

Б.М. Цимбал, О.О. Койфман, Ю.А. Солод

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ОБ'ЄКТІВ РОБОТОТЕХНІКИ ТА МЕХАТРОНІКИ

Навчально-практичний посібник



ОЛДІ
ПЛЮС

ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»

Б. М. Цимбал, О. О. Койфман, Ю. А. Солод

**СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ОБ'ЄКТІВ
РОБОТОТЕХНІКИ ТА МЕХАТРОНІКИ**

Навчально-практичний посібник

Одеса • 2025 • Олді+

Рецензенти:

А. В. Погребняк – доктор технічних наук, доцент, професор кафедри туризму та готельно-ресторанної справи Університету митної справи та фінансів;

В. І. Мельник – доктор технічних наук, професор, професор кафедри оптимізації технологічних систем Державного біотехнологічного університету;

М. С. Цирик – керівник IT, “PROMET STEEL” JST, Болгарія

*Робота друкується за рішенням Вченої ради
ТОВ «Технічний університет «Метінвест Політехніка»
(протокол № 7 від 27.03.2025 р.)*

Системний аналіз об'єктів робототехніки та мехатроніки : навчально-практичний посібник / Б. М. Цимбал, О. О. Койфман, Ю. А. Солод ; ТОВ «Технічний університет «Метінвест Політехніка». – Одеса : Олді+, 2025. – 156 с.

ISBN 978-966-289-981-8

Навчально-практичний посібник присвячений системному підходу до аналізу, проєктування та управління робототехнічними й мехатронними системами. Він поєднує фундаментальні теоретичні основи з практичними завданнями, що сприяють ефективному засвоєнню матеріалу та розвитку навичок вирішення прикладних інженерних задач. У посібнику розглядаються сучасні підходи до побудови й оптимізації механічних систем роботів і маніпуляторів. Значну увагу приділено кінематиці та динаміці робототехнічних систем, аналізу просторових конфігурацій та траєкторному плануванню руху. Практичний аспект реалізовано через серію завдань, що включають розрахунки елементів механізмів, моделювання рухів та синтез складних систем. Це забезпечує закріплення знань та підготовку до реальних інженерних викликів. Посібник стане у пригоді здобувачам вищої освіти технічних спеціальностей, аспірантам, викладачам та інженерам, зацікавленим у глибокому вивченні робототехніки та мехатроніки.

УДК 303.732.4:[004.896+62-505](075.8)

ЗМІСТ

ВСТУП	6
ПРАКТИЧНА РОБОТА № 1 ВИРІШЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ З КОНФІГУРАЦІЙНОГО ПРОСТОРУ	8
1.1 Теоретичні дані	8
1.2 Приклади вирішення практичних завдань	12
1.3 Завдання до практичної роботи (розв'язати вправи)	18
1.4 Питання для самоперевірки	20
1.5 Перелік рекомендованих джерел	21
ПРАКТИЧНА РОБОТА № 2 РОЗРАХУНОК ЗАДАЧ ПРОСТОРОВОЇ КОНФІГУРАЦІЇ: ТОПОЛОГІЇ ТА ПРЕДСТАВЛЕННЯ ТОПОЛОГІЇ КОНФІГУРАЦІЙНОГО ПРОСТОРУ	22
2.1 Теоретичні дані	22
2.2 Приклади вирішення практичних завдань	35
2.3 Завдання до практичної роботи (розв'язати вправи)	36
2.4 Питання для самоперевірки	39
2.5 Перелік рекомендованих джерел	40
ПРАКТИЧНА РОБОТА № 3 АНАЛІЗ РУХІВ ТВЕРДОГО ТІЛА	41
3.1 Теоретичні дані	41
3.2 Практичні аспекти	44
3.3 Приклади вирішення практичних завдань	44
3.4 Завдання до практичної роботи (розв'язати вправи)	47
3.5 Питання для самоперевірки	57
3.6 Перелік рекомендованих джерел	58
ПРАКТИЧНА РОБОТА № 4 ПРАКТИЧНІ ВПРАВИ З ПЕРЕДОВОЇ КІНЕМАТИКИ ..	60
4.1 Теоретичні дані	60
4.2 Приклади вирішення практичних завдань	66

4.3 Завдання до практичної роботи (розв'язати вправи)	71
4.4 Питання для самоперевірки	73
4.5 Перелік рекомендованих джерел	74

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 5

ПРАКТИЧНІ ВПРАВИ

З ОБЕРТОВОЇ КІНЕМАТИКИ 75

5.1 Теоретичні дані	75
5.2 Приклади вирішення практичних завдань	77
5.3 Завдання до практичної роботи (розв'язати вправи)	83
5.4 Питання для самоперевірки	84
5.5 Перелік рекомендованих джерел	85

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 6

ПРАКТИЧНІ ВПРАВИ З КІНЕМАТИКИ

ЗАМКНЕНИХ ЛАНЦЮГІВ 86

6.1 Теоретичні дані	86
6.2 Приклади вирішення практичних завдань	89
6.3 Завдання до практичної роботи (розв'язати вправи)	92
6.4 Питання для самоперевірки	94
6.5 Перелік рекомендованих джерел	95

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 7

ПРАКТИЧНІ ВПРАВИ З ДИНАМІКИ

ВІДКРИТИХ ЛАНЦЮГІВ 96

7.1 Теоретичні дані	96
7.2 Приклади вирішення практичних завдань	106
7.3 Завдання до практичної роботи (розв'язати вправи)	114
7.4 Питання для самоперевірки	116
7.5 Перелік рекомендованих джерел	117

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 8

ПРАКТИЧНІ ВПРАВИ З ГЕНЕРАЦІЇ ТРАЄКТОРІЇ 118

8.1 Теоретичні дані	118
8.2 Приклади вирішення практичних завдань	127
8.3 Завдання до практичної роботи (розв'язати вправи)	131
8.4 Питання для самоперевірки	135
8.5 Перелік рекомендованих джерел	136

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 9	
ПРАКТИЧНІ ВПРАВИ З ПЛАНУВАННЯ РУХУ	138
9.1 Теоретичні дані	138
9.2 Приклади вирішення практичних завдань	139
9.3 Завдання до практичної роботи (розв’язати вправи)	143
9.4 Питання для самоперевірки	146
9.5 Перелік рекомендованих джерел	147
ПРАКТИЧНА РОБОТА № 10	
ПРАКТИЧНІ ВПРАВИ НА ХАПАННЯ	
ТА МАНІПУЛЯЦІЇ	148
10.1 Теоретичні дані	148
10.2 Приклад вирішення практичного завдання	150
10.3 Завдання до практичної роботи (розв’язати вправу)	152
10.4 Питання для самоперевірки	153
10.5 Перелік рекомендованих джерел	154

ВСТУП

Робототехніка та мехатроніка є одними з найдинамічніших галузей сучасної науки та техніки, які активно розвиваються, впроваджуючи інноваційні рішення у виробництво, логістику, медицину, транспорт, побут і навіть у повсякденне життя. Завдяки інтеграції механіки, електроніки, інформатики та системного аналізу ці дисципліни стали основою для створення автоматизованих систем, які не лише підвищують ефективність, але й сприяють якісному переосмисленню підходів до вирішення складних технічних завдань.

Основою сучасної робототехніки є системний підхід, який передбачає всебічний аналіз об'єктів та процесів для забезпечення оптимального функціонування автоматизованих пристроїв. Важливими складовими такого підходу є аналіз кінематики та динаміки механізмів, синтез ефективних алгоритмів управління, а також планування траєкторій руху. В умовах глобальної конкуренції інженери все частіше стикаються з викликами, що вимагають інтегрованого підходу до проектування, виробництва та експлуатації робототехнічних систем.

Робототехнічні системи широко використовуються у найрізноманітніших галузях. У промисловості вони допомагають автоматизувати виробничі процеси, зменшувати витрати та покращувати якість продукції. У медицині роботи забезпечують виконання високоточного хірургічного втручання, створюють інноваційні засоби реабілітації. У логістиці автоматизовані системи оптимізують транспортування вантажів та управління складськими операціями. Все це вимагає від сучасних інженерів не лише глибоких технічних знань, але й уміння мислити системно, враховуючи взаємозв'язки між усіма компонентами складної системи.

Даний навчально-практичний посібник має на меті допомогти здобувачам вищої освіти та спеціалістам опанувати фундаментальні знання в галузі системного аналізу робототехніки та мехатроніки. У ньому розглядаються основи побудови робототехнічних

систем, аналіз просторових конфігурацій, методи планування руху та управління механізмами. Особливу увагу приділено питанням розрахунків кінематичних та динамічних характеристик, моделювання механізмів та синтезу складних механічних систем.

Посібник побудований так, щоб забезпечити поетапне засвоєння знань: від вивчення базових теоретичних основ до розв'язання прикладних задач. Практичні завдання допоможуть закріпити отримані знання, розвинути навички аналізу й синтезу механізмів, а також підготуватися до реальних викликів, які виникають у процесі проектування та експлуатації робототехнічних систем.

Це видання стане незамінним помічником для здобувачів вищої освіти технічних спеціальностей, аспірантів та молодих дослідників, які прагнуть поглибити свої знання у галузі робототехніки та мехатроніки. Завдяки поєднанню теорії та практики, воно також буде корисним для викладачів та професіоналів, які шукають нові підходи до навчання та впровадження інноваційних технологій у своїй роботі.

Метою цього посібника є не лише ознайомлення з ключовими аспектами системного аналізу в робототехніці, але й розвиток системного мислення у фахівців, здатних створювати інноваційні рішення для складних технічних завдань.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 1 _____

ВИРІШЕННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАДАЧ З КОНФІГУРАЦІЙНОГО ПРОСТОРУ

Метою практичної роботи є набуття практичних навичок вирішення практичних задач з конфігураційного простору.

Завдання практичної роботи:

1. Ознайомитись та вивчити теоретичні дані.
2. Ознайомитись з прикладами вирішення практичних завдань.
3. Вирішити вправи.

1.1 Теоретичні дані

Розглянемо приклад дверей на рисунку 1.1, що складається з одного твердого тіла, з'єднаного зі стіною шарнірним з'єднанням.

На рисунку 1.1: *a* – конфігурація дверей описується кутом θ ; *б* – конфігурація точки на площині описується координатами (x, y) ; *в* – конфігурація монети на столі описується (x, y, θ) , де θ визначає напрямок, у якому дивиться Авраам Лінкольн.

Ми знаємо, що двері мають лише один ступінь свободи, який зручно позначати кутом з'єднання петлі θ . Без шарнірного

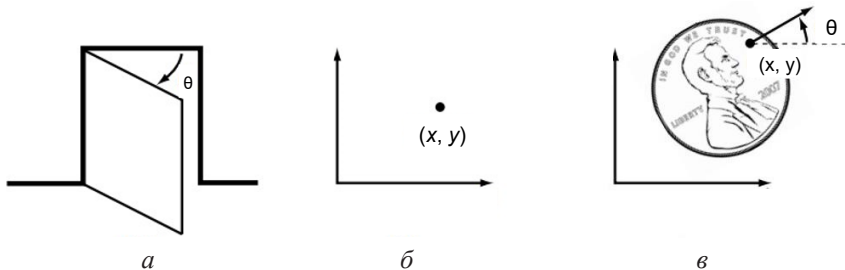


Рисунок 1.1 – Конфігурації дверей, монети та точки

з'єднання двері могли б вільно рухатися в тривимірному просторі і мали б шість ступенів свободи. З'єднуючи двері зі стіною через шарнірне з'єднання, на рух дверей накладаються п'ять незалежних обмежень, залишаючи лише одну незалежну координату (θ). Крім того, на двері можна дивитися зверху і розглядати як плоске тіло, яке має три ступені свободи. Потім шарнірне з'єднання накладає два незалежні обмеження, знову залишаючи лише одну незалежну координату (θ). С-простір дверей представлений деяким діапазоном в інтервалі $[0, 2\pi)$, в якому θ дозволяється змінюватися.

В обох випадках суглоби обмежують рух твердого тіла, таким чином зменшуючи загальний ступінь свободи. Це спостереження пропонує формулу для визначення кількості ступенів свободи робота, просто підрахувавши кількість твердих тіл та суглобів. Формула Грюблера використовується для визначення числа ступенів свободи плоских і просторових роботів.

Суглоби роботів. На рисунку 1.2 показано основні з'єднання типових роботів.

Кожне з'єднання поєднує рівно дві ланки; не допускаються з'єднання, які одночасно з'єднують три та більше ланок. Обертвий шарнір (R), також званий шарнірним шарніром, забезпечує обертальний рух навколо осі суглоба. Призматичний шарнір (P), також

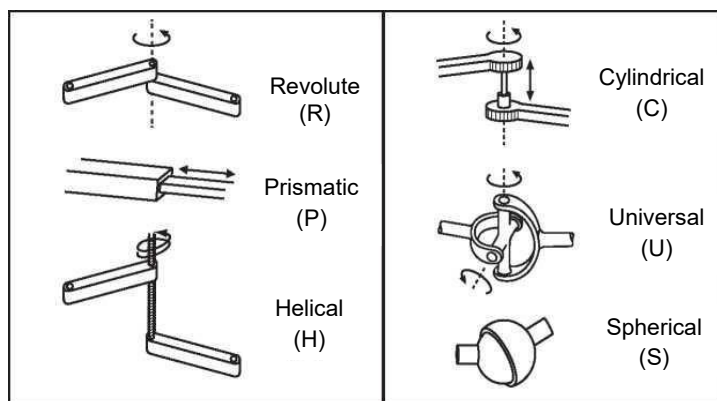


Рисунок 1.2 – Типові суглоби робота

званий ковзним або лінійним, забезпечує поступальний (або прямолінійний) рух вздовж осі суглоба. Гвинтове з'єднання (Н), або яке ще називають гвинтовим, забезпечує одночасне обертання та переміщення навколо осі гвинта. Обертові, призматичні та спіральні з'єднання мають один ступінь свободи.

Свободи та обмеження, надані різними типами з'єднань, підсумовано в табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Кількість ступенів свободи f і обмежень s , що забезпечуються загальними з'єднаннями

Суглобовий тип	dof	Зв'язки с між двома плоскими	Зв'язки с між двома просторови
Революція (R)	1	2	5
Призматичний (P)	1	2	5
Спіральний (H)	1	N/A	5
Циліндричний (C)	2	N/A	4
Універсальний (U)	2	N/A	4
Сферична (S)	3	N/A	3

Суглоби також можуть мати кілька ступенів свободи. Циліндричний шарнір (C) має два ступені свободи і допускає незалежні переміщення та обертання навколо однієї фіксованої осі шарніра. Універсальний шарнір (U) – це інший шарнір із двома ступенями свободи, який складається з пари поворотних шарнірів, розташованих таким чином, що їхні осі є ортогональними. Сферичний суглоб (S), також званий шарнірним суглобом, має три ступені свободи та функціонує так само, як наш плечовий суглоб.

З'єднання можна розглядати як забезпечення свободи, що дозволяє одному твердому тілу рухатися відносно іншого. Його також можна розглядати як обмеження на можливі рухи двох твердих тіл, які він з'єднує. Наприклад, поворотний шарнір можна розглядати як такий, що забезпечує свободу руху між двома твердими тілами у просторі, або як забезпечення п'яти обмежень на рух одного твердого тіла відносно іншого. Узагальнюючи, кількість ступенів свободи твердого тіла (три для плоских тіл і шість для просторових тіл)

мінус кількість обмежень, що забезпечується шарніром, має дорівнювати числу свобод, що забезпечується цим шарніром.

Формула Грюблера. Кількість ступенів вільності механізму з ланками та шарнірами можна розрахувати за допомогою формули Грюблера, яка є виразом рівняння (1.1).

$$\begin{aligned} & \text{ступені свободи} = \\ & (\text{сума свобод тіл}) - (\text{кількість незалежних обмежень}). \quad (1.1) \end{aligned}$$

Твердження 1.1. Розглянемо механізм, що складається з N ланок, де земля також розглядається як ланка. Нехай J – кількість шарнірів, m – кількість ступенів вільності твердого тіла ($m=3$ для плоских механізмів і $m=6$ для просторових механізмів), f_i – кількість свобод, що надаються з'єднанням i , а c_j – кількість обмежень, наданих з'єднанням i , де:

$$f_j + c_j = m,$$

для всіх i . Потім Формула Грюблера для числа ступенів свободи робота така:

$$\begin{aligned} \text{dof} &= \underbrace{(m(N-1))}_{\text{свободи твердого тіла}} - \underbrace{\sum_{i=1}^J c_i}_{\text{спільні обмеження}} = m(N-1) - \sum_{i=1}^J (m - f_i) = \\ & m = (N-1-j) + \sum_{i=1}^J f_i. \quad (1.2) \end{aligned}$$

Формула (1.2) справедлива, лише якщо всі спільні обмеження є незалежними. У випадку, коли вони є незалежними, формула забезпечує нижню межу кількості ступенів свободи.

Нижче ми застосуємо формулу Грюблера до кількох площинних і просторових механізмів. Ми розрізняємо два типи механізмів: механізми з відкритим ланцюгом (також відомі як серійні механізми) і механізми із закритим ланцюгом. Механізм замкнутого ланцюга – будь-який механізм із замкнутим контуром. Людина, яка стоїть обома ногами на землі, є прикладом механізму замкнутого ланцюга, оскільки замкнуту петлю можна простежити від землі,

через праву ногу, через талію, через ліву ногу і назад до землі (нагадаємо, що сама земля є ланкою). Механізм відкритого ланцюга – будь-який механізм без замкнутого циклу; прикладом є ваша рука, коли вашій руці дозволено вільно рухатися в просторі.

1.2 Приклади вирішення практичних завдань

Приклад 1.1. Чотириохтяговий і кривошипно-повзунний механізм. Плоский чотиристоронній зв'язок, показаний на рисунку 1.3 (а), складається з чотирьох ланок (одна з них заземлена), розташованих в єдиному замкнутому контурі та з'єднаних чотирма шарнірами. Оскільки всі ланки обмежені рухом в одній площині, маємо $m = 3$. Підставляючи $N=4$, $J=4$ і $f_j = 1$, $i = 1, \dots, 4$, у формулу Грюблера, ми бачимо, що зв'язок із чотирма стержнями має один ступінь свободи.

Кривошипно-повзунний замкнутий ланцюговий механізм на рисунку 1.3 (б) можна проаналізувати двома способами:

1) механізм складається з трьох поворотних шарнірів і одного призматичного шарніра ($J=4$ і кожен $f_j = 1$) і чотирьох ланок ($N=4$, включаючи заземлення);

2) механізм складається з двох поворотних шарнірів ($f_i = 1$) і одного RP-шарніра (RP-шарнір є конкатенацією обертового та призматичного шарнірів, так що $f_i = 2$) і три ланки ($N=3$; пам'ятайте, що кожен суглоб з'єднує рівно два тіла). В обох випадках механізм має один ступінь свободи.

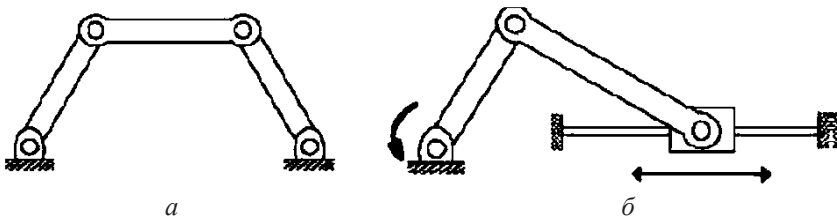


Рисунок 1.3 – Замкнуті механізми:

а – чотиристороннє з'єднання; *б* – кривошипно-повзунний механізм

Приклад 1.2. Деякі класичні площинні механізми.

Застосуємо тепер формулу Грюблера до кількох класичних плоских механізмів. Плоский послідовний ланцюг обертових з'єднань із k -ланками на рисунку 1.4 (а) (називається роботом kR через k обертових з'єднань) має $N = k + 1$ ланок (k ланок плюс земля) і $J = k$ з'єднань, і, оскільки всі шарніри поворотні, $f_i = 1$ для всіх i . Тому:

$$dof = 3((k+1) - 1 - k) + k = k,$$

як і очікувалося.

Для плоского зв'язку з п'ятьма стрижнями, зображеного на рисунку 1.4 (б), $N = 5$ (чотири ланки плюс земля), $J = 5$, а оскільки всі з'єднання обертаються, кожен $f_i = 1$. Отже,

$$dof = 3(5 - 1 - 5) + 5 = 2.$$

Для шестистержневого зв'язку Стефенсона на рисунку 1.4 (в) ми маємо $N = 6$, $J = 7$ і $f_i = 1$ для всіх i , так що:

$$dof = 3(6 - 1 - 7) + 7 = 1.$$

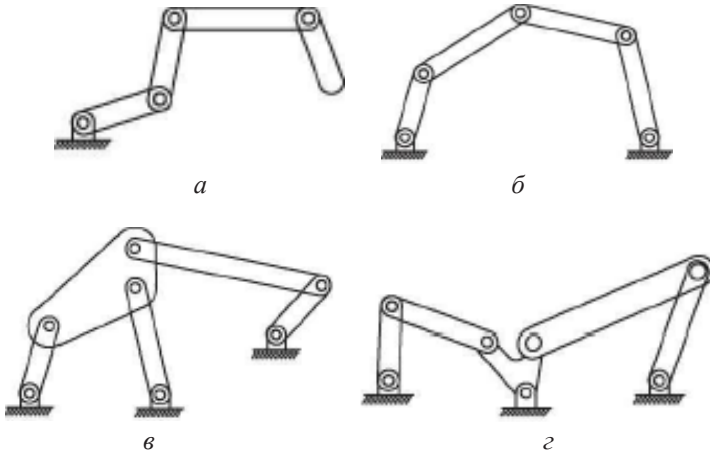


Рисунок 1.4 – Класичні плоскі механізми:

a – k -ланковий плоский послідовний ланцюг; *б* – п'ятистрижневе планарне з'єднання; *в* – шість балок Стефенсона; *г* – ваттове шестистрижневе з'єднання

Нарешті, для зв'язку Ватта з шістьма стрижнями на рисунку 1.4 (з) ми маємо $N=6$, $J=7$ і $f_i=1$ для всіх i , так що, як і зв'язок із шістьма стрижнями Стівенсона,

$$dof = 3(6 - 1 - 7) + 7 = 1.$$

Приклад 1.3. Площинний механізм з перекриттям шарнірів.

Планарний механізм, зображений на рисунку 1.5 має три ланки, які зустрічаються в одній точці праворуч від великої ланки.

Пам'ятаючи, що з'єднання за визначенням з'єднує рівно дві ланки, з'єднання в цій точці перетину не слід розглядати як єдине обертове з'єднання. Швидше, це правильно інтерпретується як два поворотних з'єднання, що перекривають один одного. Знову ж таки, існує більше одного способу отримати кількість ступенів свободи цього механізму за допомогою формули Грюблера: механізм складається з восьми ланок ($N=8$), восьми поворотних шарнірів і одного призматичного шарніра. Підставляючи у формулу Грюблера, виходить:

$$dof = 3(8 - 1 - 9) + 9(1) = 3.$$

Альтернативно, нижню праву поворотно-призматичну пару шарнірів можна розглядати як єдиний шарнір з двома степенями свободи. У цьому випадку число ланок $N=7$, з сімома поворотними з'єднаннями і однією двоступенчатою поворотно-призматичною парою. Підстановка у формулу Грюблера дає:

$$dof = 3(7 - 1 - 8) + 7(1) + 1(2) = 3.$$

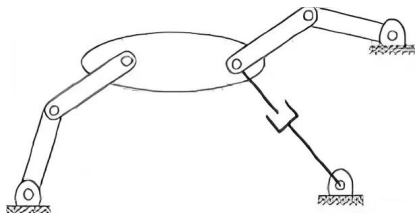


Рисунок 1.5 – Плоский механізм із двома з'єднаннями, що перекриваються

Приклад 1.4. Надлишкові обмеження та сингулярності.

Для з'єднання паралелограма на рисунку 1.6 (а) $N=5$, $J=6$ і $f=1$ для кожного з'єднання. З формули Грюблера кількість ступенів свободи дорівнює:

$$dof = 3(5 - 1 - 6) + 6 = 0.$$

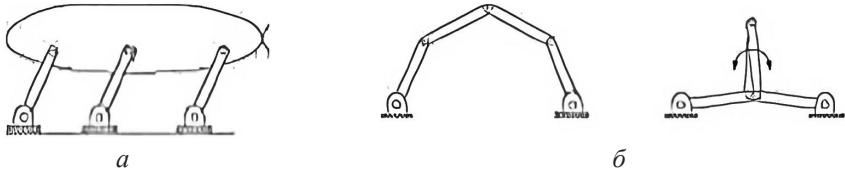


Рисунок 1.6 – Складні механізми:

а – з'єднання паралелограма; б – з'єднання з п'ятьма стрижнями в регулярній та одиничній конфігурації

Механізм із нульовими ступенями свободи за визначенням є жорсткою конструкцією. Проте з огляду на фігуру стає зрозуміло, що механізм насправді може рухатися з одним ступенем свободи. Дійсно, будь-яка з трьох паралельних ланок з двома шарнірами не впливає на рух механізму, тому ми повинні були розрахувати:

$$dof = 3(4 - 1 - 4) + 4 = 1.$$

Іншими словами, обмеження, створені суглобами, не є незалежними, як того вимагає формула Грюблера.

Подібна ситуація виникає для плоского п'ятистержневого зв'язку з двома степенями свободи на рис. 1.6 (б). Якщо два шарніри, з'єднані з землею, заблоковані під певним фіксованим кутом, зв'язок із п'яти стрижнів має стати жорсткою структурою. Однак, якщо дві середні ланки мають однакову довжину і перекривають одна одну, як показано на рисунку 1.6 (б), ці ланки, що перекриваються, можуть вільно обертатися навколо двох перекриваючих – шарнірів. Звісно, довжина зв'язку з п'ятьма балками має відповідати певним специфікаціям, щоб така конфігурація взагалі була можливою.

Також зауважте, що якщо інша пара з'єднань зафіксована на місці, механізм дійсно стає жорсткою структурою, як і очікувалося.

Формула Грюблера забезпечує нижню межу ступенів свободи для випадків, подібних тим, що щойно описані.

Приклад 1.5. Робот Delta.

Робот Дельта на рисунку 1.7 складається з двох платформ – нижньої рухомої, верхньої нерухомої, з'єднаних трьома ногами.

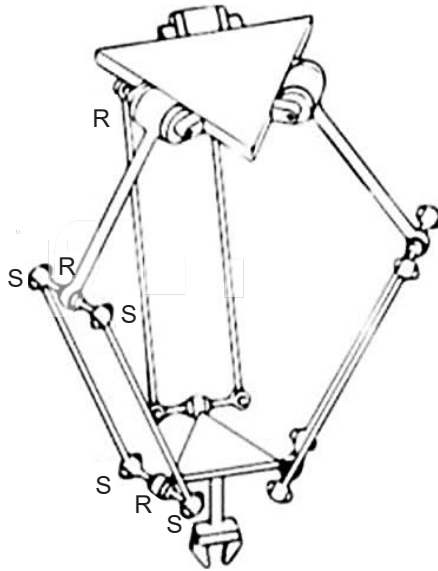


Рисунок 1.7 – Дельта-робот

Кожна нога містить замкнутий ланцюг паралелограма і складається з трьох поворотних суглобів, чотирьох сферичних суглобів і п'яти ланок. Додавши дві платформи, виходить $N=17$ ланок і $J=21$ шарнір (дев'ять поворотних і 12 сферичних). За формулою Грюблера:

$$dof = 6(17-1-21)+9(1)+12(3)=15.$$

Проте з цих 15 ступенів свободи лише три видно на кінцевому ефекторі рухомої платформи. Насправді конструкція ноги в формі паралелограма гарантує, що рухома платформа завжди залишається паралельною нерухомій, так що робот Delta діє як пристрій декартового позиціонування *хуз*.

Інші 12 внутрішніх ступенів свободи пояснюються крученням 12 ланок у паралелограмах (кожна з трьох сторін має чотири ланки у своєму паралелограмі) навколо їхніх довгих осей.

Приклад 1.6. Платформа Стюарта-Гофа.

Платформа Стюарта-Гофа з рис. 1.8 складається з двох платформ: нижня стаціонарна і розглядається як наземна, верхня рухома – з'єднана шістьма універсально-призматично-сферичними (УПС) опорами.

Загальна кількість ланок 14 ($N=14$). Є шість універсальних шарнірів (кожне з двома ступенями свободи, $f_i=2$), шість призматичних шарнірів (кожне з одним ступенем свободи, $f=1$), і шість

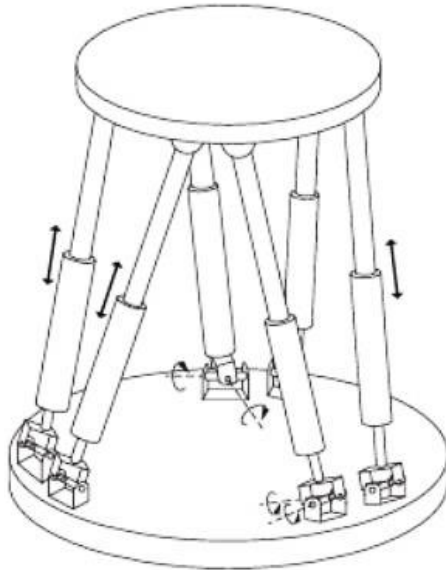


Рисунок 1.8 – Платформа Стюарта-Гофа

сферичних шарнірів (кожне з трьома ступенями свободи, $f=3$). Загальна кількість суглобів дорівнює 18. Підставляючи ці значення у формулу Грюблера з $m=6$, виходить:

$$dof = 6(14 - 1 - 18) + 6(1) + 6(2) + 6(3) = 6.$$

У деяких версіях платформи Стюарта – Гофа шість карданних шарнірів замінені сферичними шарнірами. За формулою Грюблера цей механізм має 12 ступенів свободи; заміна кожного карданного шарніра на сферичний шарнір забезпечує додатковий ступінь свободи в кожній нозі, що дозволяє обертатися при крученні навколо осі ноги. Зауважте, однак, що це торсійне обертання не впливає на рух мобільної платформи.

Платформа Stewart – Gough є популярним вибором для симуляторів кабіни автомобіля та літака, оскільки платформа рухається з повними шістьма ступенями свободи руху твердого тіла. З одного боку, паралельна конструкція означає, що кожна нога повинна витримувати лише частину ваги корисного вантажу. З іншого боку, ця структура також обмежує діапазон поступального та обертального руху платформи відносно діапазону руху кінцевого ефектора відкритого ланцюга з шістьма степенями свободи.

1.3 Завдання до практичної роботи (розв'язати вправи)

Практична вправа 1.1.

Експериментальний хірургічний маніпулятор, зображений на рисунку 1.9, розроблений у Національному університеті Сінгапуру, являє собою паралельний механізм із трьома однаковими ніжками, кожна з яких має призматичний шарнір і два універсальних шарніри (шарніри позначені для однієї з ніжок). Використовуйте формулу Грюблера для розрахунку кількості ступенів вільності цього механізму.

Практична вправа 1.2.

1. Три твердих тіла рухаються в просторі незалежно. Скільки ступенів свободи має ця система з трьох тіл?

2. Тепер ви обмежуєте їх так, щоб кожне тіло повинне контактувати принаймні з одним із двох інших тіл. (Тілам дозволено ковзати і котитися відносно одне одного, але вони повинні залишатися в контакті.) Скільки ступенів свободи має ця система з трьох тіл?

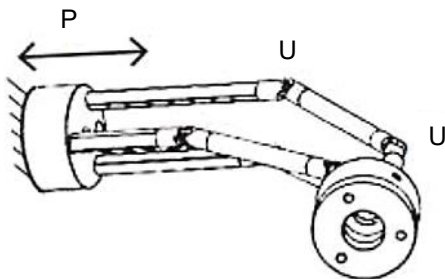


Рисунок 1.9 – Мініатюрний паралельний хірургічний маніпулятор із трьома ніжками PUU

Практична вправа 1.3.

На рисунку 1.10 зображено домкрат-ножиці. Коли ви обертаєте гвинт, домкрат піднімається і опускається. Механічна перевага, яку забезпечує механізм, дозволяє одній людині підняти автомобіль, щоб замінити шину.

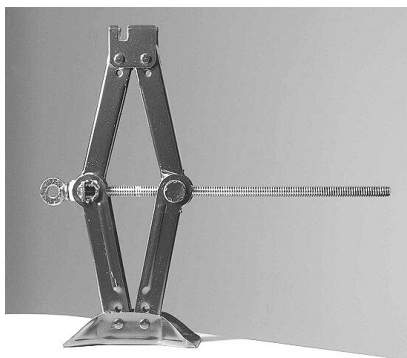


Рисунок 1.10 – Ножичний домкрат (також відомий як ножичний підйомник)

Подумайте, які тверді тіла і з'єднання повинні бути присутніми в домкраті. Можливо, ви не зможете побачити їх усі на зображенні. Використовуйте формулу Грюблера для розрахунку кількості ступенів свободи. Чи збігається ваша відповідь з тим, що ви знаєте про принцип роботи домкрата? Якщо ні, то можете пояснити чому?

Практична вправа 1.4.

На рисунку 1.11 зображено настільну лампу, яка рухається тільки в площині сторінки. Використовуйте формулу Грюблера для розрахунку кількості ступенів свободи.



Рисунок 1.11 – Настільна лампа, яка рухається тільки в площині сторінки

1.4 Питання для самоперевірки

1. Що таке ступінь свободи в механізмі?
2. Як його визначають для плоских і просторових механізмів?
3. Як використовується формула Грюблера для розрахунку ступенів свободи механізмів?
4. Які типи суглобів існують у механіці, і які ступені свободи вони забезпечують?
5. Опишіть особливості механізмів із замкнутим і відкритим ланцюгами. Наведіть приклади.

6. Як розрахувати ступені свободи для паралельного механізму, наприклад, платформи Стюарта – Гофа?
7. Чому формула Грюблера може не давати точний результат у випадку залежних обмежень?
8. Розрахуйте кількість ступенів свободи для ножичного домкрата та поясніть принцип його роботи.
9. Які особливості руху робота Delta і як його конструкція обмежує ступені свободи?

1.5 Перелік рекомендованих джерел

1. Булгаков В. М., Адамчук В. В., Черниш О. М., Березовий М. Г., Яременко В. В. Теорія механізмів і машин : підручник. Київ : Видавництво «Агроінженерія», 2020. 608 с.
2. Троханяк О. С. Теорія механізмів і машин : навчальний посібник. Київ : Видавництво КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 88 с.
3. Кірієнко О. А. Синтез і аналіз механізму приводу : навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2022. 88 с.
4. Міщенко А. А. Аналіз і синтез просторових механізмів : монографія. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2023. 230 с.
5. Скоропад О. І., Лисенко П. Г. Основи робототехніки : навчальний посібник. Львів : Видавництво ЛНУ, 2021. 342 с.
6. Ковальчук С. І., Орлов В. М. Паралельні маніпулятори: моделювання і оптимізація. Дніпро : ДНУ ім. О. Гончара, 2020. 256 с.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 2 _____

РОЗРАХУНОК ЗАДАЧ ПРОСТОРОВОЇ КОНФІГУРАЦІЇ: ТОПОЛОГІЇ ТА ПРЕДСТАВЛЕННЯ ТОПОЛОГІЇ КОНФІГУРАЦІЙНОГО ПРОСТОРУ

Метою практичної роботи є набуття практичних навичок вирішення практичних задач з просторової конфігурації: топології та представлення топологія конфігураційного простору.

Завдання практичної роботи:

1. Ознайомитись та вивчити теоретичні дані.
2. Ознайомитись з прикладами вирішення практичних завдань.
3. Вирішити вправи.

2.1 Теоретичні дані

Досі ми зосереджувалися на одному важливому аспекті С-простору робота – його розмірності, або кількості ступенів свободи. Однак важлива і форма приміщення.

Розглянемо точку, що рухається по поверхні кулі. С-простір точки є двовимірним, оскільки конфігурація може бути описана двома координатами, широтою та довготою. Як інший приклад, точка, що рухається на площині, також має двовимірний С-простір із координатами (x, y) . Хоча і площина, і поверхня сфери є двовимірними, очевидно, що вони не мають однакової форми – площина простягається нескінченно, а сфера огинається.

На відміну від площини, більша сфера має таку саму форму, що й оригінальна сфера, тобто обертається таким самим чином. Відрізняється тільки його розмір. Щодо цього, американський футбольний м'яч овальної форми також обгортається подібно до

сфери. Єдина відмінність між футбольним м'ячем і сферою полягає в тому, що м'яч розтягнутий в одному напрямку.

Ідея про те, що двовимірні поверхні малої сфери, великої сфери та футбольного м'яча мають однакову форму, яка відрізняється від форми площини, виражається топологією поверхонь. Два простори є топологічно еквівалентними, якщо один з них можна безперервно деформувати в інший без розрізання чи склеювання. Сферу можна деформувати у футбольний м'яч, просто розтягнути, без розрізання чи склеювання, тому ці два простори топологічно еквівалентні. Однак ви не можете перетворити сферу на площину, не розрізавши її, тому сфера і площина не є топологічно еквівалентними.

Топологічно відмінні одновимірні простори включають коло, лінію та замкнутий інтервал прямої. Математично коло записується як S або S^1 , одновимірна «сфера». Рядок можна записати як E або E^1 , що вказує на одновимірний евклідів (або «плоский») простір. Оскільки точка в E^1 зазвичай представлена дійсним числом (після вибору початку та масштабу довжини), її часто записують як R або R^1 . Замкнутий інтервал прямої, який містить її кінці, можна записати $[a, b] R^1$. (Відкритий інтервал (a, b) не включає кінцеві точки a і b і є топологічно еквівалентним прямій, оскільки відкритий інтервал можна розтягнути до прямої, як показано на рисунку 2.1. Замкнутий інтервал не є топологічно еквівалентним лінії, оскільки лінія не містить кінцевих точок).

Це відкрите півколо можна деформувати до дійсної лінії за допомогою зображеного відображення: починаючи з точки в центрі півкола, намалюйте промінь, який перетинає півколо, а потім лінію над півколом. Ці промені показують, що кожна точку півкола можна розтягнути рівно до однієї точки прямої, і навпаки. Таким чином, відкритий інтервал можна безперервно деформувати до прямої, тому відкритий інтервал і пряма є топологічно еквівалентними.



Рисунок 2.1 – Розімкнутий інтервал дійсної лінії, позначений (a, b) , та деформування до відкритого півкола

У вищих вимірах R_n є n -вимірним евклідовим простором, а S^n є n -вимірною поверхнею сфери в $(n + 1)$ – вимірному просторі. Наприклад, S^2 – двовимірна поверхня кулі в тривимірному просторі.

Зверніть увагу, що топологія простору є фундаментальною властивістю самого простору та не залежить від того, як ми вибираємо координати для представлення точок у просторі. Наприклад, щоб представити точку на колі, ми можемо посилатися на точку кутом θ від центра кола до точки відносно обраного нульового кута. Або ми можемо вибрати систему відліку з початком координат у центрі кола та представити точку двома координатами (x, y) із обмеженням $x^2 + y^2 = 1$. Незалежно від того, які координати ми вибрали, сам простір не змінюється.

Деякі C -простори можуть бути виражені як декартів добуток двох або більше просторів меншої розмірності; тобто точки в такому C -просторі можуть бути представлені як об'єднання представлень точок у просторах нижчих розмірів. Наприклад:

- C -простір твердого тіла на площині можна записати як $R^2 \times S^1$, оскільки конфігурація може бути представлена як конкатенація координат (x, y) , що представляють R^2 , і кута θ , що представляє S^1 ;

- C -простір руки робота PR можна записати як $R^1 \times S^1$. (Іноді ми будемо ігнорувати спільні межі, тобто межі руху суглобів, коли виражаємо топологію C -простору; зі спільними межами C -простір є декартовим добутком двох замкнутих інтервалів прямої);

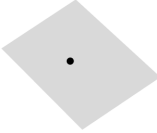

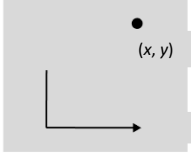
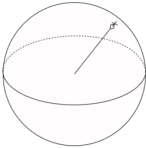

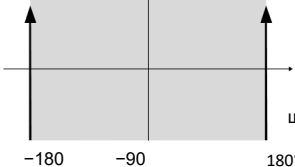
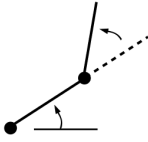

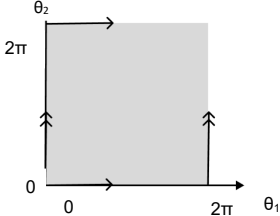
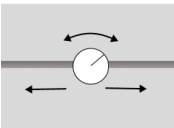

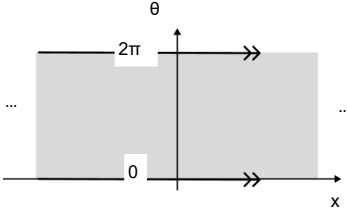
- C -простір руки робота $2R$ можна записати як $S^1 \times S^1 = T^2$, де T^n – n -вимірна поверхня тора в $(n + 1)$ – вимірному просторі. (див. рисунок 2.1) Зауважте, що $S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ (n копій S^1) дорівнює T^n , а не S^n ; наприклад, сфера S^2 топологічно не еквівалентна тору T^2 ;

- C -простір плоского твердого тіла (наприклад, шасі мобільного робота) з $2R$ рукою робота можна записати як $R^2 \times S^1 \times T^2 = R^2 \times T^3$;

- коли ми підраховували ступені свободи твердого тіла в трьох вимірах, конфігурацію твердого тіла можна описати точкою в R^3 плюс точкою на двовимірній сфері S^2 плюс точкою на одній-вимірне коло S^1 , що дає загальний C -простір $R^3 \times S^2 \times S^1$.

У таблиці 2.1 представлено чотири топологічно різних двовимірних C -простори та приклад координатних представлень.

Таблиця 2.1 – Двовимірні С-простори та їх координатні представлення

Система	Топологія	Зразкове уявлення
 <p>Точка на площині E</p>	 <p>E^2</p>	 <p>R^2</p>
 <p>Сферичний маятник S</p>	 <p>S^2</p>	<p>довгота 90°</p>  <p>широта</p> <p>$[-180^\circ, 180^\circ] \times [-90^\circ, 90^\circ]$</p>
 <p>Рука робота $2R$</p>	 <p>$T^2 = S^1 \times S^1$</p>	 <p>$[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$</p>
 <p>Поворотний пере-сувний регулятор</p>	 <p>$E^1 \times S^1$</p>	 <p>$R^1 \times [0, 2\pi]$</p>

У представленні сфери за широтою та довготою широти -90° і 90° відповідають одній точці (Південний полюс і Північний полюс відповідно), а параметр довготи обертається на 180° і -180° ; краю зі стрілками склеюються. Подібним чином, координатні представлення тора та циліндра обертаються навколо країв, позначених відповідними стрілками.

Представлення простору конфігурації. Для виконання обчислень ми повинні мати числове представлення простору, що складається з набору дійсних чисел. Ми знайомі з цією ідеєю з лінійної алгебри – вектор є природним способом представлення точки в евклідовому просторі. Важливо мати на увазі, що представлення простору передбачає вибір, і тому воно не є таким фундаментальним, як топологія простору, яка не залежить від представлення.

Наприклад, той самий пункт в тривимірному просторі може мати різні представлення координат залежно від вибору системи відліку (початок і напрямки координатних, хоча природним є вибір системи відліку та масштабу довжини та використання вектора для представлення точок у евклідовому просторі, представлення точки на викривленому просторі, такому як сфера, менш очевидно. Одним із рішень для сфери є використання координат широти та довготи. Вибір з n координат або параметрів для представлення n -вимірного простору називається явною параметризацією простору. Така явна параметризація дійсна для певного діапазону параметрів (наприклад, $[-90^\circ, 90^\circ]$ для широти та $[-180^\circ, 180^\circ]$ для довготи сфери, де на Землі від'ємні значення відповідають «південь» і «захід» відповідно).

Відображення широти й довготи сфери є незадовільним, якщо ви йдете поблизу Північного полюса (де широта дорівнює 90°) або Південного полюса (де широта дорівнює -90°), де дуже маленький крок може призвести до великого, зміни координат. Північний і Південний полюси є сингулярностями представлення, а існування сингулярностей є результатом того факту, що сфера не має такої ж топології, як площина, тобто простір двох дійсних чисел, які ми вибрали для представлення сфери (широта і довгота). Розташування цих сингулярностей не має нічого спільного з самою сферою, яка всюди виглядає однаково, і все пов'язано з обраним її зображенням.

Особливості параметризації є особливо проблематичними при представленні швидкостей як швидкості зміни координат у часі, оскільки ці представлення можуть прагнути до нескінченності поблизу сингулярностей, навіть якщо точка на сфері рухається з постійною швидкістю $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (а саме такою була б швидкість, якби ви представили точку у вигляді (x, y, z)).

Якщо ви можете припустити, що конфігурація ніколи не наближається до сингулярності подання, ви можете ігнорувати цю проблему. Якщо ви не можете зробити це припущення, є два способи подолати проблему.

Використовуйте більше ніж одну координатну діаграму в просторі, де кожна координатна карта є явною параметризацією, що охоплює лише частину простору, так що в кожній діаграмі немає сингулярності. Коли представлення конфігурації наближається до сингулярності на одній карті, наприклад, Північного чи Південного полюсів, ви просто перемикаєтесь на іншу діаграму, де Північний і Південний полюси далекі від сингулярностей.

Якщо ми визначимо набір вільних від сингулярності координатних карт, які накладаються одна на одну та охоплюють увесь простір, то кажуть, що ці карти утворюють атлас космосу, подібно до того, як атлас Землі складається з кількох карт, які разом покривають Землю. Перевагою використання атласу координатних карт є те, що для представлення завжди використовується мінімум кількість чисел. Недоліком є додаткова бухгалтерія, необхідна для перемикання представлень між картами координат, щоб уникнути сингулярностей. (Зверніть увагу, що евклідові простори можуть бути покриті однією координатною картою без сингулярностей.)

Використовуйте неявне представлення замість явної параметризації. Неявне представлення розглядає n -вимірний простір як вбудований у евклідов простір з більш ніж n вимірами, так само як двовимірну одиничну сферу можна розглядати як поверхню, вбудовану в тривимірний евклідов простір. Неявне представлення використовує координати простору з більшою вимірністю (наприклад, (x, y, z) у тривимірному просторі), але накладає на ці координати обмеження, які зменшують кількість ступенів свободи (наприклад, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ для одиничної сфери).

Недоліком цього підходу є те, що представлення має більше чисел, ніж кількість ступенів свободи. Перевага полягає в тому, що в представленні немає сингулярностей – точка, що плавно рухається навколо сфери, представлена плавно змінюваними (x, y, z) , навіть на північному та південному полюсах. Єдине представлення використовується для всієї сфери; декілька карт координат не потрібні.

Ще одна перевага полягає в тому, що, хоча може бути дуже важко побудувати явну параметризацію, або атлас, для механізму замкнутого ланцюга, легко знайти неявне представлення: набір усіх спільних координат, що підлягають рівнянням замикання циклу, які визначають замкнуті цикли.

Ми будемо використовувати неявні представлення. Зокрема, ми використовуємо дев'ять чисел із шістьма обмеженнями, щоб представити три свободи орієнтації твердого тіла в просторі. Це називається матрицею обертання. На додаток до відсутності сингулярності (на відміну від представлень із трьома параметрами, таких як кут стортання-крок-поворот та кути), представлення матриці обертання дозволяє нам використовувати лінійну алгебру для виконання таких обчислень, як обертання твердого тіла або зміна системи відліку в якому виражається орієнтація твердого тіла.

Таким чином, неевклідова форма багатьох С-просторів мотивує наше використання неявних представлень С-простору.

Конфігурація та обмеження швидкості. Легше отримати неявне представлення, ніж явну параметризацію. Наприклад, розглянемо плоский чотиристержневий зв'язок на рис. 2.2, який має один ступінь свободи.

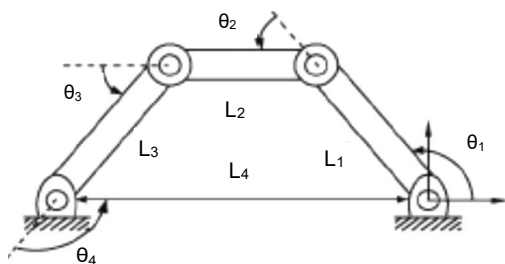


Рисунок 2.2 – Зчіпка з чотирма балками

Той факт, що чотири ланки завжди утворюють замкнутий цикл, можна виразити наступними трьома рівняннями (2.1–2.3):

$$L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \dots + L_4 \cos(\theta_1 + \dots + \theta_4) = 0, \quad (2.1)$$

$$L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \dots + L_4 \sin(\theta_1 + \dots + \theta_4) = 0, \quad (2.2)$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 2\pi = 0. \quad (2.3)$$

Ці рівняння отримані, якщо розглянути зв'язок із чотирма стрижнями як послідовний ланцюг із чотирма поворотними шарнірами, у яких (1) кінчик ланки L_4 завжди збігається з початком і (2) орієнтація ланки L_4 завжди горизонтальна.

Ці рівняння іноді називають рівняннями замикання циклу. Для зв'язку з чотирма стовпчиками вони задані набором із трьох рівнянь із чотирма невідомими. Набір усіх рішень утворює одновимірну криву в чотиривимірному суглобовому просторі та становить S -простір.

Коли вектори використовуються в обчисленнях лінійної алгебри, вони розглядаються як вектори-стовпці, наприклад, $p = [1 \ 2 \ 3]^T$. Проте коли обчислення не є немінучим, ми часто думаємо про вектор просто як про впорядкований список змінних, наприклад, $p = (1, 2, 3)$.

Таким чином, для звичайних роботів, що містять один або більше замкнутих циклів, простір конфігурації може бути неявно представлений вектором-стовпцем $\theta = [\theta_1 \ \dots \ \theta_n]^T \in R^n$ та рівняннями замикання циклу у вигляді:

$$g(\theta) = \begin{bmatrix} g_1(\theta_1, \dots, \theta_n) \\ \vdots \\ g_k(\theta_1, \dots, \theta_n) \end{bmatrix} = 0, \quad (2.4)$$

набір з k незалежних рівнянь, де $k \leq n$. Такі обмеження відомі як **голономні обмеження**, які зменшують розмірність S -простору. S -простір можна розглядати як поверхню розмірності $n - k$ (припускаючи, що всі обмеження незалежні), вкладену в R^n .

Припустимо, що замкнутий ланцюговий робот із рівняннями замикання циклу $g(\theta) = 0$, $g: R^n \rightarrow R^k$ рухається за часовою

траєкторією $\theta(t)$. Диференціюючи обидві частини $g(\theta(t)) = 0$ по t , отримуємо:

$$\frac{d}{dt} g(\theta(t)) = 0;$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1}(\theta) \dot{\theta}_1 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial \theta_n}(\theta) \dot{\theta}_n \\ \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial \theta_1}(\theta) \dot{\theta}_1 + \dots + \frac{\partial g_k}{\partial \theta_n}(\theta) \dot{\theta}_n \end{bmatrix} = 0.$$

Це можна виразити у вигляді матриці, що множить вектор-стовпець $\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \dots \dot{\theta}_n \end{bmatrix}^T$:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1}(\theta) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_n}(\theta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial \theta_1}(\theta) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial \theta_n}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix},$$

яку ми можемо записати як:

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta) \dot{\theta} = 0. \quad (2.5)$$

Тут вектор спільної швидкості $\dot{\theta}$, позначає похідну θ_i за часом t , $\partial g(\theta) / \partial \theta \in R^{k \times n}$, $\theta, \dot{\theta} \in R^n$. Обмеження (2.5) можна записати:

$$A(\theta) \dot{\theta} = 0, \quad (2.6)$$

де $A(\theta) \in R^{k \times n}$. Обмеження швидкості такої форми називаються **обмеженнями Пфаффа**.

Для випадку $A(\theta) = dg(\theta)/d\theta$ можна розглядати $g(\theta)$ як «інтеграл» $A(\theta)$; з цієї причини голономні обмеження у вигляді $g(\theta) = 0$ також називаються **інтегрованими обмеженнями** – обмеження швидкості, які вони означають, можуть бути інтегровані, щоб дати еквівалентні конфігураційні обмеження.

Тепер ми розглянемо інший клас обмежень Пфаффа, який принципово відрізняється від голономного типу. Щоб проілюструвати це на конкретному прикладі, розглянемо вертикальну монету радіуса r , яка котиться по площині, як показано на рис. 2.3. Конфігурація монети визначається точкою контакту (x, y) на площині, кутом повороту φ і кутом повороту θ . Таким чином, S -простір монети дорівнює $R^2 \times T^2$, де T^2 є двовимірним тором, параметризованим кутами φ і θ . Цей S -простір є чотиривимірним.

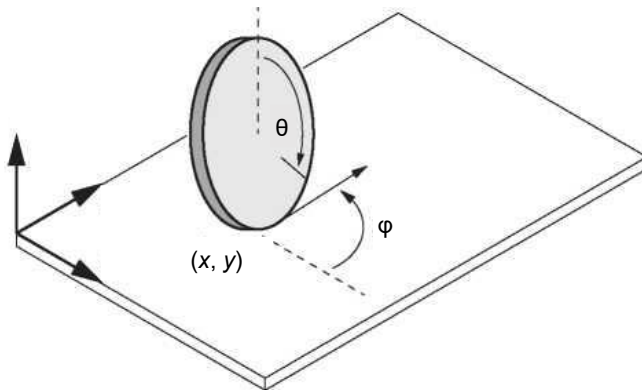


Рисунок 2.3 – Монета котиться по площині без ковзання

Тепер ми виразимо в математичній формі той факт, що монета котиться без ковзання. Монета завжди повинна котитися в напрямку, зазначеному $(\cos \varphi, \sin \varphi)$, зі швидкістю вперед $r\dot{\theta}$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = r\dot{\theta} \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Збирання чотирьох координат S -простору в один вектор $q = [q_1 q_2 q_3 q_4]^T = [x y \varphi \theta]^T \in R^2 \times T^2$, наведене вище обмеження кочення без ковзання можна виразити у формі:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -r \cos q^3 \\ 0 & 1 & 0 & -r \sin q^3 \end{bmatrix} \dot{q} = 0. \quad (2.8)$$

Це обмеження Пфаффа у вигляді $A(q)\dot{q} = 0$, $A(q) \in R^{2 \times 4}$.

Ці обмеження не є інтегрованими; тобто для $A(q)$, заданого в (2.8), не існує диференційованої функції $g: R^4 \rightarrow R^2$ такої, що $dg(q)/dq = A(q)$. Якби це було не так, тоді мав би існувати диференційований $g_1(q)$, який задовольняв би такі чотири рівності:

$$\frac{dg_1}{dq_1} = 1 \rightarrow g_1(q) = q_1 + h_1(q_2, q_3, q_4),$$

$$\frac{dg_1}{dq_2} = 0 \rightarrow g_1(q) = h_2(q_1, q_3, q_4),$$

$$\frac{dg_1}{dq_3} = 0 \rightarrow g_1(q) = h_3(q_1, q_2, q_4),$$

$$dg_1 / dq_4 = -r \cos q_3 \rightarrow g_1(q) = -rq_4 \cos q_3 + h_4(q_1, q_2, q_3),$$

для деякого h_i , $i = 1, \dots, 4$, диференційованого за кожною зі своїх змінних. Під час перевірки повинно бути ясно, що такого $g_i(q)$ не існує. Подібним чином можна показати, що $g_2(q)$ не існує, тому обмеження (2.8) є неінтегровним. Обмеження Пфаффа, яке є неінтегровним, називається **неголономним обмеженням**. Такі обмеження зменшують розмірність можливих швидкостей системи, але не зменшують розмірність досяжного C -простору. Монета, що котиться, може досягти будь-якої точки свого чотиривимірного C -простору, незважаючи на два обмеження на її швидкість.

У ряді контекстів робототехніки виникають неголономні обмеження, які включають збереження імпульсу та кочення без ковзання, наприклад, кінематика колісного транспортного засобу та кінематика контакту захоплення.

Простір завдань і робоча область. Тепер ми представимо ще два поняття, пов'язані з конфігурацією робота: простір завдань і робочий простір. Обидва стосуються конфігурації кінцевого ефектора робота, а не конфігурації всього робота.

Простір завдань – це простір, у якому завдання робота можуть бути природно виражені. Наприклад, якщо завдання робота полягає в тому, щоб малювати ручкою на аркуші паперу, простір завдання буде R^2 . Якщо завдання полягає в маніпулюванні твердим тілом,

природним представленням простору завдання є C -простір твердого тіла, що представляє положення та орієнтацію рами, прикріпленої до кінцевого ефектора робота. Це типове представлення простору завдань. Рішення про те, як визначити простір завдань, залежить від завдання, незалежно від робота.

Робочий **простір** – це специфікація конфігурацій, які може досягати кінцевий виконавець робота. Визначення робочого простору в основному залежить від структури робота, незалежно від завдання.

І простір завдань, і робочий простір передбачають вибір користувача; зокрема, користувач може вирішити, що деякі свободи кінцевого ефектора (наприклад, його орієнтація) не потрібно представляти.

Простір завдань і робочий простір відрізняються від C -простору робота. Точка в просторі завдань або робочому просторі може бути досягнута кількома конфігураціями робота, тобто ця точка не є повною специфікацією конфігурації робота. Наприклад, для робота з відкритим ланцюгом із сімома шарнірами положення шести ступенів свободи та орієнтація його кінцевого ефектора не повністю визначає конфігурацію робота.

Деякі точки в області завдань можуть бути взагалі недоступні для робота, наприклад деякі точки на дошці. Однак за визначенням усі точки в робочому просторі доступні принаймні одній конфігурації робота.

Два механізми з різними C -просторами можуть мати однакову робочу область. Наприклад, вважаючи кінцевим ефектором декартову вершину робота (наприклад, місце розташування графічного пера) і ігноруючи орієнтації, плоский $2R$ відкритий ланцюг із ланками однакової довжини три (рис. 2.4 (а)) і плоский відкритий ланцюг $3R$ із ланками однакової довжини два (рис. 2.4 (б)) мають однакову робочу область, незважаючи на різні C -простори.

Два механізми з однаковим C -простором також можуть мати різні робочі області. Наприклад, приймаючи кінцевий ефект як декартову вершину робота та ігноруючи орієнтації, $2R$ відкритий ланцюг на рис. 2.4 (а) має плоский диск як робочий простір, тоді як $2R$ відкритий ланцюг на рис. 2.4 (в) має поверхню сфери як її робочий простір.

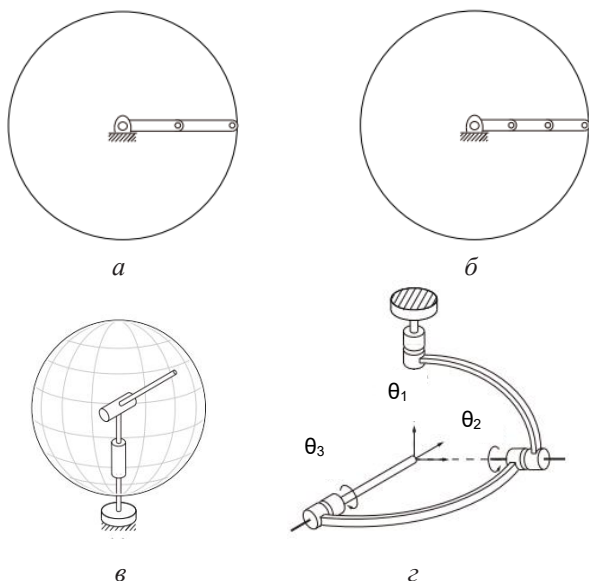


Рисунок 2.4 – Приклади робочих просторів для різних робіт:
 а – планарний 2R відкритий ланцюг; б – плоский відкритий ланцюг 3R;
 в – сферичний 2R відкритий ланцюг; г – механізм орієнтування 3R

Прикріпивши координатну рамку до наконечника інструмента «зап'ясткового» механізму 3R з відкритим ланцюгом на рис. 2.4 (г), ми бачимо, що рама може досягати будь-якої орієнтації шляхом обертання шарнірів, але декартове положення наконечника завжди фіксоване. Це можна побачити, зауваживши, що три осі суглобів завжди перетинаються на кінчику. Для цього механізму ми, ймовірно, визначили б робочий простір як простір орієнтацій кадру з трьома степенями свободи, $S^2 \times S^1$, який відрізняється від S -простору T^3 . Простір завдань залежить від завдання; якщо робота полягає в тому, щоб навести лазерний покажчик, то обертання навколо осі лазерного променя не має значення, а простір завдання буде S^2 , набором напрямків, у яких може вказувати лазер.

2.2 Приклади вирішення практичних завдань

Приклад 2.1. Робот SCARA, зображений на рис. 2.5, є відкритим ланцюгом RRRP, який широко використовується для виконання завдань підбору та розміщення на столі. Конфігурація кінцевого ефектора повністю описується чотирма параметрами (x, y, z, φ) , де (x, y, z) позначає декартове положення центральної точки кінцевого ефектора, а φ позначає орієнтацію кінцевого ефектора в площині x - y . Його простір завдань зазвичай визначається як $R^3 \times S^1$, а його робочий простір зазвичай визначається як досяжні точки в (x, y, z) декартовому просторі, оскільки всі орієнтації $\varphi \in S^1$ можуть бути досягнуті в усіх досяжних точках.

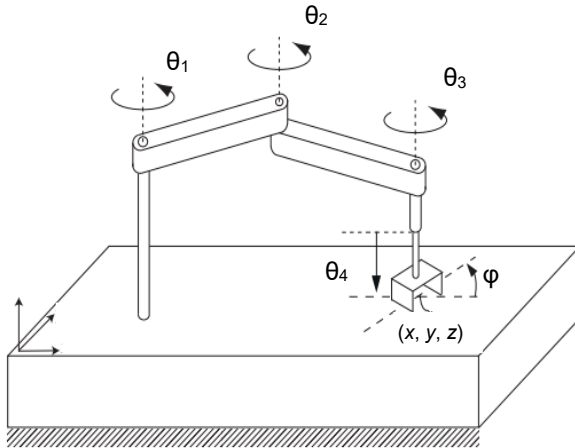


Рисунок 2.5 – Робот SCARA

Приклад 2.2. Стандартний промисловий маніпулятор 6R можна адаптувати для фарбування розпиленням, як показано на рис. 2.6.

Прикріплена насадка для розпилення фарби до наконечника можна розглядати як кінцевий ефект. Що важливо для завдання, так це декартове положення розпилювальної форсунки разом із напрямком, у якому вона спрямована; обертання навколо осі сопла

(яка вказує на напрямок розпилення фарби) не має значення. Таким чином, конфігурація сопла може бути описана п'ятьма координатами: (x, y, z) для декартового положення сопла та сферичними координатами (θ, φ) щоб описати напрямок, у якому вказує сопло. Простір завдань можна записати як $R^3 \times S^2$. Робочим простором можуть бути досяжні точки в $R^3 \times S^2$, або, для спрощення візуалізації, користувач може визначити робочий простір як підмножину R^3 , що відповідає досяжним декартовим положенням сопла.

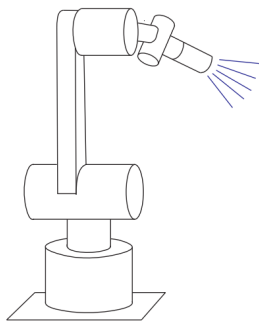


Рисунок 2.6 – Робот для фарбування

2.3 Завдання до практичної роботи (розв'язати вправи)

Практична вправа 2.1. Моноцикл керований рухом на жорсткій балці, як показано на рисунку 2.7. Припустимо, що колесо завжди торкається балки без ковзання, дайте відповідь на наступні запитання в термінах R, S, T і I (одновимірний замкнутий інтервал):

а) дайте математичний опис S -простору моноколеса, коли він залишається у вертикальному положенні та змушений рухатися у 2-вимірній площині сторінки;

б) дайте математичний опис S -простору моноколеса, коли він залишається у вертикальному положенні, рухається в 3-вимірному просторі, а промінь має ненульову ширину.



Рисунок 2.7 – Моноцикл на жорсткій балці

Практична вправа 2.2. Поясніть, чому $S^1 \times S^1 = T^2$, а не S^2 . Іншими словами, поясніть, чому C -простір сферичного маятника (S^2) не є топологічно еквівалентним C -простору $2R$ -робота (T^2), навіть якщо конфігурації обох типів описуються двома кутами. Якщо ви вважаєте, що C -простір $2R$ -робота топологічно еквівалентний (гомеоморфний) S^2 , запропонуйте неперервне відображення між точками на сфері та незалежними кутами з'єднання $2R$ -робота.

Практична вправа 2.3. Припустімо, що ваша рука має 7 ступенів свободи, і ви змушуєте свою руку бути у фіксованій конфігурації (наприклад, ваша долоня притиснута до столу).

1. Що таке явне представлення конфігурації руки?
2. Що таке неявне представлення?
3. Як виглядає набір можливих конфігурацій у 7-вимірному конфігураційному просторі необмеженої руки?

Практична вправа 2.4. Уявіть C -простір, описаний як коло в площині (x, y) радіуса 2 з центром у $(3,0)$. Що є неявним представленням цього одновимірного C -простору? Якщо ви вирішили параметризувати одновимірний C -простір за допомогою єдиного параметра θ , задайте відображення від θ до (x, y) .

Практична вправа 2.5 Розгляньте двовимірний квадрокоптер і стрижень, показані на рис. 2.8. Стрижень прикріплений до квадрокоптера поворотним шарніром, і вам дається завдання збалансувати стержень у вертикальному положенні (літаюча версія класичної задачі про маятник візка). Припустимо, що конфігурація центру квадрокоптера описується як (x_q, y_q, θ_q) , а конфігурація центру стрижня описується як (x_r, y_r, θ_r) , де θ_q і θ_r вимірюються відносно світової осі x . Довжина штанги $2l$, а висота і ширина корпусу квадрокоптера $2h$ і $2w$ відповідно.

1. Розв'яжіть конфігураційні обмеження, які забезпечують з'єднання штанги та квадрокоптера.

2. Виразіть це як обмеження Пфаффа, де $q = [x_q y_q \theta_q x_r y_r \theta_r]^T$.

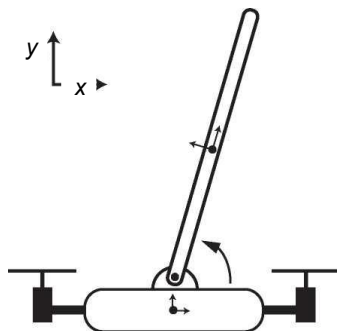


Рисунок 2.8 – 2D-квадрокоптер, який балансує на стрижні

Практична вправа 2.6. Розглянемо паралельного робота SCARA, зображеного на рис. 2.9. Робот управляється двома обертовими двигунами, розташованими в основі, і одним обертовим і одним призматичним двигуном на кінцевому ефекторі. Припустимо, що кожна ланка паралельного механізму має довжину 1 м, призматичний шарнір має максимальний хід 1 м, а відстань поділу базових двигунів становить 0,5 м.

Припустимо, що між зв'язками немає зіткнень і що y -координата кінцевого ефектора має бути більшою за нуль.

1. Намалюйте робочий простір кінцевого ефектора.

2. Які переваги та недоліки створення паралельного, а не послідовного робота SCARA?

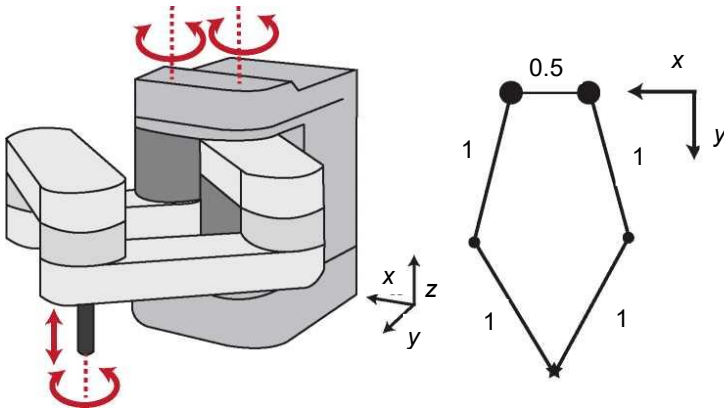


Рисунок 2.9 – Паралельний робот SCARA та вигляд зверху скелета

2.4 Питання для самоперевірки

1. Що таке C -простір (простір конфігурації) і як його визначають?
2. Як визначають топологічну еквівалентність двох просторів? Наведіть приклади.
3. Чому сфера і площина не є топологічно еквівалентними?
4. Яким чином C -простір твердого тіла на площині можна описати через декартовий добуток?
5. Чому $S^1 \times S^1 = T^2$, але не S^2 ? Розкрийте відмінності між топологією тора та сфери.
6. Яка різниця між явним і неявним представленням простору конфігурації? Наведіть приклади.
7. Що таке неголомомні обмеження? Як вони впливають на рух системи?
8. Поясніть, чому параметризація сфери за допомогою широти та довготи має сингулярності, і як їх можна уникнути?
9. Що таке простір завдань і як він відрізняється від робочого простору робота?

10. Як представлений простір конфігурації механізму $2R$? Що відрізняє його робочий простір?
11. Що означає термін «атлас координатних карт»? У яких випадках він використовується?
12. Поясніть принцип роботи неголономного обмеження на прикладі монети, що котиться по площині.
13. Як виглядає простір завдань для робота SCARA? Що входить до його робочого простору?
14. Опишіть конфігураційні обмеження для 2D-квадрокоптера, що балансує на стрижні.
15. Які переваги і недоліки мають паралельні роботи SCARA у порівнянні з послідовними?

2.5 Перелік рекомендованих джерел

1. Булгаков В. М., Адамчук В. В., Черниш О. М., Березовий М. Г., Яременко В. В. Теорія механізмів і машин : підручник. Київ : Видавництво «Агроінженерія», 2020. 608 с.
2. Троханяк О. С. Теорія механізмів і машин : навчальний посібник. Київ : Видавництво КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 88 с.
3. Кірієнко О. А. Синтез і аналіз механізму приводу : навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2022. 88 с.
4. Міщенко А. А. Аналіз і синтез просторових механізмів : монографія. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2023. 230 с.
5. Скоропад О. І., Лисенко П. Г. Основи робототехніки : навчальний посібник. Львів : Видавництво ЛНУ, 2021. 342 с.
6. Ковальчук С. І., Орлов В. М. Паралельні маніпулятори: моделювання і оптимізація. Дніпро : ДНУ ім. О. Гончара, 2020. 256 с.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 3 _____

АНАЛІЗ РУХІВ ТВЕРДОГО ТІЛА

Метою практичної роботи є набуття практичних навичок аналізу рухів твердого тіла.

Завдання практичної роботи:

1. Ознайомитись та вивчити теоретичні дані.
2. Ознайомитись з прикладами вирішення практичних завдань.
3. Вирішити вправи.

3.1 Теоретичні дані

Конфігурація та орієнтація твердого тіла.

Конфігурація твердого тіла в просторі характеризується:

- **положенням**: координати точки (x, y, z) , що описують місцезнаходження об'єкта в просторі;
- **орієнтацією**: описують обертання об'єкта відносно початкової системи координат.

Для визначення орієнтації використовуються:

Матриця обертання (RR): ортогональна матриця 3×3 , елементи якої представляють косинуси кутів між осями локальної та глобальної рамок.

Властивості:

$$R^T R = I \quad q, \quad (3.1)$$

де I – одинична матриця.

$$\det(R) = 1.$$

Кут Ейлера: три кути, що описують послідовні обертання навколо осей.

Експоненціальні координати обертання (so(3)): використовуються для компактного представлення малого обертання через вектор осі та кута.

Кватерніони: альтернативний метод для уникнення сингулярностей матриць обертання.

Гомогенна матриця трансформації.

Гомогенна матриця (ТТ) об'єднує орієнтацію та положення. Вона має вигляд:

$$T = \begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

де R – матриця обертання (3×3),

p – вектор зміщення (3×1),

нижній рядок – допоміжний для однорідності.

Перетворення координат:

Перехід від однієї рамки до іншої виконується за допомогою множення матриці трансформації:

$$p' = T \cdot p = T, \quad (3.3)$$

де p – координати точки в локальній рамці,

p' – у глобальній.

Гвинтовий рух.

Гвинтовий рух поєднує:

1) обертання навколо певної осі;

2) паралельне переміщення вздовж тієї ж осі.

Він описується:

– **віссю гвинта (S):** визначає напрямок і положення обертання;

– **кроком гвинта (h):** лінійне переміщення на один радіан

обертання.

Експоненціальна координата для руху (se(3)):

Рух у просторі можна описати матрицею:

$$e^{[\hat{S}]^\theta}, \quad (3.4)$$

де $[\hat{S}]$ – матриця гвинта,

θ – кут обертання.

Матриця гвинта:

$$[\hat{S}] = \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

де $[\omega]$ – матриця кутової швидкості,

v – лінійна швидкість.

Скручування та сили.

Скручування (V):

Скручування описує рух у просторі і поєднує:

v – лінійну швидкість,

w – кутову швидкість.

Запис у вигляді вектора:

$$V = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}. \quad (3.5)$$

Гайковий ключ (F):

Гайковий ключ описує сили і моменти:

f – вектор сили,

τ – момент сили.

Запис у вигляді вектора:

$$F = \begin{bmatrix} \tau \\ f \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Скалярна потужність (P):

$$P = F^T V P. \quad (3.7)$$

Скалярна потужність залишається інваріантною для будь-якої системи координат.

Неголономні обмеження.

Неголономні обмеження виникають, коли система має обмеження, які неможливо виразити як інтеграли. Наприклад:

1. Монета, що котиться без ковзання.

2. Рух автомобіля зі збереженням напрямку коліс.

Для таких систем обмеження записуються у вигляді матриці:

$$A(q)\dot{q} = 0. \quad (3.8)$$

3.2 Практичні аспекти

Задача обертання.

Щоб вирівняти об'єкт відносно іншого, використовуються матриці обертання R_1, R_2, \dots . Їх знаходять через добутки відомих трансформацій.

Аналіз систем координат.

Трансформації між рамками виконуються через добуток гомогенних матриць. Наприклад:

$$T_{ac} = T_{ab} T_{bc}. \quad (3.9)$$

Рух уздовж гвинта.

Рух об'єкта описується як:

$$T = e^{[s]\theta} T_0, \quad (3.10)$$

де θ – параметр руху,

T_0 – початкова конфігурація.

3.3 Приклади вирішення практичних завдань

Приклад 3.1. Розгляньте сцену на рисунку 3.1 колишнього парку, захопленого роботами.

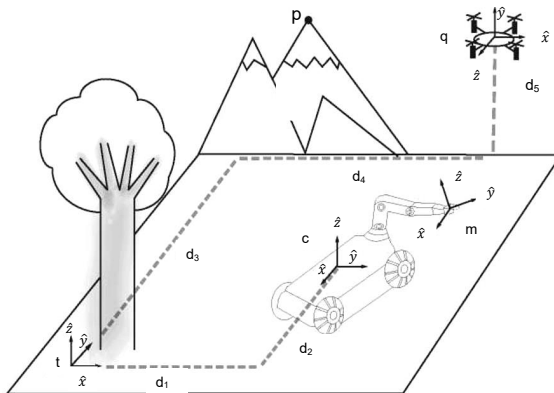


Рисунок 3.1 –
Дерево, мобільний
маніпулятор
і літаючий робот
у парку та відповідні
системи відліку

Каркаси показано прикріпленими до дерева t , шасі робота c , маніпулятора m і квадрокоптера q . Відстані, зображені на малюнку, дорівнюють $d_1 = 4$ м, $d_2 = 3$ м, $d_3 = 6$ м, $d_4 = 5$ м, $d_5 = 3$ м. Маніпулятор знаходиться в положенні $p_{cm} = (0, 2, 1)$ м відносно рами шасі (c), а (m) повернуто від (c) на 45 градусів навколо осі x_c .

1. Надайте матриці перетворення, що представляють раму квадрокоптера (q), раму шасі (c) та раму маніпулятора (m) у структурі дерева (t).

Розв'язок:

$$T_{tq} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_{tc} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_{tm} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Припустимо, що контролер положення для маніпулятора мобільного робота прив'язаний до рами шасі (c). У яке положення слід наказати перейти захвату, якщо ви хочете схопити квадрокоптер з неба?

Розв'язок:

$$p_{cq} = (-3, 1, 3).$$

3. Вам доручено перемістити мобільного робота так, щоб початок шасі знаходився прямо під квадрокоптером, а його рама була

вирівняна з рамою дерева. Припустимо, що контролер шасі мобільного робота приймає матриці перетворення в рамі шасі як вхідні дані. Яку трансформацію потрібно наказати виконати роботу?

Розв'язок:

$$p_{cc'} = (-3, 1, 0),$$

$$R_{cc'} = R_{ct} = R'_{tc}.$$

Приклад 3.2. Розглянемо паралельного робота SCARA, зображеного на рис. 3.2. Робот управляється двома обертовими двигунами, розташованими в основі, і одним обертовим і одним призматичним двигуном на кінцевому ефекторі. Припустимо, що кожна ланка паралельного механізму має довжину 1 м, призматичний шарнір має максимальний хід 1 м, а відстань поділу базових двигунів становить 0,5 м.

Припустимо, що між зв'язками немає зіткнень і що у-координата кінцевого ефектора має бути більшою за нуль.

1. Намалуйте робочий простір кінцевого ефектора.

Розв'язок:

Вигляд робочої області зверху показано заштрихованою областю на рисунку 3.3, яка є перетином двох кіл. Щоб обчислити площу

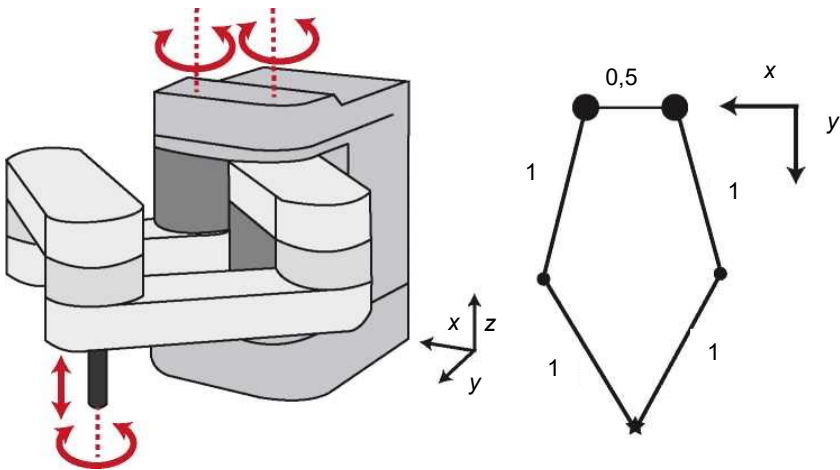


Рисунок 3.2 – Паралельний робот SCARA та вигляд зверху скелета

робочої області, складіть площу двох секторів кіл і відніміть площу трикутника (що утворюється, коли руки повністю витягнуті в положенні y), яка рахується двічі. Таким чином, об'єм робочої області – це 3D-екструзія цієї форми на сторінці на відстані досяжності призматичного з'єднання.

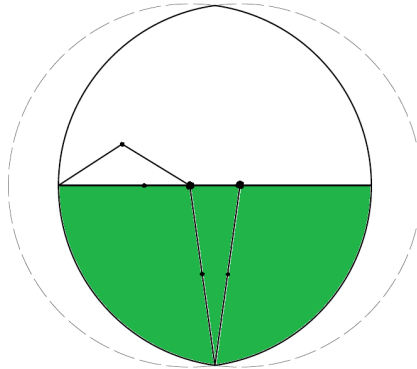


Рисунок 3.3 – Паралельне рішення для робочого простору робота SCARA

2. Які переваги та недоліки створення паралельного, а не послідовного робота SCARA?

Розв'язок:

Паралельна структура має перевагу в тому, що вона більш жорстка і має більшу масу двигуна, зосереджену в основі. Одним з недоліків є те, що паралельна SCARA має меншу робочу зону в порівнянні з аналогічним послідовним маніпулятором SCARA.

3.4 Завдання до практичної роботи (розв'язати вправи)

Практична вправа 3.1. Пересувний маніпулятор на рисунку 3.4 повинен орієнтувати свій захват, щоб захопити блок. Для подальшого розміщення блоку ми вирішили, що орієнтація захвату відносно

блоку, коли захват захоплює блок, повинна бути R_{eg} . Наше завдання полягає в тому, щоб визначити оператор обертання, який слід застосувати до захвату, щоб досягти такої орієнтації відносно блоку.

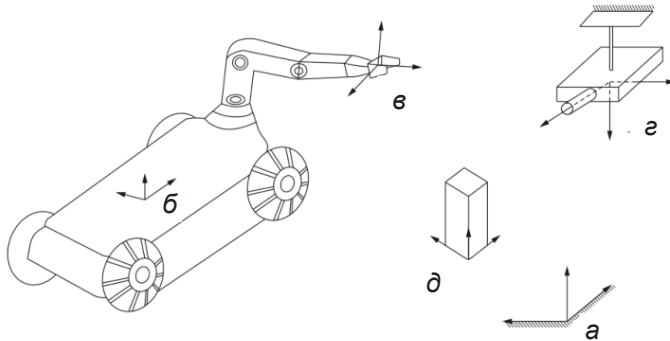


Рисунок 3.4 – Фіксована світова рамка (а), рама шасі мобільного робота (б), рама захопту (в), рамка камери RGBD (г) і рамка об'єкта (д)

На рисунку 3.4 показано фіксовану світову рамку (а), раму шасі мобільного робота (б), раму захоплення (в), рамку камери RGBD (кольорове бачення плюс глибина, як у Kinect) (г) і рамку об'єкта (д). Оскільки ми розмістили камеру у відомому місці в просторі, ми знаємо R_{ad} . Камера повідомляє конфігурацію (д) відносно (в), тому ми знаємо R_{de} . З процедури локалізації мобільного робота (наприклад, локалізація на основі зору або одометрії) ми знаємо R_{ab} . З передньої кінематики руки робота ми знаємо R_{bc} .

1. У термінах чотирьох відомих матриць обертання R_{ad} , R_{de} , R_{ab} і R_{bc} і використовуючи лише множення матриці та операцію транспонування, виразіть поточну орієнтацію захвату відносно блоку, R_{ec} .

2. Щоб належним чином вирівняти захват, ви можете застосувати до нього поворот R_1 , виражений через осі в рамці (в) захвату. Що таке R_1 з точки зору п'яти відомих матриць обертання (R_{ad} , R_{de} , R_{ab} , R_{bc} , R_{eg}), множення матриці та транспонування?

3. Те саме обертання можна було б записати R_2 через осі рами рухомої основи (б). Що таке R_2 ?

Практична вправа 3.2. Рис 3.5 показано гвинт, раму (b) та раму (s). Вісь x_b (b) розташована вздовж осі гвинта, а початок рамки (s) зміщено на 2 см уздовж осі y_b від рами (b). Вісь z_s вирівняно з x_b , а вісь x_s вирівняно з z_b .

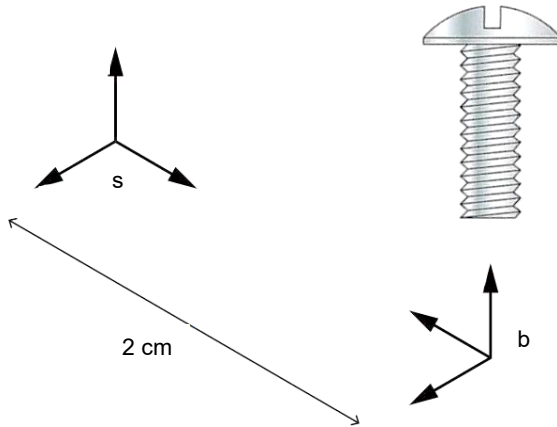


Рисунок 3.5 – Гвинт, рама b та рама s

Коли машинний гвинт входить у різьбовий отвір, він просувається лінійно на 4л мм за кожний повний оберт гвинта.

Зверніть увагу на напрямок різьби гвинта під час обертання машинного гвинта в отвір з різьбленням, який закручується викруткою, що обертається зі швидкістю 3 радіани за секунду, який круг гвинта виражається в (b), V_b ? Що таке вісь гвинта, виражена в (b), S_b ? Що таке V_s ? Що таке S_s ? Укажіть відповідні одиниці.

Практична вправа 3.3. Гайковий ключ F і крутка V представлені в (а) як F_a і V_a відповідно, а в (b) вони представлені як F_b і V_b . Без консультації з будь-яким іншим джерелом і використовуючи факти, що $(AB)^T = B^T A^T$, що ад'юнкт матриці перетворення T_{ab} можна використовувати для зміни кадру представлення скручування з (а) кадру на (b) кадру, і те, що скалярна потужність, створена (або розсіювана) застосуванням гайкового ключа F уздовж

повороту V , не залежить від системи відліку, показують, що $F_a = [Ad_{Tba}]^T F_b$. (Можливість отримати цей результат корисно для вашого розуміння.)

Практична вправа 3.4. На рисунку 3.6 зображено вісь гвинта в площині (y_c, z_c) під кутом 45° відносно осі y_c . (Вісь x_c спрямована за межі сторінки.) Вісь гвинта проходить через точку $(0, 3, 0)$.

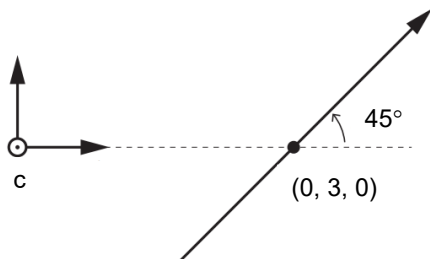


Рисунок 3.6 – Вісь гвинта в площині (y_c, z_c) під кутом 45° відносно осі y_c

1. Якщо крок гвинта $h = 10$ лінійних одиниць на радіан, чому дорівнює вісь гвинта S_c ? Переконайтеся, що ви також можете записати це у формі $se(3)$ $[S_c]$.

2. Використовуючи вашу відповідь на 1 питання, якщо швидкість обертання навколо осі гвинта $\theta = \sqrt{2}$ рад/с, чому дорівнює скручування V_c ?

3. Використовуючи вашу відповідь на 1 питання, якщо рамка спочатку в (c) обертається на $\theta = \pi/2$ навколо осі гвинта, даючи нову раму (c') , які експоненціальні координати описують конфігурацію (c') відносно (c) ?

4. Чому дорівнює T_{cc} , що відповідає руху в частині 3?

5. Тепер уявіть, що вісь на рисунку 3.6 представляє гайковий ключ: лінійна сила вздовж осі та момент відносно осі (згідно з правилом правої руки). Лінійна сила в напрямку осі дорівнює 20, а момент відносно осі дорівнює 10. Що таке гайковий ключ F_c ?

Практична вправа 3.5. Нехай $T_{sb} \in SE(3)$ представляє конфігурацію кадру (b) відносно (s). (Іноді ми пишемо це просто як T .) Якщо (b) рухається з часом, ви можете представити його швидкість як T_{sb} (або просто T), похідну за часом від T_{sb} . Ви повинні розглядати цю швидкість як поворот усього простору (до якого прикріплена рухома рамка). Але ми знаємо, що швидкість має бути представлена лише шістьма значеннями, а T_{sb} може мати 12 унікальних ненульових значень (верхні три рядки матриці 4×4 ; нижній рядок буде складатися з нулів, оскільки нижній рядок перетворення матриця завжди є константою $[0001]$).

Замість цього ми могли б помножити T_{sb} на T_{bs} , тобто $T_{sb}T_{bs} = TT^{-1} = T_{ss}$. Це домноження має ефект представлення швидкості в кадрі (s), позбавляючись від залежності від поточного кадру (b). Як ми називаємо величину TT^{-1} ? Скільки значень потрібно для однозначного визначення?

Ми також можемо попередньо помножити T_{sb} на T_{bs} , щоб отримати $T_{bs}T_{sb} = T^{-1}T = T_{bb}$. Це попереднє множення має ефект представлення швидкості в кадрі (b), позбавляючись від залежності від кадру (s). Що ми називаємо кількістю $T^{-1}T$?

Практична вправа 3.6. Вісь гвинта нульового кроку на рисунку 3.7, суміщена з Z_a , проходить через точку $(-2, 1, 0)$ у рамці (a). Чому дорівнює кручення V_a , якщо ми обертаємо гвинт навколо осі зі швидкістю $\theta = 5$ рад/с?

Практична вправа 3.7. Гайковий ключ F представлений у рамці (c) як F_c . Якщо $T_1 = T_{ab}$ є конфігурацією кадру (b) відносно кадру (a), а $T_2 = T_{ac}$ є конфігурацією кадру (c) відносно кадру (a), виразіть F_b у термінах T_1 , T_2 , F_c та будь-яких математичних операцій, які вам потрібні.

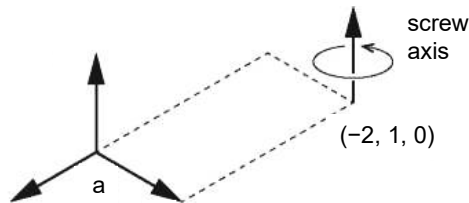


Рисунок 3.7 – Вісь гвинта з нульовим кроком

Практична вправа 3.8. Нехай орієнтація (b) відносно (a) дорівнює:

$$R_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

і точка p представлена в (a) як $p_a = (1, 2, 3)$. Що таке p_b ? (Укажіть числовий 3-вектор.)

Практична вправа 3.9. Розглянемо три кадри, (a), (b) і (c). Ви знаєте представлення цих кадрів у термінах інших, наприклад, T_{ab} і T_{bc} (і тому ви можете вивести T_{ac} та обернені до цих матриць). Надайте математичний вираз для V_a , повороту (вираженого в (a)), який вам потрібно було б дотримуватися протягом t секунд, щоб перемістити кадр (b) так, щоб він збігався з кадром (c). Або, якщо хочете, надайте вираз для $[V_a]$, представлення $\text{se}(3) V_a$. Ваша відповідь має бути символічною (без чисел) і використовувати t , будь-яку з потрібних вам матриць перетворення та будь-які математичні операції, які вам потрібні. Якщо це корисно, ви можете використати операцію $\text{vec}: \text{se}(3) \rightarrow R^6$, щоб отримати векторне представлення елемента $\text{se}(3)$, наприклад, $\text{vec}([V]) = V$.

Тренувальна вправа 3.10. На рисунку 3.8 зображено машинний гвинт. Коли він просувається в різьбовий отвір, він переміщується на 5 мм лінійно на кожен радіан обертання. Рамка (a) має вісь z_a вздовж осі гвинта, а вісь X_a поза сторінкою. Рамка (b) має початок у $p_a = (0, 3, -2)$ мм, і її орієнтація показана на малюнку (z_b поза сторінкою). Використовуйте мм як лінійну одиницю, а радіан як кутову.

1. Яка вісь гвинта S_a відповідає просуванню в різьбовий отвір? Задайте числовий 6-вектор.

2. Що таке гвинтова вісь S_b ? Задайте числовий 6-вектор.

3. Що таке $[S_b]$?

4. Від початкової конфігурації T_{ab} , показаної на малюнку, рама (b) слідує за гвинтом під кутом θ , закінчуючись у кінцевій конфігурації $T_{ab'}$. Якщо ми напишемо $T_{ab'} = TT_{ab}$, що таке T ? Виразіть це символічно (не пишійте числа), використовуючи будь-яке з S_a , S_b , θ і будь-які необхідні математичні операції.

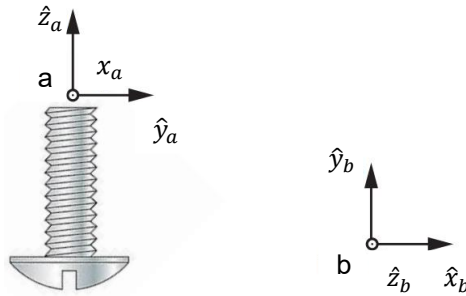


Рисунок 3.8 – Машинний гвинт. Зверніть увагу на напрямок ниток

5. Посилаючись на попереднє запитання, якщо замість цього написати $T_{ab'} = T_{ab}$, що дорівнює T ? Знову ж таки, виразіть це символічно (не пишiть цифри), використовуючи будь-який із S_a , S_b , θ і будь-які необхідні математичні операції.

Практична вправа 3.11. Розгляньте супутник і Землю, зображені на рисунку 3.9. Нехай $\omega_b = (0, 1, 1)$ – кутова швидкість супутника, виражена в системі відліку тіла супутника (b). Припустимо фіксовану рамку координат Землі (e) (геоцентричний погляд на Всесвіт, як у стародавніх греків).

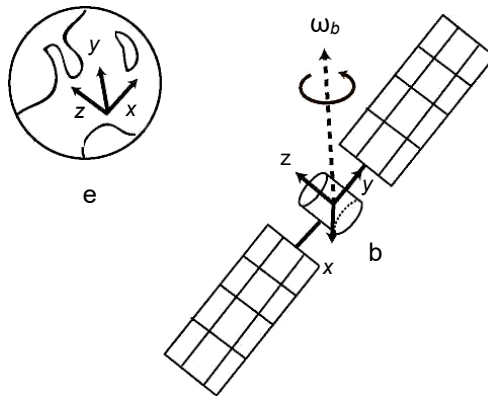


Рисунок 3.9 – Супутник обертається в просторі

1. Визначте швидкості координатної осі (b) (x_b, y_b і z_b), представлені в кадрі (b). Намалуйте вектори швидкості на малюнку вище, щоб підтвердити, що ваші рішення мають сенс.

2. Орієнтація кадру (b) еквівалентна кадру (e) після того, як його було повернуто на -90 градусів навколо осі z_e . Розв'яжіть для ω_e кутова швидкість супутника, представлена в (e). Намалуйте вектори швидкості на малюнку вище, щоб підтвердити, що ваше рішення має сенс.

3. Визначте R_{eb} , похідну за часом від орієнтації тіла, виражену в (e).

4. Дайте представлення $se(3)$ кутової швидкості як у Землі, так і в каркасі тіла.

Практична вправа 3.12. Знову розглянемо супутник і Землю, зображені на рисунку 3.9.

1. Якщо задана швидкість обертання $\omega = (0, 1, 1)$ замість цього була експоненціальною координатою для обертання, розв'яжіть представлення осі-кута та відповідну матрицю обертання.

2. Після деякого часу обертання та обертання навколо Землі відносна орієнтація.

$$R_{eb'} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Знайдіть подання осі-кута, яке описує обертання від початкової рамки тіла (b) до нової рамки тіла (b').

Практична вправа 3.13. Розгляньте сцену на рисунку 3.10 колись тихого парку, захопленого роботами.

Каркаси показано прикріпленими до дерева (t), шасі робота (c), маніпулятора (m) і квадрокоптера (q). Відстані, зображені на малюнку, дорівнюють $d_1 = 4$ м, $d_2 = 3$ м, $d_3 = 6$ м, $d_4 = 5$ м, $d_5 = 3$ м.

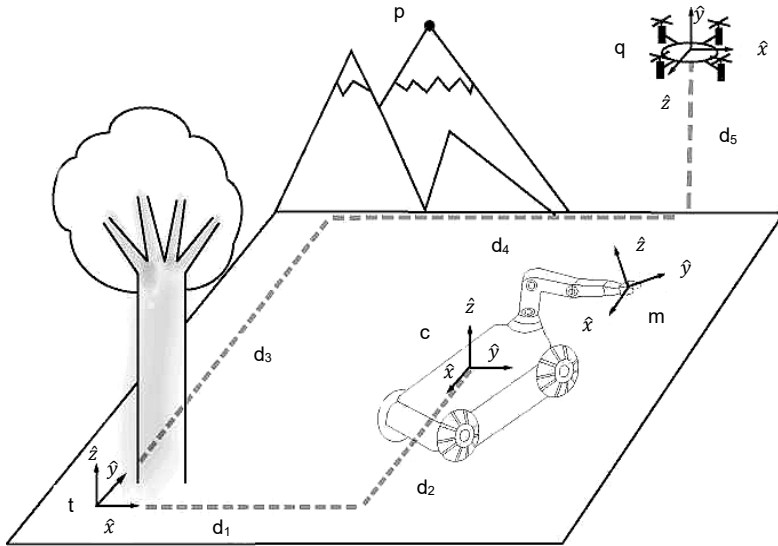


Рисунок 3.10 – Дерево, мобільний маніпулятор і літаючий робот у парку та відповідні системи відліку

Маніпулятор знаходиться в положенні $p_{cm} = (0, 2, 1)$ м відносно рами шасі (c), а (m) повернуто від (c) на 45 градусів навколо осі x_c .

1. Надайте матриці перетворення, що представляють раму квадрокоптера (q), раму шасі (c) та раму маніпулятора (m) у структурі дерева (t).

2. Припустимо, що контролер положення для маніпулятора мобільного робота прив'язаний до рами шасі (c). У яке положення слід наказати перейти захвату, якщо ви хочете схопити квадрокоптер з неба?

3. Вам доручено перемістити мобільного робота так, щоб початок шасі знаходився прямо під квадрокоптером, а його рама була вирівняна з рамою дерева. Припустимо, що контролер шасі мобільного робота приймає матриці перетворення в рамі шасі як вхідні дані. Яку трансформацію потрібно наказати виконати роботу?

Практична вправа 3.14. Розгляньте сцену на рисунку 3.10 квадрокоптера (q), що летить біля дерева (t) і будинку (h). Квадрокоптер знаходиться в позиції $p_{tq} = (10, 5, 5)$ м, вираженій у деревній структурі (t), а будинок знаходиться в позиції $p_{th} = (0, 10, 10)$ м, вираженій у деревній рамці (t). Квадрокоптер летить вгору зі швидкістю 1 м/с, а обертається зі швидкістю 1 рад/с.

1. Обчисліть поворот квадрокоптера в (q) і (t).
2. Використовуйте суміжну карту, щоб виразити поворот у каркасі будинку (h).

Тренувальна вправа 3.15. Розглянемо куб зі стороною $l = 2$ м і мураха, зображену на рисунку 3.11. Кадри (b) і (c) показують мураха в середині ребер куба.

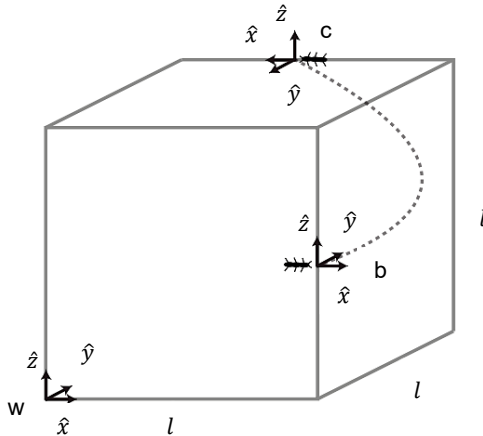


Рисунок 3.11 – Мураха, зображена в різних місцях на кубі

1. Вирішіть для осі гвинта S_b і кута θ , що відповідає перетворенню від (b) до (c).
2. Накресліть розташування осі гвинта на малюнку.
3. Використовуйте відповідну суміжну карту, щоб знайти S_w , представлення осі гвинта в кадрі (w).
4. Як можна розв'язати S_w без використання суміжної карти?

Практична вправа 3.16. Розглянемо сцену на рисунку 3.12 із деревом (t) і рамою (b), прикріпленою до його гілки.

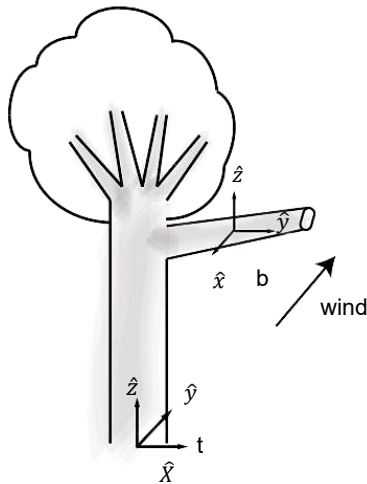


Рисунок 3.12 – Дерево та каркас, прикріплений до його гілки

На рисунку показано сильний вітер, який прикладає силу 100 Н до центру рамки (b). Припустимо, що гілка також має масу 50 кг із центром у рамці (b). Положення гілкової рамки (b) в деревній рамці (t) дорівнює $p_{tb} = (2, 1, 3)$ м.

1. Який гайковий ключ через вітер і вагу гілки?
2. Що це за гайковий ключ у рамці дерева (t)?

3.5 Питання для самоперевірки

1. Що таке матриця обертання? Які її властивості?
2. Як виглядає гомогенна матриця трансформації, і що вона описує?
3. Якими способами можна представити орієнтацію твердого тіла в просторі?
4. Що таке гвинтовий рух? Які його основні параметри?

5. Як записується матриця гвинта? Яке фізичне значення мають її компоненти?
6. Що таке скручування? Яка його структура і як воно пов'язане зі швидкостями руху?
7. Як обчислюється скручування для заданої осі гвинта і швидкості обертання?
8. Як знайти трансформацію між двома системами координат за відомими матрицями обертання та зсуву?
9. Що означає добуток матриць трансформації?
10. Як обчислити координати точки в іншій системі координат?
11. Що таке неголономні обмеження? У чому їх принципова відмінність від голономних?
12. Як записати рівняння неголономного обмеження для монети, що котиться без ковзання?
13. Як пов'язані між собою скручування і гайковий ключ?
14. Що означає скалярна потужність і як вона обчислюється?
15. Чому скалярна потужність є інваріантною для різних систем координат?
16. Що таке експоненційні координати обертання? Як вони використовуються для опису руху?
17. Як виглядає експоненціальна матриця для гвинтового руху?
18. У яких випадках використовують експоненціальні координати замість явних параметрів?
19. Як знайти необхідне обертання захвату маніпулятора для вирівнювання його з об'єктом?
20. Як описується рух кінцевого ефектора робота SCARA у просторі?
21. Як впливають неголономні обмеження на можливу траєкторію робота?

3.6 Перелік рекомендованих джерел

1. Булгаков В. М., Адамчук В. В., Черниш О. М., Березовий М. Г., Яременко В. В. Теорія механізмів і машин : підручник. Київ : Видавництво «Агроінженерія», 2020. 608 с.
2. Троханяк О. С. Теорія механізмів і машин : навчальний посібник. Київ : Видавництво КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 88 с.
3. Кірієнко О. А. Синтез і аналіз механізму приводу : навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2022. 88 с.

4. Міщенко А. А. Аналіз і синтез просторових механізмів : монографія. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2023. 230 с.
5. Скоропад О. І., Лисенко П. Г. Основи робототехніки : навчальний посібник. Львів : Видавництво ЛНУ, 2021. 342 с.
6. Ковальчук С. І., Орлов В. М. Паралельні маніпулятори: моделювання і оптимізація. Дніпро : ДНУ ім. О. Гончара, 2020. 256 с.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 4 _____

ПРАКТИЧНІ ВПРАВИ

З ПЕРЕДОВОЇ КІНЕМАТИКИ

Метою практичної роботи є набуття практичних навичок вирішення практичних вправ з передової кінематики.

Завдання практичної роботи:

1. Ознайомитись та вивчити теоретичні дані.
2. Ознайомитись з прикладами вирішення практичних завдань.
3. Вирішити вправи.

4.1 Теоретичні дані

Пряма кінематика робота стосується розрахунку положення та орієнтації його кінцевої рами за координатами θ .

Рисунок 4.1 ілюструє задачу прямої кінематики для плоского відкритого ланцюга 3R. Довжина ланки L_1, L_2 і L_3 .

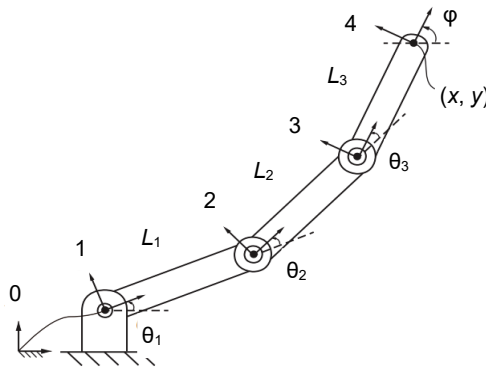


Рисунок 4.1 – Пряма кінематика плоского відкритого ланцюга 3R, для кожного кадру показано осі x і y ; осі z паралельні та поза сторінкою

Виберіть фіксовану раму (0) з початковою точкою, розташованою в базовому з'єднанні, як показано, і припустіть, що кінцева рама (4) була прикріплена до кінця третьої ланки. Декартова позиція (x, y) і орієнтація φ рамки кінцевого ефектора як функції кутів з'єднання $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ визначаються за формулою:

$$x = L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \quad (4.1)$$

$$y = L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + L_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \quad (4.2)$$

$$\varphi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3. \quad (4.3)$$

Якщо вас цікавить лише положення (x, y) кінцевого ефектора, тоді простір завдань робота буде вважатися площиною x - y , а пряма кінематика складатиметься лише з рівнянь (4.1) і (4.2). Якщо положення та орієнтація кінцевого ефектора мають значення, пряма кінематика складатиметься з трьох рівнянь (4.1–4.3).

Хоча наведений вище аналіз можна виконати лише за допомогою базової тригонометрії, неважко уявити, що для більш загальних просторових ланцюгів аналіз може стати значно складнішим. Більш систематичний метод отримання прямої кінематики може включати прикріплення опорних систем до кожної ланки; на рисунку 4.1 три опорні кадри зв'язку позначені відповідно (1), (2) і (3). Тоді пряму кінематику можна записати як добуток чотирьох однорідних матриць перетворення:

$$T_{04} = T_{01} T_{12} T_{23} T_{34}, \quad (4.4)$$

де

$$T_{01} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{12} = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & L_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_{23} = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 & L_2 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Зауважте, що T_{34} є константою і що кожна решта T_{i-1} , і залежить лише від спільної змінної θ_i .

Як альтернативу цьому підходу, давайте визначимо M як положення та орієнтацію кадру (4), коли всі кути з'єднання встановлені на нуль («домашній» або «нульове» положення робота). Потім:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & L_1 + L_2 + L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Тепер розглядайте кожен вісь поворотного з'єднання як вісь гвинта з нульовим кроком. Якщо θ_1 і θ_2 утримуються в нульовому положенні, тоді вісь гвинта, що відповідає обертанню про суглоб 3 можна виразити у кадрі (0) як:

$$S_3 = \begin{bmatrix} w_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -(L_1 + L_2) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ви повинні бути в змозі підтвердити це простим візуальним оглядом рисунка 4.1. Коли рука витягнута прямо вправо в нульовій конфігурації, уявіть поворотний стіл, що обертається з кутовою швидкістю $\omega_3 = 1$ рад/с навколо осі шарніра 3. Лінійна швидкість v_3 точки на поворотній платформі в початку (0) знаходиться в напрямку $-y_0$ зі швидкістю $L_1 + L_2$ одиниць/с. Алгебраїчно $v_3 = -\omega_3 \times q_3$, де q_3 – будь-яка точка на осі з'єднання 3, виражена в (0), наприклад, $q_3 = (L_1 + L_2, 0, 0)$.

Гвинтова вісь S_3 може бути виражена у формі матриці $se(3)$ як:

$$[S_3] = \begin{bmatrix} [\omega] & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -(L_1 + L_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для будь-якого θ_3 матричне експоненціальне представлення для гвинтових рухів з попереднього розділу дозволяє нам записати:

$$T_{04} = e^{[S_3]\theta_3} M \quad (\text{for } \theta_1 = \theta_2 = 0). \quad (4.7)$$

Тепер для $\theta_1 = 0$ і будь-який фіксований (але довільний) θ_3 , обертання навколо суглоба 2 можна розглядати як застосування гвинтового руху до жорсткої пари (ланка2) / (ланка3), тобто,

$$T_{04} = e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} M \quad (\text{for } \theta_1 = 0), \quad (4.8)$$

де $[S_3]$ і M є такими, як визначено раніше, і

$$[S_2] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -L_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Нарешті, зберігаючи θ_2 і θ_3 фіксований, обертання навколо шарніра 1 можна розглядати як застосування гвинтового руху до всього жорсткого триланкового вузла. Тому ми можемо записати для довільних значень $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$,

$$T_{04} = e^{[S_1]\theta_1} e^{[S_2]\theta_2} e^{[S_3]\theta_3} M, \quad (4.10)$$

$$[S_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Таким чином, пряма кінематика може бути виражена як добуток матричних експонент, кожна з яких відповідає руху гвинта. Зауважте, що в цьому останньому виведенні прямої кінематики не використовуються жодні опорні системи посилянь; мають бути визначені лише (0) та M .

Перше формулювання: гвинтові осі в базовій рамі. Ключова концепція формули РоЕ полягає в тому, щоб розглядати кожне з'єднання як застосування гвинтового руху до всіх зовнішніх зв'язків. Щоб проілюструвати це, розглянемо загальний просторовий

відкритий ланцюг, подібний до показаного на рисунку 4.2, що складається з n з'єднань з однією степенями свободи, з'єднаних послідовно. Щоб застосувати формулу РоЕ, ви повинні вибрати фіксований базовий кадр (s) і кінцевий кадр (b), приєднаний до останньої ланки. Поставте робота в нульове положення, встановивши всі значення з'єднань на нуль із указаним напрямком позитивного зміщення (обертання для поворотних з'єднань, переміщення для призматичних з'єднань) для кожного з'єднання. Нехай $M \in SE(3)$ позначає конфігурацію кадру кінцевого ефектора відносно фіксованого базового кадру, коли робот знаходиться в нульовій позиції.

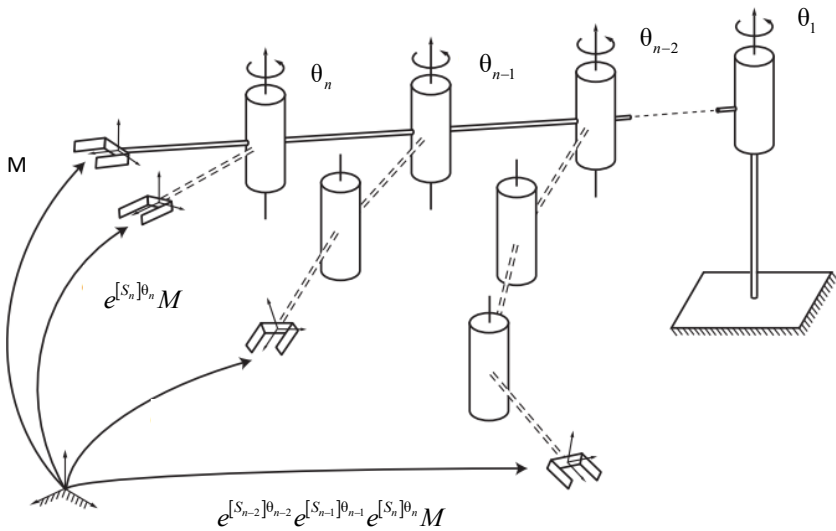


Рисунок 4.2 – Ілюстрація формули РоЕ для просторового відкритого ланцюга з n -ланками

Тепер припустимо, що з'єднання n зміщено до деякого значення з'єднання θ_n . Кінець ефектора на рамку M зазнає зміщення форми:

$$T = e^{[S_n]^{theta_n}} M, \quad (4.12)$$

де $T \in SE(3)$ – нова конфігурація рами кінцевого механізму, а $S_n = (\omega_n, v_n)$ – вісь гвинта шарніра n , як виражено у фіксованій

базовій рамі. Якщо шарнір n обертається (що відповідає руху гвинта з нульовим кроком), то $\omega_n \in \mathbb{R}^3$ – одиничний вектор у позитивному напрямку осі n суглоба; $v_n = -\omega_n \times q_n$, де q_n будь-яка довільна точка на спільній осі n , як записано в координатах у фіксованій базовій системі відліку; θ_n – спільний кут. Якщо з'єднання n є призматичним, то $\omega_n = 0$, $v_n \in \mathbb{R}^3$ є одиничним вектором у напрямку позитивного зсуву, а θ_n представляє призматичне розширення / втягнення.

Якщо ми припустимо, що з'єднання $n - 1$ також може змінюватися, тоді це призведе до застосування гвинтового руху до ланки $n - 1$ (і, як розширення, до ланки n , оскільки ланка n з'єднана з ланкою $n - 1$ через з'єднання n). Таким чином, рама кінцевого ефектора зазнає зміщення форми:

$$T = e^{[S_{n-1}]^{\theta_{n-1}}} (e^{[S_n]^{\theta_n}} M). \quad (4.13)$$

Продовжуючи це міркування та дозволяючи тепер усі суглоби $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ змінюватися, впливає, що:

$$T(\theta) = e^{[S_1]^{\theta_1}} \dots e^{[S_{n-1}]^{\theta_{n-1}}} e^{[S_n]^{\theta_n}} M. \quad (4.14)$$

Це добуток формули експоненцій, що описує пряму кінематику відкритого ланцюга з n -dof. Зокрема, ми називаємо рівняння (4.14) просторовою формою добутку експоненціальної формули, посилаючись на той факт, що осі гвинтів виражені у фіксованому просторі.

Підводячи підсумок, для розрахунку прямої кінематики відкритого ланцюга за допомогою просторової форми формули PoE (4.14) нам потрібні такі елементи:

а) конфігурація кінцевого ефектора $M \in SE(3)$, коли робот знаходиться у вихідному положенні;

б) гвинтові осі S_1, \dots, S_n , виражені у фіксованій базовій рамі, що відповідає з'єднанням рухам, коли робот знаходиться у вихідному положенні;

в) спільні змінні $\theta_1, \dots, \theta_n$.

На відміну від подання D-H, опорні кадри зв'язку визначати не потрібно. Подальші переваги стануть очевидними, коли ми розглянемо кінематику швидкості в наступному розділі.

4.2 Приклади вирішення практичних завдань

Приклад 4.1. На рис. 4.3 показана рука робота KUKA LBR iiwa (LBR= “Leichtbauroboter”, німецька – легкий робот; iiwa = «інтелектуальний промисловий помічник»). На рисунку визначено рамку (s) в основі з віссю y_s , яка вказує на сторінку, і рамку (b), вирівняну з (s) у кінцевому ефекторі. Робот знаходиться в початковій конфігурації. Проілюстровано осі гвинтів для семи з’єднань (позитивне обертання навколо цих осей відбувається за правилом правої руки). Осі для з’єднань 2, 4 і 6 вирівняні, а осі для з’єднань 1, 3, 5 і 7 ідентичні в початковій конфігурації. Напишіть M (T_{sb} , коли робот перебуває у вихідній конфігурації), осі гвинтів S_1, \dots, S_7 в (s), а осі гвинта B_1, \dots, B_7 в (b).

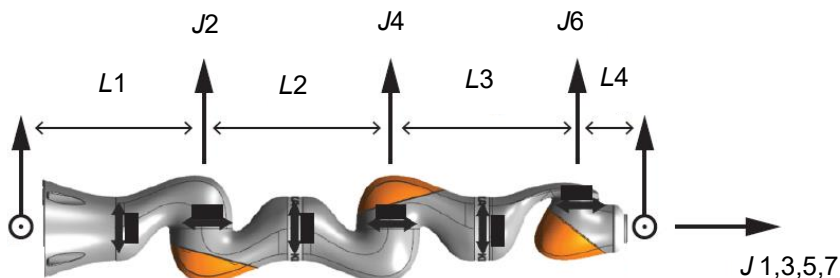


Рисунок 4.3 – Робот KUKA LBR iiwa 7-dof

Розв’язок:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Виставивши осі гвинтів у вигляді стовпчиків, отримаємо:

$$S_{list} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_1 + L_2 & 0 & L_1 + L_2 + L_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

та

$$B_{list} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(L_2 + L_3 + L_4) & 0 & -(L_3 + L_4) & 0 & -L_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Приклад 4.2. На рисунку 4.4 показано надлегку руку робота KINOVA із 4 ступенями свободи у її домашній конфігурації. Кадр (s) знаходиться в основі, а кадр (b) – у кінцевому ефекторі. Показані всі відповідні розміри. Вісь y_b зміщена від осі y_s на 9,8 мм, як показано на зображенні. Позитивне обертання навколо осі 1 суглоба відбувається навколо осі y_s (за правилом правої руки, як завжди), а вісь 4 суглоба – навколо осі y_b . З'єднані осі 2 і 3 також зображені.

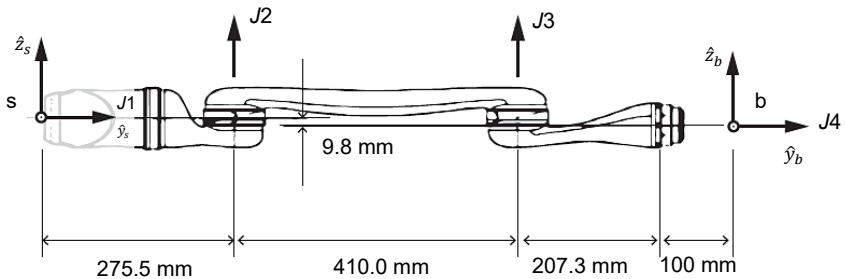


Рисунок 4.4 – Ультралегка рука робота KINOVA з 4 степенями свободи у домашній конфігурації

1. Напишіть M (тобто T_{sb} , коли робот у своїй домашній конфігурації). Усі записи мають бути цифровими (без символів чи математики).

Розв'язок:

$$M = T_{sb}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 992.8 \text{ mm} \\ 0 & 0 & 1 & -9.8 \text{ mm} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Запишіть просторові рами гвинтових осей S_1, \dots, S_4 . Усі записи мають бути цифровими (без символів чи математики).

Розв'язок:

$$S_{list} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 275.5 & 685.5 & 9.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

де відстані вимірюються в мм. Ми можемо отримати це за допомогою візуалізації, або помітивши, що $\omega_1 = \omega_4 = (0, 1, 0)$ і $\omega_2 = \omega_3 = (0, 0, 1)$ і вибравши репрезентативні точки на спільних осях (наприклад, $q_1 = (0, 0, 0)$, $q_2 = (0, 275.5, 0)$, $q_3 = (0, 685.5, 0)$ і $q_4 = (0, 992.8, 9.8)$) і використавши $v_i = -\omega_i \times q_i$.

3. Задайте формулу добутку експонент для $T_{sb}(\theta)$ для довільних кутів з'єднання $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$. Ваша відповідь має бути суто символічною (без чисел), використовуючи лише символи $M, S_1, \dots, S_4, \theta_1, \dots, \theta_4$ та матричну експоненціалу.

Розв'язок:

$$T_{sb}(\theta) = e^{[S_1\theta_1]} e^{[S_2\theta_2]} e^{[S_3\theta_3]} e^{[S_4\theta_4]} M.$$

Приклад 4.3. Рисунки 4.5 і 4.6 показує робота-коллаборанта Sawyer у дії на заводі. Це 7-ступінчаста робота.

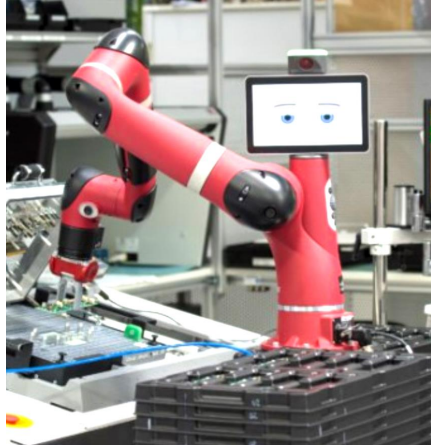


Рисунок 4.5 – Робот Sawyer

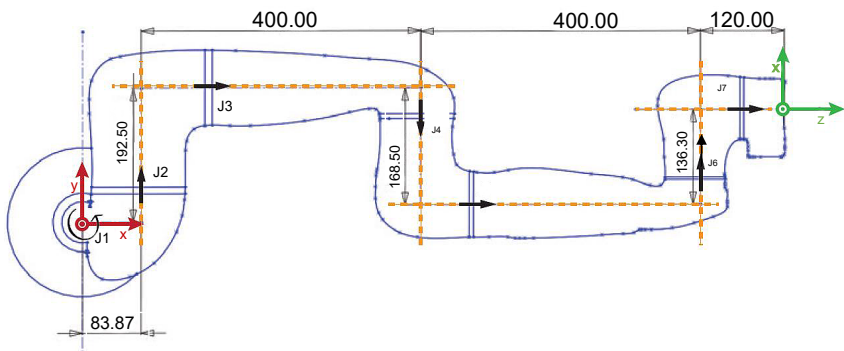


Рисунок 4.6 – Вид зверху руки робота Sawyer у його домашній конфігурації

Розміри на рисунку 4.6 вказано в мм. Припустимо, що зображені осьові лінії є гвинтовими осями шарнірів. Рамка (s) знаходиться біля основи руки. Висота від основи до першого стику 317 мм.

1. Намалуйте модель палиці та циліндра Соєра (подібно до прикладів у практичній роботі 3), чітко показуючи всі ланки та суглоби.

Розв'язок:

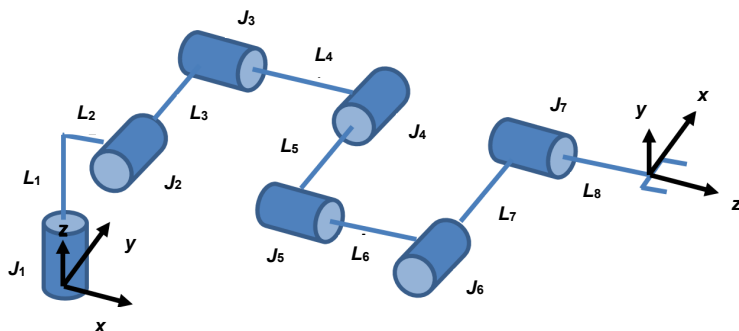


Рисунок 4.7 – Модель робота Sawyer

На рисунку 4.7:

$$L_1 = 317 \text{ mm}, L_2 = 83.87 \text{ mm}, L_3 = 192.5 \text{ mm}, L_4 = 400 \text{ mm}, \\ L_5 = 168.5 \text{ mm}, L_6 = 400 \text{ mm}, L_7 = 136.3 \text{ mm}, L_8 = 120 \text{ mm}.$$

2. Припускаючи, що домашня конфігурація показана на рисунку 4.6 запишіть матрицю M .

Розв'язок:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1003.9 \\ 1 & 0 & 0 & 160.3 \\ 0 & 1 & 0 & 317.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Напишіть гвинтові осі просторової рами та корпусу для цього робота.

Розв'язок:

$$S_{list} = \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -317 & 0 & 317 & 0 & -317 & 0 \\ 0 & 0 & 317 & 0 & 317 & 0 & 317 \\ 0 & 83.87 & -192.5 & -483.87 & -24 & 883.87 & -160.3 \end{array} \right],$$

$$B_{list} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1003.9 & 0 & -32.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -920 & 0 & 520 & 136.3 & -120 & 0 \\ -160.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Яке положення кінцевого ефектора, коли з'єднання встановлено на $\left(0, \frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$? (Підказка: функції в бібліотеці MP можуть виявитися корисними).

Розв'язок:

Використовуючи FKInSpace або FKInBody, ми знаходимо, що трансформація від базису до кінцевого ефектора при такій конфігурації має вигляд:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 483.87 \\ 1 & 0 & 0 & 160.3 \\ 0 & 0 & -1 & -203 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.3 Завдання до практичної роботи (розв'язати вправи)

Практична вправа 4.1. Рисунки 4.8 і 4.9 показує робота-коллаборанта Sawyer у дії на заводі. Це 7-ступінчаста робота.

1. Намалуйте модель палиці та циліндра Сойєра (подібно до прикладів у лекції 3), чітко показуючи всі ланки та суглоби.

2. Припускаючи, що домашня конфігурація показана на рисунку 4.4 запишіть матрицю M .

3. Напишіть гвинтові осі просторової рами та корпусу для цього робота.



Рисунок 4.8 – Робот-хірург Da Vinci Xi

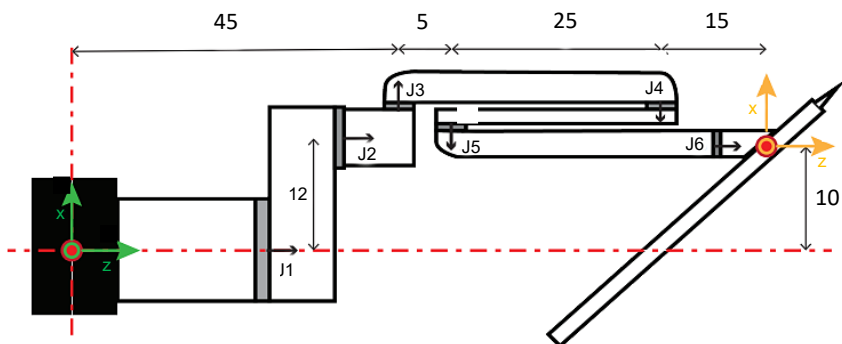


Рисунок 4.9 – Вид зверху однієї руки хірургічного робота da Vinci Xi

4. Яке положення кінцевого ефектора, коли з'єднання встановлено на $(0, \frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0)$? (Підказка: функції в бібліотеці MP можуть виявитися корисними).

Практична вправа 4.2. На рисунку 4.9 зображено да Вінчі Ксі, який використовується в кількох типах роботизованої хірургії. Хоча механічно обмежено лише 3 ступені свободи на плече, для

цієї вправи припустимо, що кожне плече є простим послідовним ланцюгом із 6 ступенями свободи.

1. Напишіть матрицю M для плеча, якщо його початкова конфігурація показана на рисунку 4.9.

2. Знайдіть гвинтові осі просторової рами для цієї системи.

3. Визначте положення кінцевого елемента, якщо з'єднання знаходяться в $\left(0, \frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Знову ж таки, MR Library стане тут у нагоді.

Зауважте, що сірі області представляють R-суглоби, зелені позначають кадр (s), а жовті представляють кадр кінцевого ефектора (b) у цій вправі. Розміри вказані в см.

4.4 Питання для самоперевірки

1. Що таке матриця початкової конфігурації (M) і яке її значення в кінематиці роботів?
2. Як визначають гвинтові осі для просторової та корпусної рами?
3. Що таке добуток експонент і як він використовується для опису положення кінцевого ефектора робота?
4. Як виглядає матриця T_{sb} , коли робот перебуває у вихідній конфігурації?
5. Як визначити гвинтові осі ($S_1 \dots S_7$) для цієї системи?
6. У яких випадках осі гвинтів для різних суглобів можуть бути вирівняними?
7. Як знайти матрицю T_{sb} для домашньої конфігурації робота KINOVA?
8. Які цифрові значення мають гвинтові осі S_1, \dots, S_4 у просторі?
9. Як записати добуток експонент для довільних кутів з'єднань $(\theta_1, \dots, \theta_4)$?
10. Як побудувати модель палиці та циліндра для робота Sawyer?
11. Яка матриця початкової конфігурації M у домашньому положенні?
12. Як обчислити положення кінцевого ефектора, якщо задані кути з'єднань?
13. Яка матриця M для хірургічного робота da Vinci Xi у вихідній конфігурації?
14. Як визначають гвинтові осі для цієї системи?
15. Як обчислити положення кінцевого ефектора, якщо задані значення для всіх з'єднань?

4.5 Перелік рекомендованих джерел

1. Булгаков В. М., Адамчук В. В., Черниш О. М., Березовий М. Г., Яременко В. В. Теорія механізмів і машин : підручник. Київ : Видавництво «Агроінженерія», 2020. 608 с.
2. Троханяк О. С. Теорія механізмів і машин : навчальний посібник. Київ : Видавництво КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 88 с.
3. Кірієнко О. А. Синтез і аналіз механізму приводу : навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2022. 88 с.
4. Міщенко А. А. Аналіз і синтез просторових механізмів : монографія. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2023. 230 с.
5. Скоропад О. І., Лисенко П. Г. Основи робототехніки : навчальний посібник. Львів : Видавництво ЛНУ, 2021. 342 с.
6. Ковальчук С. І., Орлов В. М. Паралельні маніпулятори: моделювання і оптимізація. Дніпро : ДНУ ім. О. Гончара, 2020. 256 с.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 5 _____

ПРАКТИЧНІ ВПРАВИ

З ОБЕРТОВОЇ КІНЕМАТИКИ

Метою практичної роботи є набуття практичних навичок вирішення практичних вправ з обертової кінематики.

Завдання практичної роботи:

1. Ознайомитись та вивчити теоретичні дані.
2. Ознайомитись з прикладами вирішення практичних завдань.
3. Вирішити вправи.

5.1 Теоретичні дані

Основи кінематики маніпуляторів. Кінематика маніпуляторів вивчає рухи механічних систем без урахування сил, які його викликають. Для роботів це включає визначення положення, орієнтації та швидкостей кінцевого ефектора у просторі на основі конфігурації суглобів.

Прямокутна кінематика:

- обчислює положення та орієнтацію кінцевого ефектора у глобальній системі координат;
- використовуються матриці гомогенних перетворень ($SE(3)$) для опису положення та орієнтації.

Зворотна кінематика:

- вирішує задачу знаходження конфігурації суглобів для заданого положення кінцевого ефектора;
- може мати однозначне, багато або жодного рішення.

Якобіан у кінематиці. Якобіан – це матриця, яка описує залежність між швидкостями суглобів і швидкостями кінцевого ефектора. Існує два основних види Якобіанів:

Просторовий Якобіан (J_s):

– відображає лінійні та кутові швидкості кінцевого ефектора у глобальній системі координат;

– використовується для аналізу руху в просторі.

Якобіан тіла (J_b):

– відображає ті ж параметри у системі координат кінцевого ефектора;

– дозволяє оцінити локальні властивості руху.

Формула обчислення Якобіана:

$$x' = J\theta', \quad (5.1)$$

де x' – швидкість кінцевого ефектора,

де J – Якобіан,

θ' – швидкості суглобів.

Властивості Якобіана

Ранг Якобіана:

– показує кількість незалежних ступенів свободи системи у заданій конфігурації;

– якщо ранг менше максимально можливого, робот перебуває у сингулярній конфігурації.

Міра маніпуляційності (μ):

– показує здатність робота виконувати рухи у різних напрямках;

– визначається як детермінант JJ^T або $J^T J$.

Еліпсоїди маніпуляції. Еліпсоїди маніпуляції використовуються для аналізу кінематичних властивостей робота:

Еліпсоїд швидкості:

– описує можливі напрямки та швидкості руху кінцевого ефектора;

– довгі осі еліпсоїда відповідають напрямкам найвищої швидкості, короткі – найнижчої.

Еліпсоїд сил:

– визначає, як ефективно робот може створювати сили у різних напрямках.

Властивості осей:

– нульова довжина осі означає, що рух чи сила у цьому напрямку неможливі;

– нескінченна довжина осі вказує на максимальну ефективність у відповідному напрямку.

Крутні моменти суглобів. Крутний момент, необхідний для створення заданих сил та моментів на кінцевому ефекторі, обчислюється як:

$$\tau = J^T F, \quad (5.2)$$

де τ – вектор моментів у суглобах;

J^T – транспонована матриця Якобіана;

F – вектор сил та моментів.

Особливості конфігурацій робота

Домашня конфігурація – це початкове положення робота, зазвичай обране для зручності калібрування та обчислень.

Сингулярні конфігурації:

- у цих положеннях ранг Якобіана менший максимально можливого;
- робот втрачає здатність рухатися у деяких напрямках або чинити опір певним силам.

Надлишкова конфігурація:

- робот має більше ступенів свободи, ніж необхідно для виконання завдання;

- це дозволяє оптимізувати рухи або уникати перешкод.

Використання бібліотеки Modern Robotics. Для обчислень у практичній роботі рекомендується бібліотека Modern Robotics:

- містить функції для розрахунку Якобіанів, кінематики та динаміки роботів;

- включає готові алгоритми для роботи з маніпуляторами.

5.2 Приклади вирішення практичних завдань

Приклад 5.1. На рисунку 5.1 показана рука робота KUKA LBR iiwa 7R. На рисунку визначено рамку (s) в основі з віссю y_s , яка вказує на сторінку, і рамку (b), вирівняну з (s) у кінцевому ефекторі. Робот знаходиться в початковій конфігурації. Проілюстровано осі гвинтів для семи з'єднань (позитивне обертання навколо цих осей відбувається за правилом правої руки). Осі для з'єднань 2, 4

і 6 вирівняні, а осі для з'єднань 1, 3, 5 і 7 ідентичні в початковій конфігурації. Розміри: $L_1=0,34$ м, $L_2=0,4$ м, $L_3=0,4$ м, $L_4=0,15$ м.

1. Який просторовий якобіан, коли робот перебуває у своїй початковій конфігурації?

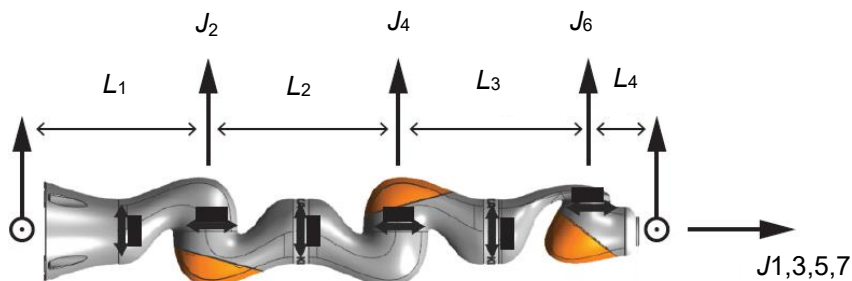


Рисунок 5.1 – Робот KUKA LBR iiwa 7-dof

Розв'язок:

$$J_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.34 & 0 & 0.74 & 0 & 1.14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Що таке якобіанське тіло, коли робот перебуває у своїй початковій конфігурації?

Розв'язок:

$$J_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.95 & 0 & -0.55 & 0 & -0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Який ранг Якобіана простору та тіла в домашній конфігурації? (Завжди те саме.) Чи є конфігурація будинку унікальною? Який розмір простору можливих поворотів при конфігурації будинку? Для решти запитань припустіть, що кути суглобів знаходяться в $\pi/16$ для суглобів $i = 1 \dots 7$.

Розв'язок:

Ранг дорівнює трьом. Стовпчики 2, 3 та 4 є лінійно незалежними; всі можливі напрямки швидкостей є лінійними комбінаціями цих трьох стовпчиків. Простір можливих скручувань є тривимірним.

4. Що таке просторовий якобіан? Які крутні моменти з'єднань необхідні для створення гайкового ключа $F_s = (1 \text{ Нм}, 1 \text{ Нм}, 1 \text{ Нм}, 1 \text{ Н}, 1 \text{ Н}, 1 \text{ Н})$? Що таке міра маніпульованості μ_2 для маніпулювання еліпсоїда кутової швидкості в просторовій системі відліку? Що таке міра маніпуляції μ_2 для лінійного маніпулятивного еліпсоїда в просторовій рамці?

Розв'язок:

Обчислення $J_s(\theta)$ з використанням якобіанського простору:

$$\tau = J_s^T(\theta)F_s = [11.440.781.721.130.542.29]^T,$$

$$\mu_2(J_{s\omega}J_{s\omega}^T) = 2.427,$$

$$\mu_2(J_{sv}J_{sv}^T) = 30.5.$$

5. Що таке тіло Якобіана? Які крутні моменти з'єднань потрібні для створення гайкового ключа $F_b = (1 \text{ Нм}, 1 \text{ Нм}, 1 \text{ Нм}, 1 \text{ Н}, 1 \text{ Н}, 1 \text{ Н})$? Що таке міра маніпульованості μ_2 для маніпулювання еліпсоїда кутової швидкості в каркасі тіла? Що таке міра маніпуляції μ_2 для лінійного маніпуляційного еліпсоїда в каркасі тіла?

Розв'язок:

$$\tau = J_b^T(\theta)F_b = [-0.191.760.180.261.36-0.961]^T,$$

$$\mu_2(J_{b\omega}J_{b\omega}^T) = 2.427,$$

$$\mu_2(J_{bv}J_{bv}^T) = 20.6.$$

Приклад 5.2. Розглянемо роботу з вісьмома суглобами, який рухається в просторі. Конфігурація кінцевого ефектора представлена як елемент $SE(3)$, швидкість кінцевого ефектора представлена як кручення $V \in \mathbb{R}^6$, а сила та момент на кінцевому ефекторі представлені як гайковий ключ $F \in \mathbb{R}^6$. У деяких спільних конфігураціях робота якобіан має ранг 6; в інших конфігураціях ранг якобіана нижчий. Розглянемо конкретну спільну конфігурацію θ , де ранг якобіана дорівнює k .

1. У 8-вимірному просторі спільних швидкостей $\dot{\theta}$, яка розмірність підпростору сумісних швидкостей, які викликають нульове скручування ($V=0$, відсутність руху) кінцевого ефектора?

Розв'язок:

$V = J(\dot{\theta})$. Це питання стосується розмірності нульового простору J , тобто розмірності підпростору спільних швидкостей $\dot{\theta}$ таких, що $J\dot{\theta} = 0$. Це також називається нульовістю J . J має ранг $k \leq 6$, тому V пов'язано з k -вимірним лінійним простором, незалежно від $\dot{\theta}$. Отже, лише k напрямків у $\dot{\theta}$ простору (\mathbb{R}^8) впливають на V , тоді як інші $8-k$ напрямків, нульовий простір J , не впливають на V . Таким чином, $(8-k)$ -вимірний простір спільних швидкостей дає нульовий рух кінцевого ефектора.

Погляньмо на це по-іншому: $J\dot{\theta} = 0$ накладає k незалежних обмежень на вісім змінних $\dot{\theta}$, тому підпростір, що задовольняє цим обмеженням, має бути $(8-k)$ -вимірним. Також теорема про ранг-нульовість говорить нам, що сума рангу J плюс нульовість J повинна дорівнювати кількості стовпців J , тому нульовість повинна дорівнювати $8-k$.

2. У 6-вимірному просторі гайкових ключів F , застосованих до кінцевого ефектора, який розмір підпростору гайкових ключів, якому робот може протистояти за допомогою нульового вектора сили-крутного моменту, $\tau = 0$? У решті запитань припустіть, що $1 < k < 6$.

Розв'язок:

У цьому запитанні йдеться про нульовість J^T в $\tau = J^T F$. Ми знаємо, що $\text{rank}(J) = \text{rank}(J^T)$, тому ранг J^T дорівнює k . За теоремою про ранг-нульовість, $k + \text{nullity}(J^T) = 6$, тому $\text{nullity}(J^T) = 6-k$.

3. Припустимо, що завдання полягає в тому, щоб розмістити кінцевий ефектор у $SE(3)$. Чи є робот надлишковим, чи має кінематичні недоліки чи ні те, ні інше щодо цього завдання?

Розв'язок:

Робот є надлишковим, оскільки якобіан має ранг 6 при деяких конфігураціях (здатний рухатись у будь-якому напрямку в $SE(3)$), але має вісім суглобів. Терміни «надлишковий» і «кінематично неповноцінний» не залежать від конкретної конфігурації, тоді як сингулярності залежать від конфігурації.

4. Чи є найдовша вісь еліпсоїда маніпуляції нульовою, нескінченною чи іншою?

Розв'язок:

Інша.

5. Чи є найкоротша вісь еліпсоїда маніпуляції нульовою, нескінченною чи іншою?

Розв'язок:

Нульова.

6. Чи є найдовша вісь еліпсоїда сил нульовою, нескінченною чи іншою?

Розв'язок:

Нескінченна.

7. Чи є найкоротша вісь еліпсоїда сили нульовою, нескінченною чи іншою?

Розв'язок:

Інша.

Приклад 5.3. На рисунку 5.2 зображено робота RPR, який обмежений площиною сторінки. Проілюстровано кадр кінцевого ефектора (b), де вісь X_b знаходиться поза сторінкою. Напрямки позитивного руху трьох суглобів позначені стрілками. Осі двох поворотних шарнірів знаходяться поза сторінкою, а призматичний шарнір рухається в площині сторінки. З'єднання 1 знаходиться на $q_1 = (0, -5, -7)$ в (b), а з'єднання 3 знаходиться на $q_3 = (0, -1, -3)$ на (b). Запишіть якобіан тіла $J_b(\theta)$ для показаної конфігурації. Усі записи вашої матриці $J_b(\theta)$ мають бути числовими (без символів чи математики).

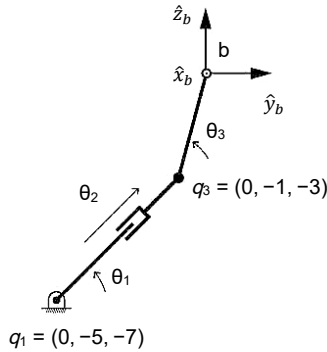


Рисунок 5.2 – Робот RPR

Розв’язок:

$$J_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -3 \\ 5 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{bmatrix}.$$

Ви можете побачити це за допомогою візуалізації (уявіть поворотні столи в точках 1 і 3 і візуалізуйте рух точки на початку координат (b), а також уявіть конвєсер, що рухається в напрямку точки 2) або визнавши, що $\omega_1 = \omega_3 = (1, 0, 0)$ а точки на осях 1 і 3 є q_1 і q_3 , і обчислюють $v_1 = -\omega_i \times q_i$. Для шарніра 2 лінійний напрямок додатного руху визначається як:

$$v_2 = \frac{q_3 - q_1}{q_3} - q_1.$$

5.3 Завдання до практичної роботи (розв'язати вправи)

Практична вправа 5.1. На рисунку 5.3 показано спрощену роботу роботизованої руки «підбирай і розміщуй» у її домашній конфігурації. Застосуємо до цього плеча кінематику та статику швидкості. Кадр кінцевого ефектора (b) вирівнюється з кадром (s) і знаходиться на 7 см над кадром (s) (у напрямку $+z$ s).

1. Знайдіть $M = T_{sb}(0)$, конфігурацію (b) відносно (s), коли робот знаходиться в нульовій (домашній) конфігурації.

2. Знайдіть вісь гвинта просторової рами для кожного шарніра, коли робот перебуває у вихідній конфігурації.

3. Використуйте бібліотеку MR, щоб обчислити якобіан тіла в домашній конфігурації, використовуючи результати попередніх двох запитань. Не потрібно дивитися на рисунок 5.2 знову (але ви можете зробити це, щоб перевірити свої відповіді).

4. Щоб витримати гайковий ключ $F_s = (0, 0, 0, 5, 10, 0)$ (лінійні компоненти в Ньютонах), прикладений до останньої ланки робота, коли робот перебуває у вихідній конфігурації, які крутні моменти τ мають бути створені суглобами?

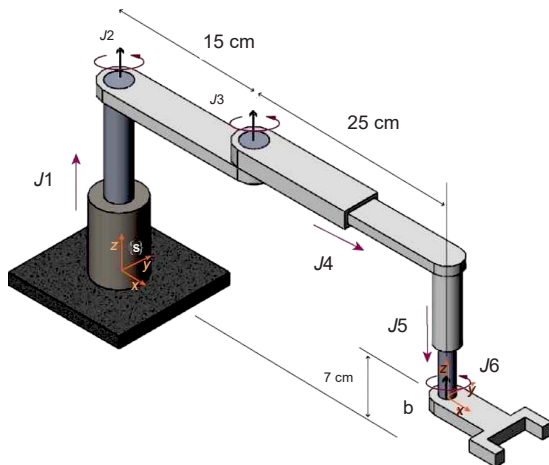


Рисунок 5.3 – Робот-підбирач у домашній конфігурації

5. Використовуйте бібліотеку MP, щоб знайти $J_s(\theta)$ при $\theta = (10, \pi/4, -\pi/4, 2, 2, 0)$.

Практична вправа 5.2. На рисунку 5.1 показана рука робота KUKA LBR iiwa 7R та визначено рамку (s) в основі з віссю u_s , яка вказує на сторінку, і рамку (b), вирівняну з (s) у кінцевому ефекторі. Робот знаходиться в початковій конфігурації. Проілюстровано осі гвинтів для семи з'єднань (позитивне обертання навколо цих осей відбувається за правилом правої руки). Осі для з'єднань 2, 4 і 6 вирівняні, а осі для з'єднань 1, 3, 5 і 7 ідентичні в початковій конфігурації.

Таблиця 5.1 – Вихідні дані

Варіант	$L_1, м$	$L_2, м$	$L_3, м$	$L_4, м$
1	0,31	0,5	0,5	0,14
2	0,27	0,4	0,4	0,12
3	0,28	0,5	0,5	0,16
4	0,3	0,6	0,6	0,12
5	0,35	0,5	0,5	0,16
6	0,41	0,6	0,6	0,2
7	0,22	0,5	0,5	0,15
8	0,25	0,15	0,15	0,07
9	0,32	0,13	0,13	0,08
10	0,12	0,05	0,05	0,04

1. Який просторовий якобіан, коли робот перебуває у своїй початковій конфігурації?

2. Що таке якобіанське тіло, коли робот перебуває у своїй початковій конфігурації?

5.4 Питання для самоперевірки

1. Що таке обертова кінематика і які її основні задачі в робототехніці?
2. Як визначаються просторовий Якобіан та Якобіан тіла?
3. Чим відрізняються просторовий Якобіан та Якобіан тіла?
4. Як ранг Якобіана впливає на маніпуляційні можливості робота?
5. Що таке міра маніпульованості (μ^2) і як вона розраховується?

5.5 Перелік рекомендованих джерел

1. Булгаков В. М., Адамчук В. В., Черниш О. М., Березовий М. Г., Яременко В. В. Теорія механізмів і машин : підручник. Київ : Видавництво «Агроінженерія», 2020. 608 с.
2. Троханяк О. С. Теорія механізмів і машин : навчальний посібник. Київ : Видавництво КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 88 с.
3. Кірієнко О. А. Синтез і аналіз механізму приводу : навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2022. 88 с.
4. Міщенко А. А. Аналіз і синтез просторових механізмів : монографія. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2023. 230 с.
5. Скоропад О. І., Лисенко П. Г. Основи робототехніки : навчальний посібник. Львів : Видавництво ЛНУ, 2021. 342 с.
6. Ковальчук С. І., Орлов В. М. Паралельні маніпулятори: моделювання і оптимізація. Дніпро : ДНУ ім. О. Гончара, 2020. 256 с.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 6 _____

ПРАКТИЧНІ ВПРАВИ З КІНЕМАТИКИ ЗАМКНЕНИХ ЛАНЦЮГІВ

Метою практичної роботи є набуття практичних навичок вирішення практичних вправ з кінематики замкнених ланцюгів.

Завдання практичної роботи:

1. Ознайомитись та вивчити теоретичні дані.
2. Ознайомитись з прикладами вирішення практичних завдань.
3. Вирішити вправи.

6.1 Теоретичні дані

Для загального n ступеня свободи відкритого ланцюга з прямої кінематики $T(\theta)$, $\theta \in R^n$, зворотню задачу кінематики можна сформулювати так: дано гомогенне перетворення $X \in SE(3)$, знайти розв'язки θ , які задовольняють $T(\theta) = X$. Виділимо основні особливості оберненої кінематичної задачі, розглянемо дволанковий плоский відкритий ланцюг на рис. 6.1 (а) як мотиваційний приклад. Розглядаючи лише положення кінцевого ефектора та ігноруючи його орієнтацію, пряма кінематика може бути виражена як:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Припускаючи $L_1 > L_2$, множина досяжних точок, або робочий простір, є кільцем внутрішнього радіуса $L_1 - L_2$ і зовнішній радіус $L_1 + L_2$. Дано деякий кінцевий ефект положення (x, y) , не важко побачити що там може бути або нуль, одиниця або два рішення в залежності на (x, y) в екстер'єр, межа, або всередині цього кільця, відповідно. Коли є два рішення, кут в другий суглоб («лікоть»

спільний) може бути позитивний або негативний. Ці два рішення іноді називають рішеннями «лівий» і «правий» або «лікоть вгору» і «лікоть вниз» рішення.

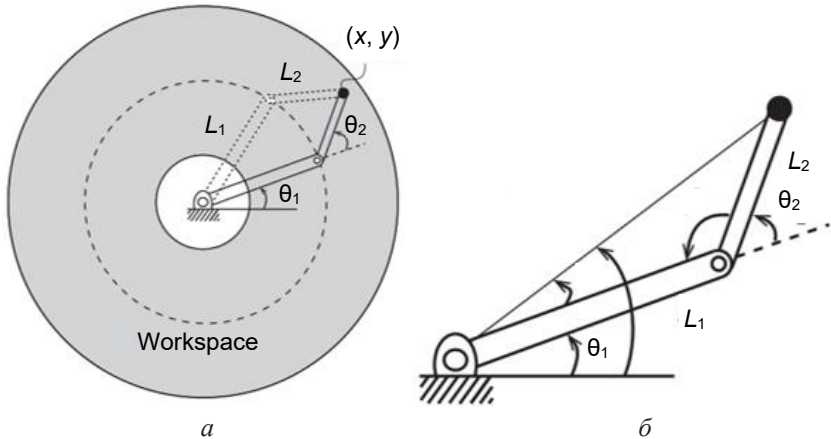


Рисунок 6.1 – Зворотна кінематика з 2R площинного відкритого ланцюга: *a* – робочий простір, лівша і правша конфігурації; *б* – геометричне рішення

Пошук явного рішення (θ_1, θ_2) для заданого (x, y) також не є складним. Для цього нам буде корисно ввести двоаргументну арктангенс функцію $\text{atan2}(y, x)$, яка повертає кут від початку координат до точки (x, y) на площині. Це схоже на обернений тангенс $\tan^{-1}(y/x)$, але в той час як $\tan^{-1}(y/x)$ є рівним до $\tan^{-1}(p/x)$, і тому \tan^{-1} тільки повертає кути в діапазоні $(\pi/2, \pi/2)$, функція atan2 повертає кути в діапазоні $(\pi, \pi]$. для це причина, atan2 є іноді дзвонив у чотирикутник арктангенс.

Також згадаємо закон косинусів,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

де a, b та c – довжини трьох сторін трикутника, а C – внутрішній кут трикутника, протилежний стороні довжини c .

На рис. 6.1 (б), кут β , обмежений інтервалом $[0, \pi]$, можна буде визначити за законом косинусів,

$$L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2\cos\beta = x^2 + y^2,$$

з якого випливає, що

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{L_1^2 + L_2^2 - x^2 - y^2}{2L_1L_2}\right).$$

Також із закону косинусів,

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2 + L_1^2 - L_2^2}{2L_1\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Кут γ є визначається використовуючи в двоаргументній арктангенс функції, $\gamma = \text{atan2}(y, x)$. З цими кутами правильний розв'язок зворотної кінематики:

$$\theta_1 = \gamma - \alpha, \quad \theta_2 = \pi - \beta$$

і в ліві рішення є:

$$\theta_1 = \gamma + \alpha, \quad \theta_2 = \beta - \pi.$$

Якщо $x^2 + y^2$ назовні в діапазон $[L_1 - L_2, L_1 + L_2]$ потім рішення не існує.

Цей простий мотиваційний приклад ілюструє, що для відкритих ланцюгів кінематична задача може мати декілька рішень; ця ситуація в контрасті з прямою кінематикою, де унікальне переміщення кінцевого ефектора T існує для заданих спільних значень θ . Фактично триланкові планарні відкриті ланцюги мають скінченну кількість розв'язків для точок (x, y) , що лежать усередині робочого простору; у цьому випадку ланцюг має додатковий ступінь свободи і називається таким кінематично надлишковий.

6.2 Приклади вирішення практичних завдань

Приклад 6.1. (Робот Planar 2R). Початкове припущення (0° , 30°). Після однієї ітерації Ньютона–Рафсона розраховані кути з'єднання становлять (34.23° , 79.18°). Також вказується вісь гвинта, яка веде початкову раму до рами воріт (за допомогою кривої пунктирної лінії).

Тепер ми застосовуємо тіло Якобіана Ньютона – алгоритм зворотної кінематики Raphson для робота 2R на рисунку 6.2.

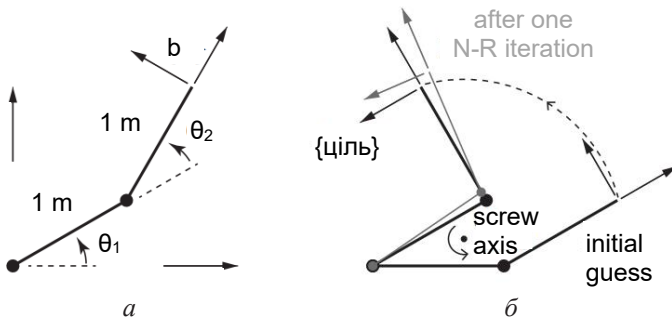


Рисунок 6.2 – Алгоритм зворотної кінематики Raphson для робота 2R: а – робот 2R; б – кінцева система ефектів (ціль), що відповідає $\theta_1 = 30^\circ$ і $\theta_2 = 90^\circ$

Кожне посилення дорівнює 1 м у довжину, і ми хотіли б знайти спільні кути, які містять вершину робота на $(x, y) = (0,366 \text{ м}, 1,366 \text{ м})$, що відповідає $\theta_d = (30, 90)$ і

$$T_{sd} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.866 & 0 & 0.366 \\ 0.866 & -0.5 & 0 & 1.366 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

як показано рамкою (goal) на рисунку 6.2. Передня кінематика, виражена:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Нашим початковим припущенням щодо рішення є $\theta^0 = (0,30)$, і ми визначаємо допуск до помилок $\omega = 0,001$ рад (або $0,057$) і $v = 10^{-4}$ м (100 мкм). Прогрес методу Ньютона – Рафсона проілюстровано в таблиці 6.3 нижче, де лише $(\omega_{zb}, v_{xb}, v_{yb})$ -компоненти скручування тіла V_b задано, оскільки рух робота обмежено площиною x - y .

Таблиця 6.1 – Компоненти $(\omega_{zb}, v_{xb}, v_{yb})$ скручування тіла V_b задано, оскільки рух робота обмежено площиною x - y

i	(θ_1, θ_2)	(x, y)	$v_b = (\omega_{zb}, v_{xb}, v_{yb})$	$\ \omega_b\ $	$\ v_b\ $
0	$(0.00, 30.00^\circ)$	$(1.866, 0.500)$	$(1.571, 0.498, 1.858)$	1.571	1.924
1	$(34.23^\circ, 79.18^\circ)$	$(0.429, 1.480)$	$(0.115, -0.074, 0.108)$	0.115	0.131
2	$(29.98^\circ, 90.22^\circ)$	$(0.363, 1.364)$	$(-0.004, 0.000, -0.004)$	0.004	0.004
3	$(30.00^\circ, 90.00^\circ)$	$(0.366, 1.366)$	$(0.000, 0.000, 0.000)$	0.000	0.000

Ітераційна процедура збігається в межах допусків після трьох ітерацій. На рисунку 6.2 показано початкове припущення, конфігурацію мети та конфігурації після однієї ітерації. Зауважте, що перший обчислений v_{xb} додатний, незважаючи на те, що початок рамки воріт знаходиться в напрямку $-x_b$ початкової вгадати. Причина в тому, що постійна швидкість тіла V_b , яка приймає початкову припустити, що (goal) за одну секунду – це обертання навколо осі гвинта, зазначеного в фігурі.

Приклад 6.2. Виконайте три ітерації (наближеного) ітераційного пошуку кореня Ньютона-Рафсона для скалярної функції $x_d - f(\theta)$ на рисунку 6.3, починаючи з θ^0 . (Загальна векторна функція $f(\theta)$ може представляти кінематику робота вперед, а x_d може представляти бажану конфігурацію в координатах. Корені $x_d - f(\theta)$ – це спільні

вектори θ , що задовольняють $x_d - f(\theta) = 0$, тобто рішення оберненої кінематичної задачі). Намалюйте ітерації θ_1 , θ_2 та θ_3 на осі θ і чітко проілюструйте, як ви отримуєте ці точки.

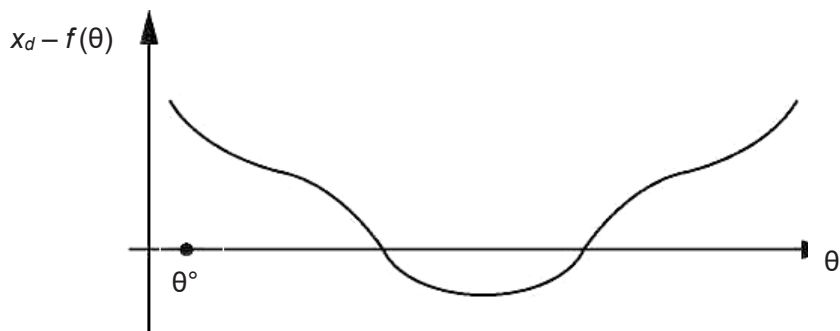


Рисунок 6.3 – Скалярна функція $x_d - f(\theta)$ від θ

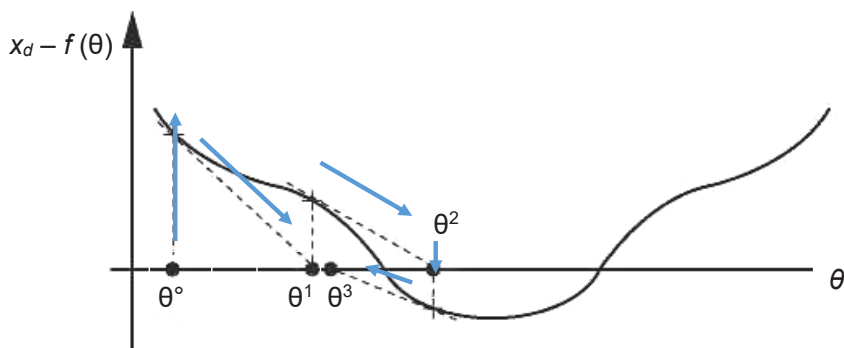


Рисунок 6.4 – Скалярна функція $x_d - f(\theta)$ від θ з ітераціями θ^1 , θ^2 та θ^3

6.3 Завдання до практичної роботи (розв'язати вправи)

Практична вправа 6.1. Розімкнутий ланцюг просторового RRP на рисунку 6.5 показано в нульовій позиції.

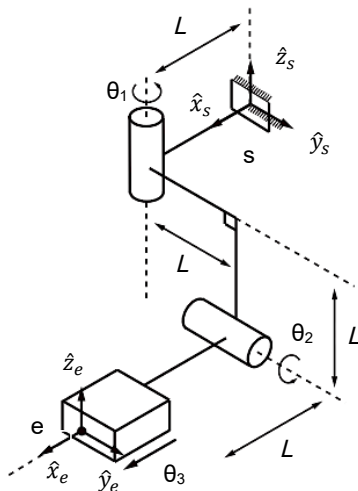


Рисунок 6.5 – Робот RRP

1. Використовуйте аналітичні методи для вирішення зворотної кінематики, коли описується конфігурація кінцевого ефектора:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2L \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3L \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Припустимо, що $L=1$, і скористайтеся чисельним методом (наприклад, з бібліотеки кодів МР), щоб розв'язати ту саму проблему, що й $y(a)$.

Практична вправа 6.2. На рисунку 6.6 зображено першу в світі робото-систему, яка вчиться одягати людей похилого віку та людей

із фізичними вадами. Система складається з двох роботів 7R WAM. Огляд системи показаний на рисунку 6.7. Роботи WAM встановлені симетрично. Припустимо, що світова рамка встановлена, як показано на малюнку, і $D_x = D_z = 0,3$ м.

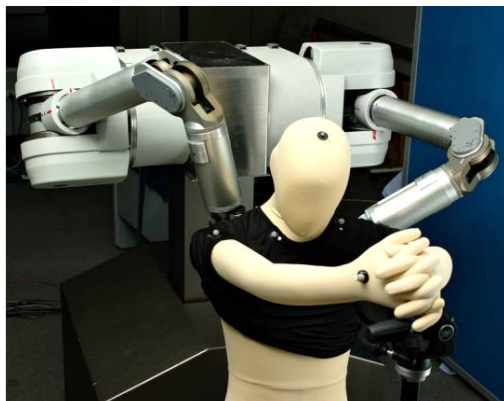


Рисунок 6.6 – Робот-система помічника одягальника

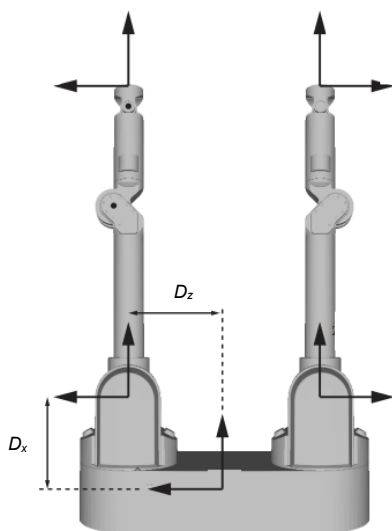


Рисунок 6.7 – Каркаси для двох рук робота WAM

Завдання полягає в тому, щоб перемістити одну з рамок кінцевого ефектора робота:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0.15 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

відносно (ω), тримати одяг. Використовуйте бібліотеку кодів МР, щоб вирішити наступні запитання. (Ігноруйте обмеження суглобів.)

1. Якщо одна з рук робота може досягти такої конфігурації, чи очікуєте ви, як правило, наявність одного розв'язку зворотної кінематики, скінченної чи нескінченної кількості розв'язків?

2. Чи може ліва рука досягти конфігурації? Ви можете використовувати числову зворотну кінематику з різними початковими припущеннями, якщо це необхідно. Якщо ви знайшли рішення, використовуйте пряму кінематику, щоб перевірити його. Якщо ви не можете знайти рішення, поясніть причину.

3. Чи може права рука досягти конфігурації? Ви можете використовувати числову зворотну кінематику з різними початковими припущеннями, якщо це необхідно. Якщо ви знайшли рішення, використовуйте пряму кінематику, щоб перевірити його. Якщо ви не можете знайти рішення, поясніть причину.

6.4 Питання для самоперевірки

1. Що є вхідними та вихідними даними для задачі зворотної кінематики?
2. Чому множина досяжних точок дволанкового відкритого ланцюга має форму кільця? Від яких параметрів залежить розмір цього кільця?
3. Які основні відмінності між прямою та зворотною кінематичними задачами?
4. Які можливі кількості розв'язків для позиції кінцевого ефектора (x, y) в залежності від його розташування відносно робочого простору?
5. Що означають поняття «ліктем вгору» і «ліктем вниз» для конфігурації робота?

6. Які початкові припущення використовуються для методу Ньютона – Рафсона в описаному прикладі?
7. Як визначаються допустимі похибки для методу Ньютона – Рафсона?
8. Скільки ітерацій потрібно для збіжності алгоритму в описаному прикладі? Які фактори можуть впливати на кількість ітерацій?
9. Як враховується орієнтація кінцевого ефектора під час розв’язання задачі зворотної кінематики?
10. Як змінюється підхід до розв’язання задачі, якщо робот має більше ступенів свободи?

6.5 Перелік рекомендованих джерел

1. Булгаков В. М., Адамчук В. В., Черниш О. М., Березовий М. Г., Яременко В. В. Теорія механізмів і машин : підручник. Київ : Видавництво «Агроінженерія», 2020. 608 с.
2. Троханяк О. С. Теорія механізмів і машин : навчальний посібник. Київ : Видавництво КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 88 с.
3. Кірієнко О. А. Синтез і аналіз механізму приводу : навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2022. 88 с.
4. Міщенко А. А. Аналіз і синтез просторових механізмів : монографія. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2023. 230 с.
5. Скоропад О. І., Лисенко П. Г. Основи робототехніки : навчальний посібник. Львів : Видавництво ЛНУ, 2021. 342 с.
6. Ковальчук С. І., Орлов В. М. Паралельні маніпулятори: моделювання і оптимізація. Дніпро : ДНУ ім. О. Гончара, 2020. 256 с.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 7 _____

ПРАКТИЧНІ ВПРАВИ З ДИНАМІКИ ВІДКРИТИХ ЛАНЦЮГІВ

Метою практичної роботи є набуття практичних навичок вирішення практичних вправ з динаміки відкритих ланцюгів.

Завдання практичної роботи:

1. Ознайомитись та вивчити теоретичні дані.
2. Ознайомитись з прикладами вирішення практичних завдань.
3. Вирішити вправи.

7.1 Теоретичні дані

У цій практичній роботі ми ще раз вивчаємо рухи роботів із відкритим ланцюгом, але цього разу з урахуванням сил і крутних моментів, які їх викликають; це предмет динаміки роботів. Пов'язані динамічні рівняння, які також називаються рівняннями руху, являють собою набір диференціальних рівнянь другого порядку у вигляді:

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + h(\theta, \dot{\theta}), \quad (7.1)$$

де $\theta \in R^n$ – вектор спільних змінних;

$\tau \in R^n$ – вектор спільних сил і крутних моментів,

$M(\theta) \in R^{n \times n}$ – симетрична додатньо визначена матриця мас,

$(h(\theta, \dot{\theta})) \in R^n$ – сили, які об'єднують доцентрові, коріолісові, сили тяжіння та тертя, які залежать від θ , і $\dot{\theta}$.

Не варто вводити в оману уявну простоту цих рівнянь; навіть для «простих» відкритих ланцюгів, наприклад, з осями з'єднань, ортогональними або паралельними одна одній, $M(\theta)$ і $(h(\theta, \dot{\theta}))$ можуть бути надзвичайно складними.

Подібно до того, як було зроблено різницю між прямою та зворотною кінематикою робота, також прийнято розрізняти пряму та зворотну динаміку робота. Пряма задача – це задача визначення прискорення θ робота з урахуванням стану $(\theta, \dot{\theta})$, а також спільних сил і крутних моментів,

$$\ddot{\theta} = M^{-1}(\theta)(\tau - h(\theta, \dot{\theta})), \quad (7.2)$$

а обернена задача полягає в знаходженні спільних сил і крутних моментів τ , що відповідають стану робота та бажаному прискоренню, тобто рівнянню (7.1).

Динамічні рівняння робота зазвичай отримують одним із двох способів: прямим застосуванням динамічних рівнянь Ньютона й Ейлера для твердого тіла (часто називають формулюванням Ньютона-Ейлера) або динамічним формулюванням Лагранжа, отриманим із кінетичної та потенційної енергії робота.

Формалізм Лагранжа концептуально елегантний і досить ефективний для роботів з простими структурами, наприклад, з трьома або менше ступенями свободи. Однак обчислення можуть швидко стати громіздкими для роботів із більшим ступенем свободи. Для загальних відкритих ланцюгів формулювання Ньютона-Ейлера призводить до ефективних рекурсивних алгоритмів як для зворотної, так і для прямої динаміки, які також можуть бути зібрані в аналітичні вирази закритої форми для, наприклад, матриці мас $M(\theta)$ та інших членів у рівняння динаміки (7.1). Формулювання Ньютона – Ейлера також використовує інструменти.

У цьому питанні ми вивчаємо формулювання динаміки Лагранжа та Ньютона – Ейлера для роботи з відкритим ланцюгом. У той час як ми зазвичай виражаємо динаміку через змінні θ спільного простору, іноді зручно виразити її через конфігурацію, скручування та швидкість зміни скручування кінцевого ефектора. Іноді роботи підлягають набору обмежень на їх рух, наприклад, коли робот вступає в контакт із твердим середовищем. Це призводить до формулювання обмеженої динаміки, за допомогою якого простір спільних крутних моментів і сил розділений на підпростір, який викликає рух робота, і підпростір, який викликає сили проти обмежень.

Формулювання Лагранжа. Основні поняття та спонукальні приклади. Першим кроком у лагранжевому формулюванні динаміки є вибір набору незалежних координат $q \in R^n$, який описує конфігурацію системи. Координати q називають узагальненими координатами. Після вибору узагальнених координат вони потім визначають узагальнені сили $f \in R^n$. Сили f і швидкості координат \dot{q} подвійні одна одній у тому сенсі, що скалярний добуток $f^T \dot{q}$ відповідає потужності. Тоді функція Лагранжа $L(q, \dot{q})$ визначається як кінетична енергія всієї системи $K(q, \dot{q})$ мінус потенційна енергія $P(q)$,

$$L(q, \dot{q}) = K(q, \dot{q}) - P(q).$$

Тепер рівняння руху можна виразити через лагранжіан таким чином:

$$f = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q}. \quad (7.3)$$

Ці рівняння також називаються рівняннями Ейлера – Лагранжа із зовнішніми силами. Виведення можна знайти в динамічних текстах.

Ми проілюструємо формулювання динаміки Лагранжа на двох прикладах. У першому прикладі розглянемо частинку масою m , змушену рухатися по вертикальній лінії. Конфігураційний простір частинки є цією вертикальною лінією, і природним вибором узагальненої координати є висота частинки, яку ми позначаємо скалярною змінною $x \in R$. Припустимо, що гравітаційна сила mg діє вниз, а зовнішня сила f є застосовується вгору. За другим законом Ньютона рівняння руху частинки має вигляд:

$$f - mg = m\ddot{x}. \quad (7.4)$$

Тепер ми застосуємо формалізм Лагранжа, щоб отримати той самий результат. Кінетична енергія дорівнює $m\dot{x}^2 / 2$, потенціальна – mgx , лагранжіан:

$$L(x, \dot{x}) = K(x, \dot{x}) - P(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx. \quad (7.5)$$

Тоді рівняння руху має вигляд:

$$L(x, \dot{x}) = K(x, \dot{x}) - P(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx, \quad (7.6)$$

що відповідає рівнянню (7.4).

Тепер ми виведемо динамічні рівняння для плоского відкритого ланцюга $2R$, що рухається під дією сили тяжіння (рис. 7.1).

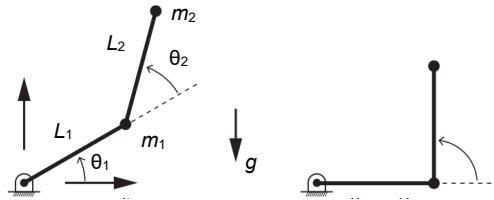


Рисунок 7.1 – Розімкнутий ланцюг $2R$ під дією сили тяжіння та при $\theta = (0, \pi/2)$

Ланцюг рухається в площині $\hat{x}-\hat{y}$, а сила тяжіння g діє в напрямку $-\hat{y}$. Перш ніж отримати динаміку, необхідно визначити масу та інерційні властивості всіх ланок. Для простоти дві ланки моделюються як точкові маси m_1 і m_2 , зосереджені на кінцях кожної ланки. Положення та швидкість маси ланки-1 визначаються як:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1 \\ L_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin \theta_1 \\ L_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix} \dot{\theta}_1,$$

в той час як маси ланки-2 задані як:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 \sin \theta_1 - L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}.$$

Як узагальнені координати виберемо спільні координати $\theta = (\theta_1, \theta_2)$. Тоді узагальнені сили $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ відповідають шарнірним моментам (оскільки $\tau^T \dot{\theta}$ відповідає потужності). Лагранжіан $L(\theta, \dot{\theta})$ має вигляд:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \sum_{i=1}^2 (K_i - P_i), \quad (7.7)$$

де члени кінетичної енергії ланки K_1 і K_2 дорівнюють:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2} m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2,$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) =$$

$$= \frac{1}{2} m_2 ((L_1^2 + 2L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_2^2) \dot{\theta}_1^2 + 2(L_2^2 + L_1 L_2 \cos \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2),$$

а члени потенційної енергії ланки P_1 і P_2 є:

$$P_1 = m_1 g y_1 = m_1 g L_1 \sin \theta_1,$$

$$P_2 = m_2 g y_2 = m_2 g (L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Рівняння Ейлера – Лагранжа (8.3) для цього прикладу мають вигляд:

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2. \quad (7.8)$$

Динамічні рівняння для плоского ланцюга $2R$ впливають із явної оцінки правої частини (7.8) (ми опускаємо детальні обчислення, які є простими, але стомлюючими):

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \left(m_1 L_1^2 + m_2 (L_1^2 + 2L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_2^2) \right) \ddot{\theta}_1 + \\ &\quad + m_2 (2L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_2^2) \ddot{\theta}_2 - \\ &\quad - m_2 L_1 L_2 \sin \theta_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) + (m_1 + m_2) L_1 g \cos \theta_1 + \\ &\quad + m_2 g L_1 L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \tau_2 &= m_2 (2L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_2^2) \ddot{\theta}_1 + m_2 L_2^2 \ddot{\theta}_2 + \\ &\quad + m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2 + m_2 g L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Ми можемо зібрати доданки разом у рівняння виду:

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + \underbrace{c(\theta, \dot{\theta})}_{h(\theta, \dot{\theta})} + g(\theta), \quad (7.10)$$

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} m_1 L_1^2 + m_2 (L_1^2 + 2L_1 L_2 \cos\theta_2 + L_2^2) & m_2 (L_1 L_2 \cos\theta_2 + L_2^2) \\ m_2 (2L_1 L_2 \cos\theta_2 + L_2^2) & m_2 L_2^2 \end{bmatrix},$$

$$c(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -m_2 L_1 L_2 \sin\theta_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) \\ m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1^2 \sin\theta_2 \end{bmatrix},$$

$$g(\theta) = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) L_1 g \cos\theta_1 + m_2 g L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ m_2 g L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix},$$

де $M(\theta)$ – симетрична позитивно визначена матриця маси,
 $c(\theta, \dot{\theta})$ – вектор, що містить Коріолісовий і доцентровий моменти,
 $g(\theta)$ – вектор, що містить гравітаційні моменти.

Вони показують, що рівняння руху є лінійними за $\ddot{\theta}$, квадратними за $\dot{\theta}$ і тригонометричними за θ . Це вірно загалом для серійних ланцюгів, що містять поворотні шарніри, а не лише для робота $2R$.

Члени $M(\theta)\ddot{\theta} + c(\theta, \dot{\theta})$ у рівнянні (7.10) можна було б отримати шляхом запису $f_i = m_i a_i$ для кожної точкової маси, де прискорення a_i записуються через θ , диференціюючи вирази для (якщо \dot{x}_1, \dot{y}_1) і (якщо \dot{x}_2, \dot{y}_2) наведені вище:

$$f_1 = \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{z1} \end{bmatrix} = m_1 \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 \end{bmatrix} = m_1 \begin{bmatrix} -L_1 \dot{\theta}_1^2 c_1 - L_1 \ddot{\theta}_1 s_1 \\ -L_1 \dot{\theta}_1^2 s_1 - L_1 \ddot{\theta}_1 c_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.11)$$

$$f_2 = m_2 \begin{bmatrix} -L_1 \dot{\theta}_1^2 c_1 - L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 c_{12} - L_1 \ddot{\theta}_1 s_1 - L_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) s_{12} \\ -L_1 \dot{\theta}_1^2 s_1 - L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 s_{12} - L_1 \ddot{\theta}_1 c_1 - L_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) c_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.12)$$

де S_{12} вказує на $\sin(\theta_1 + \theta_2)$ тощо. Визначення r_{11} як вектора від суглоба 1 до m_1 , r_{12} як вектора від суглоба 1 до m_2 і r_{22} як вектора від

суглоба 2 до m_2 , моменти в вирівняних системах (і), приєднаних до з'єднань 1 і 2, можна виразити як $m_1 = r_{11} \times f_1 + r_{12} f_2$ і $m_2 = r_{22} \times f_2$. (Зверніть увагу, що суглоб 1 має забезпечувати крутний момент для переміщення як m_1 , так і m_2 , але шарнір 2 повинен забезпечувати крутний момент лише для переміщення m_2 .) Крутні моменти з'єднання τ_1 і τ_2 є лише третіми елементами m_1 і m_2 , тобто моментами навколо осей z_i поза сторінкою відповідно.

У (x, y) координатах прискорення мас записуються просто як другі похідні за часом від координат, наприклад, (\ddot{x}_2, \ddot{y}_2) . Це пояснюється тим, що система $\hat{x} - \hat{y}$ є інерціальною. Однак спільні координати (θ_1, θ_2) не знаходяться в інерціальній системі, тому прискорення виражаються як сума доданків, які є лінійними щодо других похідних спільних змінних, $\ddot{\theta}$, і квадратичними першими похідними спільних змінних, $\dot{\theta}^T \dot{\theta}$, як видно з рівнянь (7.11) і (7.12). Квадратичні члени, що містять $\dot{\theta}_i^2$ називаються **доцентровими** членами, а квадратичні члени, що містять $\dot{\theta}_i \dot{\theta}_j$, $i \neq j$, називаються членами **Коріоліса**. Іншими словами, $\ddot{\theta} = 0$ не означає нульове прискорення мас через доцентрові та коріолісові члени.

Щоб краще зрозуміти доцентрові та коріолісові члени, розглянемо плече в конфігурації $(\theta_1, \theta_2) = (0, \pi/2)$, тобто $\cos \theta_1 = \sin \theta_1, \theta_2 = 1$, $\sin \theta_1 = \cos(\theta_1, \theta_2) = 0$. Припускаючи $\ddot{\theta} = 0$, прискорення (\ddot{x}_2, \ddot{y}_2) m_2 з рівняння (7.12) можна записати:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -L_1 \dot{\theta}_1^2 \\ -L_2 \dot{\theta}_1^2 - L_2 \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix}}_{\text{доцентрові терміни}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -2L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}}_{\text{терміни Коріоліса}}$$

На рис. 7.2 показано доцентрове прискорення $a_{\text{cent}1} = (-L_1, \theta_2, -L_2 \theta_2)$, коли $\theta_2 = 0$, доцентрове прискорення $a_{\text{cent}2} = (0, -L_2 \theta_2^2)$ при $\theta_1 = 0$, а прискорення **Коріоліса** $a_{\text{cor}} = (0, -2 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2)$, коли $\dot{\theta}_1$, і $\dot{\theta}_2$ є позитивними.

Як показано на рисунку 7.2, кожне доцентрове прискорення $a_{\text{cent}i}$ притягує m_2 до шарніра i , щоб підтримувати обертання m_2 навколо центру кола, визначеного шарніром i . Тому $a_{\text{cent}j}$ створює нульовий крутний момент навколо шарніра i . Прискорення Коріоліса a_{cor} у цьому прикладі проходить через шарнір 2, тому він створює

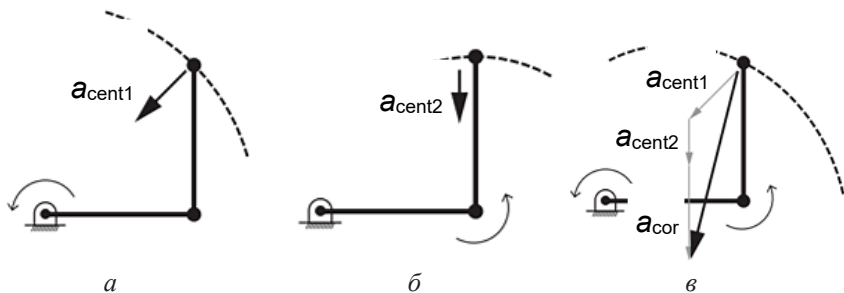


Рисунок 7.2 – Доцентрове прискорення a_{cent1} (а), доцентрове прискорення a_{cent2} (б) та прискорення Кориоліса (в)

нульовий крутний момент навколо шарніра 2, але створює негативний крутний момент навколо шарніра 1; крутний момент навколо шарніра 1 є негативним, тому що m_2 наближається до шарніра 1 (через рух шарніра 2). Тому інерція через m_2 відносно осі Z_1 зменшується, що означає, що позитивний імпульс навколо шарніра 1 падає, тоді як швидкість $\dot{\theta}_1$ шарніра 1 є постійною. Тому шарнір 1 повинен прикладати негативний крутний момент, оскільки крутний момент визначається як швидкість зміни моменту імпульсу. Інакше $\dot{\theta}_1$ зростатиме як m_2 наближається до суглоба 1 так само, як швидкість обертання фігуристки збільшується, коли вона тягне витягнуті руки під час обертання.

Загальні формулювання. Тепер ми опишемо формулювання динаміки Лагранжа для загальних відкритих ланцюгів з n -ланками. Першим кроком є вибір набору узагальнених координат $\theta \in R^n$ для конфігураційного простору системи. Для відкритих ланцюгів, усі з'єднання яких запущені, зручно і завжди можливо вибрати θ як вектор значень з'єднань. Узагальнені сили позначатимемо $\tau \in R^n$. Якщо θ_i – обертовий шарнір, то τ_i відповідатиме крутному моменту, а якщо θ_i – призматичний шарнір, то τ_i відповідатиме силі.

Після того, як θ вибрано та визначено узагальнені сили τ , наступним кроком є формулювання лагранжіана $L(\theta, \dot{\theta})$ наступним чином:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = K(\theta, \dot{\theta}) - P(\theta), \quad (7.13)$$

де $K(\theta, \dot{\theta})$ – кінетична енергія, а $P(\theta)$ – потенційна енергія всієї системи. Для роботів із жорсткими ланками кінетичну енергію завжди можна записати у вигляді:

$$K(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}(\theta) \dot{\theta}_i \dot{\theta}_j = \frac{1}{2} \dot{\theta}^T M(\theta) \dot{\theta}, \quad (7.14)$$

де $m_{ij}(\theta)$ – (i, j) -й елемент $n \times n$ матриці мас $M(\theta)$; конструктивний доказ цього твердження надається, коли ми розглядаємо формулювання Ньютона – Ейлера.

Динамічні рівняння отримані аналітично шляхом обчислення правої частини:

$$\tau_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7.15)$$

З кінетичною енергією, вираженою у рівнянні (7.14), динаміку можна записати явно як:

$$\tau_i = \sum_{j=1}^n m_{ij}(\theta) \ddot{\theta}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \Gamma_{ijk}(\theta) \dot{\theta}_j \dot{\theta}_k + \frac{\partial P}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (7.16)$$

де $\Gamma_{ijk}(\theta)$, відомі як символи Крістоффеля першого роду, визначаються таким чином:

$$\Gamma_{ijk}(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial m_{ij}}{\partial \theta_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial m_{jk}}{\partial \theta_i} \right).$$

Це показує, що символи Крістоффеля, які генерують Коріолісові та центропетильні члени $c(\theta, \dot{\theta})$, є похідними від матриці мас $M(\theta)$.

Як ми вже бачили, рівняння (7.16) часто збираються разом у формі:

$$\tau = M(\theta) \ddot{\theta} + c(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta),$$

або

$$M(\theta) \ddot{\theta} + h(\theta, \dot{\theta}),$$

де $g(\theta)$ є просто $dP/d\theta$.

Ми можемо чітко побачити, що коріолісові та доцентрові члени мають квадратичну швидкість за допомогою форми:

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + \dot{\theta}^T \Gamma(\theta)\dot{\theta} + g(\theta), \quad (7.17)$$

де $\Gamma(\theta)$ – матриця $n \times n \times n$, а добуток $\dot{\theta}^T \Gamma(\theta)\dot{\theta}$ слід інтерпретувати наступним чином:

$$\dot{\theta}^T \Gamma(\theta)\dot{\theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}^T \Gamma_1(\theta)\dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T \Gamma_2(\theta)\dot{\theta} \\ \vdots \\ \dot{\theta}^T \Gamma_n(\theta)\dot{\theta} \end{bmatrix},$$

де $\Gamma_i(\theta)$ – матриця $n \times n$ із (j, k) -м записом Γ_{ijk} .

Також прийнято бачити динаміку, записану як:

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + g(\theta),$$

де $C(\theta, \dot{\theta}) \in R^{n \times n}$ називається **матрицею Коріоліса** з (i, j) записом:

$$c_{ij}(\theta, \dot{\theta}) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ijk}(\theta)\dot{\theta}_k. \quad (7.18)$$

Матриця Коріоліса використовується для доведення наступної властивості пасивності (твердження 7.1), який можна використати для доказу стабільності певних законів керування роботом.

Твердження 7.1. Матриця $M(\theta) - 2C(\theta, \dot{\theta}) \in R^{n \times n}$ є кососиметричним, де $M(\theta) \in R^{n \times n}$ – матриця маси, $M(\theta)$ – її похідна за часом, а $C(\theta, \dot{\theta}) \in R^{n \times n}$ є матрицею Коріоліса, як визначено в рівнянні (7.19).

Доказ: (i, j) -й компонент $M - 2C$ є:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{ij}(\theta) - 2c_{ij}(\theta, \dot{\theta}) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_{ij}}{\partial \theta_k} \dot{\theta}_k - \frac{\partial m_{ij}}{\partial \theta_k} \dot{\theta}_k - \frac{\partial m_{ik}}{\partial \theta_j} \dot{\theta}_k + \frac{\partial m_{kj}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_{kj}}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_k - \frac{\partial m_{ik}}{\partial \theta_j} \dot{\theta}_k. \end{aligned}$$

Помінявши місцями індекси i і j , можна побачити, що:

$$m_{ji}(\theta) - 2c_{ji}(\theta, \dot{\theta}) = -(m_{ij}(\theta) - 2c_{ij}(\theta, \dot{\theta})),$$

таким чином доводячи, що $(M - 2C)^T = -(M - 2C)$, як заявлено.

7.2 Приклади вирішення практичних завдань

Приклад 7.1. Рис. 7.3 ілюструє робота RP , що рухається у вертикальній площині. Маса ланки 1 дорівнює m_1 , а центр мас – це відстань L_1 від шарніра 1. Скалярна інерція ланки 1 відносно осі, що проходить через центр мас і поза площиною, дорівнює I_1 . Маса ланки 2 дорівнює m_2 , центр мас – це відстань θ_2 від шарніра 1, а скалярна інерція ланки 2 відносно центру мас дорівнює I_2 . Сила тяжіння g діє вниз на сторінку.

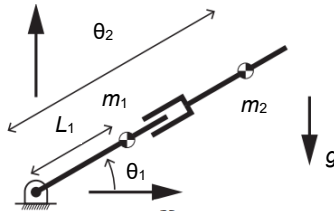


Рисунок 7.3 – Робот RP , що працює у вертикальній площині

1. Нехай розташування центру мас ланки i буде $(x_i; y_i)$. Знайдіть (x, y) для $i = 1, 2$ та їх похідних за часом через θ і $\dot{\theta}$.

Відповідь:

$$x_1 = L_1 \cos \theta_1 \quad \dot{x}_1 = -L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad x_2 = \theta_2 \cos \theta_1 \quad \dot{x}_2 = \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 - \theta_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1$$

$$y_1 = L_1 \sin \theta_1 \quad \dot{y}_1 = L_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad y_2 = \theta_2 \sin \theta_1 \quad \dot{y}_2 = \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 + \theta_2 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1.$$

2. Запишіть потенціальну енергію кожної з двох ланок, P_1 і P_2 , використовуючи спільні змінні θ .

Відповідь:

$$P_1 = m_1 g y_1 = m_1 g L_1 \sin \theta_1,$$

$$P_2 = m_2 g y_2 = m_2 g \theta_2 \sin \theta_1.$$

3. Напишіть кінетичну енергію кожної з двох ланок K_1 і K_2 . (Нагадаємо, що кінетична енергія твердого тіла, що рухається в площині, дорівнює $K = (1/2)mV^2 + (1/2)I\omega^2$, де m – маса, V – скалярна лінійна швидкість у центрі маса, ω – скалярна кутова швидкість, а I – скалярна інерція твердого тіла відносно його центру мас.)

Відповідь:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} (I_1 + m_1 L_1^2) \dot{\theta}_1^2,$$

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} ((I_2 + m_2 \theta_2^2) \dot{\theta}_1^2 + m_2 \dot{\theta}_2^2).$$

4. Що таке лагранжیان через K_1 , K_2 , P_1 і P_2 ?

Відповідь:

$$L = K_1 + K_2 - P_1 - P_2.$$

5. Один із доданків у лагранжіані можна виразити як:

$$\frac{1}{2} m_2 \theta_2^2 \dot{\theta}_1^2.$$

Якби це був повний лагранжіан, якими були б рівняння руху? Отримайте їх вручну (без символічної допомоги математичної програми). Укажіть, які з членів у ваших рівняннях є функцією θ , які є членами Коріоліса, які є доцентровими членами, а які є членами сили тяжіння, якщо такі є.

Відповідь:

$$\tau_1 = 2m_2 \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 \theta_2^2 \ddot{\theta}_1.$$

Перший член є членом Коріоліса, а другий член залежить від $\ddot{\theta}_1$:

$$\tau_2 = -m_2 \theta_2 \dot{\theta}_1^2.$$

Цей термін є доцентровим.

6. Тепер виведіть рівняння руху (або вручну, або використовуючи символічну математичну програму для допомоги) для повного лагранжіана та помістіть їх у форму:

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta).$$

Визначте, який із доданків в $c(\theta, \dot{\theta})$ є коріолісовими та доцентровими. Поясніть тому, хто не знайомий з динамікою, чому ці терміни вносять внесок у спільні сили та крутні моменти.

Відповідь:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} I_1 + I_2 + m_1 L_1^2 + m_2 \theta_2^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix},$$

$$c(\theta, \dot{\theta}) = \begin{bmatrix} 2m_2 \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ -m_2 \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix},$$

$$g(\theta) = \begin{bmatrix} (m_1 L_1 + m_2 \theta_2) g \cos \theta_1 \\ m_2 g \sin \theta_1 \end{bmatrix}.$$

7. Розглянемо залежну від конфігурації матрицю мас $M(\theta)$ із вашої попередньої відповіді. Коли робот перебуває в стані спокою (і ігноруючи силу тяжіння), матрицю мас можна візуалізувати як еліпс спільних сил/моментів, необхідних для створення одиничного кола спільних прискорень у просторі θ . Як змінюється цей еліпс із збільшенням θ_2 ? Опишіть це в тексті та надайте рисунок.

Відповідь:

Матриця мас $M(\theta)$ діагональна, тому головні осі еліпса $M(\theta)\ddot{\theta}$ (для всіх $\ddot{\theta}$, що задовольняють $|\ddot{\theta}|=1$) співпадають з осями τ_1 та τ_2 , а довжини цих головних осей (власні значення M) дорівнюють вздовж діагоналі. Зі збільшенням θ_2 лівий верхній компонент M зростає. Це означає, що більші крутні моменти в шарнірі 1 потрібні для того, щоб для створення прискорень у напрямку $\ddot{\theta}_1$, через збільшення інерції робота відносно суглоба 1. Отже, еліпс стає ширшим у напрямку τ_1 .

Дивіться рисунок 7.4.

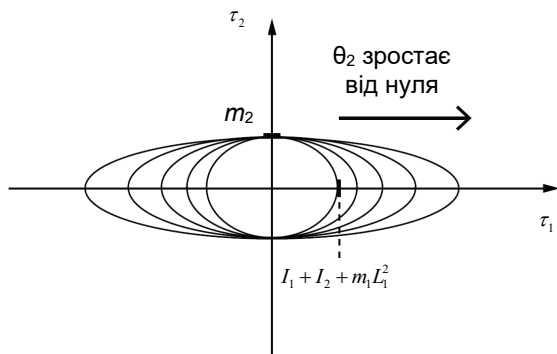


Рисунок 7.4 – Матриця мас $M(\theta)$, представлена у вигляді еліпса спільних сил і моментів, що відповідають одиничному колу спільних прискорень $\ddot{\theta}$ (коли сила тяжіння і спільні швидкості дорівнюють нулю)

8. Тепер візуалізуйте залежну від конфігурації матрицю мас кінцевого ефектора $\Lambda(\theta)$, де вважається, що «кінцевий ефектор» знаходиться в точці (x_2, y_2) , де знаходиться центр маси другої ланки. Для одиничного кола прискорень $(2, 2)$ розглянемо еліпс лінійних сил, які необхідно прикласти до кінцевого ефектора, щоб реалізувати ці прискорення. Як змінюється орієнтація цього еліпса при θ_1 зміні? Як змінюється форма при θ_2 зростає від нуля до нескінченності, коли $\theta_1 = 0$? Наведіть креслення для випадку $\theta_1 = 0$. Якщо у вас є доступ до програмного забезпечення для символьних обчислень (наприклад, Mathematica), ви можете використовувати якобіан $J(\theta)$, задовольняючи:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = J(\theta)\dot{\theta},$$

щоб обчислити $\Lambda(\theta) = J^T(\theta)M(\theta)J(\theta)$ для випадку $\theta_1 = 0$. Якщо у вас немає доступу до програмного забезпечення для символьних обчислень, ви можете підключити числові значення для I_1, I_2, m_1, m_2 і L_1 (зробіть їх усіх рівними, наприклад, 1), щоб сказати щось про те, як змінюється Λ (і, отже, як змінюється еліпс) при θ_2 йде від нуля до нескінченності, тоді як $\theta_1 = 0$.

Відповідь:

Якобіан, що зв'язує спільні швидкості $\dot{\theta}$ зі швидкістю кінцевого ефектора (\dot{x}_2, \dot{y}_2) є:

$$J(\theta) = \begin{bmatrix} -\theta_2 \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \\ \theta_2 \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \end{bmatrix},$$

а матриця мас кінцевих ефекторів має вигляд:

$$\Lambda(\theta) = J^{-T} M J^{-1}.$$

Нас цікавить еліпс $\Lambda(\theta)[\ddot{x}_2, \ddot{y}_2]$ (у просторі (f_x, f_y)), коли прискорення кінцевого ефектора є одиничним вектором.

Орієнтація цього еліпса обертається з θ_1 , тому ми можемо просто розглянути випадок для певної константи θ_1 , тобто $\theta_1 = 0$ (кінцевий ефектор знаходиться у точці $(x_2, y_2) = (0, \theta_2)$). У цьому випадку сила, прикладена до кінцевого ефектора у напрямку f_x діє на витягування або втягування суглоба 2, поки сила у напрямку f_y діє на поворот робота навколо суглоба 1.

Оцінивши $\Lambda(\theta)$ при $\theta_1 = 0$, отримаємо діагональну матрицю:

$$\begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & \frac{I_1 + I_2 + m_1 L_1^2 + m_2 \theta_2^2}{\theta_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 & 0 \\ 0 & \frac{k + m_2 \theta_2^2}{\theta_2^2} \end{bmatrix},$$

де k – додатна константа. Оскільки матриця діагональна, головні осі еліпса $\Lambda(\theta)[\ddot{x}_2, \ddot{y}_2]^T$ (де прискорення кінцевого ефектора є одиничним вектором) збігаються з осями f_x і f_y , а довжини головних компонент є елементами вздовж діагоналі. Позірна маса на кінцевому векторі в радіальному (x) напрямку дорівнює m_2 , тобто не залежить від θ_2 . Позірна маса в тангенціальному (y) напрямку залежить від θ_2 , однак. Коли θ_2 наближається до нуля зверху, нижній правий компонент Λ наближається до нескінченності. Це означає, що для прискорення наконечника в напрямку y потрібні великі сили f_y . Це пов'язано з тим, що крутний момент відносно шарніра 1, який створюється силою f_y через кінцевий ефектор, прямує до нуля, коли кінцевий ефектор наближається до шарніра 1, і тому f_y має стати великим, щоб створити

кутове прискорення інерції відносно шарніра 1, необхідне для створення помірною прискорення \ddot{y}_2 . Відповідно, головна вісь еліпса мас кінцевого ефектора в напрямку f_y стає великою (рисунок 7.5).

Коли θ_2 наближається до нескінченності, правий нижній елемент Λ падає до m_2 , а еліпс матриці мас кінцевого ефектора наближається до кола: кінцевий ефектор відчуває себе масою m_2 в усіх напрямках.

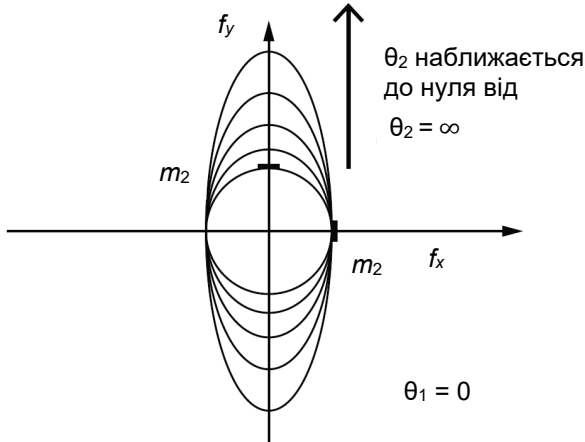


Рисунок 7.5 – Матриця мас кінцевого ефектора $\Lambda(\theta)$

Матриця мас кінцевого ефектора $\Lambda(\theta)$, представлена на рисунку 7.5 у вигляді еліпса сил, які необхідно прикласти до кінцевого елемента, щоб створити коло прискорень (\ddot{x}_2, \ddot{y}_2) . Оскільки θ_2 прямує до нуля, величина сили, необхідної для створення одиничного прискорення $(0, \ddot{y}_2)$, наближається до m_2 , тобто робот відчуває себе як точкова маса з масою m_2 .

Приклад 7.2. Матриця мас робота $2R$ на рисунку 7.6 дорівнює:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} m_1 L_1^2 + m_2 (L_1^2 + 2L_1 L_2 \cos\theta_2 + L_2^2) & m_2 (L_1 L_2 \cos\theta_2 + L_2^2) \\ m_2 (L_1 L_2 \cos\theta_2 + L_2^2) & m_1 L_2^2 \end{bmatrix},$$

де кожна ланка моделюється як точкова маса на кінці ланки.

1. Поясніть у тексті та/або на малюнках, чому кожен із записів має сенс, наприклад, використовуючи спільні прискорення $\ddot{\theta} = (1, 0)$ і $(0, 1)$.

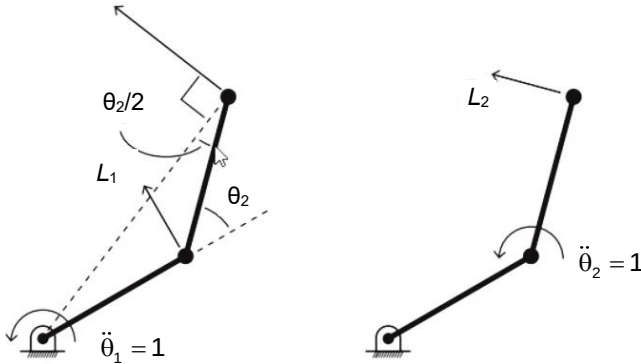


Рисунок 7.6 – Лінійні прискорення точкових мас руки $2R$ для суглоба прискорення $(1, 0)$ і $(0, 1)$

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix},$$

$$M_{11} = m_1 L_1^2 + m_2 (L_1^2 + 2L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_2^2),$$

$$M_{12} = M_{21} = m_2 (L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_2^2), \quad M_{22} = m_2 L_2^2.$$

На рисунку 7.6 показано лінійні прискорення мас m_1 і m_2 для спільних прискорень $(1, 0)$ і $(0, 1)$.

Терміни M_{11} і M_{22} відносно легко зрозуміти.

Термін M_{11} – це інерція робота навколо шарніра 1, якщо шарнір 2 заблоковано. Інерція через m_1 становить $m_1 L_1^2$. Та дистанція для m_2 для 1 є:

$$d_2 = \sqrt{L_1^2 + 2L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_2^2},$$

де інерція через шарнір m_2 є $m_2 d_2^2$.

Термін M_{22} – це інерція навколо шарніра 2 через масу m_2 на відстані L_2 від шарніра. Недіагональний термін важче зрозуміти. Але ми знаємо, що якщо шарнір 1 прискорюється, шарнір 2 повинен прикладати крутний момент, щоб утримувати шарнір 2 у блокуванні. І якщо шарнір 2 прискорюється, шарнір 1 повинен прикладати крутний момент, щоб залишатися заблокованим; інакше збереження кутового моменту навколо шарніра 1 призведе до того, що він почне обертатися в напрямку, протилежному шарніру 2. Використовуючи малюнок 7.2 і деяку геометрію, ви можете обчислити крутний момент шарніра τ_2 , необхідний для утримання шарніра 2 нерухомим, коли $\dot{\theta}_1 = 1$, на основі у момент навколо шарніра 2, створеного силовою лінією, необхідною для прискорення m_2 .

2. Тепер виведіть рівняння руху (або вручну, або використовуючи символічну математичну програму для допомоги) для повного лагранжіана та помістіть їх у форму:

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + c(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta).$$

Визначте, який із доданків в $c(\theta, \dot{\theta})$ є коріолісовими та доцентровими. Поясніть тому, хто не знайомий з динамікою, чому ці терміни вносять внесок у спільні сили та крутні моменти.

3. Розглянемо залежну від конфігурації матрицю мас $M(\theta)$ із вашої попередньої відповіді. Коли робот перебуває в стані спокою (і ігноруючи силу тяжіння), матрицю мас можна візуалізувати як еліпс спільних сил/моментів, необхідних для створення одиничного кола спільних прискорень у просторі θ . Як змінюється цей еліпс із збільшенням θ_2 ? Опишіть це в тексті та надайте малюнок.

4. Тепер візуалізуйте залежну від конфігурації матрицю мас кінцевого ефектора $\Lambda(\theta)$, де вважається, що «кінцевий ефектор» знаходиться в точці (x_2, y_2) , де знаходиться центр маси другої ланки. Для одиничного кола прискорень (\ddot{x}_2, \ddot{y}_2) розглянемо еліпс лінійних сил, які необхідно прикласти до кінцевого ефектора, щоб реалізувати ці прискорення. Як змінюється орієнтація цього еліпса при θ_1 зміні? Як змінюється форма при θ_2 зростає від нуля до нескінченності, коли $\theta_1 = 0$? Наведіть креслення для випадку $\theta_1 = 0$. Якщо у вас є доступ до програмного забезпечення для символічних обчислень

(наприклад, Mathematica), ви можете використовувати якобіан $J(\theta)$, задовольняючи:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = J(\theta)\dot{\theta}.$$

Щоб обчислити $\Lambda(\theta) = J^T(\theta)M(\theta)J^{-1}(\theta)$ для випадку $\theta_1 = 0$. Якщо у вас немає доступу до програмного забезпечення для символьних обчислень, ви можете підключити числові значення для I_1 , I_2 , m_1 , m_2 і L_1 (зробіть їх усіх рівними, наприклад, 1), щоб сказати щось про те, як змінюється Λ (і, отже, як змінюється еліпс) при θ_2 йде від нуля до нескінченності, тоді як $\theta_1 = 0$.

7.3 Завдання до практичної роботи (розв'язати вправи)

Практична вправа 7.1. Рівняння руху конкретної руки робота $2R$ можна записати $M(\theta)\ddot{\theta} + c(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta) = \tau$. Лагранжیان $L(\theta, \dot{\theta})$ для робота можна записати в компонентах як:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = L^1(\theta, \dot{\theta}) + L^2(\theta, \dot{\theta}) + L^3(\theta, \dot{\theta}) + \dots$$

Однією з цих складових є $L^1 = m\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos\theta_2$.

1. Знайти шарнірні моменти τ_1 і τ_2 що відповідає компоненті L^1 .
2. Запишіть матрицю маси $2 \times 2 M_1(\theta)$, вектор швидкості-добутку що $M = M^1 + M^2 + M^3 + \dots$, $c = c^1 + c^2 + c^3 + \dots$ і $g = g^1 + g^2 + g^3 + \dots$.

Практична вправа 7.2. Для даної конфігурації θ двошарнірного робота, матриця мас є:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} 3 & a \\ b & 2 \end{bmatrix},$$

який має визначник $6 - ab$ і власні значення $1/2(5 \pm \sqrt{1+4ab})$. Яким обмеженням повинні відповідати a і b , щоб це була дійсна матриця мас?

Практична вправа 7.3. Ланка (i) робота з відкритим ланцюгом має дві рами, прикріплені до неї: раму (b) в центрі маси та раму (a) на осі шарніра i , поворотного шарніра, який приводить в рух ланку. У кадрі (a) вісь гвинта поворотного шарніра виражена як S . У зворотних ітераціях зворотної динаміки Ньютона – Ейлера було визначено, що гайковий ключ F_b (виражений у (b)) повинен бути застосований до посилення. Який крутний момент τ має бути прикладений до з'єднання (i), в термінах F_b , S та рамок (a) і (b)?

Практична вправа 7.4. На рисунку 7.7 показано кільце в площині $\hat{y}_b - \hat{z}_b$ (координата \hat{x}_b кожної точки на кільці дорівнює нулю). Радіус кільця дорівнює 3 (уся маса знаходиться на відстані 3 від осі \hat{x}_b). Маса кільця дорівнює 10, і маса рівномірно розподілена навколо кільця. Запишіть матрицю просторової інерції G_b . Усі записи мають бути цифровими, без символів чи математики.

Практична вправа 7.5. Лагранжیان конкретного двошарного робота є:

$$L = L^1 + \text{інші доданки},$$

де

$$L^1 = \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2.$$

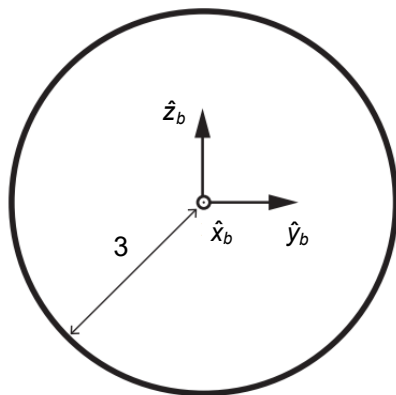


Рисунок 7.7 – Кільце радіуса 3

1. Знайдіть τ_1^1 , силу / крутний момент у з'єднанні 1 (для довільних $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$) через L^1 . Для кожного члена у вашій відповіді позначте його як член матриці мас, член Коріоліса, доцентровий член або член сили тяжіння.

2. Знайдіть τ_2^1 і, силу / крутний момент у з'єднанні 2 (для довільних $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$) завдяки L_1 . Для кожного члена у вашій відповіді позначте його як член матриці мас, член Коріоліса, доцентровий член або член сили тяжіння.

7.4 Питання для самоперевірки

1. Що таке динаміка відкритих ланцюгів, і як вона застосовується до робіт?
2. Як узагальнені координати θ впливають на опис положення та руху механічних систем?
3. Які фізичні величини враховуються при розрахунку лагранжіана?
4. Чому в динамічних рівняннях виділяють члени Коріоліса, доцентрові члени і члени сили тяжіння?
5. Як виглядає повний лагранжіан системи з двох ланок робота RP?
6. Як виводяться рівняння руху з лагранжіана? Опишіть процес.
7. Як розпізнати:
 - доцентрові члени в рівняннях руху?
 - члени Коріоліса?
 - члени, пов'язані із силою тяжіння?
8. Чому члени Коріоліса і доцентрові члени з'являються лише у динамічних системах з обертанням?
9. Чому у випадку $2R$ матриця мас залежить лише від довжин ланок і маси, а не від їхньої форми?
10. Як обчислити матрицю мас для робота $2R$, якщо вся маса зосереджена на кінцях ланок?
11. Як виглядає рівняння руху робота RP, якщо не враховувати силу тяжіння?
12. Опишіть, як власні значення матриці мас впливають на динамічну стійкість робота.

7.5 Перелік рекомендованих джерел

1. Булгаков В. М., Адамчук В. В., Черниш О. М., Березовий М. Г., Яременко В. В. Теорія механізмів і машин : підручник. Київ : Видавництво «Агроінженерія», 2020. 608 с.
2. Троханяк О. С. Теорія механізмів і машин : навчальний посібник. Київ : Видавництво КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 88 с.
3. Кірієнко О. А. Синтез і аналіз механізму приводу : навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2022. 88 с.
4. Міщенко А. А. Аналіз і синтез просторових механізмів : монографія. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2023. 230 с.
5. Скоропад О. І., Лисенко П. Г. Основи робототехніки : навчальний посібник. Львів : Видавництво ЛНУ, 2021. 342 с.
6. Ковальчук С. І., Орлов В. М. Паралельні маніпулятори: моделювання і оптимізація. Дніпро : ДНУ ім. О. Гончара, 2020. 256 с.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 8 _____

ПРАКТИЧНІ ВПРАВИ З ГЕНЕРАЦІЇ ТРАЄКТОРІЇ

Метою практичної роботи є набуття практичних навичок вирішення практичних вправ з генерації траєкторії.

Завдання практичної роботи:

1. Ознайомитись та вивчити теоретичні дані.
2. Ознайомитись з прикладами вирішення практичних завдань.
3. Вирішити вправи.

8.1 Теоретичні дані

Найпростішим типом руху є рух від спокою в одній конфігурації до спокою в іншій. Ми називаємо це рухом від точки до точки. Найпростішим видом шляху для руху від точки до точки є пряма лінія. Прямолінійні шляхи та їх часові масштаби обговорюються нижче.

Прямі лінії. «Пряма» від початкової конфігурації $\theta_{\text{поч.}}$, щоб кінцева конфігурація $\theta_{\text{кін.}}$ могла бути визначена в просторі з'єднань або в просторі завдань. Перевагою прямолінійного шляху від $\theta_{\text{поч.}}$ до $\theta_{\text{кін.}}$ в просторі з'єднання є простота: оскільки межі з'єднання зазвичай мають форму $\theta_{\text{поч.}} < \theta_i < \theta_{i,\text{max}}$ для кожного суглоба i допустимі конфігурації суглобів утворюють опуклий набір θ_{free} у просторі суглоба, тому пряма лінія між будь-якими двома кінцевими точками в θ_{free} також лежить у θ_{free} . Пряму можна записати:

$$\theta(s) = \theta_{\text{поч.}} + s(\theta_{\text{кін.}} - \theta_{\text{поч.}}), \quad s \in [0,1], \quad (8.1)$$

з похідними:

$$\frac{d\theta}{ds} = \theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}}, \quad (8.2)$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = 0. \quad (8.3)$$

Прямі лінії в суглобовому просторі зазвичай не дають прямолінійного руху кінцевого ефектора в робочому просторі. Якщо потрібні прямолінійні рухи простору завдань, початкову та кінцеву конфігурації можна вказати за допомогою X початку та кінця X у просторі завдань.

На рис. 8.1 вгорі у центрі прямолінійний шлях у суглобовій щілині та (вгорі праворуч) відповідний рух кінцевого ефектора в просторі завдань (пунктирна лінія). Конфігурації доступної кінцевої точки, підлягають обмеженням з'єднання, позначені сірим кольором. (Внизу по центру) Ця крива лінія в суглобі пробілі і (внизу праворуч) відповідний прямолінійний шлях у просторі завдань (пунктир лінія) порушить межі з'єднання.

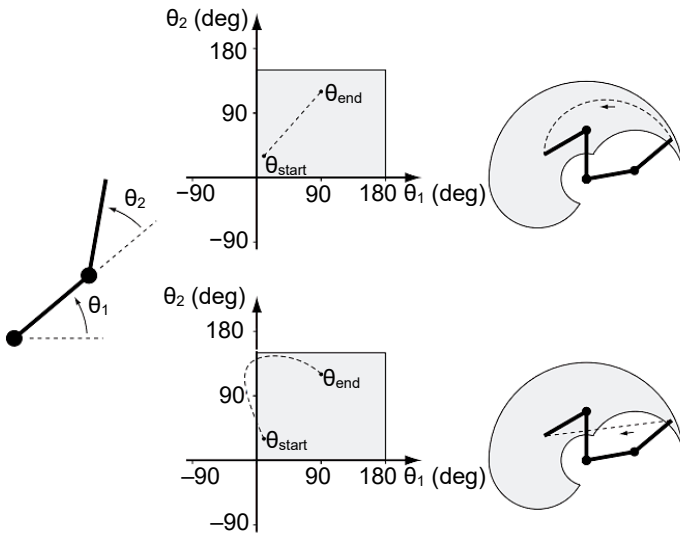


Рисунок 8.1 – Робот 2R із межами з'єднання $0^\circ \leq \theta_1 \leq 180^\circ$, $0^\circ \leq \theta_2 \leq 150^\circ$ прямолінійний шлях у суглобовій щілині, відповідний рух кінцевого ефектора в просторі завдань та конфігурації доступної кінцевої точки

Якщо X початок і X кінець представлені мінімальним набором координат, тоді пряма лінія визначається як $X(s) = X_{\text{початок}} + s(X_{\text{кінець}} - X_{\text{початок}})$, $s \in [0,1]$. Порівняно з випадком, коли використовуються спільні координати, необхідно вирішити наступні проблеми:

- якщо шлях проходить поблизу кінематичної сингулярності, спільні швидкості можуть стати невикорядано великими для майже всіх часових масштабів шляху;

- оскільки досяжний простір завдань робота може не бути опуклим у координатах X , деякі точки на прямій лінії між двома досяжними кінцевими точками можуть бути недосяжними (рисунки 8.1).

На додаток до проблем, наведених вище, якщо $X_{\text{поч.}}$ і $X_{\text{кін.}}$ представлені як елементи $SE(3)$ замість мінімального набору координат, то виникає питання, як визначити «пряму» лінію в $SE(3)$. Конфігурація у вигляді $X_{\text{початок}} + s(X_{\text{кінець}} - X_{\text{початок}})$ зазвичай не міститься в $SE(3)$.

Одним із варіантів є використання руху гвинта (одночасне обертання навколо та переміщення вздовж фіксованої осі гвинта), яке переміщує кінцевий ефектор робота від $X_{\text{поч.}} = X(0)$ до $X_{\text{кін.}} = X(1)$. Щоб отримати цей $X(s)$, ми можемо явно записати початкову та кінцеву конфігурації у кадрі (s) як Xs , початок і $Xs_{\text{кін.}}$ і використати наше правило скасування нижнього індексу, щоб виразити кінцеву конфігурацію у початковому кадрі:

$$X_{\text{поч.,кін.}} = X_{\text{поч.}}, \quad sXs_{\text{кін.}} = X^{-1}s_{\text{поч.}} Xs_{\text{кін.}}$$

Тоді $\log(X^{-1}_{\text{поч.}} X_{s,\text{кін.}})$ – це матричне представлення скручування, виражене в кадрі (start), яке переміщує X початок до $X_{\text{кін.}}$ за одиницю часу. Тому шлях можна записати як:

$$X(s) = X_{\text{поч.}} \exp(\log(X^{-1}_{\text{поч.}} X_{\text{кін.}})s), \quad (8.4)$$

де $X_{\text{поч.}}$ помножено на матричну експоненціалу, оскільки поворот представлений у кадрі (start), а не у фіксованому світовому кадрі (s).

Цей рух гвинта забезпечує «прямолінійний» рух у тому сенсі, що вісь гвинта є постійною. Початок кінцевого ефектора зазвичай не йде прямою лінією в декартовому просторі, оскільки він слідує

за гвинтовим рухом. Може бути краще відокремити обертальний рух від поступального руху. Записуючи $X = (R, p)$, ми можемо визначити шлях:

$$p(s) = p_{\text{поч.}} + s(p_{\text{кін.}} - p_{\text{поч.}}), \quad (8.5)$$

$$R(s) = R_{\text{поч.}} \exp(\log(R_{\text{поч.}}^{-1} R_{\text{кін.}}) s), \quad (8.6)$$

де початок рамки йде по прямій лінії, а вісь обертання постійна в рамці тіла. На рисунку 8.2 показано гвинтовий шлях і відокремлений шлях для тих самих $X_{\text{поч.}}$ і $X_{\text{кін.}}$.

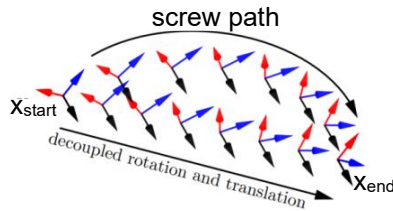


Рисунок 8.2 – Шлях, що слідує за постійним рухом гвинта, порівняно з роз'єднаним шляхом, де початок системи йде по прямій лінії, а кутова швидкість постійна

Масштабування часу прямолінійного шляху. Масштабування часу $s(t)$ шляху має забезпечувати належну плавність руху та дотримання будь-яких обмежень на швидкість і прискорення робота. Для прямолінійного шляху в просторі суглоба форми (рис. 8.3) масштабовані в часі швидкості та прискорення суглобів є $\dot{\theta} = \dot{s} (\theta_{\text{кін.}} - \theta_{\text{поч.}})$ і $\ddot{\theta} = \ddot{s} (\theta_{\text{кін.}} - \theta_{\text{поч.}})$, відповідно. Для прямолінійного шляху в просторі завдань, параметризованого мінімальним набором координат $X \in \mathbb{R}^m$, просто замініть $\theta, \dot{\theta}$ і $\ddot{\theta}$ на X, \dot{X} і \ddot{X} .

Поліноміальне масштабування часу. Поліноми третього порядку. Зручною формою масштабування часу $s(t)$ є кубічний поліном часу,

$$s(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3. \quad (8.7)$$

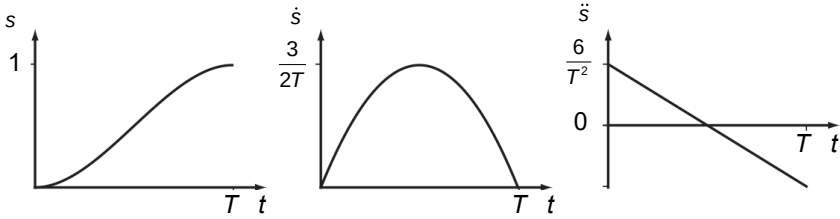


Рисунок 8.3 – Графіки $s(t)$, $\dot{s}(t)$ і $\ddot{s}(t)$ для поліноміального часового масштабування третього порядку

Рух від точки до точки за час T накладає початкові обмеження $s(0) = \dot{s}(0) = 0$ і кінцеві обмеження $s(T) = 1$ і $\dot{s}(T) = 0$. Оцінка рівняння (8.7) і його похідна:

$$\dot{s}(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2, \quad (8.8)$$

при $t=0$ і $t=T$ і розв'язуючи чотири обмеження для a_0, \dots, a_3 , ми знаходимо:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{3}{T^2}, \quad a_3 = -\frac{2}{T^3}.$$

Графіки $s(t)$, $\dot{s}(t)$ і $\ddot{s}(t)$ показані на рисунку 8.3.

Підставляючи $s = a_2t^2 + a_3t^3$ у рівняння (8.1), виходить:

$$\theta(t) = \theta_{start} + \left(\frac{3t^2}{T^2} - \frac{2t^3}{T^3} \right) (\theta_{end} - \theta_{start}), \quad (8.9)$$

$$\dot{\theta}(t) = \left(\frac{6}{T^2} - \frac{6t^2}{T^3} \right) (\theta_{end} - \theta_{start}), \quad (8.10)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \left(\frac{6}{T^2} - \frac{12t}{T^3} \right) (\theta_{end} - \theta_{start}). \quad (8.11)$$

Максимальні сумарні швидкості досягаються на половині шляху $t = T/2$:

$$\dot{\theta}_{max} = \frac{3}{2T} (\theta_{end} - \theta_{start}).$$

Максимальні спільні прискорення і уповільнення досягаються при $t=0$ і $t=T$:

$$\ddot{\theta}_{\max} = \left| \frac{6}{T^2} (\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}}) \right|, \quad \ddot{\theta}_{\min} = - \left| \frac{6}{T^2} (\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}}) \right|.$$

Якщо відомі обмеження на максимальні сумісні швидкості $|\dot{\theta}| \leq \dot{\theta}_{\text{limit}}$, максимальні суглобові прискорення $|\ddot{\theta}| \leq \ddot{\theta}_{\text{limit}}$, ці межі можна перевірити, щоб побачити, чи можливий запитований час руху T . Крім того, можна вирішити для T , щоб знайти мінімально можливий час руху, який задовольняє найбільше обмеження швидкості або прискорення.

Поліноми п'ятого порядку Оскільки масштабування часу третього порядку не обмежує прискорення шляху кінцевої точки $\dot{s}(0)$ і $\dot{s}(T)$ рівними нулю, робота просять досягти переривчастого стрибка прискорення як при $t=0$, так і при $t=T$. Це означає нескінченний ривок, похідну від прискорення, який може викликати вібрацію робота.

Одне з рішень полягає в тому, щоб обмежити прискорення кінцевої точки до $s(0) = s(T) = 0$. Додавання цих двох обмежень до формулювання проблеми вимагає додавання ще двох свобод дизайну в поліномі, що дає квінтичний поліном часу, $s(t) = a_0 + \dots + a_5 t^5$. Ми можемо використовувати шість кінцевих обмежень положення, швидкості та прискорення, щоб однозначно розв'язати $a_0 + \dots + a_5$, що дає більш плавний рух із вищою максимальною швидкістю, ніж кубічне масштабування часу. Графік часового масштабування показано на рисунку 8.4.

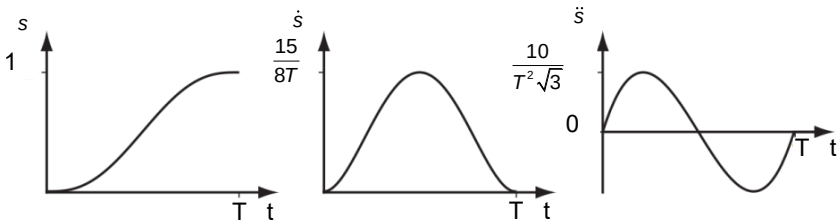


Рисунок 8.4 – Графіки $s(t)$, $\dot{s}(t)$ і $\ddot{s}(t)$ для поліноміального часового масштабування п'ятого порядку

Трапецієподібні профілі руху. Трапецієподібні шкали часу досить поширені в управлінні двигуном, особливо для руху одного суглоба, і вони отримали свою назву через свої профілі швидкості.

Рух від точки до точки складається з постійної фази прискорення $\ddot{s} = a$ часу t_a , за якою слідує фаза постійної швидкості $\dot{s} = v$ часу $t_v = T - 2t_a$, за якою слідує постійна фаза уповільнення $\ddot{s} = -a$ часу t_a . Отриманий s -профіль є трапецією, а \dot{s} -профіль – зчепленням параболи, лінійного сегмента та параболи як функції часу (рис. 8.5).

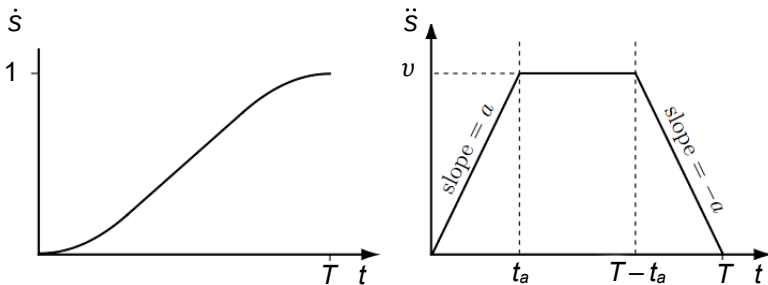


Рисунок 8.5 – Графіки $\dot{s}(t)$ і $\ddot{s}(t)$ для трапецієподібного профілю руху

Трапецієподібне масштабування часу не таке плавне, як кубічне масштабування часу, але воно має перевагу в тому, що якщо є відомі постійні обмеження спільних швидкостей $\dot{\theta}_{\text{limit}} \in R^n$ і сумісних прискорень $\ddot{\theta}_{\text{limit}} \in R^n$, тоді трапецієподібний рух за допомогою найбільший v і задовільний є найшвидшим можливим прямолінійним рухом.

$$|(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}})v| \leq \dot{\theta}_{\text{limit}}, \quad (8.12)$$

$$|(\theta_{\text{end}} - \theta_{\text{start}})a| \leq \ddot{\theta}_{\text{limit}}. \quad (8.13)$$

Якщо $v^2/a > 1$, робот ніколи не досягне швидкості v під час руху (наприклад, 8.10). Трифазний рух прискорення-вигігу-уповільнення стає двофазним рухом прискорення-уповільнення «бах-бах», а трапецієподібний профіль $s(t)$ на рисунку 8.5 стає трикутником.

Оскільки лише два з v , a і T можна вибрати незалежно, у нас є три варіанти:

1. Виберіть v і a так, щоб $v^2/a < 1$, забезпечуючи триступеневий трапецієподібний профіль, і розв'яжіть $s(T) = 1$ (використовуючи рівняння для T):

$$T = \frac{a + v^2}{va}.$$

Якщо v і a відповідають максимально можливим суглобовим швидкостям і прискоренням, це мінімально можливий час руху.

2. Виберіть v і T так, щоб $2 > vT > 1$, забезпечивши триступеневий трапецієподібний профіль і щоб максимальна швидкість v була достатньою для досягнення $s = 1$ за час T , і розв'яжіть $s(T) = 1$ для a :

$$a = \frac{v^2}{vT - 1}.$$

Якщо припустити, що $v^2/a < 1$, трапецієподібний рух повністю визначається v , a , t_a і T , але лише два з них можуть бути визначені незалежно, оскільки вони повинні задовольняти $s(T) = 1$ і $v =$ при a . Навряд чи ми б задали t_a самостійно, тому ми можемо виключити його з рівнянь руху заміною $t_a = v/a$. Профіль руху протягом трьох етапів (прискорення, вибіг, уповільнення) можна записати через v , a і T наступним чином:

$$\text{for } 0 \leq t \leq \frac{v}{a}, \quad \ddot{s}(t) = a, \quad (8.14)$$

$$\dot{s}(t) = at, \quad (8.15)$$

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2; \quad (8.16)$$

$$\text{for } \frac{v}{a} \leq t \leq T - \frac{v}{a}, \quad \ddot{s}(t) = 0, \quad (8.17)$$

$$\dot{s}(t) = v, \quad (8.18)$$

$$s(t) = vt - \frac{v^2}{2a}; \quad (8.19)$$

$$\text{for } T - \frac{v}{a} < t \leq T, \quad \ddot{s}(t) = -a, \quad (8.20)$$

$$\dot{s}(t) = a(T - t), \quad (8.21)$$

$$s(t) = \frac{2avT - 2v^2 - a^2(t - T)^2}{2a}. \quad (8.22)$$

3. Виберіть a і T так, щоб $aT^2 > 4$, гарантуючи, що рух завершується вчасно, і розв'яжіть $s(T) = 1$ для v :

$$v = \frac{1}{2} \left(aT - \sqrt{a} \sqrt{aT^2 - 4} \right).$$

Масштабування часу S-кривої. Подібно до того, як кубічний поліноміальний часовий масштаб призводить до нескінченного ривка на початку та в кінці руху, трапецієподібні рухи викликають переривчасті стрибки прискорення при $t \in (0, t_a, T - t_a, T)$. Рішенням є більш плавне масштабування часу S-кривої, популярний профіль руху в управлінні двигуном, оскільки він дозволяє уникнути вібрацій або коливань, спричинених ступінчастими змінами прискорення. Масштабування часу S-кривої складається з семи етапів:

1) постійний ривок $d^3s/dt^3 = J$ до досягнення бажаного прискорення $\ddot{s} = a$;

2) постійне прискорення до наближення до бажаного $\dot{S} = v$;

3) постійний негативний ривок $-J$ до тих пір, поки s не дорівнюватиме нулю точно в момент, коли S досягає v ;

4) рух накатом при постійній v ;

5) постійний негативний ривок $-J$;

6) постійне уповільнення $-a$;

7) постійний позитивний ривок J , поки s і S не досягнуть нуля точно в той момент, коли s досягне 1.

Профіль $S(t)$ для S-кривої показано на рисунку 8.6.

Враховуючи деяку підмножину v , a , J і загальний час руху T , алгебраїчна маніпуляція виявляє час перемикання між етапами та умови, які гарантують, що всі сім етапів фактично досягнуті, подібно до випадку трапецієподібного профілю руху.

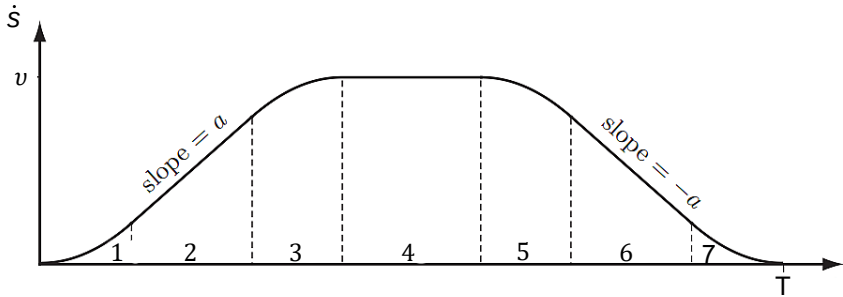


Рисунок 8.6 – Графік $s(t)$ для профілю руху S -кривої, що складається з семи етапів: 1 – постійний позитивний ривок, 2 – постійне прискорення, 3 – постійний негативний ривок, 4 – постійна швидкість, 5 – постійний негативний ривок, 6 – постійне уповільнення, 7 – постійний позитивний ривок

8.2 Приклади вирішення практичних завдань

Приклад 8.1. Розглянемо генерацію траєкторій для робота 7R WAM, кінематика якого наведена в лекції. Початкова та кінцева конфігурації кінцевого ефектора ϵ :

$$X_{start} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & -0.2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0.1 \\ 0 & -1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X_{end} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & -0.2 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & -0.1 \\ 0 & -1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ми створимо 11 матриць трансформації вздовж кожної траєкторії, використовуючи кубічне масштабування часу із загальним часом руху 5 секунд. Ви можете ігнорувати всі обмеження суглобів у цій вправі.

1. Використовуйте функцію `CartesianTrajectory` у бібліотеці MR для створення траєкторії. Побудуйте компоненти $(x; y; z)$ і три експоненти координати обертання, матриці перетворення як функції часу.

Розв'язок:

Компоненти $(x; y; z)$ та три експоненціальні координати обертання декартової траєкторії зображено на рис. 8.7.

2. Використовуйте функцію `ScrewTrajectory` у бібліотеці MR для створення траєкторії. Побудуйте графічно компоненти $(x; y; z)$ і три експоненціальні координати обертання матриць перетворення як функцію часу.

Розв'язок:

Компоненти $(x; y; z)$ та три експоненціальні координати обертання траєкторії гвинта зображені на рис. 8.8.

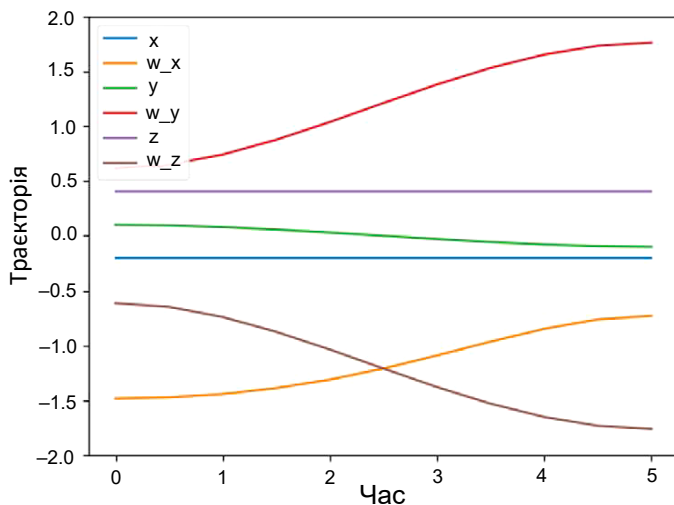


Рисунок 8.7 – Компоненти $(x; y; z)$ та три експоненціальні координати обертання декартової траєкторії

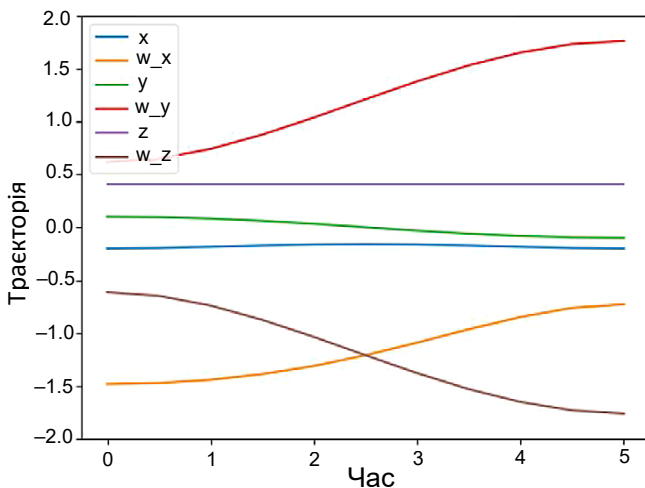


Рисунок 8.8 – Компоненти $(x; y; z)$ та три експоненціальні координати обертання траєкторії гвинта

3. Використовуючи хороше початкове припущення щодо кутів з'єднання для першої конфігурації вздовж траєкторій, використовуйте IKinBody (і рішення з попередньої конфігурації), щоб знайти відповідні кути з'єднання в кожному кадрі вздовж траєкторій. Чи можливі обидві траєкторії?

Розв'язок:

Траєкторія гвинта виходить за межі робочої області, тому не може бути реалізована. Функція ScrewTrajectory повертає одну з можливих траєкторій гвинта, де кут повороту менший за π . Можна знайти траєкторію гвинта з протилежним напрямком обертання (і кутом повороту більшим за π), яка залишиться в межах робочої області.

Приклад 8.2. Розглянемо робота, який виконує рух тривалістю $T=2$ с. Спочатку робот дотримується кубічного масштабування часу. Однак при $t=1$ с він переходить до квінтичного масштабування часу. Цей квінтичний масштаб часу, починаючи з $t=1$ с, повинен відповідати положенню, швидкості та прискоренню

кубічного масштабу часу, який закінчується в цей час, тобто $s(1) = 1/2$, $\dot{s}(1) = 3/4$ і $\ddot{s}(1) = 0$. Розв'яжіть для повного масштабування часу $s(t) : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$. Ви повинні налаштувати набір лінійних рівнянь для коефіцієнтів під час квінтичного масштабування часу, які ви можете вирішити за допомогою оператора `\` у MATLAB, `LinearSolve` у Mathematica або `scipy.linalg.solve` у Python.

Розв'язок:

Для $t \in [0, 1]$ масштабування часу збігається з кубічним масштабуванням часу. Для $t \in [1, 2]$ квінтичне масштабування часу, $s(t) = a_0 + \dots + a_5 t^5$ можна обчислити, розв'язавши систему лінійних рівнянь на основі обмежень при $t = 1$ і $t = 2$, тобто

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 12 & 32 & 80 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 & 20 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 48 & 160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 3/4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Розв'язуючи, отримуємо:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}t^2 - \frac{1}{4}t^3 & t \in [0, 2] \\ -3 + 12t - 18t^2 + 14t^3 - \frac{21}{4}t^4 + \frac{3}{4}t^5 & t \in [1, 2] \end{cases}.$$

Приклад 8.3. На рисунку 8.9 показано чотири запропоновані шкали часу в (s, \dot{s}) – площині (частина кривої (\bar{b}) збігається з кривою обмеження швидкості). Укажіть, які запропоновані шкали часу гарантовано є нездійсненними (не знаючи більше про динаміку), і поясніть своє міркування. Поясніть відмінності між можливим масштабуванням часу та масштабуванням оптимального часу.

Розв'язок:

Масштабування за часом (\bar{b}) і (e) є неможливими (\bar{b}). У точках на граничній кривій швидкості можливий конус руху зменшується до одного дотичного вектора.

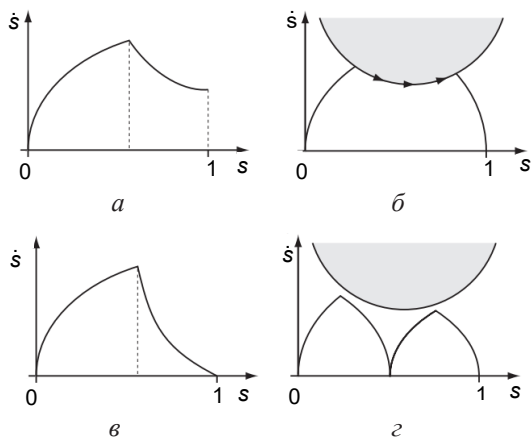


Рисунок 8.9 – 4 варіанти кривих руху

Можливе масштабування часу може торкатися граничної кривої лише в точках, де масштабування часу є дотичним до граничної кривої. Але в точці, де шкала часу спочатку торкається граничної кривої швидкості, і в точці, де вона відходить від граничної кривої, шкала часу має дотичну, яка не є дотичною до граничної кривої швидкості (в). У всіх точках, де $\dot{s} = 0$, дотична до шкали часу має бути вертикальною.

У (а) масштабування часу не досягає $\dot{s} = 0$ при $s = 1$. У (b) масштабування часу можливе, але не оптимальне за часом, оскільки оптимальне за часом масштабування часу повинно мати або тільки один перемикач, або він повинен торкатися кривої граничної швидкості.

8.3 Завдання до практичної роботи (розв'язати вправи)

Практична вправа 8.1. Оптимальне масштабування часу вимагає ступінчастих змін у прискоренні (рухи «бац-бац»), а отже, нескінченний ривок. Приклад оптимального за часом масштабування часу показано на рисунку 8.10. Як ви можете змінити це масштабування часу, якщо хочете застосувати обмежений ривок? Намалуйте новий масштаб часу.

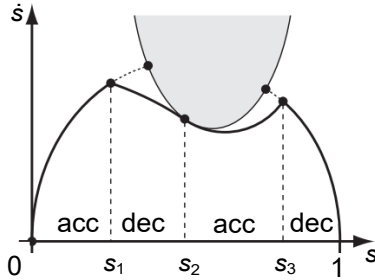


Рисунок 8.10 – Типове масштабування оптимального часу

Практична вправа 8.2. Масштаб часу можна записати як $s(t)$ або $\dot{s}(s)$. Перший сегмент трапецієподібного масштабування часу дорівнює $s(t) = (1/2)at^2$. Запишіть цей відрізок як $\dot{s}(s)$. Іншими словами, виключіть t з виразу.

Практична вправа 8.3. Динаміка двошарнірного робота, обмеженого шляхом $\theta(s)$, становить $m(s)\ddot{s} + c(s)\dot{s}^2 + g(s) = \tau$. При стані $(s, \dot{s}) = (0.5, 2)$ вектори $m(s)$, $c(s)$ і $g(s)$ оцінюються як:

$$m(0.5) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c(0.5) = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad g(0.5) = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

У цьому стані (s, \dot{s}) кожен привод обмежений крутним моментом, який він може застосувати до $-10 < \tau_i < 10$.

1. У цьому стані (s, \dot{s}) укажіть нижню та верхню межі можливих прискорень \ddot{s} через з'єднання 1 (L_1 та U_1) та з'єднання 2 (L_2 та U_2).

2. Чи може робот залишатися на шляху в цьому стані? Поясніть свою відповідь. Якщо ваша відповідь ствердна, вкажіть діапазон можливих прискорень \ddot{s} і чітко намалюйте конус руху в площині (s, \dot{s}) .

Практична вправа 8.4. Ігноруйте точки А, В і С та стрілки, що виходять із них, до виконання частини 3 задачі.

1. Для оптимального за часом масштабування часу на рисунку 8.11 приблизно накресліть можливий конус руху в кожній

точці кривої, де ми знаємо кут як верхньої, так і нижньої межі конуса. (Припустимо, що робот може тримати себе нерухомо при будь-якій конфігурації $s \in G [0, 1]$.)

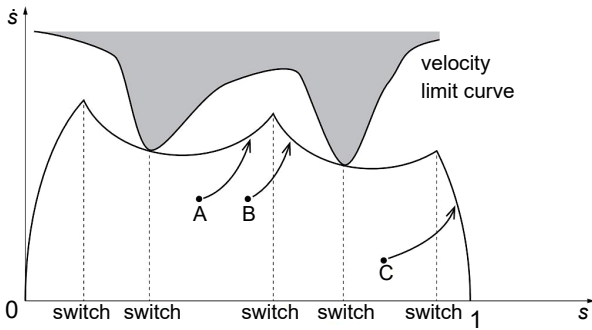


Рисунок 8.11 – Масштабування оптимального часу

2. Накресліть точку в площині (s, \dot{s}) , з якої робот може залишитися на шляху ще деякий час, але з якої робот приречений з часом покинути шлях. Позначте цю точку “b”, щоб її було легко побачити.

3. Припустимо, що робот опинився в станах A, B або C поза оптимальним часовим масштабуванням. Оптимальні за часом масштабування часу з цих станів передбачає повернення робота до показаної кривої масштабування. Щоб повернутися до оптимального для часу масштабування, робот намагається слідувати траєкторіям, вказаним стрілками. Не знаючи більше нічого про динаміку робота, чи можемо ми з упевненістю сказати, що жодна з цих траєкторій «стріли» неможлива? Якщо так, то який? Поясніть свою відповідь.

Практична вправа 8.5. Ви сідаєте в машину і хочете якомога швидше дістатися додому, щоб подивитися велику гру по телевізору. Ваш будинок знаходиться в 1 км. На щастя, дорога до вашого дому абсолютно пряма, і, на щастя, у вас є шикарний спортивний автомобіль, який може розганятися від 0 до 100 км/год всього за кілька секунд, і на частині вашої дороги немає обмеження швидкості. Однак на відстані від 0,3 км до 0,7 км обмеження швидкості

становить 100 км/год, і, будучи законослухняним громадянином, ви поважатимете це. Дивіться рисунок 8.12.

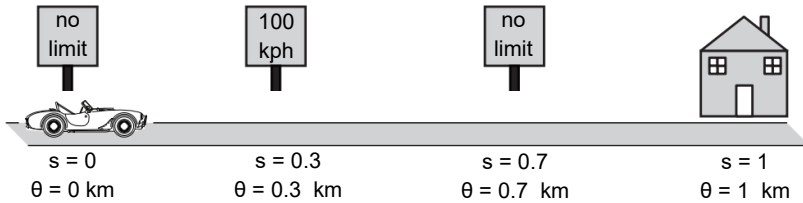


Рисунок 8.12 – Проїхати 1 км до вашого будинку

Дорога від вашої початкової точки до вашого дому параметризована $s \in [0,1]$, а позиція вашого автомобіля на шляху дорівнює $\theta: [0,1] \rightarrow [0 \text{ км}, 1 \text{ км}]$. Ви обираєте просте представлення шляху: $\theta(s) = s \text{ км}$.

Написана динаміка вашого авто:

$$\ddot{\theta} = u - b\dot{\theta}^2,$$

де u – прискорення від педалі газу або уповільнення від гальма,

$b\dot{\theta}^2$ – нелінійне демпфування, що походить від опору повітря та інших складових.

Вхід керування u обмежений діапазоном $-3,6 \times 10^5 \text{ км/год}^2 < u < 9 \times 10^4 \text{ км/год}^2$, а константа нелінійного демпфування становить $b = 1,4 \text{ км}^{-1}$

1. Яка максимальна швидкість автомобіля на нескінченній прямій дорозі без обмеження швидкості?

2. Рисунок 8.13 ілюструє часові масштаби шляху, які відповідають максимальному прискоренню та максимальному уповільненню. Намалюйте на цьому малюнку лінію, яка відповідає максимальній швидкості автомобіля, який ви знайшли в частині (а). Намалюйте конуси руху в кількох типових точках. Приблизно намалюйте оптимальний час у масштабі, який доставить машину до зупинки вдома якомога швидше. Приблизно в якій точці шляху ви досягаєте найвищої швидкості? Чи завжди оптимальний часовий масштаб слідує за максимальним прискоренням або уповільненням автомобіля?

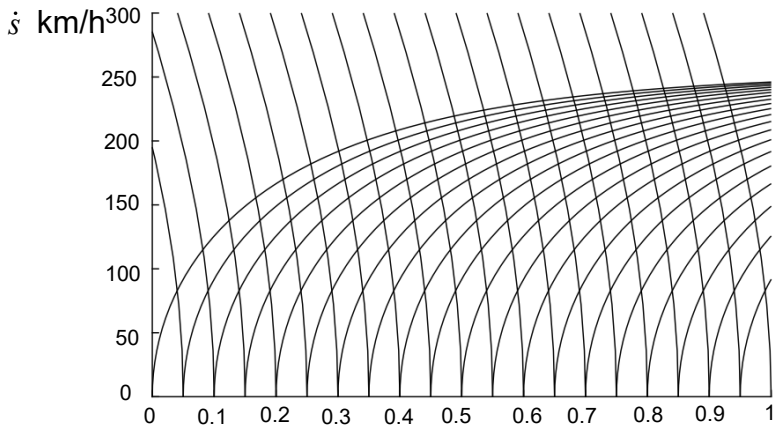


Рисунок 8.13 – Масштаби часу, що відповідають максимальному прискоренню та максимальному уповільненню

3. На малюнку, який ви намалювали, є два види обмежень швидкості: максимальна швидкість автомобіля за будь-яких обставин і обмеження швидкості 100 км/год. Опишіть, як ці обмеження швидкості схожі або відрізняються від кривої обмеження швидкості в нашому звичайному алгоритмі масштабування оптимального часу для робота.

8.4 Питання для самоперевірки

1. Що таке кубічне та квінтичне масштабування часу? Які їх ключові відмінності?
2. Як кубічне масштабування використовується для створення траєкторій у просторі Картазія?
3. Як функція `CartesianTrajectory` використовується для побудови траєкторії робота? Що означають компоненти $(x; y; z)$ і координати обергання?
4. У чому перевага функції `*ScrewTrajectory*` порівняно з `CartesianTrajectory`?

5. Як метод IKinBody дозволяє знайти відповідні кути з'єднань для кожного кадру траєкторії?
6. Як забезпечується безперервність положення, швидкості та прискорення при переході від кубічного до квінтичного масштабування?
7. Які рівняння необхідно вирішити для знаходження параметрів квінтичного масштабування часу?
8. Як визначити, чи є шкала часу здійсненою без детального знання динаміки системи?
9. У чому відмінності між здійсненим і оптимальним масштабуванням часу?
10. Чому оптимальне за часом масштабування передбачає нескінченний ривок?
11. Як можна змінити оптимальне масштабування, щоб врахувати обмежений ривок? Наведіть приклад.
12. У чому переваги трапецієподібного масштабування для реальних систем?
13. Що таке конус руху, і як він використовується для аналізу здійсненності траєкторій?
14. Як виглядає конус руху для оптимального масштабування часу?
15. Що відбувається, якщо робот виходить за межі траєкторії? Які точки є критичними?
16. Як визначити максимальну швидкість автомобіля на нескінченній прямій дорозі без обмеження швидкості?
17. Як побудувати часовий масштаб для оптимального досягнення цілі з урахуванням обмежень швидкості?
18. Чим відрізняються обмеження швидкості автомобіля та обмеження у масштабуванні часу для роботів?

8.5 Перелік рекомендованих джерел

1. Булгаков В. М., Адамчук В. В., Черниш О. М., Березовий М. Г., Яременко В. В. Теорія механізмів і машин : підручник. Київ : Видавництво «Агроінженерія», 2020. 608 с.
2. Троханяк О. С. Теорія механізмів і машин : навчальний посібник. Київ : Видавництво КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 88 с.
3. Кірієнко О. А. Синтез і аналіз механізму приводу : навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2022. 88 с.

4. Міщенко А. А. Аналіз і синтез просторових механізмів : монографія. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2023. 230 с.
5. Скоропад О. І., Лисенко П. Г. Основи робототехніки : навчальний посібник. Львів : Видавництво ЛНУ, 2021. 342 с.
6. Ковальчук С. І., Орлов В. М. Паралельні маніпулятори: моделювання і оптимізація. Дніпро : ДНУ ім. О. Гончара, 2020. 256 с.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 9 _____

ПРАКТИЧНІ ВПРАВИ З ПЛАНУВАННЯ РУХУ

Метою практичної роботи є набуття практичних навичок вирішення практичних вправ з планування руху.

Завдання практичної роботи:

1. Ознайомитись та вивчити теоретичні дані.
2. Ознайомитись з прикладами вирішення практичних завдань.
3. Вирішити вправи.

9.1 Теоретичні дані

Складність обчислення сили відштовхування від перешкоди полягає в отриманні відстані до перешкоди $d(q, B)$. Один із підходів, який уникає точного розрахунку, полягає в тому, щоб представити межу перешкоди як набір точкових перешкод і представити робота невеликим набором контрольних точок. Нехай декартове розташування контрольної точки і на роботі запишеться $f_i(q) \in \mathbb{R}^3$, а гранична точка j перешкоди – $c_j \in \mathbb{R}^3$. Тоді відстань між двома точками дорівнює $\|f_i(q) - c_j\|$, а потенціал у контрольній точці і через точку перешкоди j дорівнює:

$$P'_{ij}(q) = \frac{k}{2f_i(q) - c_j^2}, \quad (9.1)$$

надаючи силу відштовхування в контрольній точці:

$$F'_{ij}(q) = -\frac{\partial P'_{ij}}{\partial q} = \frac{k}{f_i(q) - c_j^4} \left(\frac{\partial f_i}{\partial q} \right)^T (f_i(q) - c_j) \in \mathbb{R}^3. \quad (9.2)$$

Щоб перетворити лінійну силу $F'_{ij}(q) \in \mathbb{R}^3$ в узагальнену силу $F_{ij}(q) \in \mathbb{R}^n$, що діє на руку робота або мобільного робота, ми спочатку знаходимо якобіан $J_i(q) \in \mathbb{R}^1$, який пов'язує $F'_{ij}(q) \in \mathbb{R}^3$ з лінійним швидкість контрольної точки f :

$$\dot{f}_i = \frac{\partial f_i}{\partial q} \dot{q} = J_i(q) \dot{q}. \quad (9.3)$$

За принципом віртуальної роботи узагальнена сила $F'_{ij}(q) \in R^n$ через лінійну силу відштовхування $F'_{ij}(q) \in R^3$ просто:

$$F'_{ij}(q) = J_i^T(q) F'_{ij}(q). \quad (9.4)$$

Тепер повна сила $F(q)$, що діє на робота, є сумою легко обчисленої сили притягання $F_{goal}(q)$ і сил відштовхування $F'_{ij}(q)$ для всіх i і j .

Колісні мобільні роботи. Попередній аналіз передбачає, що керуюча сила $u = F(q) + B\dot{q}$ (закон керування) або швидкість $\dot{q} = F(q)$ (закон керування) можуть бути застосовані в будь-якому напрямку. Однак, якщо робот є колісним мобільним роботом із обмеженнями кочення $A(q)\dot{q} = 0$, розрахований $F(q)$ має бути спроектований на елементи керування $F_{proj}(q)$, які переміщують робота по дотичній до обмежень. Для кінематичного робота, який використовує закон керування $\dot{q} = F_{proj}(q)$, відповідною проекцією є:

$$F_{proj}(q) = \left(I - A^T(q)(A(q)A^T(q))^{-1}A(q) \right) F(q). \quad (9.5)$$

Для динамічного робота, який використовує закон керування:

$$u = F_{proj}(q) + B\dot{q}. \quad (9.6)$$

9.2 Приклади вирішення практичних завдань

Приклад 9.1. Динаміка помилки другого порядку систем А, В, С, D і E може бути виражена як:

$$m\ddot{\theta}_e + b\dot{\theta}_e + k\theta_e = 0.$$

Розглядаючи як систему маса – пружина – амортизатор, m – ефективна маса, b – ефективна константа демпфування, а k – ефективна константа пружини. П'ять систем мають однакові m , але їхні

постійні демпфування b і пружинні постійні k різні. На рисунку 9.1 показано один із комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння $ms^2 + bs + k = 0$ для кожної з п'яти систем. Корені А, В і С знаходяться на колі з центром у початку координат, а корені С, D і E знаходяться на прямій, що проходить через початок координат.

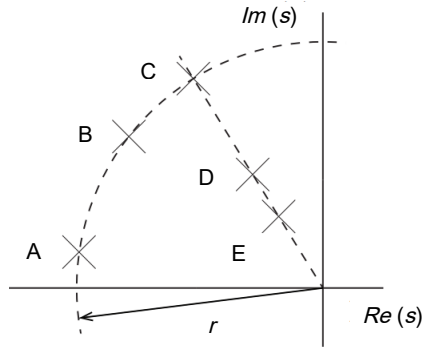


Рисунок 9.1 – Робот в s -площині

1. Укажіть власну частоту ω_n і коефіцієнт демпфування ζ динаміки помилки вище.

Розв'язок:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}.$$

2. Перелічіть ці п'ять систем у порядку їхньої природної частоти, від найвищої до найнижчої (згрупуйте всі рівні).

Розв'язок:

Як показано на рисунку 9.1, відстань між коренем і початком координат є власною частотою. Отже, від найвищої власної частоти до найнижчої маємо (А; В; С); D; E.

3. Перелічіть ці п'ять систем у порядку їх затухаючої власної частоти, від найвищої до найнижчої (згрупуйте всі рівні).

Розв'язок:

Затухаюча власна частота визначається уявною частиною коренів, тому від найвищої затухаючої власної частоти до найнижчої ми маємо С; В; D; E; А.

4. Перелічіть ці п'ять систем у порядку їхнього коефіцієнта демпфування, від найвищого до найнижчого (згрупуйте всі рівні).

Розв'язок:

Коефіцієнт демпфування може бути виражений як:

$$\zeta = \cos \alpha,$$

де α – кут від від'ємної осі абсцис до прямої, що з'єднує початок координат з коренем. Таким чином, від найбільшого коефіцієнта демпфування до найменшого, ми маємо А; В; (С; D; E).

5. Перелічіть ці п'ять систем у порядку їхнього переходу до крокового входу, від найбільшого до найменшого (згрупуйте всі рівні).

Розв'язок:

Перерегулювання обернено пропорційне коефіцієнту демпфування, тому від найбільшого перерегулювання до найменшого маємо (С; D; E); В; А.

6. Перелічіть ці п'ять систем у порядку їхнього часу встановлення, від найдовшого до найкоротшого (згрупуйте однакові).

Розв'язок:

Час встановлення збільшується, коли корені рухаються до уявної осі (і система стає нестійкою, якщо вони переходять у праву півплощину), тому від найдовшого часу встановлення до найкоротшого маємо E; D; С; В; А.

7. Яка система має «найкращу» реакцію на перехідні помилки?

Розв'язок:

Система А має найшвидший час осідання і найменший перерегулювання.

8. Щоб зробити динаміку А такою ж, як С, як потрібно змінити константу демпфування b_A та константу пружини k_A ? Якщо потрібно змінити як b_A , так k_A , вкажіть будь-які умови, яким мають задовольняти b_A та k_A .

Розв'язок:

Системи А і С вже мають однакову власну частоту, тому k_A не слід змінювати. Щоб отримати той самий коефіцієнт демпфування, b_A слід зменшити.

9. Щоб зробити динаміку E такою ж, як C , як потрібно змінити константу демпфування b_E та константу пружини k_E ? Якщо і b_E , і k_E повинні бути змінені, вкажіть будь-які умови b_E і k_E , яким мають задовольняти.

Розв'язок:

Системи E і C мають однаковий коефіцієнт демпфування, але E має меншу власну частоту, ніж C . Тому k_E потрібно збільшити, щоб досягти власної частоти C , а b_E потрібно збільшити, щоб коефіцієнт демпфування залишився незмінним.

Приклад 9.2. Приклад діаграми відповіді на помилку показано на рисунку 9.2.

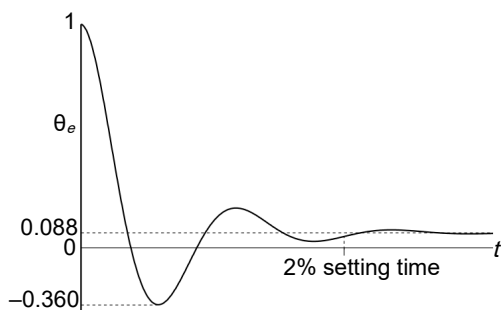


Рисунок 9.2 – Приклад відповіді на помилку

1. Укажіть похибку стаціонарного режиму e_{ss} і перевищення (у відсотках).

Розв'язок:

$$e_{ss} = 0.88,$$

$$\text{перевищення} = \left| \frac{-0.360 - 0.088}{1 - 0.088} \right| * 100\% = 49.123\%.$$

2. Намалюйте відповідь на помилку для контролера з кращою продуктивністю.

Розв'язок:

Підійде будь-який розумний графік. Приклад кращої реакції на помилку, з меншою похибкою в усталеному режимі, меншим перерегулюванням і швидшим часом встановлення, показано на рисунку 9.3.

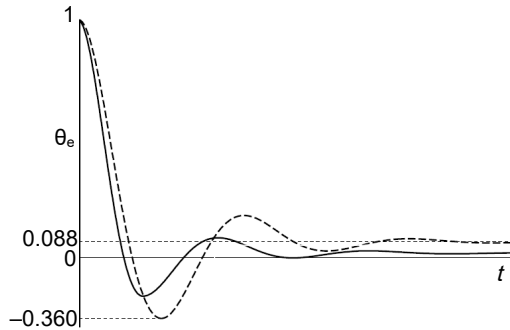


Рисунок 9.3 – Графік кращої реакції на помилки

9.3 Завдання до практичної роботи (розв'язати вправи)

Практична вправа 9.1. Розгляньте динаміку помилки:

$$\theta_e^{(5)} + 2\theta_e^{(4)} + \theta_e^{(3)} + 2\ddot{\theta}_e + 4\dot{\theta}_e + 2\theta = 0.$$

Вона однорідна чи неоднорідна? Перевірте, вона стабільна чи ні.

Практична вправа 9.1. Напишіть програму для приблизного відтворення графіків на рисунку 9.4, що показує реакцію П та ПІ регулятора. Ваш контролер керує сумісною швидкістю $\dot{\theta}$, бажаний рух дорівнює $\theta d(t) = t$, і початкова умова $\theta(0) = 0,2$ (тобто $\theta_e(0) = \theta d(0) - \theta(0) = -0,2$).

На рисунку 9.4 можемо побачити рух П-керованих і ПІ-керованих суглобів, з помилкою початкового положення, відстеження контрольної траєкторії (пунктир), де $\dot{\theta} d(t)$ є постійним.

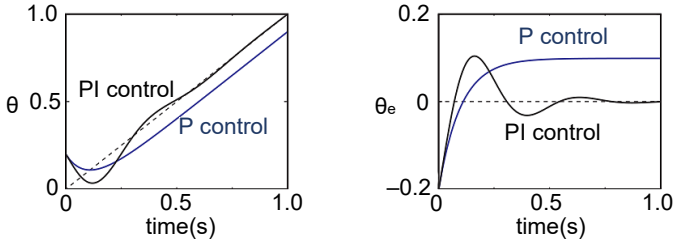


Рисунок 9.4 – Відповіді $\theta(t)$ та відповіді помилок $\theta_e(t) = \theta_d(t) - \theta(t)$

Практична вправа 9.2. Ви розробите обчислений контролер крутного моменту для n -шарнірного робота з динамікою:

$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + c(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta).$$

Звичайно, ви не знаєте точно динаміку робота; ваша модель:

$$\tau = \tilde{M}(\theta)\ddot{\theta} + \tilde{c}(\theta, \dot{\theta}) + \tilde{g}(\theta),$$

де, сподіваємося, $(\tilde{M}, \tilde{c}, \tilde{g})$ «близько» до (M, c, g) . (За винятком останньої частини задачі, припустимо $(\tilde{M}, \tilde{c}, \tilde{g}) = (M, c, g)$).

1. Ваша розрахована конструкція крутного моменту базуватиметься на зворотному зв'язку ПД. Нехай $\ddot{\theta}_c(t)$ – командні сумісні прискорення контролера в момент часу t ,

$$\ddot{\theta}_c(t) = \ddot{\theta}_{ff}(t) + \ddot{\theta}_{fb}(t),$$

де прискорення прямого зв'язку $\ddot{\theta}_f(t)$ від запланованої траєкторії дорівнює $\ddot{\theta}_d(t)$, а прискорення зворотного зв'язку від контролера зворотного зв'язку дорівнює:

$$\ddot{\theta}_{fb}(t) = K_p \theta_e(t) + K_i \int_0^t \theta_e(t) dt + K_d \dot{\theta}_e(t).$$

Запишіть повний розрахований регулятор моменту $\tau(t) = \dots$ (включаючи залежність від часу).

2. Фактичне прискорення суглоба в момент часу t становить:

$$\ddot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_c(t) + \ddot{\theta}_{dist}(t),$$

де $\ddot{\theta}_{dist}(t)$ – прискорення збурення, можливо, через немодельовані сили. При цьому загальне суглобове прискорення становить:

$$\ddot{\theta}(t) = \ddot{\theta}_d(t) + K_p \theta_e(t) + K_i \int_0^t \theta_e(t) dt + K_d \dot{\theta}_e(t) + \ddot{\theta}_{dist}(t).$$

Враховуючи, що $\theta_e = \theta_d - \theta$, запишіть диференціальне рівняння динаміки похибок.

3. Встановіть $K_i = 0$ (ваш контролер обчисленого моменту не використовує інтегральний зворотний зв'язок) і $\ddot{\theta}_{dist} = 0$ і запишіть динаміку помилки. Яким умовам повинні задовольняти K_p і K_d , щоб забезпечити стабільність динаміки похибки? Оберіть матриці підсилення K_p і K_d так, щоб динаміка похибок на кожному з'єднанні була критично затухаючою з часом встановлення 0,1 с. Прокоментуйте похибку в стаціонарному стані. Які проблеми можуть виникнути, якщо ви виберете нереально короткий час встановлення?

4. Встановіть $K_i = 0$ і $\ddot{\theta}_{dist}(t) = c$, постійний вектор. Напишіть динаміку помилки. Якщо K_p і K_d вибрано так, щоб динаміка помилки стала стабільною, яка похибка в стаціонарному стані?

5. Тепер ви виберете K_i позитивно визначеним і $\ddot{\theta}_{dist} = c$. Напишіть динаміку помилки. Якщо ви збережете ті самі підсилення K_p і K_d , що й у частині (с), і виберете K_i як діагональ із додатними, але дуже малими (майже нульовими) діагональними елементами, де три корені характеристичного рівняння динаміки помилки в s -площині? Коли ви збільшуєте діагональні члени в K_i , зрештою два корені збігатимуться на дійсній осі, і буде ще один корінь ліворуч на дійсній осі. Для якого значення K_i це станеться і де корені? (Ви можете використати символічний математичний пакет, наприклад Mathematica, щоб допомогти вам у цьому.) Якщо ви збільшуватимете K_i далі, зрештою система стане нестабільною. Для якого значення K_i це станеться і де коріння? (Знову ж таки, символічний математичний пакет був би корисним.) Приблизно побудуйте графік вручну або використовуйте комп'ютер, щоб побудувати графік

руху коренів, коли ви збільшуєте K_i від нуля до точки, де система стає нестабільною. Яка похибка стаціонарного стану для всіх варіантів K_i , які забезпечують стабільність системи? Наведіть одну чи дві причини, чому багато контролерів роботів у реальному світі не використовують інтегральний термін.

6. Тепер припустімо, що ваша динамічна модель робота не дуже точна (наприклад, інерція ланок невідома), але ваша статична модель робота є хорошим (наприклад, маси та розташування центрів мас ланок добре охарактеризовані). Також припустімо, що ваші цілі контролю скромніші: ви просите робота лише відстежувати повільні траєкторії. Яким може бути хороший альтернативний закон керування, який використовує вашу статичну модель робота, але не використовує динамічну модель?

9.4 Питання для самоперевірки

1. Як розташування коренів характеристичного рівняння в s -площині впливає на динаміку системи?
2. Як упорядкувати системи А, В, С, D і Е за:
 - природною частотою;
 - затухаючою частотою;
 - коефіцієнтом демпфування?
3. Яка система має найкращу реакцію на перехідні процеси? Які критерії це визначають?
4. Чим відрізняється динаміка похибок у системах із П- і ПІ-регуляторами? Які переваги та недоліки кожного?
5. Які умови мають виконуватись для коефіцієнтів підсилення K_p і K_d , щоб забезпечити стабільність системи?
6. Як впливає інтегральний термін K_i на динаміку похибок і стабільність системи?
7. Чому система може стати нестабільною при надмірно високих значеннях K_i ?
8. Якщо динамічна модель робота неточна, але статична модель добра, які альтернативні закони керування можна використовувати для повільних траєкторій?

9. Чому багато реальних робіт не використовують інтегральний термін у контролерах?

9.5 Перелік рекомендованих джерел

1. Булгаков В. М., Адамчук В. В., Черниш О. М., Березовий М. Г., Яременко В. В. Теорія механізмів і машин : підручник. Київ : Видавництво «Агроінженерія», 2020. 608 с.
2. Троханяк О. С. Теорія механізмів і машин : навчальний посібник. Київ : Видавництво КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 88 с.
3. Кірієнко О. А. Синтез і аналіз механізму приводу : навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2022. 88 с.
4. Міщенко А. А. Аналіз і синтез просторових механізмів : монографія. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2023. 230 с.
5. Скоропад О. І., Лисенко П. Г. Основи робототехніки : навчальний посібник. Львів : Видавництво ЛНУ, 2021. 342 с.
6. Ковальчук С. І., Орлов В. М. Паралельні маніпулятори: моделювання і оптимізація. Дніпро : ДНУ ім. О. Гончара, 2020. 256 с.

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 10 _____

ПРАКТИЧНІ ВПРАВИ НА ХАПАННЯ ТА МАНІПУЛЯЦІЇ

Метою практичної роботи є набуття практичних навичок вирішення практичних вправ на хапання та маніпуляції.

Завдання практичної роботи:

1. Ознайомитись та вивчити теоретичні дані.
2. Ознайомитись з прикладами вирішення практичних завдань.
3. Вирішити вправи.

10.1 Теоретичні дані

Основи кінематики мобільних роботів.

Кінематичний опис:

– мобільний робот описується як платформа з колісною базою. Рухи платформи визначаються швидкостями обертання коліс та їхнім розташуванням;

– матриця $H(0)$ описує зв'язок між швидкостями платформи (v_x, v_y, ω_z) і кутовими швидкостями коліс $\dot{\theta}_i$.

Рухи платформи:

– обертання на місці: всі колеса обертаються так, щоб створити момент навколо центру мас платформи. Для приводу Mecanum це забезпечується різноспрямованими обертаннями коліс;

– поступальний рух уздовж (X_b): усі колеса рухаються синхронно в одному напрямку для поступального переміщення вперед або назад;

– поступальний рух уздовж (Y_b): колеса обертаються так, щоб забезпечити латеральний рух (вбік).

Месапум-колеса:

- забезпечують можливість руху в будь-якому напрямку без зміни орієнтації робота;
- геометрія роликів на колесах дозволяє комбінувати обертальні та поступальні рухи.

Якобiан мобiльного манiпулятора.

Якобiан платформи:

- пов'язує швидкості обертання коліс із швидкостями центра мас робота та його кутовою швидкістю;
- для 4-колісного приводу Месапум матриця ($J_{platform}$) залежить від геометрії колісної бази та параметрів коліс.

Якобiан манiпулятора:

- маніпулятор $2R$ має дві обертальні ланки, які визначають положення кінцевого ефектора у площині;
- Якобiан (J_{arm}) виражає зв'язок між кутовими швидкостями суглобів і швидкостями кінцевого ефектора.

Повний Якобiан мобiльного манiпулятора:

- комбiнує ($J_{platform}$) і (J_{arm}), враховуючи внесок як платформи, так і маніпулятора у рух кінцевого ефектора;
- у нульовій конфiгурації платформа та маніпулятор мають простіші співвідношення.

Типи рухів маніпулятора.

Кінематичні режими:

- паралельний рух: рука та платформа діють одночасно для досягнення однієї цілі (наприклад, захоплення);
- послідовний рух: спочатку платформа переміщується, потім рука виконує маніпуляцію.

Конфігурація системи визначає розташування суглобів маніпулятора та орієнтацію платформи. У нульовій конфігурації осі системи вирівняні.

Обертальні та поступальні компоненти руху:

- рухи платформи враховують поступальні компоненти (v_x, v_y) і обертальну (ω_z);
- гвинтові осі описують лінійні та обертальні складові рухів кінцевого ефектора.

Приклад розрахунку матриці (H(0)).

Для 4-колісного приводу:

– відповідність обертання коліс і швидкостей платформи визначається геометрією бази:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{bmatrix} = H(0) \begin{bmatrix} v_x \\ v_p \\ w_3 \end{bmatrix}. \quad (10.1)$$

Матриця (H(0)) залежить від розташування коліс і їхньої орієнтації.

Використання гвинтових осей.

Гвинтові осі визначають взаємодію між базою та маніпулятором:

- лінійна частина визначає поступальний рух;
- обертальна частина описує ротаційні рухи кінцевого ефектора.

Реальні застосування:

- системи з Mecanum-колесами використовуються для робіт у складних середовищах, де потрібні маневри у вузьких просторах;
- маніпулятори на мобільних платформах застосовуються у логістиці, складських роботах і рятувальних операціях.

Ці розширені дані включають деталі про кінематику, використання якобіана та особливості роботи систем мобільних маніпуляторів, що дозволить краще зрозуміти виконання завдань практичної роботи.

10.2 Приклад вирішення практичного завдання

Приклад 10.1.

1. Кінематичні співвідношення для 3-колісного повного приводу та 4-колісного приводу mecanum. Дотримуючись того самого методу, знайдіть матрицю H(0) для 4-колісного універсального приводу, показаного на рисунку 10.1. На рисунку відображаються рухи кожного колеса вперед.

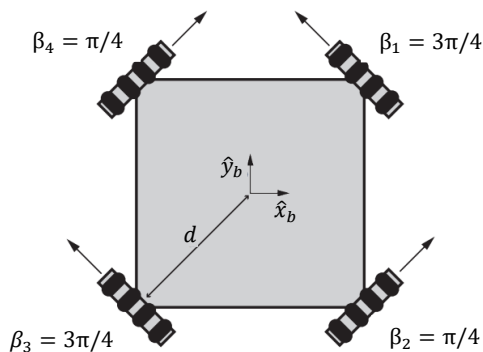


Рисунок 10.1 – Привід 4-колісного багатоколісного робота

Розв’язок:

Почнемо з того, що пригадаємо рівняння для кожного елемента матриці $H(0)$:

$$h_i(0) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & \gamma_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta_i & \sin \beta_i \\ -\sin \beta_i & \cos \beta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y_i & 1 & 0 \\ x_i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ми знаємо, що γ для омні-коліс дорівнює 0, і що значення $\left[\frac{3\pi}{4} \frac{\pi}{4} \frac{3\pi}{4} \frac{\pi}{4} \right]$. Оскільки центри коліс співпадають з кутами квадратного тіла, їхні координати (x, y) можна знайти за допомогою прямокутних трикутників 45–45–90 з гіпотенузою d . Використовуючи цю інформацію, ми підставляємо відповідні значення в рівняння, і отримуємо:

$$H(0) = \begin{bmatrix} -d \cos\left(\beta_1 + \frac{\pi}{4}\right) & \cos \beta_1 & \sin \beta_1 \\ d \sin\left(\beta_2 + \frac{\pi}{4}\right) & \cos \beta_2 & \sin \beta_2 \\ d \cos\left(\beta_3 + \frac{\pi}{4}\right) & \cos \beta_3 & \sin \beta_3 \\ -d \sin\left(\beta_4 + \frac{\pi}{4}\right) & \cos \beta_4 & \sin \beta_4 \end{bmatrix}.$$

Враховуючи те, що ми знаємо про чотири кути β , ми можемо розв'язати і отримати:

$$H(0) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} d & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ d & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -d & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -d & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

2. Розглянемо обертання на місці, переміщення в напрямку \hat{x}_b і переміщення в напрямку \hat{y}_b . Відповідно до вашої матриці $H(0)$, як рухаються колеса для кожного з цих випадків. Чи збігаються ці рухи з вашою інтуїцією?

Розв'язок:

Нагадаємо, що перший стовпчик матриці $H(0)$ описує напрямок обертання робота, другий – напрямок руху в напрямку \hat{x}_b , а третій – напрямок руху в напрямку \hat{y}_b . Дивлячись на перший стовпчик, ми бачимо, що елементи 1 і 2 додатні, а елементи 3 і 4 від'ємні.

Це означає, що позитивне обертання (проти годинникової стрілки) отримуємо, рухаючи колеса 1 і 2 вперед, і одночасно рухаючи колеса 3 і 4 назад. Другий стовпчик показує, що ми можемо рухатися в напрямку $+\hat{x}_b$, рухаючи колеса 1 і 3 назад, а колеса 2 і 4 вперед. Третій стовпчик вказує на те, що рух $+\hat{y}_b$ можна отримати, рухаючи всі колеса вперед.

10.3 Завдання до практичної роботи (розв'язати вправу)

Практична вправа 10.1. На рис. 10.2 показана проста рука $2R$, встановлена на базі з повним приводом на 4 колеса з попередньої вправи. Осі суглобів руки суміщені з віссю $+y_b$. Припустимо, що нульова конфігурація плеча спрямована прямо вгору, тобто вісь x_e кінцевого ефектора вказує вздовж осі Z_b . Отримайте

мобільний маніпулятор Jacobian J_e , коли рука знаходиться в нульовій конфігурації.

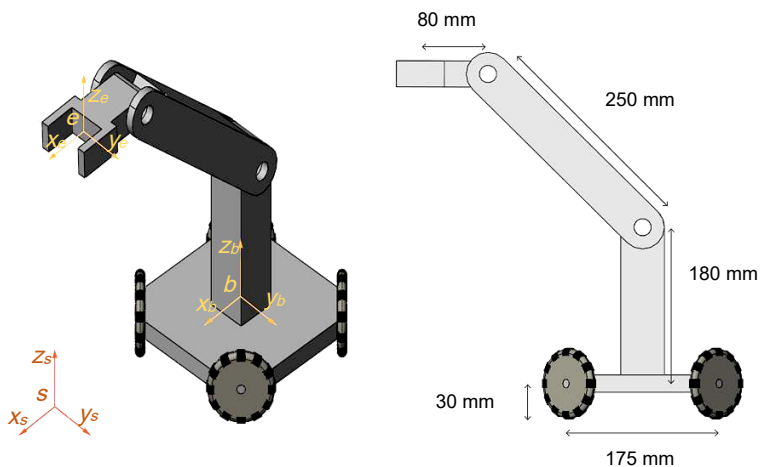


Рисунок 10.2 – 4-колісний багатокісний робот із рукою 2R.
Гвинтові осі, спрямовані назовні сторінки

10.4 Питання для самоперевірки

1. Що таке матриця ($H(0)$), і як вона пов'язує рухи платформи та обертання коліс?
2. Як рухатимуться колеса 4-колісного робота з Mecanum-приводом при:
 - обертанні на місці;
 - поступальному русі вздовж осі (X_b);
 - латеральному русі вздовж осі (Y_b)?
3. Що таке нульова конфігурація маніпулятора? Як вона виглядає для маніпулятора 2R?
4. Якобін маніпулятора описує залежність між якими величинами? Що враховує J_e для мобільного маніпулятора?
5. Якобін мобільного маніпулятора складається з двох частин. Які це частини і які рухи вони враховують?

6. Як рухи платформи впливають на кінцеву позицію кінцевого ефектора маніпулятора?
7. Які переваги Месапум-коліс перед звичайними приводами?
8. Як орієнтація роликів на Месапум-колесах дозволяє платформі рухатися в будь-якому напрямку?
9. Що описують гвинтові осі у кінематиці маніпулятора?
10. Яка роль гвинтових осей у розрахунку кінцевих рухів мобільного маніпулятора?
11. Для яких задач використовуються маніпулятори на мобільних платформах?
12. У яких випадках Месапум-привід є кращим вибором для мобільного робота?

10.5 Перелік рекомендованих джерел

1. Булгаков В. М., Адамчук В. В., Черниш О. М., Березовий М. Г., Яременко В. В. Теорія механізмів і машин : підручник. Київ : Видавництво «Агроінженерія», 2020. 608 с.
2. Троханяк О. С. Теорія механізмів і машин : навчальний посібник. Київ : Видавництво КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 88 с.
3. Кірієнко О. А. Синтез і аналіз механізму приводу : навчальний посібник. Київ : НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2022. 88 с.
4. Міщенко А. А. Аналіз і синтез просторових механізмів : монографія. Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2023. 230 с.
5. Скоропад О. І., Лисенко П. Г. Основи робототехніки : навчальний посібник. Львів : Видавництво ЛНУ, 2021. 342 с.
6. Ковальчук С. І., Орлов В. М. Паралельні маніпулятори: моделювання і оптимізація. Дніпро : ДНУ ім. О. Гончара, 2020. 256 с.

Навчально-практичне видання

ЦИМБАЛ Богдан Михайлович
КОЙФМАН Олексій Олександрович
СОЛОД Юлія Анатоліївна

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ОБ'ЄКТІВ РОБОТОТЕХНІКИ ТА МЕХАТРОНІКИ

Навчально-практичний посібник

Друкується за авторською редакцією

Дизайн обкладинки В. Савельєва
Технічний редактор О. Гринюк
Верстка Ю. Семенченко



Підписано до друку 30.04.2025 р.
Формат 60×84/16. Папір офсетний.
Цифровий друк. Гарнітура Times.
Ум. друк. арк. 9,07. Наклад 300.
Замовлення № 0425-023.

Видавництво та друк: Олді+
65101, м. Одеса, вул. Інглезі, 6/1
тел.: +38 (095) 559-45-45, e-mail: office@oldiplus.ua
Свідоцтво ДК № 7642 від 29.07.2022 р.

Замовлення книг:
тел.: +38 (050) 915-34-54, +38 (068) 517-50-33
e-mail: book@oldiplus.ua

