Н. С. Грудкіна, С. О. Шевцов

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

ЧАСТИНА І

Міністерство освіти і науки України
Донбаська державна машинобудівна академія (ДДМА)

Н. С. Грудкіна, С. О. Шевцов

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ
ЧАСТИНА І

**Посібник
до практичних занять і самостійної роботи**

Затверджено
на засіданні вченої ради
Протокол № 12 від 30.05.2019

Краматорськ
ДДМА
2019

УДК 51-74
Г 90

Рецензенти:

Щербак В. Ф., д-р фіз.-мат. наук, старш. наук. співр. Інституту прикладної математики і механіки НАН України, м. Слов’янськ;

Лимарєва Ю. М., канд. пед. наук, доцент кафедри фізики ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», м. Слов’янськ.

Грудкіна Н. С.
Г 90 Рівняння математичної фізики : посібник до практичних занять і самостійної роботи / Н. С. Грудкіна, С. О. Шевцов. – Краматорськ : ДДМА, 2019. – Ч. I. – 47 с.
ISBN 978-966-379-888-2 (повне видання).
ISBN 978-966-379-889-9 (частина I).

Посібник містить теоретичний матеріал з курсу диференціальних рівнянь з частинними похідними першого та другого порядків, що супроводжується прикладами розв’язання типових завдань, у тому числі із застосуванням системи MAPLE, а також завдання для самостійного виконання студентами. Може використовуватися як викладачами, так і студентами для самостійної роботи.

УДК 51-74

ISBN 978-966-379-888-2 (повне видання).
ISBN 978-966-379-889-9 (частина I).

ЗМІСТ

ВСТУП

Курс «Рівняння математичної фізики» займає важливе місце серед математичних дисциплін прикладного спрямування. Під час роботи над курсом студенти повинні на основі розглянутих завдань поступово навчитися процедурі побудови математичних моделей фізичних процесів і явищ, що побудовані у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними. Головною метою цього курсу є закладення класичних знань, необхідних для математичного моделювання та подальшого дослідження побудованих моделей за допомогою різних методів та підходів як точних, так і наближених.

Даний посібник є введенням до курсу «Рівняння математичної фізики» та містить матеріал з диференціальних рівнянь у частинних похідних першого та другого порядків. Основною метою є ознайомлення студентів з основними поняттями та твердженнями, які сприятимуть глибокому засвоєнню теоретичного матеріалу і стануть фундаментом другої частини, орієнтованої на побудову математичних моделей, застосування відповідних методів досліджень та аналізування отриманих результатів.

Запропоновано стислий теоретичний матеріал, приклади з розв’язання задач та завдання для індивідуального виконання, що містять 25 варіантів. Однією з особливостей є наявність прикладів з використання системи MAPLE як однієї з відомих систем, що підвищує ефективність наукових досліджень та звільняє інженера-дослідника від рутинної праці, пов’язаної з обчисленнями.

Сподіваємося, що посібник допоможе студентам в опануванні важливих розділів сучасної математики, а також буде корисним для викладачів під час роботи зі студентами.

1 ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1 Основані поняття диференціальних рівнянь у частинних похідних. Диференціальні рівняння в частинних похідних першого порядку

Рівняння математичної фізики є одним з основних розділів вищої математики, які присвячені вивченню диференціальних рівнянь у частинних похідних. Дані диференціальні рівняння на практиці виступають у вигляді математичних моделей багатьох фізичних процесів і явищ.

Диференціальним рівнянням називається таке рівняння, яке містить у собі не тільки невідому функцію, незалежну змінну, але й обов'язково її похідні до деяких порядків. Якщо невідома функція, що входить до диференціального рівняння разом зі своїми похідними, залежить від одного аргументу, то таке рівняння називають ***звичайним диференціальним рівнянням***.

Якщо невідома функція залежить від декількох аргументів і рівняння містить частинні похідні від невідомої функції, тоді диференціальне рівняння називають ***рівнянням у частинних похідних***.

Означення 1. Співвідношення між незалежними змінними $x_1, x_2, ..., x_n$, невідомою функцією $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ та її частинними похідними називається диференціальним рівнянням з частинними похідними (ДРЧП).

Означення 2. ДРЧП називається рівнянням *m*-го порядку, якщо воно містить хоча б одну частинну похідну *m*-го порядку і не містить похідних вищих порядків.

У загальному випадку ДРЧП *m*-го порядку має вигляд

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, ..., u_{x_n}, ..., u_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}}\right) = 0, \qquad (1.1)$$

де $\sum_{i=1}^{n} k_i = m,$ F – задана функція, а $u_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_n^{k_n}} = \dfrac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_n^{k_n}}$.

Означення 3. Кожна функція $u(x_1, x_2, ..., x_n)$, яка *m* разів неперервно диференційовна в області задавання рівняння (1.1), підставлена в дане рівняння замість невідомої функції та її частинних похідних і перетворює його на тотожність, називається ***розв'язком*** ДРЧП.

Приклад 1. Довести, що функція $U = e^{-\cos(x+3y)}$ є розв'язком ДРЧП

$$9 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 .$$

Розв'язання

Знаходимо частинні похідні першого та другого порядку:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y) \cdot 1 = e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y) \cdot 3 = 3 \cdot e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \left(e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y)\right)'_x = e^{-\cos(x+3y)} \cdot \left(\sin^2(x+3y) + \cos(x+3y)\right),$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \left(3e^{-\cos(x+3y)} \cdot \sin(x+3y)\right)'_x = 9 \cdot e^{-\cos(x+3y)} \cdot \left(\sin^2(x+3y) + \cos(x+3y)\right).$$

Підставимо отримані вирази в дане рівняння

$$\begin{gathered} 9 \cdot e^{-\cos(x+3y)} \cdot \left(\sin^2(x+3y) + \cos(x+3y)\right) - \\ -9 \cdot e^{-\cos(x+3y)} \cdot \left(\sin^2(x+3y) + \cos(x+3y)\right) = 0, \end{gathered}$$

що визначає тотожність, тобто ***функція*** $U = e^{-\cos(x+3y)}$ ***є розв'язком ДРЧП*** $9 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$**.**

Означення 4. ДРЧП називається рівнянням першого порядку, якщо воно містить хоча б одну частинну похідну першого порядку і не містить похідних вищих порядків.

У загальному випадку ДРЧП першого порядку функції $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ має вигляд

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0,. \qquad (1.2)$$

Якщо $u = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ – розв'язок рівняння (1.2), тоді його графік визначає поверхню у просторі $(n+1)$ змінних, яку називають інтегральною поверхнею.

Означення 5. ДРЧП називається ***лінійним***, якщо воно лінійне відносно невідомої функції та всіх її частинних похідних.

Багато фізичних явищ описуються рівняннями з частинними похідними першого порядку. Наведемо приклади:

1) ***рівняння Хопфа***

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \text{ де } U = U(t, x);$$

2) ***рівняння поширення світлових променів у неоднорідному середовищі***

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 = f(x, y, z),$$

де $U = U(x, y, z)$ та $f(x, y, z)$ – показники заломлення.

У теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних природно порушувати питання про знаходження загального розв'язку, тобто такого розв'язку, з якого можна одержати такі частинні розв'язки, що задовольняють додатковим умовам. При вивченні звичайних диференціальних рівнянь було показано, що їх загальний розв'язок містить у собі не тільки незалежні змінні, але й довільні сталі. Так, загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння I порядку містить одну довільну сталу, загальний розв'язок рівняння II порядку – дві довільні сталі й т. д.

Щоб з'ясувати характер загального розв'язку диференціального рівняння у частинних похідних, розглянемо найпростіші приклади таких рівнянь. Нехай необхідно розв'язати ***ДРЧП I порядку двох змінних*** такого вигляду

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0, \qquad (1.3)$$

де $u = U(x, y)$.

У рівнянні явно присутня тільки частинна похідна $U_x = \dfrac{\partial U}{\partial x}$, при обчисленні якої аргумент y треба розглядати як сталу. Тому рівняння (1.2) можна розглядати як звичайне диференціальне рівняння з невідомою функцією U і незалежною змінною x та параметром y. Нехай $U=\varphi(x,y,C)$ – загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння, відповідного до (1.2). Тоді ***загальний розв'язок ДРЧП І порядку виду*** (1.2) має вигляд $U=\varphi(x,y,C(y))$.

Зауваження. Аналогічно для $F\left(x,y,u,\dfrac{\partial U}{\partial y}\right)=0$ загальний розв'язок набуває вигляду $U=\varphi(x,y,C(x))$.

Приклад 2. Зінтегрувати ДРЧП першого порядку

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=2xy^2-e^{-3y}+2.$$

Розв'язання

Вважаємо y параметром та інтегруємо за x:

$$Z=\int\left(2xy^2-e^{-3y}+2\right)dx=x^2y^2-xe^{-3y}+2x+C(y).$$

Остаточно отримаємо ***загальний розв'язок***:

$$Z(x,y)=x^2y^2-xe^{-3y}+2x+C(y).$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x}+xy^2$.

Розв'язання

Дане рівняння розглядаємо як звичайне лінійне диференціальне рівняння першого порядку, що містить параметр y. Розв'яжемо його методом Лагранжа:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{z}{x},$$

$$\frac{\partial z}{z}=\frac{\partial x}{x},$$

$$\ln|z|=\ln|x|+\ln|C(y)|.$$

З останнього виразу маємо: $z=C(y)\cdot x$. Згідно з методом варіації довільної сталої шукатимемо розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді $z=C(x,y)\cdot x$. Знаходимо:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=C'_x(x,y)\cdot x+C(x,y).$$

Підставимо отриманий вираз у початкове рівняння та отримаємо:

$$C'_x(x,y)\cdot x + C(x,y) = \frac{C(x,y)\cdot x}{x} + xy^2,$$

$$C'_x(x,y) = y^2.$$

Зінтегруємо останнє рівняння та отримаємо:

$$C(x,y) = xy^2 + C(y).$$

Тому ***загальний розв'язок*** рівняння набуває вигляду $z(x,y) = \left(xy^2 + C(y)\right)\cdot x$.

Означення 6. Якщо у (1.2) функція F залежить лінійно від частинних похідних функції $u(x_1, x_2, ..., x_n)$, то його називають лінійним ДРЧП першого порядку та записують у вигляді

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n, u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, ..., x_n, u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... +$$

$$+ f_n(x_1, x_2, ..., x_n, u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, x_2, ..., x_n, u). \qquad (1.4)$$

Якщо $R(x_1, x_2, ..., x_n, u) \equiv 0$, а функції $f_1, f_2, ..., f_n$ не залежать від шуканої функції $u(x_1, x_2, ..., x_n)$, тоді ДРЧП називають ***лінійним однорідним*** ДРЧП першого порядку та записують у вигляді

$$f_1(x_1, x_2, ..., x_n)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1} + f_2(x_1, x_2, ..., x_n)\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0. \quad (1.5)$$

Означення 7. Назвемо системою характеристик ДРЧП виду (1.5) систему з $(n-1)$ звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1, x_2, ..., x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1, x_2, ..., x_n)} = ... = \frac{dx_n}{f_n(x_1, x_2, ..., x_n)}. \qquad (1.6)$$

Твердження 1. Кожний інтеграл системи характеристик (1.6) є розв'язком ДРЧП першого порядку виду (1.5).

Твердження 2. Кожний розв'язок ДРЧП першого порядку виду (1.5) є інтегралом системи характеристик (1.6).

Твердження 3 (побудова загального розв'язку ДРЧП виду (1.5)). Нехай $C_1(x_1, x_2, ..., x_n), C_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., C_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n)$ – незалежні інтеграли системи характеристик (1.6), тоді функція $u = u(C_1, C_2, ..., C_{n-1})$, де u – довільна функція, яка має неперервні похідні за змінними $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$, називається загальним розв'язком (1.5).

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Розв'язання

Складемо та розв'яжемо систему характеристик, що відповідають даному лінійному однорідному ДРЧП першого порядку:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}, \Rightarrow \int x dx = -\int y dy, \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{C}{2}.$$

Звідси, враховуючи єдиний інтеграл вигляду $C = x^2 + y^2$ та твердження 3, отримаємо ***загальний розв'язок*** даного ДРЧП:

$$z = z(x^2 + y^2),$$

де z – довільна неперервна функція.

Зауваження. Виокремлюючи деякі випадки задавання функції z, маємо з геометричної точки зору сім'ю поверхонь обертання навколо осі OZ:

1) $z_1 = x^2 + y^2$ – параболоїд обертання;

2) $z_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$ – конус при $z \geq 0$;

3) $z_3 = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ – півсфера при $z \geq 0$;

4) $z_4 = A$ – площина.

Твердження 4 (задача Коші для ДРЧП виду (1.5)). Задача Коші для ДРЧП виду (1.5) полягає у знаходженні такого розв'язку $u(x_1, x_2, ..., x_n)$, який при фіксованому значенні однієї зі змінних, наприклад x_n, перетворюється на неперервну диференційовану функцію решти змінних та задовольняє початковій умові

$$u\Big|_{x_n = x_{n0}} = \varphi(x_1, x_2, ..., x_{n-1}).$$

Якщо розглядаємо ДРЧП двох змінних $f_1(x, y)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + f_2(x, y)\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, то початкова умова набуде вигляду $z\Big|_{x = x_0} = \varphi(y)$ або $z\Big|_{y = y_0} = \varphi^*(x)$. З геометричної точки зору необхідно з усіх інтегральних поверхонь $z = z(x, y)$ вибрати ту, яка проходить через задану криву $\varphi(y)$ у площині $x = x_0$ або через задану криву $\varphi^*(x)$ у площині $y = y_0$.

1.2 Класифікація та зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь другого порядку

Означення 1. Лінійне ДРЧП другого порядку запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x_1, x_2, ..., x_n)u_{x_i} +$$

$$+c(x_1, x_2, ..., x_n)u = f(x_1, x_2, ..., x_n) =$$

$$= f(x_1, x_2, ..., x_n), \qquad (1.7)$$

де $u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ – позначення частинних похідних першого та другого порядку відповідно.

Рівняння (1.7) називається ***лінійним однорідним***, якщо $f(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv 0$, і ***лінійним неоднорідним*** у протилежному випадку. Якщо всі коефіцієнти a_{ij}, b_i, c є сталими, то ДРЧП (1.8) називається ***лінійним зі сталими коефіцієнтами***.

Означення 2. ДРЧП називається ***квазілінійним***, якщо воно є лінійним відносно старших похідних.

Квазілінійне ДРЧП другого порядку має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, ..., u_{x_n}\right)u_{x_i x_j} = f(x_1, x_2, ..., x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, ..., u_{x_n}). \qquad (1.8)$$

Розглянемо квазілінійне ДРЧП другого порядку вигляду для функції двох змінних:

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} = f(x,y,u,u_x,u_y), \qquad (1.9)$$

де $a_{ij}(x,y)$, $i,j=1,2,$ – неперервні функції в деякій області **G**.

Здійснимо в рівнянні (1.4) заміну незалежних змінних за формулами

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y), \qquad (1.10)$$

які встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками (ξ,η) і (x,y) відповідних областей, тобто з (1.5) x і y визначаються як однозначні функції незалежних змінних ξ та η: $x=\Phi(\xi,\eta)$, $y=\Psi(\xi,\eta)$. Вважатимемо, що функції $\varphi(x,y)$ та $\psi(x,y)$ при $(x,y)\in \mathrm{G}$ є неперервними разом з частинними похідними до другого порядку включно.

Введемо позначення: $u(\Phi(\xi,\eta),\Psi(\xi,\eta)) = U(\xi,\eta)$. Тоді

$$\begin{aligned}
&u_x = \xi_x U_\xi + \eta_x U_\eta, \quad u_y = \xi_y U_\xi + \eta_y U_\eta, \\
&u_{xx} = \xi_x^2 U_{\xi\xi} + 2\xi_x\eta_x U_{\xi\eta} + \eta_x^2 U_{\eta\eta} + \xi_{xx}U_\xi + \eta_{xx}U_\eta, \\
&u_{yy} = \xi_y^2 U_{\xi\xi} + 2\xi_y\eta_y U_{\xi\eta} + \eta_y^2 U_{\eta\eta} + \xi_{yy}U_\xi + \eta_{yy}U_\eta, \\
&u_{xy} = \xi_x\xi_y U_{\xi\xi} + (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)U_{\xi\eta} + \eta_x\eta_y U_{\eta\eta} + \xi_{xy}U_\xi + \eta_{xy}U_\eta.
\end{aligned} \qquad (1.11)$$

Підставимо (1.5) у (1.2), одержимо нове рівняння вигляду

$$\alpha_{11}(\xi,\eta)U_{\xi\xi} + 2\alpha_{12}(\xi,\eta)U_{\xi\eta} + \alpha_{22}(\xi,\eta)U_{\eta\eta} = F(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta), \qquad (1.12)$$

де

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11} = \xi_x^2 a_{11} + 2\xi_x\xi_y a_{12} + \xi_y^2 a_{22}, \\
&\alpha_{22} = \eta_x^2 a_{11} + 2\eta_x\eta_y a_{12} + \eta_y^2 a_{22}, \\
&\alpha_{12} = \xi_x\eta_x a_{11} + (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)a_{12} + \xi_y\eta_y a_{22}.
\end{aligned} \qquad (1.13)$$

Зауважимо, що часто формули (1.5) записують, замінюючи $U(\xi,\eta)$ на $u(\xi,\eta)$. Однак при цьому символи u_ξ і u_η у правій частині рівностей (1.5) слід розуміти як похідні вздовж ліній відповідно $\eta=\mathrm{const}$ і $\xi=\mathrm{const}$:

$$u_\xi = \frac{d}{d\xi}\left(u\big|_{\eta=\mathrm{const}}\right), \quad u_\eta = \frac{d}{d\eta}\left(u\big|_{\xi=\mathrm{const}}\right),$$

тобто як U_ξ і U_η, а не як частинні похідні за ξ або за η від функції $u(x,y)$, оскільки вирази u_ξ і u_η не мають змісту, поки не вибрана друга координата η або ξ.

Із (1.7) очевидно: якщо функція $z=\varphi(x,y)$ є деяким частинним розв'язком рівняння

$$a_{11}z_x^2+2a_{12}z_xz_y+a_{22}z_y^2=0, \tag{1.14}$$

то в (1.6) коефіцієнт $\alpha_{11}=0$.

Означення 3. Звичайне диференціальне рівняння вигляду

$$a_{11}(dy)^2-2a_{12}dxdy+a_{22}(dx)^2=0 \tag{1.15}$$

назвемо ***характеристичним*** для рівняння (1.3), а його інтеґрали – ***характеристиками***.

З курсу звичайних диференціальних рівнянь відомо: якщо $z=\varphi(x,y)$ – деякий розв'язок рівняння (1.8), тоді співвідношення $C=\varphi(x,y)$ є загальним інтеґралом рівняння (1.9). Має силу і обернене твердження.

Нехай $a_{11}\neq 0$ $(a_{22}\neq 0)$. Тоді із (1.9) маємо:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{\Delta}}{a_{11}},\quad \left(\frac{dx}{dy}=\frac{a_{12}\pm\sqrt{\Delta}}{a_{22}}\right), \tag{1.16}$$

де $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}$.

Означення 4. Рівняння (1.3) в області $D\subset G$ називається рівнянням:

а) ***гіперболічного типу***, якщо дискримінант $\Delta>0$ для всіх $(x,y)\in D$;

б) ***параболічного типу***, якщо $\Delta=0$ при $(x,y)\in D$;

в) ***еліптичного типу***, якщо $\Delta<0$ при $(x,y)\in D$.

Безпосередньою перевіркою можна переконатися в справедливості тотожності

$$\alpha_{12}^2-\alpha_{11}\alpha_{22}=\left(a_{12}^2-a_{11}a_{22}\right)\Im^2,$$

де якобіан $\Im \equiv \dfrac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix}$.

Згідно з нашими припущеннями $\Im \neq 0$ в області G, отже, тип ДРЧП (1.3) є інваріантом відносно перетворення незалежних змінних (1.4).

Рівняння гіперболічного типу. У цьому випадку $\Delta > 0$ при $(x,y) \in D$, а отже, із (1.10) одержуємо дві дійсні різні сім'ї характеристик $C_1 = \varphi(x,y)$, $C_2 = \psi(x,y)$. Легко показати, що при цьому $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ є незалежними, тобто $\Im \neq 0$ при $(x,y) \in \mathrm{D}$. Покладемо $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$. Тоді в рівнянні (1.6) $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$, тобто матимемо:

$$U_{\xi\eta} = \frac{F\left(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta\right)}{2\alpha_{12}}, \quad \alpha_{12} \neq 0. \tag{1.17}$$

Рівняння (1.11) є першою канонічною формою рівнянь гіперболічного типу. Підставляючи в (1.11) $\alpha = \xi + \eta$, $\beta = \xi - \eta$, одержимо другу канонічну форму рівнянь гіперболічного типу:

$$\overline{U}_{\alpha\alpha} - \overline{U}_{\beta\beta} = F_1\left(\alpha,\beta,\overline{U},\overline{U}_\alpha,\overline{U}_\beta\right), \quad U\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \overline{U}(\alpha,\beta).$$

Рівняння параболічного типу. Для ДРЧП параболічного типу $\Delta = 0$ при $(x,y) \in D$ і рівняння (1.9) мають один загальний інтеграл $C = \varphi(x,y)$. Підставимо $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$, де $\eta(x,y)$ – довільна двічі неперервно диференційована функція, незалежна від $\varphi(x,y)$. Тоді згідно з (1.7)

$$\alpha_{11} = \left(\sqrt{a_{11}}\,\xi_x + \sqrt{a_{22}}\,\xi_y\right)^2 \equiv 0,$$

а отже

$$\alpha_{12} = \left(\sqrt{a_{11}}\,\xi_x + \sqrt{a_{22}}\,\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\,\eta_x + \sqrt{a_{22}}\,\eta_y\right) \equiv 0.$$

Таким чином, із (1.6) одержуємо:

$$U_{\eta\eta} = \frac{F\left(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta\right)}{\alpha_{22}}, \quad \alpha_{22} \neq 0. \tag{1.18}$$

Рівняння (1.12) є канонічною формою рівнянь параболічного типу.

Рівняння еліптичного типу. Для ДРЧП еліптичного типу $\Delta < 0$ при

$(x,y)\in D$ і відповідне характеристичне рівняння (1.9) мають дві комплексно-спряжені сім'ї характеристик $C_1 = \rho(x,y) + i\sigma(x,y)$, $C_2 = \rho(x,y) - i\sigma(x,y)$, причому функції $\rho(x,y)$ і $\sigma(x,y)$ при $(x,y)\in D$ є незалежними. Введемо нові незалежні змінні (1.4) таким чином: $\xi = \rho(x,y)$, $\eta = \sigma(x,y)$. У результаті такого підставляння одержимо: $\alpha_{11} = \alpha_{22}$ і $\alpha_{12} = 0$. Таким чином, ДРЧП (1.6) запишеться у вигляді

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = \frac{F(\xi,\eta,U,U_\xi,U_\eta)}{\alpha_{11}}, \quad \alpha_{11} \neq 0. \tag{1.19}$$

Рівняння (1.13) є канонічною формою рівнянь еліптичного типу.

Приклад 1. Визначити тип, знайти сімейства характеристичних ліній та звести до канонічного вигляду ДРЧП

$$U_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} + 4U = 0.$$

Розв'язання

Маємо $a_{11} = 1,\ a_{12} = 1,\ a_{22} = 1,\ \Delta = {a_{12}}^2 - a_{11}\cdot a_{22} = 0$, тому вказане рівняння – параболічного типу.

Характеристичне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{\Delta}}{a_{11}}$$

має вигляд $\dfrac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow dy = dx$ и $y = x + C$ або $y - x = C$.

Нехай $\xi = y - x$. У якості іншої змінної підставимо $\eta = x + y$. Маємо частинні похідні:

$$\xi'_x = -1,\ \xi'_y = 1,\ \eta'_x = 1,\ \eta'_y = 1.$$

Звідси маємо:

$$U_x = U_\xi \cdot \xi_x + U_\eta \cdot \eta_x = -U_\xi + U_\eta,$$
$$U_y = U_\xi \cdot \xi_y + U_\eta \cdot \eta_y = U_\xi + U_\eta,$$
$$U_{xx} = -U_{\xi\xi} \cdot \xi_x - U_{\xi\eta} \cdot \eta_x + U_{\eta\xi} \cdot \xi_x + U_{\eta\eta} \cdot \eta_\xi = U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta},$$
$$U_{xy} = -U_{\xi\xi} \cdot \xi_y - U_{\xi\eta} \cdot \eta_y + U_{\eta\xi} \cdot \xi_y + U_{\eta\eta} \cdot \eta_y = -U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta},$$
$$U_{yy} = U_{\xi\xi} \cdot \xi_y + U_{\xi\eta} \cdot \eta_y + U_{\eta\xi} \cdot \xi_y + U_{\eta\eta} \cdot \eta_y = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}.$$

Підставимо отримані вирази у задане ДРЧП та отримаємо:

$$4U_{\eta\eta} + 4U = 0 \text{ або } U_{\eta\eta} + U = 0.$$

Зауваження 1. ДРЧП (1.3) в різних областях площини xOy може належати до різних типів.

Зауваження 2. Якщо в рівнянні (1.8) $a_{11} \neq 0$ $(a_{22} \neq 0)$, то його можна записати у вигляді

$$\left[a_{11} z_x + \left(a_{12} + \sqrt{\Delta}\right) z_y\right] \cdot \left[a_{11} z_x + \left(a_{12} - \sqrt{\Delta}\right) z_y\right] = 0,$$
$$\left(\ \left[a_{22} z_y + \left(a_{12} + \sqrt{\Delta}\right) z_x\right] \cdot \left[a_{22} z_y + \left(a_{12} - \sqrt{\Delta}\right) z_x\right] = 0\ \right),$$

тобто

$$a_{11} z_x + \left(a_{12} + \sqrt{\Delta}\right) z_y = 0, \quad a_{11} z_x + \left(a_{12} - \sqrt{\Delta}\right) z_y = 0,$$
$$\left(a_{22} z_y + \left(a_{12} + \sqrt{\Delta}\right) z_x = 0, \quad a_{22} z_y + \left(a_{12} - \sqrt{\Delta}\right) z_x = 0\right).$$

У процесі інтеґрування одержаних лінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку доходимо до рівнянь (1.10).

Зауваження 3. Якщо розглядати лінійні ДРЧП другого порядку зі сталими коефіцієнтами, тоді канонічні форми будуть також лінійними рівняннями зі сталими коефіцієнтами. У цьому випадку одержані рівняння вдається спростити шляхом введення нової невідомої функції $V(\xi,\eta)$ згідно з формулою

$$U(\xi,\eta) = e^{\lambda\xi + \mu\eta} \cdot V(\xi,\eta),$$

де λ, μ – сталі, які вибираються таким чином, щоб коефіцієнти при V_ξ і V_η (у випадку рівнянь гіперболічного та еліптичного типів) або при V_η і V (у випадку рівнянь параболічного типу) перетворилися на нуль. Таким чином, у випадку лінійних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами одержуємо такі канонічні форми:

$$V_{\xi\xi} + V_{\eta\eta} + \gamma V = g(\xi,\eta) \text{ – еліптичний тип;}$$
$$V_{\eta\eta} + b_1 V_\xi = g(\xi,\eta) \text{ – параболічний тип;}$$
$$\left.\begin{array}{l} V_{\xi\eta} + \gamma V = g(\xi,\eta) \\ V_{\xi\xi} - V_{\eta\eta} + \gamma V = g(\xi,\eta) \end{array}\right\} \text{ – гіперболічний тип.}$$

Приклад 2. Визначити та побудувати область D, у якій зберігається тип ДРЧП другого порядку

$$(y+1)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+(2x-4)\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-3\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+4\cdot U=0.$$

Розв'язання

Маємо за даними умов:

$$a_{11}=y+1,\ a_{12}=x-2,\ a_{22}=-1,\ \Delta=a_{12}{}^2-a_{11}\cdot a_{22}=(x-2)^2+y+1.$$

Згідно з означенням 4 розглянемо окремі випадки Δ:

1) $\Delta=0$, звідси маємо множину $(x,y)\in D_1$, яка визначена точками параболи $(x-2)^2=-(y+1)$ з вершиною в точці $A(2,-1)$, гілки якої напрямлені донизу, і відповідає області ***параболічного типу*** рівняння;

2) $\Delta>0$, звідси маємо множину $(x,y)\in D_2$, яка визначена частиною площини xOy, розташованою за межами параболи $(x-2)^2=-(y+1)$, і відповідає області ***гіперболічного типу*** рівняння;

3) $\Delta<0$, звідси маємо множину $(x,y)\in D_3$, яка визначена частиною площини xOy, розташованою у внутрішній частині параболи $(x-2)^2=-(y+1)$, і відповідає області ***еліптичного типу*** рівняння.

Наведемо геометричну інтерпретацію визначення областей зберігання типу ДРЧП другого порядку (рис. 1.1).

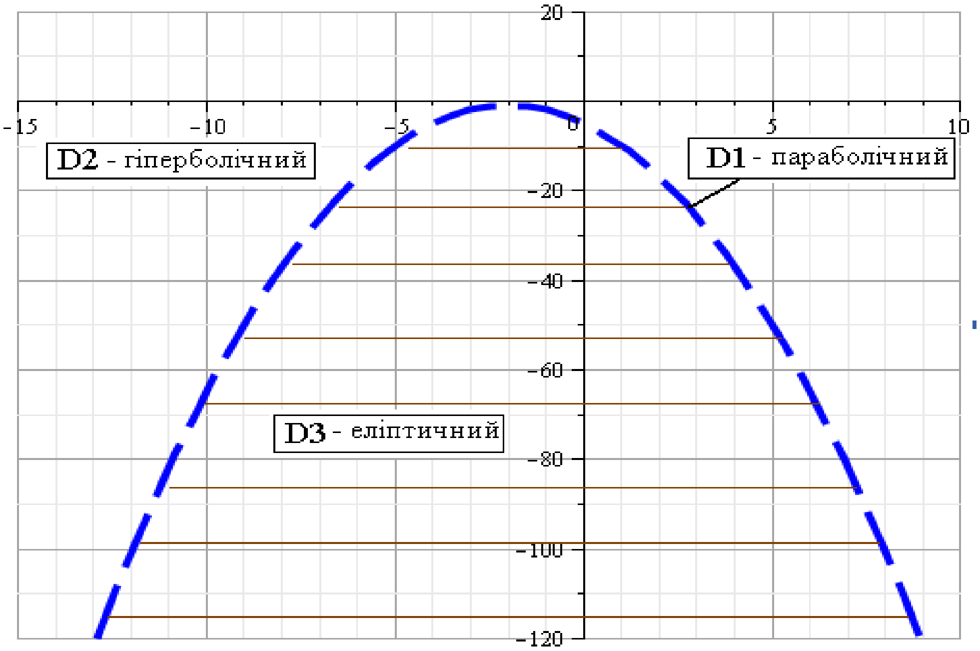

Рисунок 1.1 – Області, у яких зберігається тип ДРЧП другого порядку

Приклад 3. Дати повне визначення, вказати тип та звести до канонічного вигляду ДРЧП $u_{xx} - yu_{yy} + u(x,y) = 0, \quad y \neq 0$.

Розв'язання

Задане рівняння є лінійним однорідним ДРЧП другого порядку з двома незалежними змінними зі змінними коефіцієнтами.

Для визначення типу ДРЧП складемо дискримінант

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = y .$$

1) Нехай $y > 0$. Тоді рівняння (1.14) є рівнянням гіперболічного типу. Із відповідного характеристичного рівняння

$$(dy)^2 - y(dx)^2 = 0$$

знаходимо дві дійсні різні сім'ї характеристик

$$C_1 = x - 2\sqrt{y}, \quad C_2 = x + 2\sqrt{y} .$$

Характеристиками є праві і ліві вітки сім'ї парабол $y = 0{,}25(x - C)^2$. Вершини парабол, які лежать на осі *Ox*, не належать характеристикам, тому що в цих точках $\Delta = 0$ ($y = 0$ – лінія параболічності).

Вводимо заміну незалежних змінних

$$\xi = x - 2\sqrt{y}, \quad \eta = x + 2\sqrt{y} .$$

Тоді

$$u_x = U_\xi + U_\eta, \quad u_y = \frac{1}{\sqrt{y}}\left(U_\eta - U_\xi\right),$$

$$u_{xx} = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = y^{-1}\left(U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}\right) - \left(2y^{3/2}\right)^{-1}\left(U_\eta - U_\xi\right).$$

Після підстановки знайдених частинних похідних у рівняння, одержимо:

$$U_{\xi\eta} = 0{,}5(\eta - \xi)^{-1}\left(U_\xi - U_\eta\right) - 0{,}25U(\xi,\eta) .$$

Зведемо рівняння до другої канонічної форми в розглядуваній області. Для цього вводимо нові незалежні змінні

$$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta .$$

Тоді отримаємо:

$$U_\xi = \overline{U}_\alpha + \overline{U}_\beta, \quad U_\eta = \overline{U}_\alpha - \overline{U}_\beta, \quad U_{\xi\eta} = \overline{U}_{\alpha\alpha} - \overline{U}_{\beta\beta},$$

а отже, матимемо:

$$\overline{U}_{\alpha\alpha} - \overline{U}_{\beta\beta} = -\beta^{-1}\overline{U}_\beta - 0{,}25\overline{U}(\alpha,\beta).$$

2) В області $y < 0$ ДРЧП є рівнянням еліптичного типу. Маємо дві комплексно-спряжені сім'ї характеристик: $\xi = x$, $C_4 = x + 2i\sqrt{-y}$. Покладемо $\xi = x$, $\eta = 2\sqrt{-y}$, тоді отримаємо:

$$u_x = U_\xi, \quad u_y = -(-y)^{-1/2}U_\eta, \quad u_{xx} = U_{\xi\xi}, \quad u_{yy} = -y^{-1}U_{\eta\eta} - \left[2(-y)^{3/2}\right]^{-1}U_\eta.$$

Після підстановки знайдених частинних похідних у рівняння, одержимо:

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = -\eta^{-1}U_\eta - U(\xi,\eta).$$

Наведемо ***класифікацію ДРЧП другого порядку з багатьма незалежними змінними.***

Нехай задане квазілінійне ДРЧП вигляду

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j} = f(x_1, x_2, ..., x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, ..., u_{x_n}), \tag{1.20}$$

де всі коефіцієнти a_{ij} є сталими.

Введемо нові незалежні змінні $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ за допомогою неособливого лінійного перетворення

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} x_i, \quad k = \overline{1,n}. \tag{1.21}$$

Тоді ДРЧП (1.14) зведеться до рівняння

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} \overline{a}_{kp} U_{\xi_k \xi_p}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = F(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, U, U_{\xi_1}, U_{\xi_2}, ..., U_{\xi_n}), \tag{1.22}$$

де
$$\overline{a}_{kp} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ki}\alpha_{pj}. \tag{1.23}$$

Формули (1.17) перетворення коефіцієнтів при других похідних від функції u при заміні незалежних змінних згідно з формулою (1.15) співпадають з формулами перетворення коефіцієнтів квадратичної форми

$$\Omega(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \,, \tag{1.24}$$

якщо в ній здійснити лінійне перетворення

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \eta_k \,, \quad i = \overline{1,n}. \tag{1.25}$$

Вираз (1.18) називається ***характеристичною квадратичною формою*** для ДРЧП (1.14). Відповідним вибором коефіцієнтів α_{ki} у формулі (1.19) квадратичну форму (1.18) можна звести до канонічного вигляду

$$\overline{\Omega}(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \eta_k^2 \,, \tag{1.26}$$

де коефіцієнти λ_k рівні ± 1 або нульові, тобто

$$\overline{a}_{kp} = \begin{cases} 0, & k \neq p, \\ \lambda_k, & k = p. \end{cases}$$

Таким чином, якщо у формулі (1.15) коефіцієнти α_{ki} є такими, що неособливе перетворення (1.19) зводить рівняння (1.18) до канонічної форми, то рівняння (1.16) набуде вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_{\xi_k \xi_k}(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) = F(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, U, U_{\xi_1}, U_{\xi_2}, ..., U_{\xi_n})\,. \tag{1.27}$$

Згідно із законом інерції для квадратичних форм кількість додатних, які дорівнюють нулю, і від'ємних коефіцієнтів λ_k інваріантна відносно неособливого лінійного перетворення, яке зводить квадратичну форму до канонічного вигляду. У зв'язку з цим ДРЧП (1.14) називають рівнянням:

а) ***еліптичного тип***, якщо $\lambda_k = 1$ для всіх $k = \overline{1,n}$;

б) ***параболічного типу***, якщо хоча б один із коефіцієнтів λ_k дорівнює нулю;

в) ***гіперболічного типу***, якщо всі λ_k відмінні від нуля, але серед них є один коефіцієнт із знаком, протилежним знакам інших коефіцієнтів;

г) ***ультрагіперболічного типу***, якщо всі λ_k відмінні від нуля, але серед них $r>1$ коефіцієнтів є додатними, а $n-r>1$ – від'ємними.

Зауваження 4. Якщо в рівнянні (1.14) $a_{ij}=a_{ij}(x_1,x_2,...,x_n)$, то класифікацію та зведення до канонічного вигляду таких рівнянь здійснюють у точці розглядуваної області.

Приклад 5. Дати повне визначення, вказати тип ДРЧП другого порядку

$$u_{x_1x_3}-5u_{x_2x_3}+u_{x_2x_4}-2{,}5u_{x_2}=0\,,\ u=u(x_1,x_2,x_3,x_4)\,.$$

Розв'язання

Складаємо характеристичну квадратичну форму даного лінійного однорідного ДРЧП другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\Omega(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_3-5x_2x_3+x_2x_4\,.$$

Шляхом виділення повних квадратів послідовно відносно кожної з незалежних змінних її можна подати у вигляді

$$\Omega(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(x_1+\tfrac{1}{4}x_3\right)^2-\left(x_1-\tfrac{1}{4}x_3\right)^2+\left(x_2-\tfrac{5}{4}x_3+\tfrac{1}{4}x_4\right)^2-$$
$$-\left(x_2+\tfrac{5}{4}x_3-\tfrac{1}{4}x_4\right)^2,$$

тобто канонічний вигляд характеристичної квадратичної форми є

$$\overline{\Omega}(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=\eta_1^2-\eta_2^2+\eta_3^2-\eta_4^2\,,$$

де

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\\ \eta_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0{,}25 & 0\\ 1 & 0 & -0{,}25 & 0\\ 0 & 1 & -1{,}25 & 0{,}25\\ 0 & 1 & 1{,}25 & -0{,}25\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}.$$

Усі коефіцієнти при квадратах відмінні від нуля, причому два з них додатні, а інші два – від'ємні. Тому згідно з наведеною вище класифікацією ДРЧП є ***рівнянням ультрагіперболічного типу.***

1.3 Класичні рівняння математичної фізики

Найпростішими рівняннями кожного з розглянутих типів є:

1) ***рівняння коливань струни (хвильове рівняння)***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t);$$

2) ***рівняння коливань мембрани***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g(x,y,t);$$

3) ***рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g(x,y,z,t);$$

4) ***рівняння Пуассона***

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = g(x,y,z).$$

Наведені ДРЧП другого порядку найчастіше зустрічаються у фізичних задачах та зазвичай називають ***класичними рівняннями*** математичної фізики. До хвильового рівняння зокрема зводять задачі, які пов’язані з процесами коливань (поперечні коливання струни, поздовжні коливання стрижня, електричні коливання у дротах, коливання валів, коливання газу). Рівняння теплопровідності зустрічається при вивченні таких процесів, як: поширення тепла, фільтрація рідин та газів у пористих середовищах та дифузія. До рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ приходять при дослідженні стаціонарних процесів різної фізичної природи (розподілу теплоти, потенціального плину рідини, потенціалу стаціонарного току і електростатичного поля).

1.3.1 Початкові і граничні умови. Постановка задачі математичної фізики і її коректність

Нагадаємо, що як і звичайні диференціальні рівняння, рівняння з частинними похідними мають нескінченну множину розв'язків, які залежать, взагалі кажучи, від деяких довільних функцій. Однак вивчення реальних фізичних процесів потребує знання цілком визначеного розв'язку рівняння, а це можливо тільки за наявності певних додаткових умов. У переважній більшості випадків ці умови безпосередньо випливають з самої фізичної сутності вибраної задачі.

Розрізняють ***два основних типи*** таких умов:

- ***початкові умови***, які в математичній фізиці відповідають стану фізичного процесу в початковий момент часу;

- ***крайові або граничні умови***, які накладаються на процес на межі області його визначення.

Треба зауважити, що задача Коші для ДРЧП має деякі відмінності від аналогічної задачі для звичайних диференціальних рівнянь. По-перше, початкові умови встановлюються для нестаціонарних рівнянь, тобто таких, що описують нестаціонарні (залежні від часу) процеси. Прикладами таких рівнянь є хвильове рівняння та рівняння теплопровідності. По-друге, ця задача має єдиний розв'язок тільки у тому випадку, коли відповідне рівняння розглядається або на всій прямій, або на всій площині, або в усьому просторі. Наприклад, це може бути задача про коливання нескінченної струни або про поширення тепла у нескінченному стрижні. На практиці до таких задач приходять тоді, коли струна або стрижень дуже довгі і вивчаються процеси, що відбуваються далеко від кінців, впливом яких нехтують. Якщо ж розміри струни або стрижня не дуже великі і впливом кінців не можна знехтувати, то у цих випадках одні початкові умови вже не забезпечують єдиність розв'язання задачі і треба встановлювати умови на кінцях (граничні умови).

Таким чином, постановка задачі математичної фізики загалом передбачає:

1) вибір функції, яка характеризує досліджуваний фізичний процес;

2) виведення або вибір відповідного цьому процесу рівняння;

3) установлення граничних умов і формулювання початкових умов (якщо процес нестаціонарний).

Така задача називається ***початково-крайовою***.

Функції, які входять до початкових і граничних умов і від яких залежить розв'язання задачі, зазвичай визначаються з досліду і тому не можуть бути знайдені абсолютно точно. Завжди буде існувати деяка похибка, яка неминуче відіб'ється на розв'язанні, і далеко не завжди похибка буде малою.

Говорять, що в деякій області розв'язання задачі залежить від початкових або граничних умов неперервно, якщо малі зміни функцій, що входять до цих умов, тягнуть за собою малі зміни в розв'язанні. У цьому випадку також говорять, що розв'язок задачі стійкий, а сам досліджуваний процес є фізично визначеним.

Узагалі задача називається коректно поставленою, якщо її розв'язання задовольняє трьом умовам:

1) існує;

2) є єдиним;

3) неперервно залежить від додаткових умов.

Якщо задача поставлена некоректно, то її розв'язання у більшості випадків не має ніякої практичної цінності.

1.3.2 Поширення тепла в стрижні

Розглянемо теплоізольований з боків однорідний стрижень довжиною l настільки тонкий, щоб у будь-який момент часу температуру в усіх точках його поперечного перерізу можна було б вважати однаковою. Якщо на кінцях стрижня підтримуються сталі температури U_1 та U_2, то вздовж стрижня маємо лінійний розподіл температури:

$$U(x) = U_1 + \frac{U_2 - U_1}{l} \cdot x, \tag{1.28}$$

Зазначимо, що тепло буде перетікати від більш нагрітого кінця стрижня до менш нагрітого. Цей процес може бути описаний функцією $U(x,t)$, що визначає температуру в перерізі стрижня x в момент часу t. Тоді за законом Фур'є кількість тепла, що протікає через переріз x площею S за проміжок часу dt, дорівнює

$$dQ = -k \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \cdot S \cdot dt, \tag{1.29}$$

де k – коефіцієнт теплопровідності, який залежить від матеріалу стрижня.

Якщо всередині стрижня тепло не виникає і не поглинається (тобто теплові джерела відсутні), тоді згідно із законом збереження енергії приходимо до ***однорідного рівняння теплопровідності***

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{1.30}$$

де $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$ – коефіцієнт температуропровідності ($a = \text{const}$; c – питома теплоємність; ρ – густина матеріалу стрижня).

Зауважимо, що коефіцієнти k і c можна вважати сталими лише у невеликих інтервалах змінювання температури, оскільки вони зазвичай є повільно змінними функціями від неї.

Для відокремлення єдиного розв'язання рівняння теплопровідності, який би відповідав конкретному процесу, до рівняння необхідно приєднати початкові і граничні умови.

Початкова умова полягає в становленні значень функції $U(x,t)$ у початковий момент часу t_0.

Граничні умови залежать від температурного режиму на кінцях стрижня і можуть бути різними. Розглядають три основні типи таких умов:

1. ***Граничні умови першого роду*** – коли на кінці стрижня (наприклад, для $x = 0$) задана температура $U(0,t) = \mu(t)$, де $\mu(t)$ – функція, яка задана на проміжку часу $t_0 \le t \le T$, протягом якого вивчається даний процес.

2. ***Граничні умови другого роду*** – коли на кінці стрижня (наприклад, для $x = l$) задано значення похідної $\dfrac{\partial U}{\partial x}(l,t) = -\dfrac{Q(l,t)}{k}$, де $Q(l,t)$ визначає величину теплового потоку, що протікає через торцевий переріз $x = l$ стрижня.

3. ***Граничні умови третього роду*** відповідають теплообміну на поверхні стрижня з оточуючим середовищем, температура якого $Q(t)$ відома. Припускається, що теплообмін відбувається за законом Ньютона

$Q = h \cdot (U - \theta)$, де h – коефіцієнт теплообміну, а граничні умови третього роду мають вигляд $\frac{\partial U}{\partial x}(l,t) = \frac{h}{k} \cdot (U(l,t) - \theta(t))$ для кінця $x = l$ або $\frac{\partial U}{\partial x}(0,t) = \frac{h}{k} \cdot (U(0,t) - \theta(t))$ для кінця $x = 0$.

Можливі і більш складні крайові умови. Зазначимо також, що оскільки умови на кінцях стрижня можуть бути різних типів, то кількість їх можливих комбінацій, кожній з яких відповідає окрема задача, доволі значна.

Розглянемо так звану ***першу крайову задачу*** для обмеженої області (у даному випадку – для стрижня скінченної довжини): відшукати розв'язок рівняння теплопровідності (1.3) в області $0 \le x \le l$, $t_0 \le t \le T$, який задовольняє початковій умові $U(x,t_0) = \varphi(x)$, $0 \le x \le l$ та граничні умови $U(0,t) = \mu_1(t)$, $U(l,t) = \mu_2(t)$, $t_0 \le t \le T$, де $\varphi(x)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – задані функції, а $t_0 \le t \le T$ – проміжок часу, протягом якого вивчається даний процес. Якщо $\mu(t) = 0$, то відповідна гранична умова називається однорідною.

Окрім сформульованої задачі також часто зустрічаються її ***граничні випадки:***

1. Якщо стрижень дуже довгий, то протягом невеликого проміжку часу вплив заданого на кінцях температурного режиму на режим у центральній частині стрижня дуже слабкий (температура на центральній ділянці визначається в основному лише початковим розподілом температури). Тому в подібних задачах зазвичай вважають, що стрижень має нескінченну довжину. Отже, маємо ***задачу з початковими умовами (задачу Коші) про розподіл температури на нескінченній прямій*** (у нескінченному стрижні): знайти розв'язок рівняння теплопровідності (1.3) в області $-\infty < x < +\infty$, $t \ge t_0$, який задовольняє початковій умові $U(x,t_0) = \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ – задана функція.

2. Якщо ділянка стрижня, температура якої нас цікавить, знаходиться поблизу одного з кінців й далеко від другого, то температура цієї ділянки практично визначається температурним режимом близького кінця й початковими умовами. У цьому випадку стрижень звичайно вважається пів нескінченним, і ***перша крайова задача для півнескінченного стрижня*** формулюється у вигляді: знайти розв'язок рівняння теплопровідності (1.3)

в області $0 \le x < +\infty$, $t \ge t_0$, який задовольняє початковій умові $U(x, t_0) = \varphi(x)$ та граничній умові $U(0,t) = \mu(t)$, де $\varphi(x)$, $\mu(t)$ – задані функції.

3. Оскільки вплив початкових умов при поширенні тепла стрижнем з плином часу зменшується, то в доволі віддалений момент часу від початкового температура стрижня практично визначається граничними умовами. Отже, у цьому випадку маємо ***крайову задачу без початкових умов***: знайти розв'язок рівняння теплопровідності (1.3) в області $0 \le x \le l$, $t > -\infty$, який задовольняє граничним умовам $U(0,t) = \mu_1(t)$, $U(l,t) = \mu_2(t)$, де $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ – задані функції.

Залежно від характеру температурного режиму на межах можливі й інші види задач без початкових умов.

1.4 Застосування математичного пакета Maple для інтегрування рівнянь з частинними похідними першого та другого порядків

Для інтегрування диференціальних рівнянь з частинними похідними в **Maple** використовується команда **PDSOLVE**, подібна до команди **DSOLVE**.

Приклад 1. Зінтегрувати рівняння з частинними похідними першого порядку

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x^2 y - \sin(2 - y) + 2.$$

Розв'язання

```
> pdsolve(diff(u(x,y),x)=x^2*y-sin(2-y)+2);
```

$$u(x, y) = \frac{1}{3} x^3 y + x \sin(-2 + y) + 2x + \_F1(y)$$

Приклад 2. Зінтегрувати лінійне однорідне рівняння з частинними похідними першого порядку

$$y^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + x^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Розв'язання

```
>pdsolve(y^2*diff(u(x,y),x)-x^2*diff(u(x,y),y)=0);
```

$$u(x, y) = \_F1(x^3 + y^3)$$

Приклад 3. Зінтегрувати лінійне однорідне рівняння з частинними похідними першого порядку

$$\frac{\partial u}{\partial x} - y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Розв'язання

```
>pdsolve(diff(u(x,y,z),x)-
y*diff(u(x,y,z),y)+z*diff(u(x,y,z),z)=0);
```

$$u(x, y, z) = \_F1(y\,\mathrm{e}^x, z\,\mathrm{e}^{-x})$$

Приклад 4. Зінтегрувати квазілінійне однорідне рівняння з частинними похідними першого порядку

$$x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 2y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = u.$$

Розв'язання

```
>pdsolve(x*diff(u(x,y),x)+2*y*diff(u(x,y),y)=u);
```

$$u(x, y) = \_F1\left(\frac{y}{x^2}\right) x$$

За допомогою математичного пакета **Maple** не можна знайти розв'язок задачі Коші для рівняння з частинними похідними в аналітичному вигляді (у вигляді формули). Однак команда **PDEplot** з пакета **PDEtools** дозволяє побудувати відповідну інтегральну поверхню наближеними методами.

Приклад 5. Знайти інтегральну поверхню лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку

$$(x^2 + 1) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + xy \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

яка при $x = 0$ проходить через криву $z = y^2$.

Розв'язання

```
>PDEtools[PDEplot]((x^2+1)*diff(z(x,y),x)+x*y*diff(z(x,y),y)=0
,[0,t,t^2],t=-10..10,z=0..20,x=-
10..10,numchar=200,scaling=constrained);
```

Отримаємо інтегральну поверхню наближеними методами (рис. 1.2).

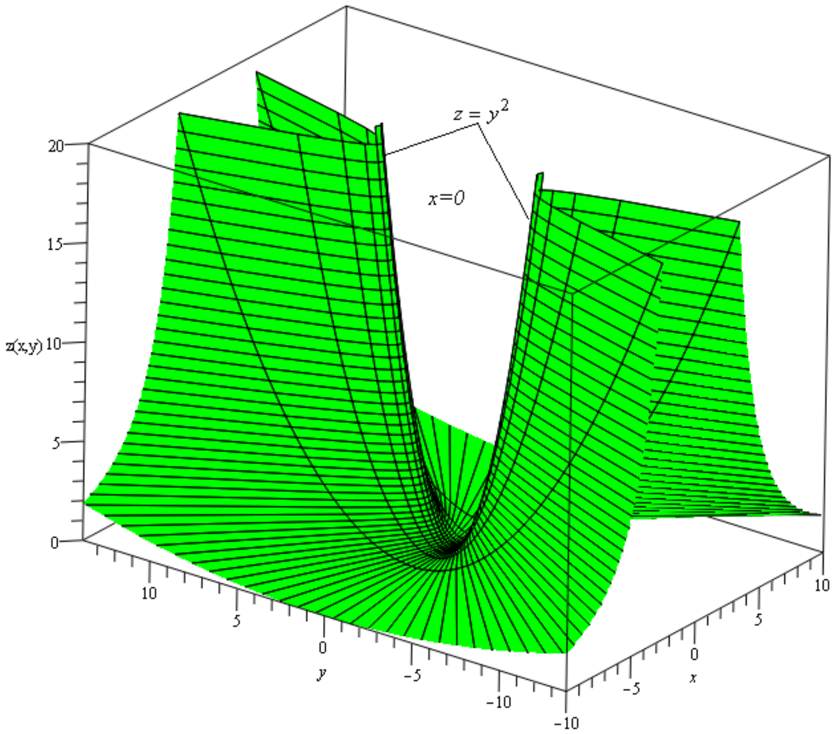

Рисунок 1.2 – Графік інтегральної поверхні

Приклад 6. Визначити тип ДРЧП другого порядку

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Розв'язання

```
>restart:with(PDEtools,dchange);
```

$$[dchange]$$

```
>a11:=1;a12:=-x;a22:=x^2;F:=0*diff(u(x,y),x)-
2*diff(u(x,y),y);PDE:=a11*diff(u(x,y),x,x)+2*a12*diff(u(x,y),x
,y)+a22*diff(u(x,y),y,y)+F=0;
```

$$a11 := 1$$

$$a12 := -x$$

$$a22 := x^2$$

$$F := -2\left(\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right)$$

$$PDE := \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) - 2x\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}u(x,y)\right) + x^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\right) - 2\left(\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right) = 0$$

```
>Delta:=simplify(a12^2-a11*a22);
```

$$\Delta := 0$$

```
>
  if Delta = 0 then
        print(параболічний тип)
     elif Delta > 0 then
        print(гіперболічний тип)
     elif Delta < 0 then
        print(еліптичний тип)
     end if
```

параболічний тип

Приклад 7. Визначити тип ДРЧП зі сталими коефіцієнтами

$$4\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,.$$

Розв'язання

```
>restart:with(PDEtools,dchange);
```

$$[dchange]$$

```
>a11:=4;a12:=-
2;a22:=5;PDE:=a11*diff(u(x,y),x,x)+2*a12*diff(u(x,y),x,y)+a22*
diff(u(x,y),y,y)+F=0;
```

$$a11 := 4$$

$$a12 := -2$$

$$a22 := 5$$

$$PDE := 4\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)\right) - 4\left(\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}u(x,y)\right) + 5\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)\right) + F = 0$$

```
>Delta:=simplify(a12^2-a11*a22);
```

$$\Delta := -16$$

```
>
  if Delta = 0 then
        print(параболічний тип)
     elif Delta > 0 then
        print(гіперболічний тип)
     elif Delta < 0 then
        print(еліптичний тип)
     end if
```

еліптичний тип

Приклад 8. Побудувати область гіперболічності ДРЧП другого порядку

$$x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (x-2) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F = 0.$$

Розв'язання

```
>restart:with(PDEtools,dchange);
```

$$[dchange]$$

```
>a11:=x;a12:=-y;a22:=x-
2;PDE:=a11*diff(u(x,y),x,x)+2*a12*diff(u(x,y),x,y)+a22*diff(u(
x,y),y,y)+F=0;
```

$$a11 := x$$

$$a12 := -y$$

$$a22 := x - 2$$

$$PDE := x \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y)\right) - 2y \left(\frac{\partial^2}{\partial y \, \partial x} u(x,y)\right) + (x - 2) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y)\right) + F = 0$$

```
>Delta(x,y):=simplify(a12^2-a11*a22);
```

$$\Delta(x,y) := y^2 - x^2 + 2x$$

```
>with(plots):
>implicitplot(Delta(x,y)=0,x=-4..6,y=-5..5);
```

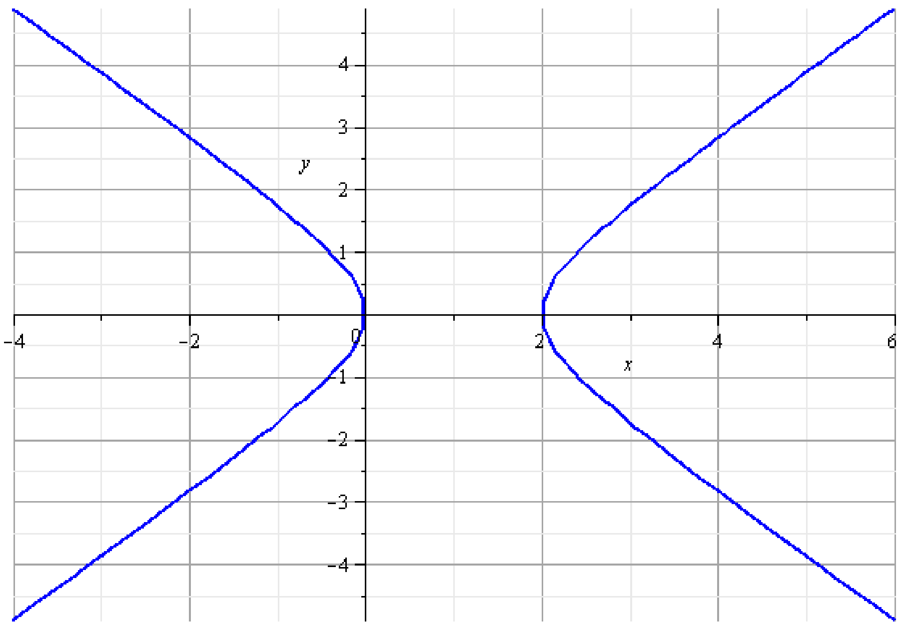

Рисунок 1. 3 – Побудова області гіперболічності ДРЧП

2 ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

Практична робота 1

Завдання 1. Перевірити, чи задовольняє вказаному рівнянню функція $U(x, y)$:

1. $x^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2xy \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, $U = \frac{y}{x}$.

2. $x^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, $U = y \cdot \sqrt{\frac{y}{x}}$.

3. $16 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, $U = e^{-\cos(x+4y)}$.

4. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, $U = e^{-\sin(2x+4y)}$.

5. $81 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $U = \sin^2(x - 9y)$.

6. $x \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial U}{\partial y} = 0$, $U = \arcsin \frac{x}{x+y}$.

7. $x \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial U}{\partial y} = 0$, $U = arctg \frac{x}{y}$.

8. $x \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial U}{\partial y} = 2U$, $U = \left(x^2 + y^2\right) \cdot tg \frac{x}{y}$.

9. $625 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$, $U = e^{-\cos(x+25y)}$.

10. $x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + u = 0$, $U = \frac{2x + 3y}{x^2 + y^2}$.

11. $y \frac{\partial U}{\partial x} - x \frac{\partial U}{\partial y} = 0$, $U = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

12. $x \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial U}{\partial y} = U$, $U = x \cdot \ln \frac{y}{x}$.

13. $9 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, $U = \sin^2(x - 3y)$.

14. $25\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$, $U=e^{-\cos(x+5y)}$.

15. $x\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial U}{\partial y}=2U$, $U=x\cdot\frac{y}{x+y}$.

16. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$, $U=\ln\left(x^2+(y+1)^2\right)$.

17. $x^2\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+y^2\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$, $U=e^{xy}$.

18. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$, $U=\ln\left(x^2-y^2\right)$.

19. $\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{x+y}{x-y}$, $U=\frac{x^2+y^2}{x-y}$.

20. $x\cdot\frac{\partial U}{\partial x}-y\cdot\frac{\partial U}{\partial y}=0$, $U=\arcsin\frac{x}{x-y}$.

21. $y\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial U}{\partial y}=0$, $U=arctg\,\frac{y}{x}$.

22. $x\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-2U=0$, $U=\left(x^2+y^2\right)\cdot tg\,\frac{x}{y}$.

23. $x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}+3u=0$, $U=\frac{x+3y}{x^2+y^2}$.

24. $y\frac{\partial U}{\partial x}=x\frac{\partial U}{\partial y}$, $U=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

25. $x\cdot\frac{\partial U}{\partial x}+y\cdot\frac{\partial U}{\partial y}-U=0$, $U=x\cdot\ln\frac{y}{x}$.

Завдання 2. Зінтенгрувати ДРЧП першого порядку:

1. $\frac{\partial Z}{\partial x}=2xy^2-\sqrt{x}+5e^{-3y}+\sin(x+3y)+arctg\,\frac{2}{y}$.

2. $\frac{\partial Z}{\partial y}=5x^4y^2-\sqrt{y}+5e^{-3x+y}+7\sin(2x+3y)-\arcsin\frac{3}{x}$.

3. $\frac{\partial Z}{\partial x}=2xy^2-\sqrt{3x}+5e^{-3x+y}+\cos(x+3y)-\arccos\frac{2}{y}$.

4. $\frac{\partial Z}{\partial y}=7x^6y^2+4\sqrt{y}+5e^{-3x+5y}+\sin(2x+y)-arcctg\,\frac{4}{x}$.

5. $\dfrac{\partial Z}{\partial x} = 2xy - \sqrt[3]{x} + 5e^{-3y} + 5\sin(x+3y) + \ln\dfrac{2}{y}$.

6. $\dfrac{\partial Z}{\partial y} = 5xy^2 - \sqrt[5]{y} + 5e^{-x+y} + \sin(2x+3y) - \ln\dfrac{3}{x}$.

7. $\dfrac{\partial Z}{\partial x} = 10x^9y^2 - \sqrt{2x} + 5e^{-3x+y} + \cos(x+3y) - \arcsin\dfrac{7}{y}$.

8. $\dfrac{\partial Z}{\partial y} = 5x^4y^3 + 3\sqrt{y} - e^{-3x+y} + 2\sin(2x+3y) - arctg\,\dfrac{4}{x}$.

9. $\dfrac{\partial Z}{\partial x} = 2xy^2 - \sqrt{x} + 5e^{-3y} + \sin(x+3y) + arctg\,\dfrac{2}{y}$.

10. $\dfrac{\partial Z}{\partial y} = 5x^4y^2 - \sqrt{y} + 5e^{-3x+y} + 7\sin(2x+3y) - \arcsin\dfrac{3}{x}$.

11. $\dfrac{\partial Z}{\partial x} = 2xy^2 - \sqrt{3x} + 5e^{-3x+y} + \cos(x+3y) - \arccos\dfrac{2}{y}$.

12. $\dfrac{\partial Z}{\partial y} = 7x^6y^2 + 4\sqrt{y} + 5e^{-3x+5y} + \sin(2x+y) - arcctg\,\dfrac{4}{x}$.

13. $\dfrac{\partial Z}{\partial x} = 2xy - \sqrt[3]{x} + 5e^{-3y} + 5\sin(x+3y) + \ln\dfrac{2}{y}$.

14. $\dfrac{\partial Z}{\partial y} = 5xy^2 - \sqrt[5]{y} + 5e^{-x+y} + \sin(2x+3y) - \ln\dfrac{3}{x}$.

15. $\dfrac{\partial Z}{\partial x} = 10x^9y^2 - \sqrt{2x} + 5e^{-3x+y} + \cos(x+3y) - \arcsin\dfrac{7}{y}$.

16. $\dfrac{\partial Z}{\partial y} = 5x^4y^3 + 3\sqrt{y} - e^{-3x+y} + 2\sin(2x+3y) - arctg\,\dfrac{4}{x}$.

17. $\dfrac{\partial Z}{\partial x} = 2xy - \sqrt{x+2} + 5e^{-3y} + 2\sin(x+3y) + 2arctg\,\dfrac{2}{y^2}$.

18. $\dfrac{\partial Z}{\partial y} = 11x^{10}y^2 + \sqrt{y+7} + e^{-3x+y} + \sin(2x+3y) + \arcsin\dfrac{3}{x}$.

19. $\dfrac{\partial Z}{\partial x} = 4xy^2 - \sqrt{3+x} + e^{8y-3x} + \cos x + \arccos\dfrac{2}{y^2}$.

20. $\dfrac{\partial Z}{\partial y} = 7x^6y^2 + \sqrt{y+3} + 5e^{y-3x} + \sin(2x+5y) - arcctg\,\dfrac{3}{x}$.

21. $\dfrac{\partial Z}{\partial x} = 12x^{11}y - \sqrt[3]{x+2} + e^{-3y} - \sin(x+3y) + \ln\dfrac{2}{y}$.

22. $\dfrac{\partial Z}{\partial y} = xy^2 - \sqrt[5]{y} + e^{3y-x} + 5\sin(y-2x) - \ln\dfrac{3}{x^2}$.

23. $\dfrac{\partial Z}{\partial x} = 10x^9y^2 - \sqrt{2x} + 5e^{-3x+y} + 2\cos(y-x) - \arccos\dfrac{7}{y^3}$.

24. $\dfrac{\partial Z}{\partial y} = xy^3 - \sqrt{y} - e^{-3x+y} + 2\sin(2x+3y) - arctg\,\dfrac{4}{x^2}$.

25. $\dfrac{\partial Z}{\partial x} = 11x^{10}y - \sqrt[5]{x} + e^{y-3x} + \cos(x-3y) - \arcsin\dfrac{2}{y^2}$.

Завдання 3. Знайти загальний розв'язок ДРЧП першого порядку:

1. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y} + x^2y$.

2. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2z}{x} + x^2y$.

3. $\dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{3z}{y} + x^2y^3 = 0$.

4. $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{3z}{x} - x^3y = 0$.

5. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{2y} + x^2\sqrt{y}$.

6. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{3x} + \sqrt[3]{x}$.

7. $\dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{z}{y} + 2x^2y = 0$.

8. $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{4z}{x} + x^4y = 0$.

9. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y} - 4\sqrt{x}y$.

10. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2z}{x} - 5x^2y^3$.

11. $\dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{3z}{y} + 3x^5y^3 = 0$.

12. $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{3z}{x} + 5x^3y = 0$.

13. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{2y} - x^3\sqrt{y}$.

14. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{3x} - \sqrt[3]{x}$.

15. $\dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{z}{y} - 3x^2y = 0$.

16. $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{4z}{x} - 5x^4y^2 = 0$.

17. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{y} + 8x^4y$.

18. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{5z}{x} + 4x^5y$.

19. $\dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{3z}{y} + 4xy^3 = 0$.

20. $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{3z}{x} - 7x^3y^6 = 0$.

21. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{z}{2y} + 3x\sqrt{y}$.

22. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{4x} + \sqrt[4]{x}$.

23. $\dfrac{\partial z}{\partial y} - \dfrac{z}{y} + 4x^5y = 0$.

24. $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{5z}{x} - x^5y = 0$.

25. $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y} - 4y$.

Практична робота 2

Завдання 1. Знайти загальний розв’язок лінійного однорідного ДРЧП першого порядку. Записати окремі три випадки, вибравши довільним чином функцію z та для одного з випадків виконати перевірку отриманого розв’язку:

1. $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

2. $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

3. $x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

4. $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

5. $y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

6. $e^x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

7. $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

8. $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

9. $x^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - e^y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$

10. $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

11. $y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

12. $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

13. $2x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+3\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

14. $3x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

15. $x^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+3y^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$

16. $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2e^{-2y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

17. $y^5\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-x^5\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

18. $e^{5x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

19. $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-4y^3\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

20. $\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2y\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

21. $x^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+e^{3y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$

22. $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+2e^{-y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

23. $y^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+x\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

24. $\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

25. $x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-2\sqrt{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

Завдання 2. Знайти інтегральну поверхню рівняння, що проходить через задану криву:

1. $xy\frac{\partial U}{\partial x}-y^2\frac{\partial U}{\partial y}=x^2,\quad y=1;\ U=x^2$.

2. $\frac{1}{x}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial U}{\partial y}=x^{-2},\quad x=1;\ U=1-y^2$.

3. $x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy, \quad y = 1; U = 2x.$

4. $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 2y, \quad x = 1; U = 2y^2.$

5. $x\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 2, \quad y = 0; U = x.$

6. $\frac{\partial U}{\partial x} - 2\frac{\partial U}{\partial y} = 2x, \quad x = 0; U = \frac{1}{y}.$

7. $xy\frac{\partial U}{\partial x} - y^2\frac{\partial U}{\partial y} = x^2, \quad y = 1; \ U = x^2.$

8. $\frac{1}{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial U}{\partial y} = x^{-2}, \quad x = 1; \ U = 1 - y^2.$

9. $x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy, \quad y = 1; U = 2x.$

10. $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 2y, \quad x = 1; U = 2y^2.$

11. $x\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 2, \quad y = 0; U = x.$

12. $\frac{\partial U}{\partial x} - 2\frac{\partial U}{\partial y} = 2x, \quad x = 0; U = \frac{1}{y}.$

13. $xy\frac{\partial U}{\partial x} - y^2\frac{\partial U}{\partial y} = x^2, \quad y = 1; \ U = x^2.$

14. $\frac{1}{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial U}{\partial y} = x^{-2}, \quad x = 1; \ U = 1 - y^2.$

15. $x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} = 2xy, \quad y = 1; U = 2x.$

16. $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 2y, \quad x = 1; U = 2y^2.$

17. $x\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 2, \quad y = 0; U = x.$

18. $\frac{\partial U}{\partial x} - 2\frac{\partial U}{\partial y} = 2x, \quad x = 0; \ U = \frac{1}{y}.$

19. $xy\dfrac{\partial U}{\partial x} - y^2\dfrac{\partial U}{\partial y} = x^2, \quad y = 1;\ U = x^2.$

20. $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial U}{\partial y} = x^{-2}, \quad x = 1;\ U = 1 - y^2.$

21. $x\dfrac{\partial U}{\partial x} + y\dfrac{\partial U}{\partial y} = 2xy, \quad y = 1;\ U = 2x.$

22. $\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial U}{\partial y} = 2y, \quad x = 1;\ U = 2y^2.$

23. $x\dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial U}{\partial y} = 2, \quad y = 0;\ U = x.$

24. $\dfrac{\partial U}{\partial x} - 2\dfrac{\partial U}{\partial y} = 2x, \quad x = 0;\ U = \dfrac{1}{y}.$

25. $xy\dfrac{\partial U}{\partial x} - y^2\dfrac{\partial U}{\partial y} = x^2, \quad y = 1;\ U = x^2.$

Практична робота 3

Завдання 1. Визначити та побудувати область D, у якій зберігається тип ДРЧП другого порядку:

1. $y\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (4x+8)\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 2(y+3)\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 3\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x} + 4\cdot U = 0.$

2. $(y-1)\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - (2x-2)\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - y\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 3\cdot\dfrac{\partial U}{\partial y} = 0.$

3. $\sqrt{y+1}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2x\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 2\sqrt{y+1}\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \dfrac{\partial U}{\partial x} + 5\cdot U = 0.$

4. $y\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2\sqrt{x+2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 2(y-1)\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 3\cdot\dfrac{\partial U}{\partial y} + 4\cdot U = 0.$

5. $y\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2\sqrt{x+2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - 2(y-1)\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 3\cdot\dfrac{\partial U}{\partial y} + 4\cdot U = 0.$

6. $\sqrt{y-2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - (2x-6)\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 4\sqrt{y-2}\cdot\dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 5\cdot U = 0.$

7. $y\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}+4\sqrt{2x-6}\,\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial y}-(y-1)\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}+3\cdot\dfrac{\partial U}{\partial y}+4\cdot U=0.$

8. $x\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}-4\sqrt{2y-4}\,\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial y}-(2x-1)\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}+3\cdot\dfrac{\partial U}{\partial y}+4\cdot U=0.$

9. $y\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}-(2x+6)\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial y}-2(y+3)\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}-\dfrac{\partial U}{\partial x}+U=0.$

10. $(y+1)\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}+(2x-4)\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial y}-y\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}+3\cdot\dfrac{\partial U}{\partial y}=0.$

11. $\sqrt{y+4}\,\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}-2x\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial y}-2\sqrt{y+4}\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}-3\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x}+5\cdot U=0.$

12. $y\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}+2\sqrt{x-4}\,\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial y}-2(y-1)\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}+\dfrac{\partial U}{\partial y}+4\cdot U=0.$

13. $y\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}-2\sqrt{x-5}\,\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial y}-2(y+1)\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}+3\cdot\dfrac{\partial U}{\partial y}+4\cdot U=0.$

14. $\sqrt{y+3}\,\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}-(2x-6)\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial y}+4\sqrt{y+3}\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}-5\cdot U=0.$

15. $y\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}+4\sqrt{2x+10}\,\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial y}-(y-1)\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}+5\cdot\dfrac{\partial U}{\partial y}+4\cdot U=0.$

16. $x\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}+8\sqrt{2y-4}\,\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial y}-(2x-1)\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}-\dfrac{\partial U}{\partial x}+4\cdot U=0.$

17. $2y\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}+(4x+12)\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial y}-2(y+3)\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}+3\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x}+U=0.$

18. $(y-1)\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}-(4x-4)\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial y}-y\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}+5\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x}=0.$

19. $\sqrt{y+1}\,\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}+8x\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial y}-2\sqrt{y+1}\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}-3\cdot\dfrac{\partial U}{\partial x}+5\cdot U=0.$

20. $y\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}+2\sqrt{x-3}\,\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial y}-2(y-1)\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}+\dfrac{\partial U}{\partial y}+U=0.$

21. $y\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}+4\sqrt{x+2}\,\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial y}-4(y-1)\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}+3\cdot\dfrac{\partial U}{\partial y}-4\cdot U=0.$

22. $\sqrt{y-2}\,\dfrac{\partial^2U}{\partial x^2}+(2x+6)\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial x\partial y}+4\sqrt{y-2}\cdot\dfrac{\partial^2U}{\partial y^2}+5\cdot U=0.$

23. $y\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+2\sqrt{2x-6}\,\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}-(y+1)\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+3\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+4\cdot U=0.$

24. $2x\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-8\sqrt{2y-4}\,\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}-(2x-1)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+3\cdot\frac{\partial U}{\partial y}+4\cdot U=0.$

25. $(y-1)\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+(8x+8)\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}-y\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+3\cdot\frac{\partial U}{\partial x}=0.$

Завдання 2. Визначити тип рівняння і знайти сімейства характеристичних ліній цього рівняння:

1. $4U_{xx}+8U_{xy}+3U_{yy}-5U_x+U=0.$
2. $U_{xx}+4U_{xy}+3U_{yy}-5U_x+U=0.$
3. $6U_{xx}-8U_{xy}+2U_{yy}-U_y+5U=0.$
4. $4U_{xx}-4U_{xy}+U_{yy}-7U_x-U_y+U=0.$
5. $3U_{xx}-4U_{xy}+U_{yy}+5U_x+U_y=0.$
6. $10U_{xx}-2U_{xy}+U_{yy}+5U_y+2U=0.$
7. $12U_{xx}+24U_{xy}+12U_{yy}+U_x-U_y+2U=0.$
8. $U_{xx}+6U_{xy}+9U_{yy}+U_x-5U_y+2U=0.$
9. $2U_{xx}-2U_{xy}+5U_{yy}+3U_y-2U=0.$
10. $-4U_{xx}+8U_{xy}-3U_{yy}+5U_x+U=0.$
11. $9U_{xx}+6U_{xy}+U_{yy}+2U_x-5U_y+2U=0.$
12. $16U_{xx}-8U_{xy}+U_{yy}+U_x-2U_y+2U=0.$
13. $-2U_{xx}-4U_{xy}-2U_{yy}+7U_x-U_y+U=0.$
14. $9U_{xx}+6U_{xy}+U_{yy}+2U_x-5U_y+2U=0.$
15. $-4U_{xx}-8U_{xy}-4U_{yy}+5U_x-2U_y+U=0.$

16 $5U_{xx}-2U_{xy}+2U_{yy}-5U_y+2U=0.$

17 $9U_{xx}-6U_{xy}+U_{yy}+U_x-5U_y+2U=0.$

18. $4U_{xx}-8U_{xy}+4U_{yy}+5U_x-U_y+2U=0.$

19 $3U_{xx}+8U_{xy}+4U_{yy}-5U_x+U=0.$

20. $-3U_{xx}+6U_{xy}-3U_{yy}+U_x-5U_y+2U=0.$

21. $3U_{xx}-4U_{xy}+U_{yy}-3U_y+5U_x=0.$

22. $-4U_{xx}+8U_{xy}-3U_{yy}+5U_x+U=0.$

23. $-32U_{xx}+8U_{xy}-U_{yy}+2U_{y}-U_{x}=0$.

24. $6U_{xx}+8U_{xy}+2U_{yy}+5U_{y}+5U=0$.

25. $4U_{xx}-4U_{xy}+U_{yy}+U_{x}-2U_{y}+U=0$.

Практична робота 4

Завдання 1. Звести до канонічного вигляду ДРЧП другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

1. а) $2U_{xx}-4U_{xy}+2U_{yy}+7U_{x}-U_{y}+U=0$,

 б) $5U_{xx}-2U_{xy}+2U_{yy}-5U_{y}+2U=0$.

2. а) $16U_{xx}-8U_{xy}+2U_{yy}+U_{y}-2U=0$;

 б) $U_{xx}+4U_{xy}+3U_{yy}-5U_{x}+U=0$.

3. а) $4U_{xx}-8U_{xy}+4U_{yy}+5U_{x}-U_{y}+2U=0$;

 б) $6U_{xx}-8U_{xy}+2U_{yy}-U_{y}+5U=0$.

4. а) $10U_{xx}-2U_{xy}+U_{yy}-15U_{y}+2U_{x}=0$;

 б) $3U_{xx}+8U_{xy}+4U_{yy}-5U_{x}+U=0$.

5. а) $3U_{xx}+6U_{xy}+3U_{yy}+U_{x}-5U_{y}+2U=0$;

 б) $3U_{xx}-4U_{xy}+U_{yy}+5U_{x}+U_{y}=0$.

6. а) $10U_{xx}-2U_{xy}+U_{yy}+5U_{y}+2U=0$;

 б) $U_{xx}-2U_{xy}+1U_{yy}+15U_{x}-U_{y}+2U=0$.

7. а) $12U_{xx}+24U_{xy}+12U_{yy}+U_{x}-U_{y}+2U=0$;

 б) $-4U_{xx}+8U_{xy}-3U_{yy}+5U_{x}+U=0$.

8. а) $-16U_{xx}+8U_{xy}-2U_{yy}+2U_{y}-U_{x}=0$;

 б) $2U_{xx}+8U_{xy}+6U_{yy}-5U_{x}+U=0$.

9. а) $2U_{xx}-2U_{xy}+5U_{yy}+3U_{y}-2U=0$;

 б) $6U_{xx}+8U_{xy}+2U_{yy}+5U_{y}+5U=0$.

10. а) $-4U_{xx}+8U_{xy}-3U_{yy}+5U_{x}+U=0$;

 б) $-5U_{xx}+2U_{xy}-2U_{yy}-5U_{y}+2U=0$.

11. а) $8U_{xx}+8U_{xy}+4U_{yy}+U_{y}-2U=0$;

 б) $2U_{xx}+8U_{xy}+6U_{yy}-5U_{x}+U=0$.

12. а) $U_{xx} - 2U_{xy} + 10U_{yy} + 5U_y - 2U = 0$;

б) $2U_{xx} - 8U_{xy} + 6U_{yy} - U_y + 5U = 0$.

13. а) $4U_{xx} - 8U_{xy} + 3U_{yy} - 5U_x + 2U = 0$;

б) $5U_{xx} + 2U_{xy} + 2U_{yy} - 5U_y + 2U = 0$.

14. а) $9U_{xx} + 6U_{xy} + U_{yy} + 2U_x - 5U_y + 2U = 0$;

б) $U_{xx} + 4U_{xy} + 3U_{yy} - 5U_x + U = 0$.

15. а) $-6U_{xx} + 8U_{xy} - 2U_{yy} - U_y + 5U = 0$;

б) $-4U_{xx} - 8U_{xy} - 4U_{yy} + 5U_x - 2U_y + U = 0$.

16. а) $4U_{xx} + 8U_{xy} + 3U_{yy} - 5U_x + U = 0$;

б) $2U_{xx} - 4U_{xy} + 2U_{yy} + 7U_x - U_y + U = 0$.

17. а) $16U_{xx} - 8U_{xy} + 2U_{yy} + U_y - 2U = 0$,

б) $U_{xx} + 4U_{xy} + 3U_{yy} - 5U_x + U = 0$.

18. а) $4U_{xx} - 8U_{xy} + 4U_{yy} + 5U_x - U_y + 2U = 0$;

б) $U_{xx} + 2U_{xy} + 10U_{yy} + 3U_y - 2U = 0$.

19. а) $3U_{xx} + 8U_{xy} + 4U_{yy} - 5U_x + U = 0$;

б) $4U_{xx} - 4U_{xy} + U_{yy} - 7U_x - U_y + U = 0$.

20. а) $-3U_{xx} + 6U_{xy} - 3U_{yy} + U_x - 5U_y + 2U = 0$;

б) $3U_{xx} - 4U_{xy} + U_{yy} + 5U_x + U_y = 0$.

21. а) $3U_{xx} - 4U_{xy} + U_{yy} - 3U_y + 5U_x = 0$;

б) $10U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy} + 5U_y + 2U = 0$.

22. а) $-4U_{xx} + 8U_{xy} - 3U_{yy} + 5U_x + U = 0$;

б) $12U_{xx} + 24U_{xy} + 12U_{yy} + U_x - U_y + 2U = 0$.

23. а) $U_{xx} + 6U_{xy} + 9U_{yy} + U_x - 5U_y + 2U = 0$,

б) $2U_{xx} + 8U_{xy} + 6U_{yy} - 5U_x + U = 0$.

24. а) $6U_{xx} + 8U_{xy} + 2U_{yy} + 5U_y + 5U = 0$;

б) $4U_{xx} + 8U_{xy} + 4U_{yy} + U_x - U_y + 2U = 0$.

25. а) $-4U_{xx} - 8U_{xy} - 3U_{yy} + 15U_x + U = 0$;

б) $4U_{xx} - 4U_{xy} + U_{yy} + U_x - 2U_y + U = 0$.

Завдання 2. Дати повне визначення, вказати тип та звести до канонічного вигляду такі ДРЧП:

1. а) $u_{xx} + 2xyu_{xy} + 10x^2y^2u_{yy} + u_x(x,y) = 0, \quad xy \neq 0$;

б) $u_{xx} + 2\sin xu_{xy} + \left(1 + \sin^2 x\right) \cdot u_{yy}(x,y) - x\ln|y| = 0$.

2. а) $x^2u_{xx} - 2xu_{xy} + u_{yy} + xu_x(x,y) = e^y$;

б) $\sin^2 xu_{xx} - 2y\sin xu_{xy} + \left(1 + y^2\right) \cdot u_{yy}(x,y) = 0$.

3. а) $u_{yy} - 2\cos yu_{xy} + \left(2 - \sin^2 y\right) \cdot u_{xx}(x,y) = \sin y$;

б) $u_{xx} + 2\,\mathrm{tg}\,xu_{xy} + \left(1 + \mathrm{tg}^2\,x\right)u_{yy} + u_x(x,y) = 0$.

4. а) $u_{xx} - \cos xu_{xy} - 0{,}25\sin^2 xu_{yy}(x,y) = 5xy$;

б) $u_{xx} + 4e^xu_{xy} + 4e^{2x}u_{yy} + 5u_x(x,y) = 0$.

5. а) $u_{xx} + 2yu_{xy} + \left(1 + y^2\right)u_{yy}(x,y) = 9x$;

б) $u_{xx} + 2\cos xu_{xy} + \cos^2 xu_{yy}(x,y) = 0$.

6. а) $u_{xx} + 2\sin xu_{xy} + \left(1 + \sin^2 x\right) \cdot u_{yy}(x,y) = 0$;

б) $u_{xx} - e^{2x}u_{yy} + 3u_y(x,y) = 0{,}2e^x$.

7. а) $\sin^2 yu_{xx} + 2\sin yu_{xy} + u_{yy} + \cos yu_x(x,y) = 0$;

б) $\sin^2 xu_{xx} + 2\cos xu_{xy} - u_{yy} + u_y \cdot u(x,y) = 0$.

8. а) $\mathrm{tg}^2\,yu_{xx} + 2\,\mathrm{tg}\,yu_{xy} + u_{yy} + \dfrac{1}{\cos^2 y}u_x(x,y) = 0$;

б) $u_{xx} - xyu_{yy}(x,y) = 6y, \quad xy > 0$.

9. а) $u_{xx} - 2\sin xu_{xy} + \left(1 + \sin^2 x\right) \cdot u_{yy}(x,y) = 0$;

б) $u_{xx} + 2\sin xu_{xy} + \left(1 + \sin^2 x\right) \cdot u_{yy}(x,y) - x\ln|y| = 0$.

10. а) $x^2u_{xx} - 2xu_{xy} + u_{yy} + xu_x(x,y) = e^y$;

б) $u_{yy} + 2\cos yu_{xy} + \left(2 - \sin^2 y\right) \cdot u_{xx}(x,y) = 0$.

11. а) $\sin^2 xu_{xx} - 2y\sin xu_{xy} + \left(1 + y^2\right) \cdot u_{yy}(x,y) = 0$;

б) $u_{xx} - 2\,\mathrm{tg}\,xu_{xy} + \left(1 + \mathrm{tg}^2\,x\right)u_{yy} + u_y(x,y) = 0$.

12. а) $u_{xx} + 4e^xu_{xy} + 4e^{2x}u_{yy} + 5u_x(x,y) = 0$;

б) $u_{xx} + 2xyu_{xy} + 10x^2y^2u_{yy} + 7u_y(x,y) = 0, \quad xy \neq 0$.

13. а) $u_{xx} + \cos xu_{xy} - 0{,}25\sin^2 xu_{yy}(x,y) - xy = 0$;

б) $u_{xx} - 4e^xu_{xy} + 4e^{2x}u_{yy} + u_x(x,y) = 0$.

14.а) $u_{xx}+e^{2x}u_{yy}+u_x(x,y)-e^x=0$;

б) $u_{xx}+2\cos x u_{xy}+\cos^2 x u_{yy}(x,y)=0$.

15.а) $u_{xx}+2\sin x u_{xy}+\left(1+\sin^2 x\right)\cdot u_{yy}(x,y)=0$;

б) $u_{xx}+2yu_{xy}+\left(1+y^2\right)u_{yy}(x,y)=9x$.

16.а) $u_{xx}-xyu_{yy}(x,y)=6y, \quad xy>0$;

б) $\sin^2 x u_{xx}+2\cos x u_{xy}-u_{yy}+u_y\cdot u(x,y)=0$.

17.а) $\operatorname{tg}^2 y u_{xx}+2\operatorname{tg} y u_{xy}+u_{yy}+\dfrac{1}{\cos^2 y}u_x(x,y)=0$;

б) $\sin^2 y u_{xx}+2\sin y u_{xy}+u_{yy}+\cos y u_x(x,y)=0$.

18.а) $x^2u_{xx}-2xu_{xy}+u_{yy}+u(x,y)-e^y=0$;

б) $u_{xx}+2\sin x u_{xy}+\left(1+\sin^2 x\right)\cdot u_{yy}(x,y)-x\ln|y|=0$.

19.а) $u_{xx}-2yu_{xy}+\left(1+y^2\right)u_{yy}(x,y)=0$;

б) $\sin^2 x u_{xx}-2y\sin x u_{xy}+\left(1+y^2\right)\cdot u_{yy}(x,y)=0$.

20.а) $4u_{xx}-4e^xu_{xy}+e^{2x}u_{yy}+u_x(x,y)=0$;

б) $u_{xx}-2\operatorname{tg} x u_{xy}+\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)u_{yy}=u_y(x,y)$.

21.а) $u_{xx}-\cos x u_{xy}-0{,}25\sin^2 x u_{yy}(x,y)=5xy$;

б) $u_{yy}-2\cos y u_{xy}+\left(2-\sin^2 y\right)\cdot u_{xx}(x,y)=\sin y$.

22.а) $\operatorname{tg}^2 y u_{xx}+2\operatorname{tg} y u_{xy}+u_{yy}+\dfrac{1}{\cos^2 y}u_x(x,y)=0$;

б) $u_{xx}+2\cos x u_{xy}+\cos^2 x u_{yy}(x,y)=0$.

23.а) $u_{xx}+2\sin x u_{xy}+\left(1+\sin^2 x\right)\cdot u_{yy}(x,y)=0$;

б) $u_{xx}-e^{2x}u_{yy}+3u_y(x,y)=0{,}2e^x$.

24.а) $u_{xx}-xyu_{yy}(x,y)=x, \quad xy>0$;

б) $\sin^2 x u_{xx}+2\cos x u_{xy}-u_{yy}+u_y\cdot u(x,y)=0$.

25.а) $u_{xx}+2yu_{xy}+\left(1+y^2\right)u_{yy}(x,y)=9x$;

б) $\sin^2 y u_{xx}-2\sin y u_{xy}+u_{yy}+\cos y u_x(x,y)=0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Бойко, Б. Т.** Рівняння математичної фізики : навч. посіб. / Б. Т. Бойко,Л. В. Курпа, Ю. Ф. Сенчук. – Харків : НТУ «ХПІ», 2001. – 288 с.

2. Вища математика : збірник задач. У 2 ч. Ч.2 / Овчинников П. П., Кропив'янський П. С., Полушкін С. П. [та ін.]. – К. : Техніка, 2003. – 376 с.

3. **Дубовик, В. П.**. Вища математика : навч. посібник / Дубовик В. П., Юрик І. І. – К. : А.С.К., 2001. – 648 с.

4. **Курпа, Л. В.** Рівняння математичної фізики. Лабораторний практикум / Л. В. Курпа, Ж. Б. Кашуба. – Харків : ХДПУ, 2000. – 217 с.

5. **Овчинников, П. П.** Вища математика : підручник. У 2 ч. Ч. 2 / Овчинников П. П., Михайленко В. М. – К. : Техніка, 2004. – 792 с.

6. **Пак, В. В.** Вища математика : підручник / Пак В. В., Носенко Ю. Л. – К. : Либідь, 1996. – 440 с.

7. **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике. В 3 ч. Ч. 2 / Письменный Д. Т. – М. : Айрис-пресс, 2002. – 256 с.

8. **Эдвардс, Ч. Г.** Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB / Ч. Г. Эдвардс, Д. Э. Пенни. – М. : Вильямс, 2008. – 1104 с.

Для нотаток

Навчальне видання

ГРУДКІНА Наталія Сергіївна
ШЕВЦОВ Сергій Олександрович

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ
ЧАСТИНА І

Посібник
до практичних занять і самостійної роботи

Редагування, комп'ютерне верстання І. І. Дьякова

159/2019. Формат 60 х 84/16. Ум. друк. арк. 2,79.
Обл.-вид. арк 0,85. Тираж 50 прим. Зам. № 25

Видавець і виготівник
Донбаська державна машинобудівна академія
84313, м. Краматорськ, вул. Академічна, 72.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК №1633 від 24.12.2003