія  
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи

ДК № 1633 від 24.12.2003

(057) 757-93-82