ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань

Запоріжжя 2024

metinvest polytechnic

УДК 519.6:311.2(072)
Т30

Рекомендовано Науково-методичною радою
ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
«МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»
(протокол № 1 від 27.09.2024 р.)

Укладачі
Грудкіна Н.С., д-р техн. наук, доцент;
Костіков О.А., канд. фіз.-мат. наук, доцент.

Т30 Теорія ймовірностей та математична статистика: методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань (для студентів усіх спеціальностей та форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти) / уклад.: Н. С. Грудкіна, О. А. Костіков. Запоріжжя : ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА». 2024. 35 с.

Методичні вказівки містять відомості щодо формування кейсу задач та критеріїв оцінювання індивідуальних завдань на платформі Moodle та приклади їх розв’язання з наведенням основних формул, етапів розв’язання та геометричної ілюстрації в обсязі, необхідному для виконання індивідуальних завдань із розв’язування ймовірнісних та статистичних задач. Матеріал навчального посібника має на меті підвищити якість виконання роботи, виробити навички розв’язання задач прикладного спрямування, в тому числі з використанням табличного процесора MS Excel та системи комп’ютерної математики Maple.

Рекомендовано для студентів усіх спеціальностей та форм навчання першого (бакалаврського) рівня освіти.

УДК 519.6:311.2(072)

ЗМІСТ

ВСТУП	4
1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ	5
1.1 Відомості щодо формування кейсу задач та критеріїв оцінювання індивідуального завдання на платформі Moodle	5
1.2 Кейс задач індивідуального завдання	6
2 РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТУ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ	8
2.1 Приклад розв'язання завдання 1	8
2.2 Приклад розв'язання завдання 2	9
2.3 Приклад розв'язання завдання 3	9
2.4 Приклад розв'язання завдання 4	10
2.5 Приклад розв'язання завдання 5	12
2.6 Приклад розв'язання завдання 6	14
2.7 Приклад розв'язання завдання 7	15
2.8 Приклад розв'язання завдання 8	16
2.9 Приклад розв'язання завдання 9	17
2.10 Приклад розв'язання завдання 10	21
2.11 Приклад розв'язання завдання 11	25
2.12 Приклад розв'язання завдання 12	28
2.13 Приклад розв'язання завдання 13	31
ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ	33

ВСТУП

Теорія ймовірностей та математична статистика – базовий курс, який належить до циклу математичної підготовки та присвячений формуванню у студентів здатності застосовувати математичні методи та алгоритмічні принципи для моделювання, аналізу й обробки даних технічних, природничих і соціально-економічних об'єктів і процесів, знань з методології та інструментарію побудови і використання різних типів стохастичних математичних моделей, що забезпечує фундамент для опанування професійно-орієнтованих дисциплін спеціальності.

Курс містить відомості з елементів комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики. Особливістю курсу є фокус на прикладну направленість математичної підготовки із використанням комп'ютерно-інформаційних технологій та пакетів математичних прикладних програм для глибокого розуміння та критичного осмислення теорій, принципів, методів і понять у сфері професійної діяльності. При навчанні цей освітній компонент є обов'язковим, оскільки дозволяє набути переваг конкурентоспроможного на ринку праці фахівця, який вільно володіє професією і орієнтується в суміжних галузях діяльності, засвідчує готовність до постійного професійного зростання, соціальної й професійної мобільності.

В рамках освоєння дисциплін «Теорія ймовірностей та математична статистика», «Прикладні аспекти теорії ймовірностей та математичної статистики», «Теорія ймовірностей та математична статистика та випадкові процеси» та «Інженерна математика та статистика» за змістовними модулями другого семестру студентам пропонується виконати індивідуальні завдання з розв'язування прикладних задач за темами відповідних змістовних модулів. Представлені методичні рекомендації містять відомості щодо формування кейсу задач та критеріїв оцінювання індивідуального завдання на платформі Moodle та приклади їх розв'язання з наведенням основних формул, етапів розв'язання та геометричної ілюстрації в обсязі, необхідному для виконання індивідуального завдання, в тому числі з використанням табличного процесора MS Excel та системи комп'ютерної математики Maple.

1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

1.1 Відомості щодо формування кейсу задач та критеріїв оцінювання індивідуального завдання на платформі Moodle

На платформі Moodle кейс задач індивідуальних завдань з дисциплін «Теорія ймовірностей та математична статистика», «Прикладні аспекти теорії ймовірностей та математичної статистики», «Теорія ймовірностей, математична статистика та випадкові процеси» та «Інженерна математика та статистика» за змістовними модулями другого семестру формується рандомно системою шляхом автоматичного вибору окремого варіанта серед наявних в рамках відповідної категорії. Кожен студент отримає однаковий за кількістю та змістовністю кейс задач в межах відповідної спеціальності з зазначенням переліку завдань, що виносяться викладачем на виконання. Заохочується використання табличного процесора MS Excel та системи комп'ютерної математики Maple під час розв'язання задач прикладного спрямування як у вигляді інструменту спрощення розрахунків чи побудови графіків, так і для створення модуля автоматизованого розрахунку формалізованої задачі.

Індивідуальні завдання виконуються самостійно у зручний для студента час в межах терміну подачі роботи, передбачених у розділі «Розподіл балів за контрольними точками та графік їх виконання» та розміщується у відповідному розділі на платформі Moodle. Розв'язання кожного завдання завантажується у вигляді файлу з розширенням .docx або .pdf, або .jpg, або .png, або .txt (за наявності розробленого розрахункового модуля у MS Excel та/або у системі комп'ютерної математики Maple у форматах .xls, .xlsx, .mw завантажується додатково).

Максимальна кількість балів вказана за кожне окреме завдання у зауваженнях та визначається в залежності від обгрунтування ходу розв'язання, рівня формалізації задачі, правильності отриманого розв'язку та аналізу результату, необхідності геометричної інтепретації та/або побажання використовувати можливості MS Excel та/або системи комп'ютерної математики Maple.

Використання штучного інтелекту (ШІ) не забороняється, оскільки пропозиції відомих застосунків ШІ суттєво залежать від обмміркованої постановки питання і уточнюючих питань; однак в разі, якщо відповідь, отримана з використанням ШІ, містить суттєві похибки або не є комплексною, або не відповідає за усталеним оформленням, термінологією, або іншим вимогам до завдання, то оцінка за виконання знижується.

Перевірка індивідуального завдання виконується протягом тижня після завершення терміну подачі роботи. За побажанням студента при наявності похибок або виконання індивідуального завдання не в повному обсязі допускається доопрацювання до передостаннього тижня навчання.

1.2 Кейс задач індивідуальне завдання

Завдання 1. Розв'язання задач на використання правил комбінаторики.

Завдання 2. Розв'язання задач на використання класичного означення ймовірностей.

Завдання 3. Розв'язання задач на використання геометричного означення ймовірностей (одновимірний випадок).

Завдання 4. На мапі обрано сектор спостереження у вигляді пласкої замкненої фігури *D*. Після вибуху, зона ураження шкідливими речовинами має форму пласкої замкненої фігури D^*. Оцінити ймовірність не потрапити в зону ураження, якщо місце спостереження обрано довільним чином в межах сектора спостереження.

Завдання 5. Розрахувати надійність основної системи, що містить *i* елементів, ймовірності безвідмовної роботи яких в межах певного часу відомі та становлять p_i. З'ясувати, яким чином зміниться надійність удосконаленої системи за рахунок введення додаткового елементу з відомою ймовірністю його безвідмовної роботи в межах певного часу p^*.

Завдання 6. Розв'язання задач на використання понять повної ймовірності та формули Байєса.

Завдання 7. Розв'язання задач на використання схеми повторних випробувань Бернуллі та асимптотичних формул Лапласа та Пуассона.

Завдання 8. На фінансовому ринку представлені акції трьох видів. Норма прибутку акцій залежить від ринкової кон'юнктури (%). Проаналізувати ситуацію і вибрати тип акції, найбільш привабливої для інвестора з точки зору міри її ризику. За величину ризику прийняти коефіцієнт варіації.

Таблиця 1 – Дані для виконання завдання 8

Види проектів	Оцінка можливого результату					
	Оптимістична		Стримана		Песимістична	
	Прибуток X_{1i}	Ймовірність P_{1i}	Прибуток X_{2i}	Ймовірність P_{2i}	Прибуток X_{3i}	Ймовірність P_{3i}
A	X_{11}	P_{11}	X_{21}	P_{21}	X_{31}	P_{31}
B	X_{12}	P_{12}	X_{22}	P_{22}	X_{32}	P_{32}
C	X_{13}	P_{13}	X_{23}	P_{23}	X_{33}	P_{33}

Завдання 9. Задана щільність ймовірності розподілу деякої випадкової величини.

Визначити:

1) коефіцієнт *A*;

2) функцію розподілу;

3) математичне очікування, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі $[a; b]$.

4) Зробити креслення функції щільності та функції розподілу.

Завдання 10. В результаті експерименту отримано вибірку. Необхідно:

1) побудувати варіаційний ряд;

2) побудувати статистичний розподіл вибірки;

3) побудувати полігон частот;

4) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік.

Завдання 11. В результаті статистичних досліджень отримані дані. Потрібно:

1) побудувати інтервальний статистичний розподіл вибірки;

2) на основі отриманого розподілу знайти наступні числові характеристики: вибіркову середню, вибіркове середньоквадратичне відхилення, вибіркову дисперсію;

3) побудувати гістограму відносних частот.

Завдання 12. В результаті статистичних досліджень отримані дані. Потрібно:

1) знайти коефіцієнт кореляції;

2) знайти рівняння лінійної регресії;

3) побудувати кореляційне поле та лінію лінійної регресії;

4) оцінити тісноту лінійного зв'язку між стажем роботи X та розміром заробітної плати Y на основі емпіричної шкали Чеддока.

Завдання 13. За заданим законом розподілу двовимірної випадкової (X, Y) величини знайти:

1) безумовні закони розподілу компонент ξ та η;

2) побудувати умовний закон розподілу випадкової величини η, що відповідає умові $\xi = 0$;

3) обчислити умовні математичні сподівання компонентів ξ та і за цими результатами побудувати лінії регресії ηна ξ та ξ на η;

4) визначити основні числові характеристики двовимірної випадкової величини і зробити висновок щодо щільності кореляційного зв'язку.

2 РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВОГО ВАРІАНТУ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

2.1 Приклад розв'язання завдання 1

Завдання 1. Серед 5 різних видів чорного, 7 видів квіткового чаю та 10 видів зеленого чаю покупець хоче придбати набір, що складається з двох різних видів чорного, трьох різних видів квіткового та двох видів зеленого чаю. Скільки таких різних наборів існує?

Розв'язання.

Вважаємо, що не має значення порядок вибору чаїв, а тільки їх склад, тому обчислюємо кількість варіантів вибору 2 видів чорного чаю як кількість комбінацій з 5 елементів по 2 згідно формули (3):

$$n_1 = C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \frac{5\cdot4}{2} = 10.$$

Аналогічно обчислюємо кількість варіантів вибору 3 видів квіткового чаю та двох видів зеленого чаю:

$$n_2 = C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \frac{7\cdot6\cdot5}{6} = 35;$$

$$n_3 = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\cdot(10-2)!} = \frac{10\cdot9}{2} = 45.$$

Використовуючи правило добутку, отримаємо остаточну кількість наборів:

$$n = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 15750.$$

Відповідь: кількість різних наборів за вимог покупця становить 15750.

Приклад використання СКМ Maple для розв'язання завдання 1.

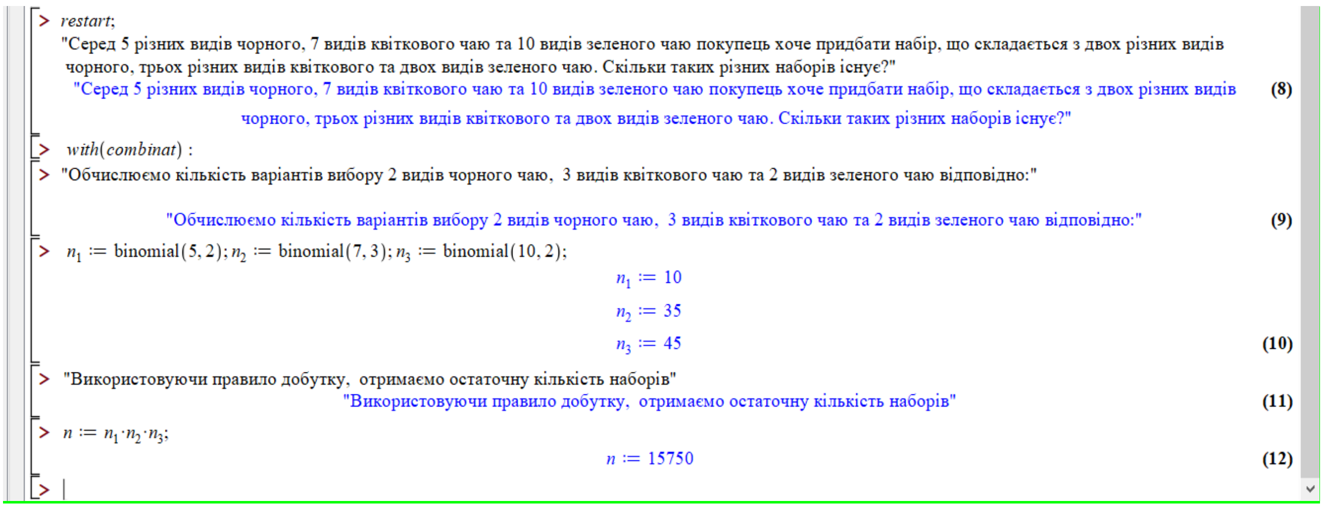
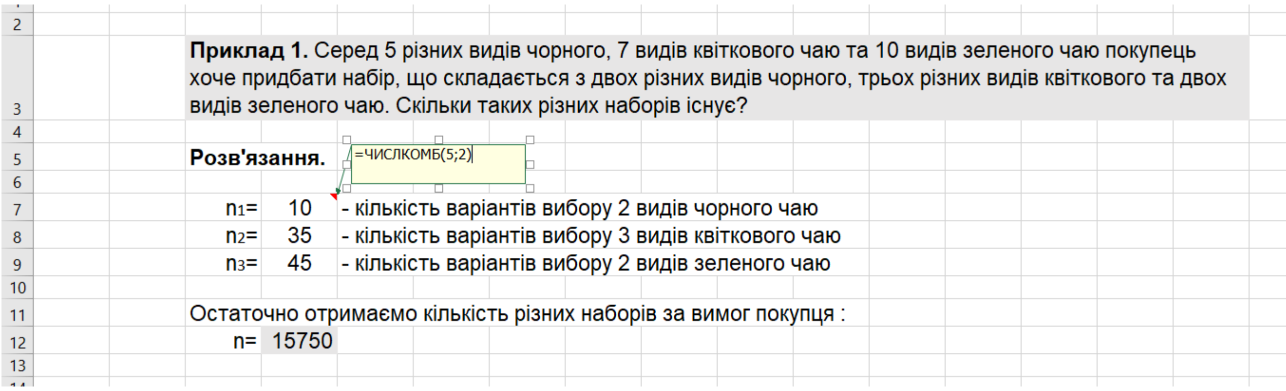


Рисунок 1 – Реалізація розв'язання завдання 1 в СКМ Maple

Приклад використання MS Excel для розв'язання завдання 1.



Приклад 1. Серед 5 різних видів чорного, 7 видів квіткового чаю та 10 видів зеленого чаю покупець хоче придбати набір, що складається з двох різних видів чорного, трьох різних видів квіткового та двох видів зеленого чаю. Скільки таких різних наборів існує?

Розв'язання. =ЧИСЛКОМБ(5;2)

n1=	10	- кількість варіантів вибору 2 видів чорного чаю
n2=	35	- кількість варіантів вибору 3 видів квіткового чаю
n3=	45	- кількість варіантів вибору 2 видів зеленого чаю

Остаточно отримаємо кількість різних наборів за вимог покупця :

n= 15750

Рисунок 2 – Реалізація розв'язання завдання 1 в MS Excel

2.2 Приклад розв'язання завдання 2

Завдання 2. У відділі на початок тижня було 7 упаковок чорного чаю «Tess», 10 – «Delux» та 8 - «Dilmah». Вважатимемо попит на кожний із перелічених видів чорного чаю однаковим. За тиждень було продано 15 упаковок. Яка імовірність того, що на початок наступного залишилося по 4 упаковки «Tess» та «Delux» та 2 упаковки «Dilmah»?

Розв'язання.

Нехай подія А – за зміну було продано 3 упаковки чорного чаю «Tess» та по 6 упаковок «Delux» і «Sherlock» (що відповідає умові: після зміни залишилося по 4 упаковки «Tess» та «Delux» та 2 упаковки «Dilmah»).

Скористаємося класичним означенням ймовірності:

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

$$n = C_{25}^{15} = \frac{25!}{15!\cdot 10!} = 3268360;$$

$$m = C_7^3 \cdot C_{10}^6 \cdot C_8^6 = \frac{7!}{3!\cdot 4!} \cdot \frac{10!}{6!\cdot 4!} \cdot \frac{8!}{6!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{6} \cdot \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{24} \cdot \frac{8\cdot 7}{2} = 205800.$$

Остаточно отримаємо:

$$p(A) = \frac{205800}{3268360} \approx 0{,}063.$$

Відповідь: ймовірність того, що на початок наступного тижня залишилося по 4 упаковки «Tess» та «Delux» та 2 упаковки «Dilmah» наближено дорівнює 0,063.

2.3 Приклад розв'язання завдання 3

Завдання 3. В офісі фірми проложено інтернет-кабель загальною довжиною 24 м. Знайти ймовірність того, що пошкоджена ділянка довжиною 1,2 м за канапою.

Розв’язання.

Подія *A* – кабель пошкоджений на ділянці 1,2 м за канапою.

$$P(A) = \frac{l^*}{l},$$

де l^* − довжина кабелю за канапою,

l – загальна довжина кабелю.

$$P(A) = \frac{1{,}2}{24} = 0{,}05\ (\text{м}).$$

Відповідь: 0,05.

2.4 Приклад розв’язання завдання 4

Завдання 4. На мапі обрано сектор спостереження у вигляді квадрату з вершинами в точках (0;0), (0;2), (2;2), (2;0). Після влучення снаряду у точку (3;3), зона ураження уламками має форму кола з центром у заданій точці радіуса $\sqrt{5}$. Оцінити ймовірність не потрапити під уламки, якщо місце спостереження обрано довільним чином в межах сектора спостереження [3, 4].

Розв’язання.

Нехай подія А – не потрапили під уламки.

Використовуємо геометричне означення ймовірності у формі:

$$p(A) = \frac{S^*}{S},$$

де *S* – площа сектора у формі квадрата, S^* - зона неураження уламками.

Зробимо побудову у прямокутній системі координат квадрата OABC та кола з центром у точці M(3;3) (рис. 3).

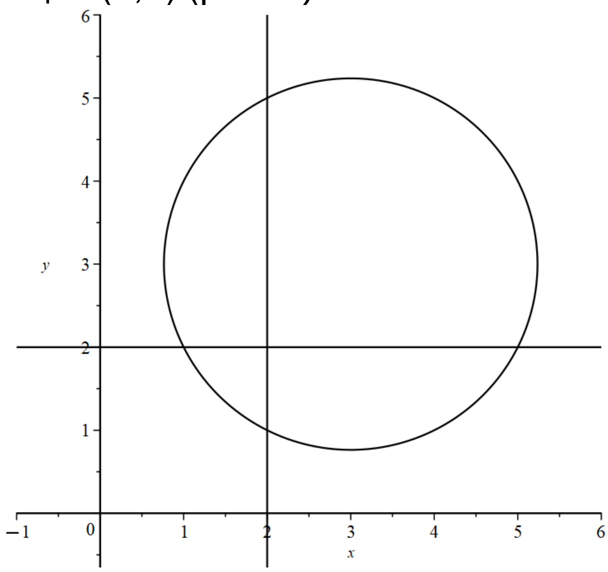


Рисунок 3 – Геометрична інтерпретація умов завдання 4

Для визначення площі замальованої фігури знайдемо точку перетину кола та прямої *y*=2:

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y-3)^2=5;\\ y=2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-3)^2=4;\\ y=2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}|x-3|=2;\\ y=2;\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=1;\\ y_1=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x_2=5;\\ y_2=2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Звідси отримали дві точки перетину даних кривих: N(1;2) та P(5;2).

Площу S^* отримаємо як різницю площі квадрату зі стороною 2 та площі фігури NBK:

$$S^*=4-\int_1^2\left(2-\left(3-\sqrt{5-(x-3)^2}\right)\right)dx=$$

$$=4-\int_1^2\left(\sqrt{5-(x-3)^2}-1\right)dx=4+x\Big|_1^2+\int_1^2\left(\sqrt{5-(x-3)^2}\right)dx=$$

$$=\left[\begin{array}{ll}x-3=\sqrt{5}sint, & dx=-\sqrt{5}costdt,\\ t_1=arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right), & t_2=arcsin\left(\frac{12}{\sqrt{5}}\right)\end{array}\right]=5-5\int_{arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}^{arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}cos^2tdt=$$

$$=5-\frac{5}{2}\int_{arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}^{arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}(1+cos2t)dt=5-\frac{5}{2}\left(t+\frac{1}{2}sin2t\right)\Bigg|_{arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}^{arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}=$$

$$=5-\frac{5}{2}\left(arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)\approx 3{,}391.$$

Звідси отримаємо:

$$p(A)=\frac{S^*}{S}\approx 0{,}848.$$

Відповідь: ймовірність не потрапити під уламки за даних умов, якщо місце спостереження обрано довільним чином в межах сектора спостереження, становить наближено 0,825 (або 82,5%).

Приклад використання СКМ Maple для розв'язання завдання 4.

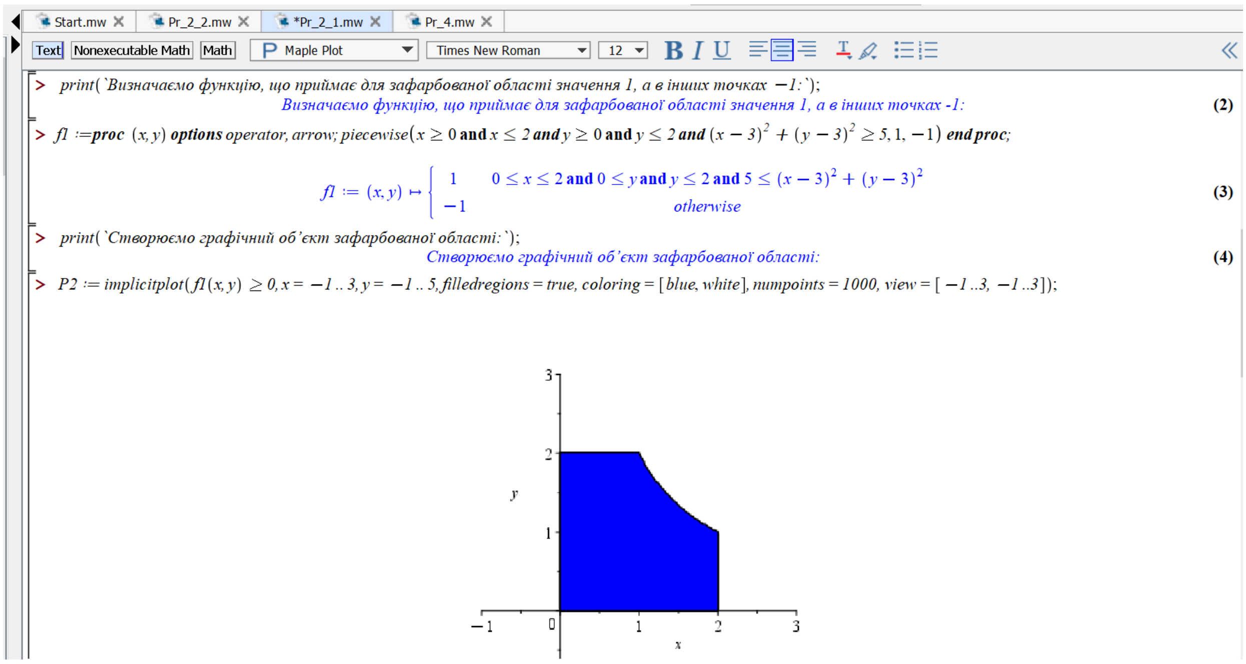


Рисунок 4 – Побудова зафарбованої області в СКМ Maple

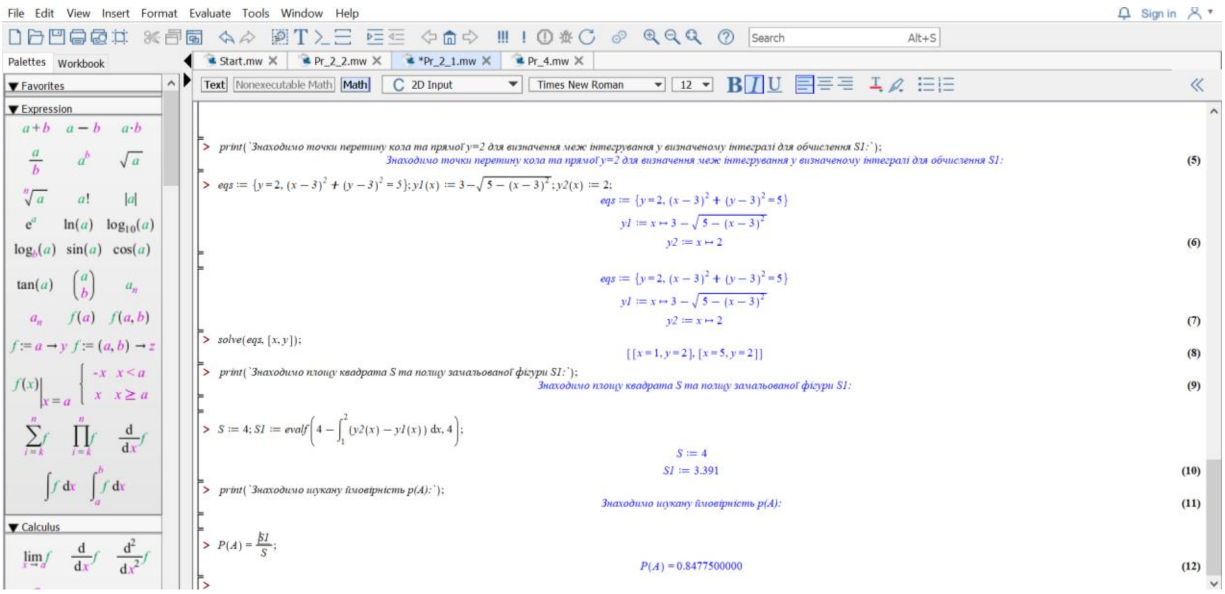


Рисунок 5 – Реалізація розрахунку шуканої ймовірності в СКМ Maple

2.5 Приклад розв'язання завдання 5

Завдання 5. Розрахувати надійність основної системи, що містить чотири елементи, ймовірності безвідмовної роботи яких в межах певного часу відомі та становлять p_1, p_2, p_3 та p_4 відповідно. З'ясувати, яким чином зміниться надійність попередньої системи, якщо додати паралельно елемент 5 [3, 4].

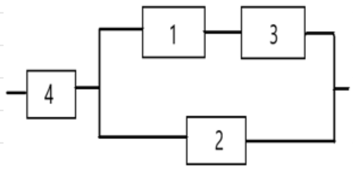
Розв’язання.

Запропонуємо розв’язання у MS Excel (рис. 6) та у СКМ Maple (рис. 7).

Завдання.

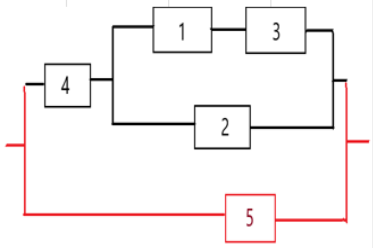
1. Розрахувати надійність системи із заданими ймовірностями безберебійної роботи її елементів p1, p2, p3, p4

				Послідовне з'єднання елементів 1 та 3			
p1=	0,9	q1=	0,1	p(A)=	0,855	q(A)=	0,15
p2=	0,8	q2=	0,2				
p3=	1	q3=	0,1	Паралельне з'єднання елементів A та 2			
p4=	0,9	q4=	0,2	p(B)=	0,971		
				Послідовне з'єднання елементів B та 4			
			Відповідь:	p(D)=	0,82535		



2. Дослідити, як зміниться надійність попередньої системи, якщо

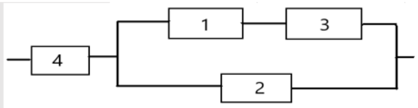
p5=	0,6	q5=	0,4		Паралельне з'єднання системи з елементом 5	
					p(F)=	0,93014
					Збільшення надійності у відсотках	
				Відповідь:	ΔƐ=	12,6964 %



а)

Завдання.

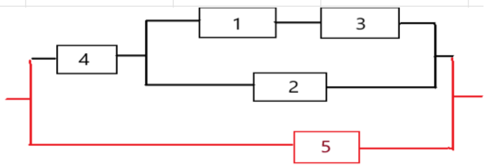
1. Розрахувати надійність системи із заданими ймовірностями безберебійної роботи її елементів p1, p2, p3, p4



					Послідовне з'єд			
p1=	0,9	q1=	=1-C4		p(A)=	=PRODUCT(C4;C6)	q(A)=	=1-K4
p2=	0,8	q2=	=1-C5					
p3=	0,95	q3=	=1-C6		Паралельне з'є			
p4=	0,85	q4=	=1-C7		p(B)=	=1-PRODUCT(G5;N4)		
					Послідовне з'єд			
				Відповідь:	p(D)=	=PRODUCT(K7;C7)		

2. Дослідити, як зміниться надійність попередньої системи, якщо додати паралельно елемент 5.

p5=	0,6	q5=	=1-C15		Паралельне з'є	
					p(F)=	=1-PRODUCT(G15;1-
					Збільшення над	
				Відповідь:	ΔƐ=	=(K17-K10)/K10*100 %



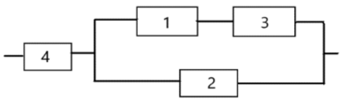
б)

Рисунок 6 – Приклад розрахунку в загальному вигляді (а) та з наведенням формул обчислень (б) в MS Excel

Текст | Неисполняемая математика | Математика | 2D Math | Times New Roman | 12

print(`Завдання 1. Розрахувати надійність системи із заданими ймовірностями безперебійної роботи її елементів p1, p2, p3, p4 :`);

Завдання 1. Розрахувати надійність системи із заданими ймовірностями безперебійної роботи її елементів p1, p2, p3, p4 :



restart;
$p1 := 0.9; p2 := 0.8; p3 := 0.95; p4 := 0.85;$

$p1 := 0.9$

$p2 := 0.8$

$p3 := 0.95$

$p4 := 0.85$

print(`Роз'язання:`); print(`Розрахуємо надійність ділянки A з послідовним з'єднанням елементів 1 та 3:`); $p_A := p1 \cdot p3;$

Роз'язання:

Розрахуємо надійність ділянки A з послідовним з'єднанням елементів 1 та 3:

$p_A := 0.855$

print(` Розрахуємо ймовірність відмови ділянки A з послідовним з'єднанням елементів 1 та 3:`); $q_A := 1 - p_A;$

print(` Розрахуємо ймовірність надійності ділянки B з паралельним з'єднанням ділянки A та елементу 2:`); $p_B := 1 - q_A \cdot (1 - p2);$

Розрахуємо ймовірність відмови ділянки A з послідовним з'єднанням елементів 1 та 3:

$q_A := 0.145$

Розрахуємо ймовірність надійності ділянки B з паралельним з'єднанням ділянки A та елементу 2:

$p_B := 0.9710$

print(`Розрахуємо надійність системи з послідовним з'єднанням елемента 4 та ділянки B :`); $p_C := p4 \cdot p_B;$

Розрахуємо надійність системи з послідовним з'єднанням елемента 4 та ділянки B :

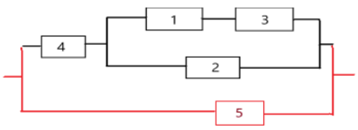
$p_C := 0.825350$

а)

Текст | Неисполняемая математика | Математика | 2D Math | Times New Roman | 12

print(`Завдання 2. Дослідити, як зміниться надійність попередньої системи, якщо додати паралельно елемент 5:`);

Завдання 2. Дослідити, як зміниться надійність попередньої системи, якщо додати паралельно елемент 5:



$p5 := 0.6;$ print(`Розрахуємо надійність удосконаленої системи з паралельним з'єднанням ділянки C та елемента 5:`);

$p5 := 0.6$

Розрахуємо надійність удосконаленої системи з паралельним з'єднанням ділянки C та елемента 5:

$p_D := 1 - (1 - p_C) \cdot (1 - p5);$

$p_D := 0.9301400$

print(`Розрахуємо відносне збільшення надійності удосконаленої системи :`); $\varepsilon := \frac{|p_D - p_C|}{p_C} \cdot 100;$

Розрахуємо відносне збільшення надійності удосконаленої системи :

$\varepsilon := 12.69643182$

б)

Рисунок 7 – Дослідження надійності основної (а) та удосконаленої (б) системи в СКМ Maple

2.6 Приклад розв'язання завдання 6

Завдання 6. У мішень по одному пострілу роблять три стрільці, кожен з яких незалежно від інших влучає в мішень у 50%, 60% та 80% відповідно. Знайти ймовірність того, що у мішень влучать двічі.

Розв'язання.

Подія *A* – в мішень влучать двічі.

Для першого стрільця ймовірність влучення $p_1 = 0{,}5$, а ймовірність промаху – $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$;

для другого стрільця ймовірність влучення $p_2 = 0{,}6$, ймовірність промаху – $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$;

для третього стрільця ймовірність влучення $p_3 = 0{,}8$, ймовірність промаху – $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Подія A відбудеться, якщо відбудеться одна з трьох попарно несумісних подій A_1, A_2 або A_3.

Подія A_1: перший стрілець влучить у мішень, другий влучить, третій – ні;
подія A_2: перший стрілець влучить, другий – ні, третій влучить;
подія A_3: перший – ні, другий влучить, третій влучить.

Згідно формули повної ймовірності маємо:

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3 =$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}46.$$

Відповідь: 0,46.

2.7 Приклад розв'язання завдання 7

Завдання 7. Прилад складено з 10 блоків, надійність кожного з них 0,8. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Знайти ймовірність того, що

а) відмовить один блок;
б) відмовить хоча б один блок;
в) відмовлять не менше двох блоків.

Розв'язання.

Використаємо формулу Бернуллі

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

За умовою $n = 10$, $p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ – ймовірність відмови, $q = 0{,}8$.

а) $k = 1$, тому маємо:

$$P_{10}(1) = C_{10}^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^{10-1} = \frac{10!}{1!\,9!} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^9 = 10 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^9 \approx 0{,}268.$$

б) Відмовить хоча б один блок: $k \geq 1$;

$$P_{10}(k \geq 1) = 1 - P_{10}(0) = 1 - 0{,}107 = 0{,}893.$$

в) Відмовлять не менше двох блоків: $k \geq 2$;

$$P_{10}(k \geq 2) = 1 - \left(P_{10}(0) + P_{10}(1)\right) = 1 - (0{,}107 + 0{,}208) = 0{,}685.$$

Відповідь: а) 0,268; б) 0,893; в) 0,685.

2.8 Приклад розв'язання завдання 8

Завдання 8. На фінансовому ринку представлені акції трьох видів. Норма прибутку акцій залежить від ринкової кон'юнктури (%). Проаналізувати ситуацію і вибрати тип акції, найбільш привабливої для інвестора з точки зору міри її ризику. За величину ризику прийняти коефіцієнт варіації.

Таблиця 2 – Дані завдання 8

Види проектів	Оцінка можливого результату					
	Оптимістична		Стримана		Песимістична	
	Прибуток X_{1i}	Ймовірність P_{1i}	Прибуток X_{2i}	Ймовірність P_{2i}	Прибуток X_{3i}	Ймовірність P_{3i}
A	59	0,25	29	0,53	19	0,22
B	49	0,3	39	0,45	29	0,25
C	39	0,27	29	0,5	19	0,23

Розв'язання.

Визначимо сподівану норму прибутку (математичне очікування) для кожного виду акцій за формулою

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i.$$

$$M(X_A) = 59 \cdot 0{,}25 + 29 \cdot 0{,}53 + 19 \cdot 0{,}22 = 34{,}3,$$

$$M(X_B) = 49 \cdot 0{,}3 + 39 \cdot 0{,}45 + 29 \cdot 0{,}25 = 39{,}35,$$

$$M(X_C) = 39 \cdot 0{,}27 + 29 \cdot 0{,}5 + 19 \cdot 0{,}23 = 29{,}4.$$

Визначимо варіацію (дисперсію) норм прибутку кожного виду акцій:

$$V(X_A) = 59^2 \cdot 0{,}25 + 29^2 \cdot 0{,}53 + 19^2 \cdot 0{,}22 - (34{,}3)^2 = 218{,}91,$$

$$V(X_B) = 49^2 \cdot 0{,}3 + 39^2 \cdot 0{,}45 + 29^2 \cdot 0{,}25 - (39{,}35)^2 = 54{,}75,$$

$$V(X_C) = 39^2 \cdot 0{,}27 + 29^2 \cdot 0{,}5 + 19^2 \cdot 0{,}23 - (29{,}4)^2 = 49{,}84.$$

Визначимо середні квадратичні відхилення *σ(X)* від очікуваних норм прибутків кожної акції або їх ризики за формулою $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$:

$$\sigma(X_A) = \sqrt{218{,}91} = 14{,}8,$$

$$\sigma(X_B) = \sqrt{54{,}75} = 7{,}4,$$

$$\sigma(X_C) = \sqrt{49{,}84} = 7{,}06.$$

Обчислимо коефіцієнти варіації *CV*, як величину ризику, що припадає на одиницю прибутку за формулою

$$CV = \frac{\sigma(X)}{M(X)}.$$

$$CV(X_A) = \frac{14,8}{34,3} = 0,432,$$

$$CV(X_B) = \frac{7,4}{39,5} = 0,187,$$

$$CV(X_C) = \frac{7,06}{29,4} = 0,24.$$

Найменше значення оцінки ризику складає 0,187 для середнього прибутку 39,5.

Відповідь: рекомендуємо проект В.

2.9 Приклад розв'язання завдання 9

Завдання 9. Задана щільність ймовірності розподілу деякої випадкової величини задана в такий спосіб:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ Ax, & 1 \le x < 2, \\ 0, & x \ge 2. \end{cases}$$

Визначити:

1) коефіцієнт *A*;

2) функцію розподілу;

3) математичне очікування, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [0;5/4];

4) зробити креслення функції щільності та функції розподілу.

Розв'язання.

1) Застосуємо властивість функції щільності.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^2 Axdx = 1;$$

$$A\int_1^2 xdx = A\frac{x^2}{2}\bigg|_1^2 = A\left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = A \cdot \frac{3}{2};$$

$$\frac{3}{2}A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}.$$

Функція щільності ймовірності:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{2}{3}x, & 1\le x<2,\\ 0, & x\ge 2.\end{cases}$$

2) Функція розподілу визначається за формулою

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Якщо $x<1$: $F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dx=0.$

Якщо $1\le x<2$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{1}0dx+\int_{1}^{x}\frac{2}{3}xdx=0+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_1^x=\frac{x^2}{3}-\frac{1^2}{3}=\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}.$$

Якщо $x\ge 2$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{1}0dx+\int_{1}^{2}\frac{2}{3}xdx+\int_{2}^{x}0dx=0+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_1^2+0=\frac{2^2}{3}-\frac{1^2}{3}=1.$$

Функція розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<1,\\ \dfrac{x^2}{3}-\dfrac{1}{3} & \text{при} \quad 1\le x<2,\\ 1 & \text{при} \quad x\ge 2.\end{cases}$$

3) Знаходимо числові характеристики.

Математичне очікування:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{1}^{2}x\cdot\frac{2}{3}xdx=\frac{2}{3}\int_{1}^{2}x^2dx=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_1^2=\frac{2}{9}(2^3-1^3)=\frac{2}{9}\cdot 7=\frac{14}{9}.$$

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{1}^{2}x^2\cdot\frac{2}{3}xdx=\frac{2}{3}\int_{1}^{2}x^3dx=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_1^2=\frac{1}{6}(2^4-1^4)=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}.$$

Дисперсія:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \frac{5}{2} - \left(\frac{14}{9}\right)^2 \approx 0{,}080\ (> \mathbf{0}!).$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}08} \approx 0{,}28.$$

Ймовірність того, що випадкова величина набуде значення в інтервалі [0;5/4]:

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a);$$

$$P\left(0 \le X \le \frac{5}{4}\right) = F\left(\frac{5}{4}\right) - F(0) = \left(\frac{\left({}^{5}/_{4}\right)^2}{3} - \frac{1}{3}\right) - 0 =$$

$$= \frac{25}{48} - \frac{1}{3} = \frac{3}{16} = 0{,}1875 \approx 0{,}188.$$

4) $f(x) = \frac{2}{3}x$ – пряма.

x	1	2
y	${}^{2}/_{3}$	${}^{4}/_{3}$

$F_2(x) = \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3}$ – парабола; $a = \frac{1}{3} > 0$ – гілки вгору (рис. 8).

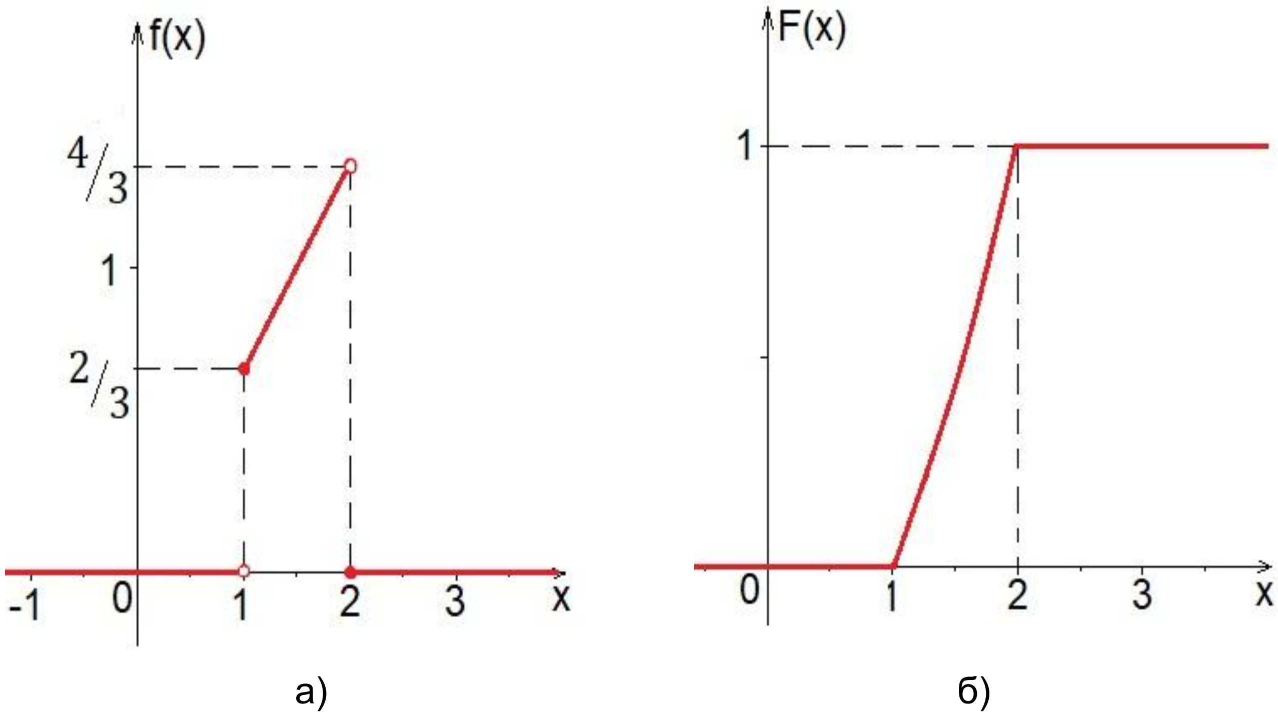
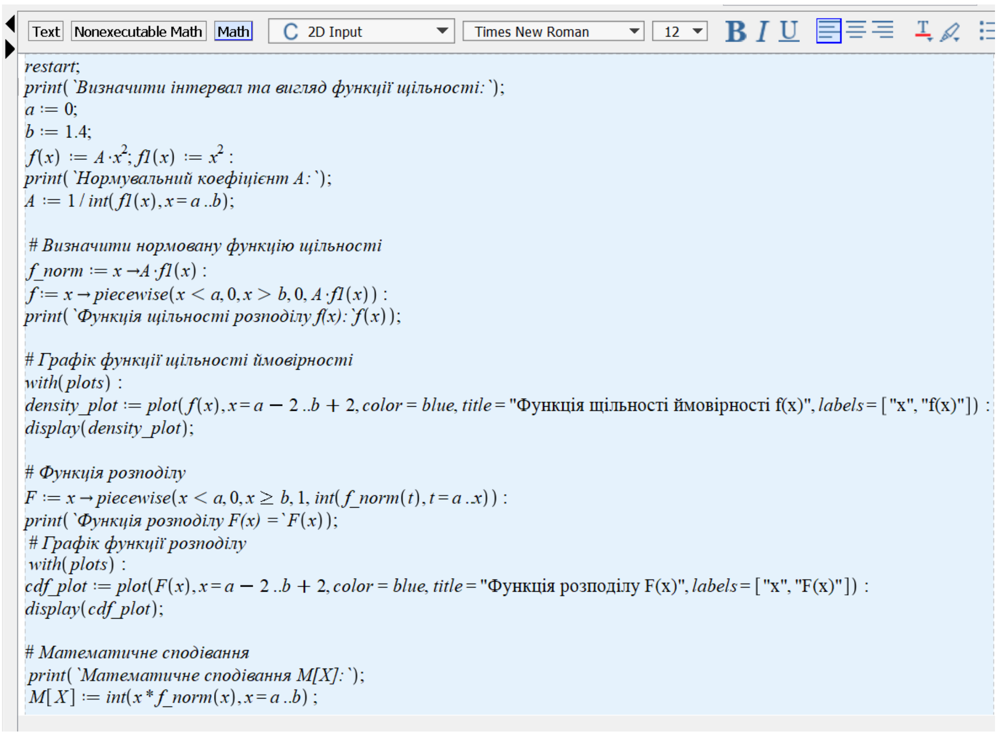


Рисунок 8 – Графіки функції щільності (а) та функції розподілу ймовірностей (б)

Відповідь: 1) $A = \frac{2}{3}$; 3) $M(X) = \frac{14}{9}$, $D(X) = 0{,}08$, $\sigma(X) = 0{,}28$, $P\left(0 \le X \le \frac{5}{4}\right) = 0{,}188$.

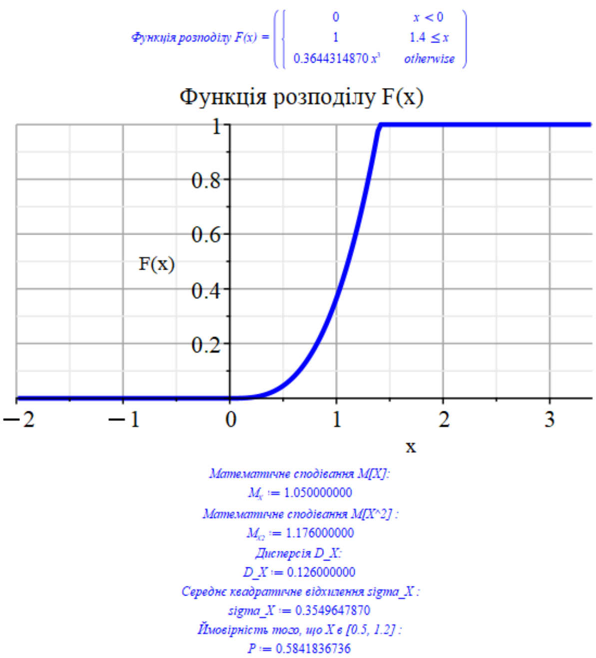
Приклад реалізації розв'язання завдання 9 в СКМ Maple (рис.8).



```
restart;
print(`Визначити інтервал та вигляд функції щільності:`);
a := 0;
b := 1.4;
f(x) := A·x^2; f1(x) := x^2 :
print(`Нормувальний коефіцієнт A:`);
A := 1 / int(f1(x), x = a..b);

# Визначити нормовану функцію щільності
f_norm := x → A·f1(x) :
f := x → piecewise(x < a, 0, x > b, 0, A·f1(x)) :
print(`Функція щільності розподілу f(x):`f(x));

# Графік функції щільності ймовірності
with(plots) :
density_plot := plot(f(x), x = a − 2..b + 2, color = blue, title = "Функція щільності ймовірності f(x)", labels = ["x", "f(x)"]) :
display(density_plot);

# Функція розподілу
F := x → piecewise(x < a, 0, x ≥ b, 1, int(f_norm(t), t = a..x)) :
print(`Функція розподілу F(x) =`F(x));
# Графік функції розподілу
with(plots) :
cdf_plot := plot(F(x), x = a − 2..b + 2, color = blue, title = "Функція розподілу F(x)", labels = ["x", "F(x)"]) :
display(cdf_plot);

# Математичне сподівання
print(`Математичне сподівання M[X]:`);
M[X] := int(x * f_norm(x), x = a..b) ;
```

а)

б)



в)

Рисунок 9 – Приклад реалізації розв'язання завдання 9 системи в СКМ Maple

2.10 Приклад розв'язання завдання 10

Завдання 10. В результаті експерименту отримано вибірку аварійних відключень у місті на добу:

1, 4, 3, 7, 8, 1, 3, 4, 8, 8, 1, 2, 4, 5, 8, 1, 2, 6, 7, 3, 4, 3, 2, 4, 4.

Необхідно:

1) побудувати варіаційний ряд;
2) побудувати статистичний розподіл вибірки;
3) побудувати полігон частот;
4) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік.

Розв'язання.

1) Для побудови варіаційного ряду аварійних відключень у місті на добу розташуємо варіанти у порядку зростання:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5 ,6, 7, 7, 8, 8, 8.

2) Для побудови статистичного розподілу вибірки знайдемо частоти варіант та результат представимо у вигляді таблиці 3.

Таблиця 3 – Варіаційний ряд

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
n_i	4	3	4	6	1	1	2	3

3) Для побудови полігону частот на площині (x, n) нанесемо точки з координатами (1;4), (2;3), (3,4), (4,6), (5,1), (6,1), (7,2), (8,3).

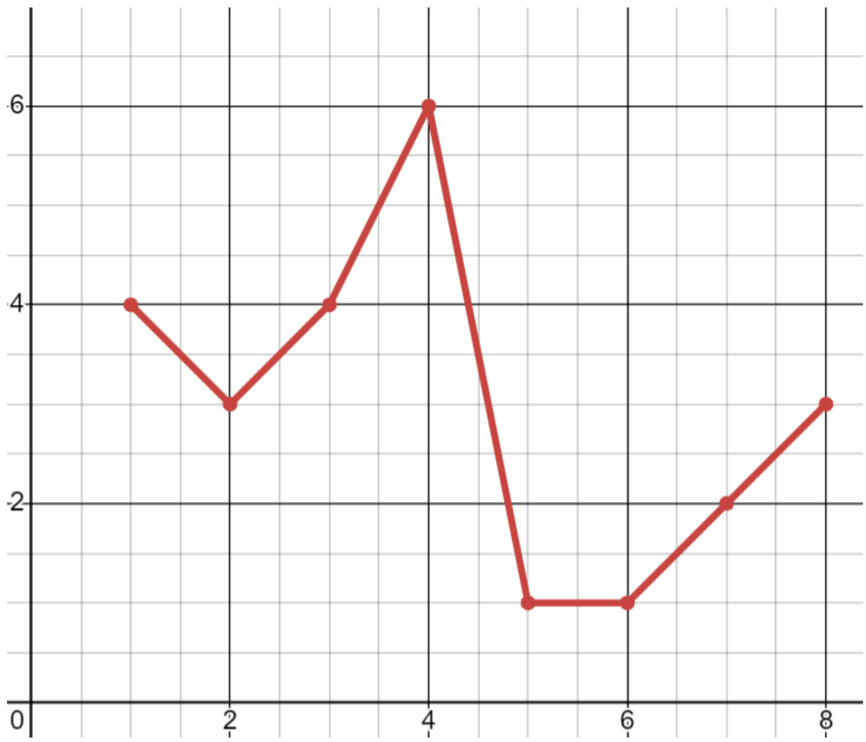


Рисунок 10 – Полігон частот

4) Знаходимо емпіричну функцію розподілу:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

де n_x – кількість варіант, менших за x,
n – обсяг вибірки,
$x \in (-\infty, +\infty)$.

В нашій задачі обсяг вибірки $n = 24$.

Якщо $x \leq 1$, то $n_x = 0$, оскільки не існує варіант, менших за $x_1 = 1$.

Якщо $1 < x \leq 2$, то $n_x = 4$, оскільки лише варіанта $x_1 = 1$ менша за x з частотою $n_1 = 4$.

Якщо $2 < x \leq 3$, то $n_x = 7$, оскільки лише варіанти $x_1 = 1$ та $x_2 = 2$ менші за x з частотами $n_1 = 4$, $n_2 = 3$ відповідно.

Якщо $3 < x \leq 4$, то $n_x = 11$, оскільки лише варіанти $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ та $x_3 = 3$ менші за x з частотами $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$ відповідно.

Якщо $3 < x \leq 4$, то $n_x = 11$, оскільки лише варіанти $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ та $x_3 = 3$ менші за x з частотами $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$ відповідно.

Якщо $4 < x \leq 5$, то $n_x = 17$, оскільки лише варіанти $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ та $x_4 = 4$ менші за x з частотами $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$, $n_4 = 6$ відповідно.

Якщо $5 < x \leq 6$, то $n_x = 18$, оскільки лише варіанти $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ та $x_5 = 5$ менші за x, з частотами $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$, $n_4 = 6$, $n_5 = 1$ відповідно.

Якщо $6 < x \leq 7$, то $n_x = 19$, оскільки лише варіанти $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$ менші за x з частотами $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$, $n_4 = 6$, $n_5 = 1$, $n_6 = 1$ відповідно.

Якщо $7 < x \leq 8$, то $n_x = 21$, оскільки лише варіанти $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 1$ менші за x з частотами $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$, $n_4 = 6$, $n_5 = 1$, $n_6 = 1$, $n_7 = 2$ відповідно.

Якщо $x > 8$, то $n_x = 24$, оскільки лише варіанти $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $x_6 = 1$ менші за x з частотами $n_1 = 4$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$, $n_4 = 6$, $n_5 = 1$, $n_6 = 1$, $n_7 = 2$, $n_8 = 3$ відповідно.

Використовуючи вище наведені обчислення, емпірічну функцію розподілу запишемо у вигляді:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{4}{24} = \frac{1}{6}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{7}{24}, & 2 < x \le 3 \\ \frac{11}{24}, & 3 < x \le 4 \\ \frac{17}{24}, & 4 < x \le 5 \\ \frac{18}{24} = \frac{3}{4}, & 5 < x \le 6 \\ \frac{19}{24}, & 6 < x \le 7 \\ \frac{21}{24} = \frac{7}{8}, & 7 < x \le 8 \\ 1 & x > 8 \end{cases}$$

Побудуємо графік емпирічної функції розподілу (рис. 11).

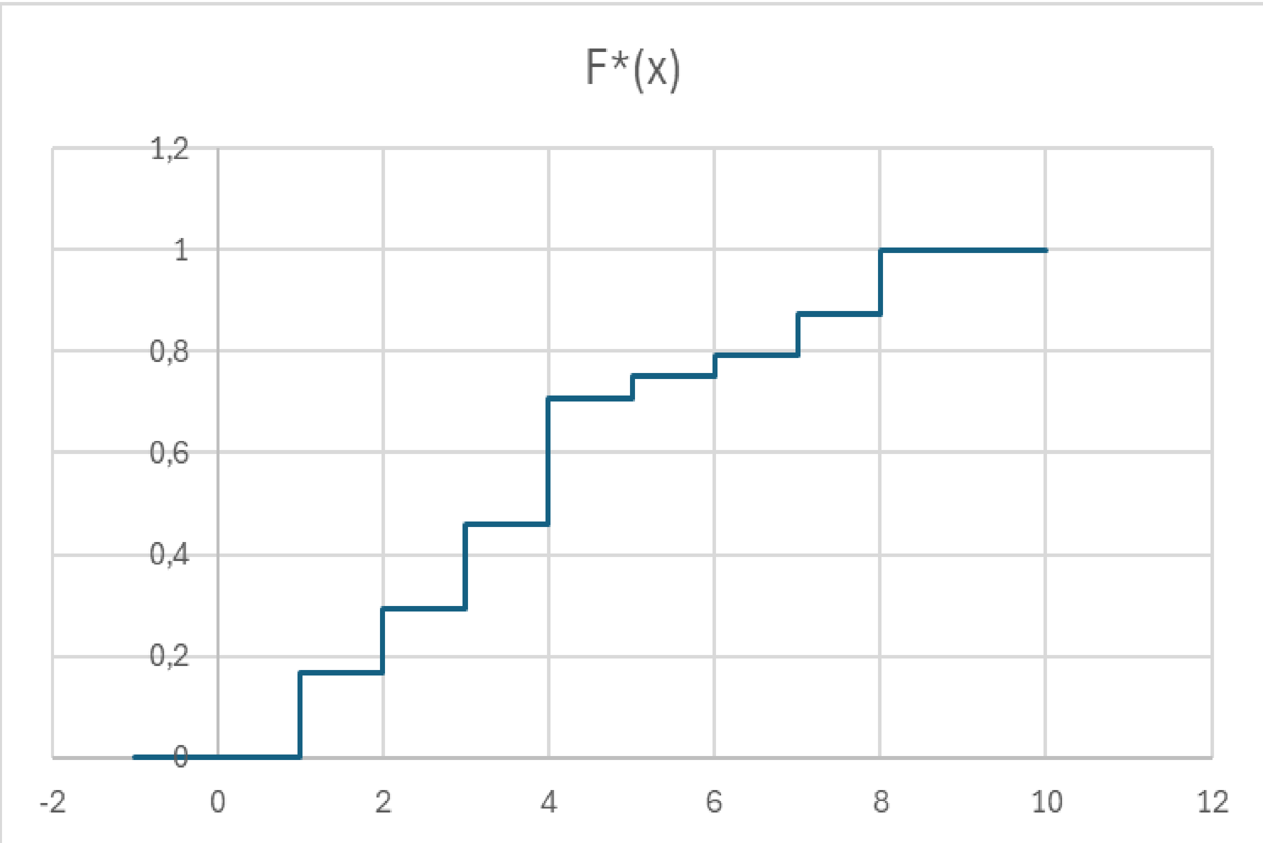
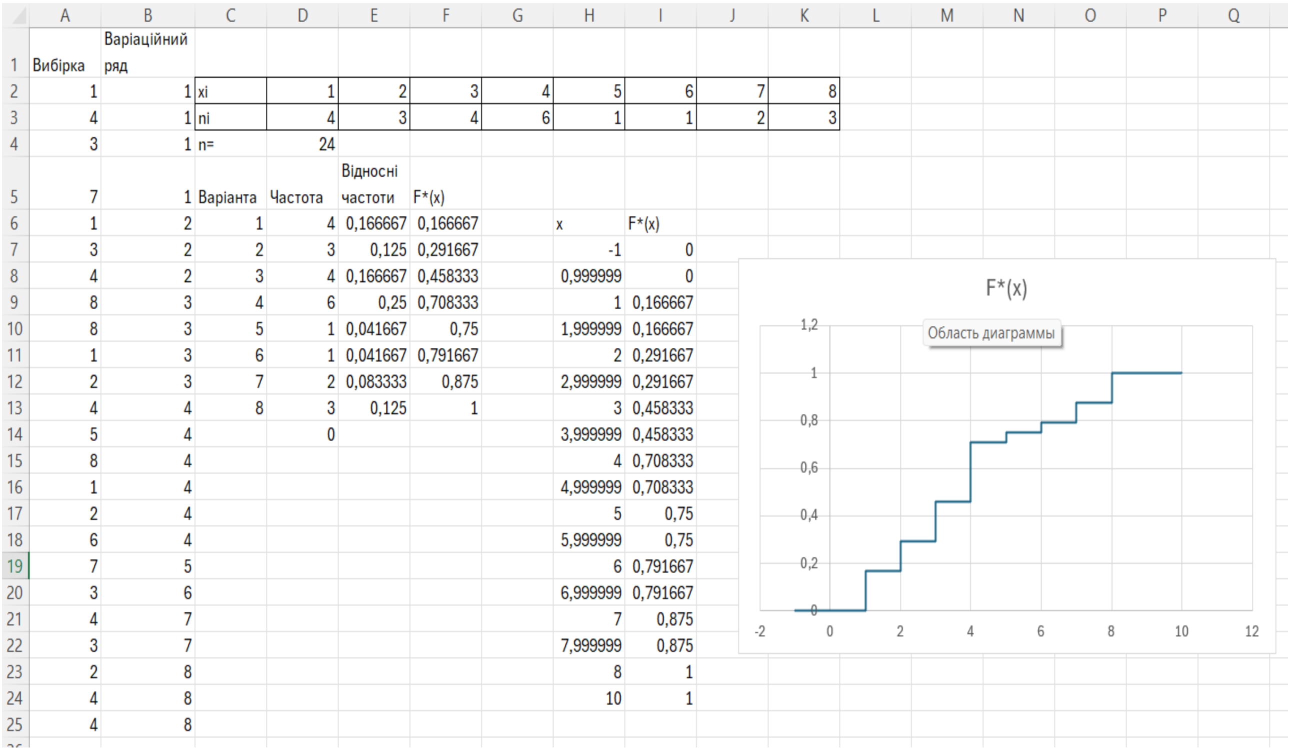


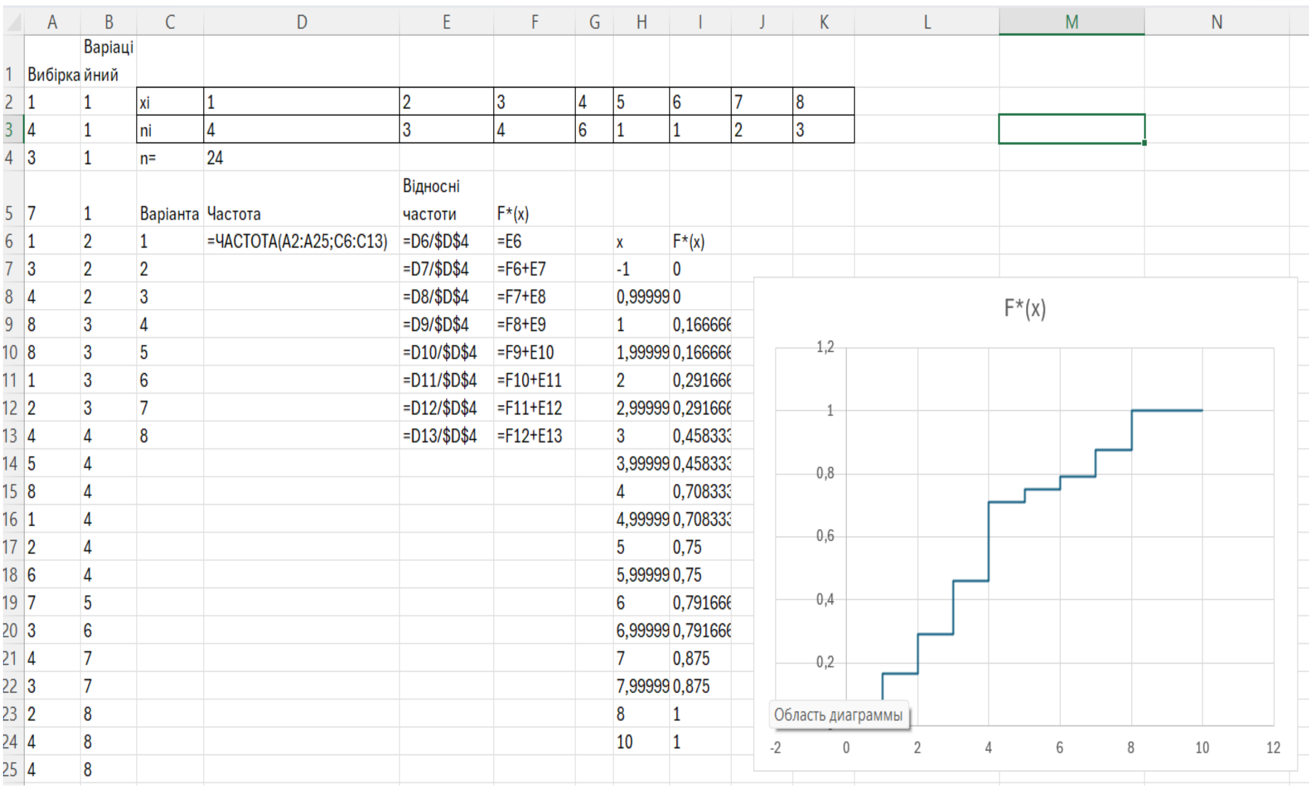
Рисунок 11 – Графік емпіричної функції розподілу

Приклад реалізації розв’язання завдання 10 в Excel (рис.12, 13).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Вибірка	Варіаційний ряд									
2	1	1	xi	1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	ni	4	3	4	6	1	1	2	3
4	3	1	n=	24							
5	7	1	Варіанта	Частота	Відносні частоти	F*(x)					
6	1	2	1	4	0,166667	0,166667		x	F*(x)		
7	3	2	2	3	0,125	0,291667		-1	0		
8	4	2	3	4	0,166667	0,458333		0,999999	0		
9	8	3	4	6	0,25	0,708333		1	0,166667		
10	8	3	5	1	0,041667	0,75		1,999999	0,166667		
11	1	3	6	1	0,041667	0,791667		2	0,291667		
12	2	3	7	2	0,083333	0,875		2,999999	0,291667		
13	4	4	8	3	0,125	1		3	0,458333		
14	5	4		0				3,999999	0,458333		
15	8	4						4	0,708333		
16	1	4						4,999999	0,708333		
17	2	4						5	0,75		
18	6	4						5,999999	0,75		
19	7	5						6	0,791667		
20	3	6						6,999999	0,791667		
21	4	7						7	0,875		
22	3	7						7,999999	0,875		
23	2	8						8	1		
24	4	8						10	1		
25	4	8									

Рисунок 12 – Приклад реалізації розв’язання завдання 10 в MS Excel



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Вибірка	Варіаці йний									
2	1	1	xi	1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	ni	4	3	4	6	1	1	2	3
4	3	1	n=	24							
5	7	1	Варіанта	Частота	Відносні частоти	F*(x)					
6	1	2	1	=ЧАСТОТА(A2:A25;C6:C13)	=D6/$D$4	=E6		x	F*(x)		
7	3	2	2		=D7/$D$4	=F6+E7		-1	0		
8	4	2	3		=D8/$D$4	=F7+E8		0,99999	0		
9	8	3	4		=D9/$D$4	=F8+E9		1	0,16666		
10	8	3	5		=D10/$D$4	=F9+E10		1,99999	0,16666		
11	1	3	6		=D11/$D$4	=F10+E11		2	0,29166		
12	2	3	7		=D12/$D$4	=F11+E12		2,99999	0,29166		
13	4	4	8		=D13/$D$4	=F12+E13		3	0,45833		
14	5	4						3,99999	0,45833		
15	8	4						4	0,70833		
16	1	4						4,99999	0,70833		
17	2	4						5	0,75		
18	6	4						5,99999	0,75		
19	7	5						6	0,79166		
20	3	6						6,99999	0,79166		
21	4	7						7	0,875		
22	3	7						7,99999	0,875		
23	2	8						8	1		
24	4	8						10	1		
25	4	8									

Рисунок 13 – Приклад реалізації розв’язання завдання 10 в MS Excel (розрахункові формули)

2.11 Приклад розв'язання завдання 11

Завдання 11. В результаті статистичних досліджень отримані дані про народжуваність в Україні за 1991-2022 роки (тис.чол.). Дані наведено в таблиці 4. Потрібно:

1) побудувати інтервальний статистичний розподіл вибірки;
2) на основі отриманого розподілу знайти наступні числові характеристики: вибіркову середню, вибіркове середньоквадратичне відхилення, вибіркову дисперсію;
3) побудувати гістограму відносних частот.

Таблиця 4 – Дані завдання 11

657,2	630,8	596,8	557,5	521,6	492,9	467,2
442,6	419,2	389,2	385,1	376,5	390,7	408,6
427,3	426,1	460,4	472,7	510,6	512,5	497,7
502,6	520,7	503,7	465,9	411,8	397,0	364,0
335,9	308,8	299,1	277,8	209,4		

Розв'язання.

1) Знайдемо мінімальне та максимальне значення у наведених даних:

$$x_{max} = 657{,}2;\ \ x_{min} = 209{,}4.$$

Обчислимо розмах вибірки народжуваності за формулою

$$R = x_{max} - x_{min} = 657.2 - 209.4 = 447{,}8.$$

Знайдемо число інтервалів групування N за формулою Стерджеса:

$$N = [1 + 3.322\lg n] = [1 + 3.322\lg 33] = 6.$$

Для групування вибірки інтервал $[x_{min}, x_{max}]$ розбиваємо на N інтервалів групування однакової довжини Δ, в межах кожного i –го інтервалу обчислюємо кількість варіант $n_i\,, i = \overline{1, N}$, які потрапили в цей інтервал.

Позначимо через a_i, b_i ліву та праву границя i – го інтервалу відповідно.

Подальші обчислення представимо у вигляді таблиці 5.

Таблиця 5 – Допоміжні обчислення

i	a_i	b_i	$\frac{a_i + b_i}{2}$	Частота n_i	Відносна частота ω_i
1	209,4	284,03	246,72	2	0,060
2	284,03	358,67	321,35	3	0,091
3	358,67	433,3	395,98	11	0,333
4	433,3	507,93	470,62	9	0,273
5	507,93	582,57	545,25	5	0,152
6	582,57	657,2	619,88	3	0,091

2) Середня вибіркова статистичного розподілу визначається за формулою:

$$\overline{x_{\text{в}}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i n_i}{n} = \sum_{i=1}^{N} x_i \omega_i.$$

В разі інтервального статистичного розподілу частот потрібно перейти до дискретного розподілу, “нові” варіанти якого є серединами інтервалів.

Після підстановки в формулу для середньої вибіркової відповідних значень, отримаємо:

$$\overline{x_{\text{в}}} = 242{,}72 \cdot 0{,}06 + 321{,}35 \cdot 0{,}091 + 395{,}98 \cdot 0{,}333 + 470.62 \cdot 0{,}273 + \\ +545{,}25 \cdot 0{,}152 + 619{,}88 \cdot 0{,}091 \approx 443{,}48.$$

Для обчислення вибіркової дисперсії скористаємося формулою:

$$D_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x_{\text{в}}})^2 n_i}{n} = \sum_{i=1}^{N} x_i{}^2 \omega_i - \overline{x_{\text{в}}}^2.$$

Після підстановки в цю формулу середин інтервалів групування x_i та відносних частот ω_i отримаємо:

$$D_{\text{в}} = 242{,}72^2 \cdot 0{,}06 + 321{,}35^2 \cdot 0{,}091 + 395{,}98^2 \cdot 0{,}333 + 470.62^2 \cdot 0{,}273 + \\ +545{,}25^2 \cdot 0{,}152 + 619{,}88^2 \cdot 0{,}091 - 443{,}48^2 \approx 9053{,}4.$$

Обчислення вибіркового середнього квадратичного відхилення проводимо за формулою:

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}} = \sqrt{9053{,}4} \approx 95{,}15.$$

3) Гістограмою відносних частот називають ступінчасту фігуру, що складається з прямокутників, основами яких служать часткові інтервали довжиною Δ, а висоти дорівнюють відношенню $\frac{\omega_i}{\Delta}$ (щільність відносної частоти).

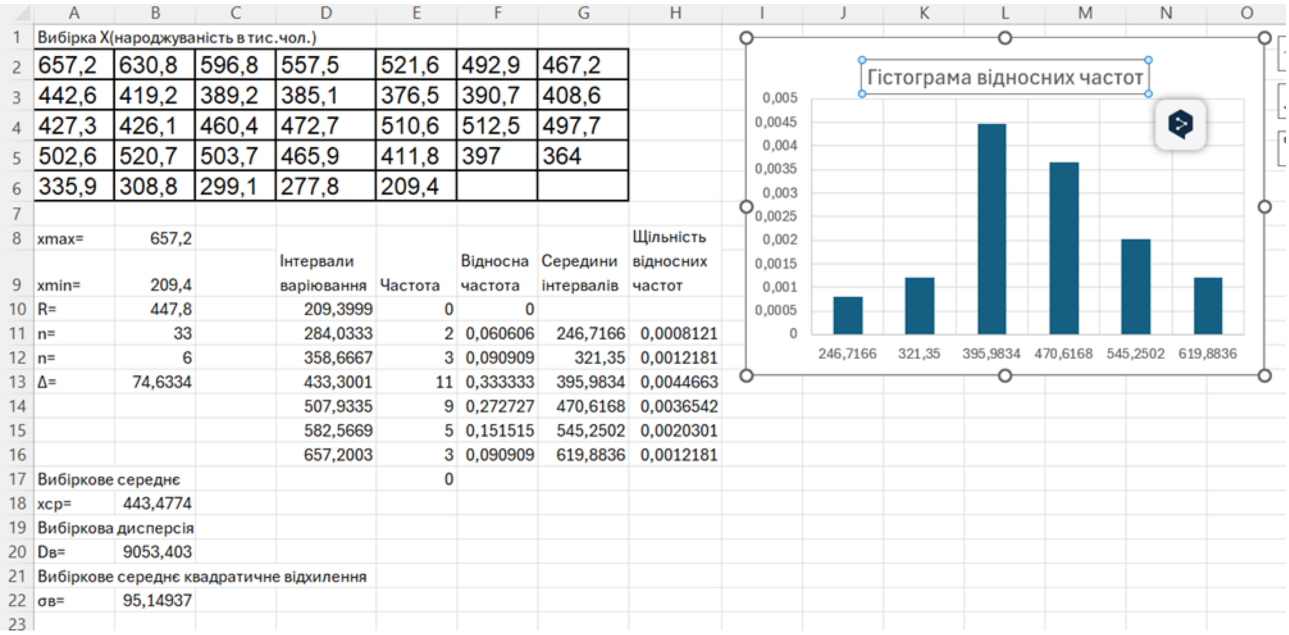
Для побудови гістограми відносних частот на осі абсцис відкладають часткові інтервали, а над ними проводять відрізки, паралельні осі абсцис на відстані $\frac{\omega_i}{\Delta}$.

Площа i-го часткового прямокутника дорівнює $\Delta \frac{\omega_i}{\Delta} = \omega_i$ - відносній частоті варіант, що потрапили в i –й інтервал. Отже, площа гістограми відносних частот дорівнює сумі всіх відносних частот, тобто одиниці.

В результаті виконання вищевказаних дій, отримаємо наступну гістограму відносних частот (рис.14).

Рисунок 14. – Гістограма відносних частот

Приклад реалізації розв'язання завдання 11 в Excel (рис.15, 16).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Вибірка X(народжуваність в тис.чол.)							
2	657,2	630,8	596,8	557,5	521,6	492,9	467,2	
3	442,6	419,2	389,2	385,1	376,5	390,7	408,6	
4	427,3	426,1	460,4	472,7	510,6	512,5	497,7	
5	502,6	520,7	503,7	465,9	411,8	397	364	
6	335,9	308,8	299,1	277,8	209,4			
7								
8	xmax=	657,2						
9	xmin=	209,4		Інтервали варіювання	Частота	Відносна частота	Середини інтервалів	Щільність відносних частот
10	R=	447,8		209,3999	0	0		
11	n=	33		284,0333	2	0,060606	246,7166	0,0008121
12	n=	6		358,6667	3	0,090909	321,35	0,0012181
13	Δ=	74,6334		433,3001	11	0,333333	395,9834	0,0044663
14				507,9335	9	0,272727	470,6168	0,0036542
15				582,5669	5	0,151515	545,2502	0,0020301
16				657,2003	3	0,090909	619,8836	0,0012181
17	Вибіркове середнє				0			
18	xср=	443,4774						
19	Вибіркова дисперсія							
20	Dв=	9053,403						
21	Вибіркове середнє квадратичне відхилення							
22	σв=	95,14937						

Рисунок 15 – Приклад реалізації розв'язання завдання 11 в MS Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Вибірка :							
2	657,2	630,8	596,8	557,5	521,6	492,9	467,2	
3	442,6	419,2	389,2	385,1	376,5	390,7	408,6	
4	427,3	426,1	460,4	472,7	510,6	512,5	497,7	
5	502,6	520,7	503,7	465,9	411,8	397	364	
6	335,9	308,8	299,1	277,8	209,4			
7								
8	xmax=	=МАКС(A2:G6)						
9	xmin=	=МИН(A2:G6)		Інтервали варіювання	Частота	Відносна частота	Середини інтервалів	Щільність відносних частот ωi/Δ
10	R=	=B8-B9		209,3999	=ЧАСТОТА(A2:G6;D10:D16)	=E10/$B$11		
11	n=	33		=D10+$B$13	=ЧАСТОТА(A2:G6;D10:D16)	=E11/$B$11	=(D10+D11)/2	=F11/$B$13
12	n=	=ОКРУГЛ(1+3,322*LOG10(B11);0)		=D11+$B$13	=ЧАСТОТА(A2:G6;D10:D16)	=E12/$B$11	=(D11+D12)/2	=F12/$B$13
13	Δ=	=ОКРУГЛВВЕРХ(B10/6;4)		=D12+$B$13	=ЧАСТОТА(A2:G6;D10:D16)	=E13/$B$11	=(D12+D13)/2	=F13/$B$13
14				=D13+$B$13	=ЧАСТОТА(A2:G6;D10:D16)	=E14/$B$11	=(D13+D14)/2	=F14/$B$13
15				=D14+$B$13	=ЧАСТОТА(A2:G6;D10:D16)	=E15/$B$11	=(D14+D15)/2	=F15/$B$13
16				=D15+$B$13	=ЧАСТОТА(A2:G6;D10:D16)	=E16/$B$11	=(D15+D16)/2	=F16/$B$13
17	Вибіркоє				=ЧАСТОТА(A2:G6;D10:D16)			
18	xcp=	=СУММПРОИЗВ(G11:G16;F11:F16)						
19	Вибіркоє							
20	Dв=	=СУММПРОИЗВ(G11:G16^2;F11:F16)						
21	Вибіркоє							
22	σв=	=КОРЕНЬ(B20)						
23								

Рисунок 16 – Реалізація розв’язання задачі 11 в MS Excel (розрахункові формули)

2.12 Приклад розв’язання завдання 12

Завдання 12. Надано дані про стаж роботи X та розмір заробітної плати працівників Y на підприємстві (табл.6). Потрібно:

1) знайти коефіцієнт кореляції;
2) знайти рівняння лінійної регресії;
3) побудувати кореляційне поле та лінію лінійної регресії;
4) оцінити тісноту лінійного зв’язку між стажем роботи X та розміром заробітної плати Y на основі емпіричної шкали Чеддока.

Таблиця 6 – Дані завдання 12

X, роки	4	7	9,5	13,5	15	16	18	26
Y, тис. грн.	10,3	10,7	12	13,6	14,1	18,5	17,6	21,4

Розв’язання.

1) Для обчислення коефіцієнта кореляції необхідно знайти такі вибіркові характеристики:

а) вибіркове середнє значення величин X та Y:

$$\overline{x^*} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ \overline{y^*} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Після підстановки в вище наведені формули значень із таблиці 5 отримаємо:

$$\overline{x^*} = \frac{1}{8}(4 + 7 + 9{,}5 + 13{,}5 + 15 + 16 + 18 + 26) = 13{,}625$$

$$\overline{y^*} = \frac{1}{8}(10{,}3 + 10{,}7 + 12 + 13{,}6 + 14{,}1 + 18{,}5 + 17{,}6 + 21{,}4) = 14{,}775.$$

б) вибіркові середньоквадратичні відхилення величин X та Y:

$$\sigma_x^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x^*})^2},\ \sigma_y^* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y^*})^2}.$$

Підставляючи відповідні значення в формули для середньоквадратичних відхилень, отримаємо:

$$\sigma_x^* = \sqrt{\frac{1}{8-1}\begin{pmatrix} (4-13{,}625)^2 + (7-13{,}625)^2 + (9{,}5-13{,}625)^2 + (13{,}5-13{,}625)^2 \\ +(15-13{,}625)^2 + (16-13{,}625)^2 + (18-13{,}625)^2 + (26-13{,}625)^2 \end{pmatrix}} = 6{,}9;$$

$$\sigma_y^* = \sqrt{\frac{1}{8-1}\begin{pmatrix} (10{,}3-14{,}775)^2 + (10{,}7-14{,}775)^2 + (12-14{,}775)^2 + \\ (13{,}6-14{,}775)^2 + (14{,}1-14{,}775)^2 + (18{,}5-14{,}775)^2 \\ +(17{,}6-14{,}775)^2 + (21{,}4-14{,}775)^2 \end{pmatrix}} = 3{,}998.$$

Коефіцієнт кореляції знайдемо за формулою:

$$r^* = \frac{1}{(n-1)\sigma_x^*\sigma_y^*}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x^*})(y_i - \overline{y^*}).$$

Після підстановки в формулу відповідних значень, отримаємо:

$$r^* = 0{,}95.$$

Таким чином, коефіцієнт кореляції дорівнює 0,95.

2) Рівняння лінійної регресії має вигляд $y = kx + b$, де коефіцієнти k і b обчислюються за формулами:

$$k = r^*\frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*} = 0{,}95 \cdot \frac{3{,}998}{6{,}9} \approx 0{,}552;$$

$$b = \overline{y^*} - k\overline{x^*} = 14{,}775 - 0{,}552 \cdot 13{,}625 \approx 7{,}258.$$

Кореляційне поле представляє собою множину точок с координатами $(x_i, y_i), i = \overline{1,n}$ в декартовій системі координат. Для побудови кореляційного поля і лінії регресії будуємо в декартовій системі координат множину точок $(x_i, y_i), i = \overline{1,n}$ і пряму лінію $y = 0{,}552x + 7{,}258$ (рис.17).

Для оцінки тісноти лінійного зв’язку по значенню коефіцієнта кореляції використовується шкала Чеддока (табл. 7). На основі шкали Чеддока можна зробити висновок, що лінійний зв’язок сильний, оскільки коефіцієнт кореляції дорівнює 0,95.

Таблиця 7 – Шкала Чеддока

$\|r\|$	Тіснота зв'язку
менше 0,1	відсутній лінійний зв'язок
0,1-0,3	слабкий
0,3-0,7	помірний
більше 0,7	сильніш (тісний)

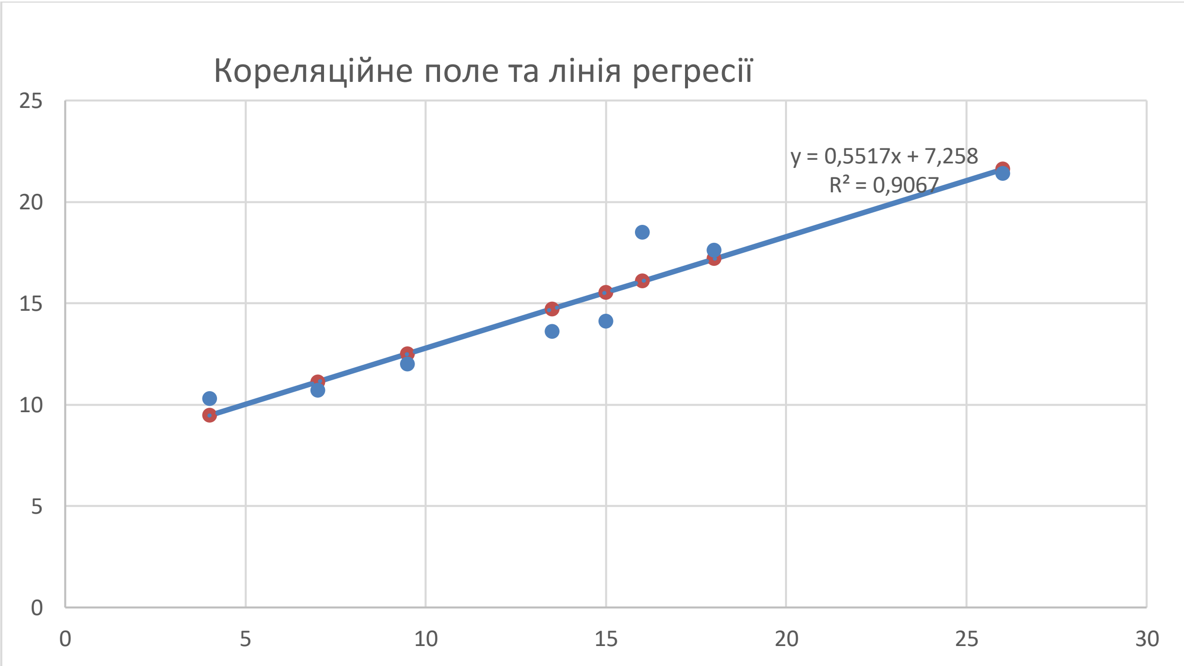
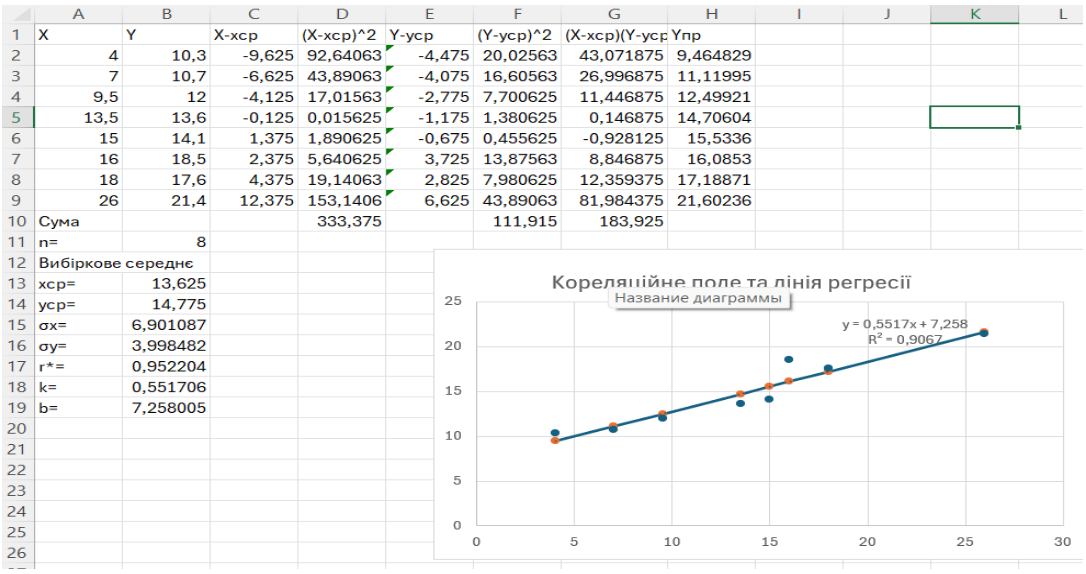


Рисунок 17 – Кореляційне поле та лінія регресії

Приклад реалізації розв’язання завдання 12 в Excel (рис.18).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X	Y	X-xcp	(X-xcp)^2	Y-ycp	(Y-ycp)^2	(X-xcp)(Y-ycp	Yпр
2	4	10,3	-9,625	92,64063	-4,475	20,02563	43,071875	9,464829
3	7	10,7	-6,625	43,89063	-4,075	16,60563	26,996875	11,11995
4	9,5	12	-4,125	17,01563	-2,775	7,700625	11,446875	12,49921
5	13,5	13,6	-0,125	0,015625	-1,175	1,380625	0,146875	14,70604
6	15	14,1	1,375	1,890625	-0,675	0,455625	-0,928125	15,5336
7	16	18,5	2,375	5,640625	3,725	13,87563	8,846875	16,0853
8	18	17,6	4,375	19,14063	2,825	7,980625	12,359375	17,18871
9	26	21,4	12,375	153,1406	6,625	43,89063	81,984375	21,60236
10	Сума			333,375		111,915	183,925	
11	n=	8						
12	Вибіркове середнє							
13	xcp=	13,625						
14	ycp=	14,775						
15	σx=	6,901087						
16	σy=	3,998482						
17	r*=	0,952204						
18	k=	0,551706						
19	b=	7,258005						

Рисунок 18 – Реалізація розв'язання завдання 12 в MS Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	X	Y	X-xср	(X-xср)^2	Y-yср	(Y-yср)^2	(X-xср)(Y-yср)	Yпр
2	4	10,3	=A2-$B$13	=C2^2	=B2-$B$14	=E2^2	=C2*E2	=$B$18*A2+$B$19
3	7	10,7	=A3-$B$13	=C3^2	=B3-$B$14	=E3^2	=C3*E3	=$B$18*A3+$B$19
4	9,5	12	=A4-$B$13	=C4^2	=B4-$B$14	=E4^2	=C4*E4	=$B$18*A4+$B$19
5	13,5	13,6	=A5-$B$13	=C5^2	=B5-$B$14	=E5^2	=C5*E5	=$B$18*A5+$B$19
6	15	14,1	=A6-$B$13	=C6^2	=B6-$B$14	=E6^2	=C6*E6	=$B$18*A6+$B$19
7	16	18,5	=A7-$B$13	=C7^2	=B7-$B$14	=E7^2	=C7*E7	=$B$18*A7+$B$19
8	18	17,6	=A8-$B$13	=C8^2	=B8-$B$14	=E8^2	=C8*E8	=$B$18*A8+$B$19
9	26	21,4	=A9-$B$13	=C9^2	=B9-$B$14	=E9^2	=C9*E9	=$B$18*A9+$B$19
10	Сума			=СУММ(D2:D9)		=СУММ(F2:F9)	=СУММ(G2:G9)	
11	n=	8						
12	Вибірк							
13	xср=	=СРЗНАЧ(A2:A9)						
14	yср=	=СРЗНАЧ(B2:B9)						
15	σx=	=КОРЕНЬ(D10/(B11-1))						
16	σy=	=КОРЕНЬ(F10/(B11-1))						
17	r*=	=G10/(B11-1)/B15/B16						
18	k=	=B17*B16/B15						
19	b=	=B14-B18*B13						

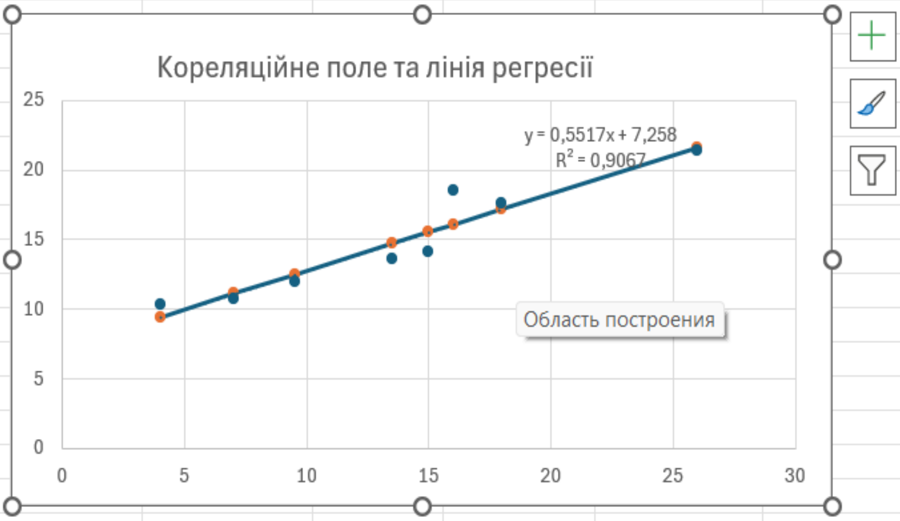


Рисунок 19 – Реалізація розв'язання завдання 12 в MS Excel (розрахункові формули)

2.13 Приклад розв’язання завдання 13

Завдання 13. За заданим законом розподілу двовимірної випадкової (X, Y) величини знайти:

1) безумовні закони розподілу компонент ξ та η;

2) побудувати умовний закон розподілу випадкової величини η, що відповідає умові $\xi = 0$;

3) обчислити умовні математичні сподівання компонентів ξ та і за цими результатами побудувати лінії регресії ηна ξ та ξ на η;

4) визначити основні числові характеристики двовимірної випадкової величини і зробити висновок щодо щільності кореляційного зв'язку.

Розв'язання.

Приклад реалізації розв’язання завдання 13 в Excel (рис.20).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		η	0	1	2	3	4	P(ξ=xi)	M(η|ξ=xi)	
2	ξ									
3	0		1/16	1/8	1/16	0	0	1/4	1	0
4	1		0	1/8	1/4	1/8	0	1/2	2	1
5	2		0	0	1/16	1/8	1/16	1/4	3	1,5
6	P(η=yj)		1/16	1/4	3/8	1/4	1/16		M(ξη)=	2,5
7	M(ξ|η=yj)		0	1/2	1	1 1/2	2			
8										
9		η	0	1	2	3	4			
10		P(η=yj|ξ=0	1/4	1/2	1/4	0	0			
11										
12										
13										
14		M(ξ)=	1							
15		M(η)=	2							
16		D(ξ)=	0,5							
17		D(η)=	1							
18		σ(ξ)	0,707107							
19		σ(η)=	1							
20		$K_{ξη}$=	0,5							
21		$r_{ξη}$=	0,707107							
22		b1=	1							
23		b0=	1		M(η|ξ=x)=x+1					

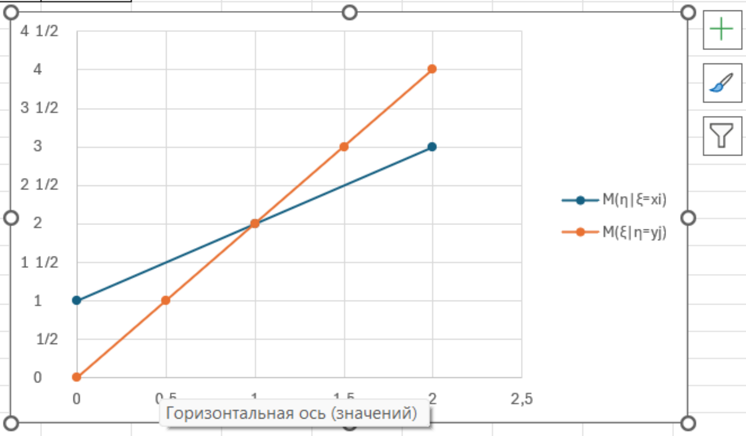


Рисунок 20 – Приклад реалізації розв’язання завдання 13 в MS Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		η	0	1	2	3	4	P(ξ=xi)	M(η|ξ=xi)
2	ξ								
3	0		0,0625	0,125	0,0625	0	0	=СУММ(C3:G3)	=СУММПРОИЗВ($C$1:$G$1;C3:G3)/H3
4	1		0	0,125	0,25	0,125	0	=СУММ(C4:G4)	=СУММПРОИЗВ($C$1:$G$1;C4:G4)/H4
5	2		0	0	0,0625	0,125	0,0625	=СУММ(C5:G5)	=СУММПРОИЗВ($C$1:$G$1;C5:G5)/H5
6	P(η=yj)		=СУММ(C3:C5)	=СУММ(D3:D5)	=СУММ(E3	=СУММ(F3:F	=СУММ(G3		M(ξη)=
7	M(ξ|η=yj)		=СУММПРОИЗВ($A$3:$A$5;C3:C5)/C6	=СУММПРОИЗВ($A$3:$A$5;D3:D5)/D6	=СУММПР(	=СУММПРОИ	=СУММПР		
8									
9		η	0	1	2	3	4		
10		P(η=yj|ξ=0)	=C3/$H$3	=D3/$H$3	=E3/$H$3	=F3/$H$3	=G3/$H$3		
11									
12									
13									
14		M(ξ)=	=СУММПРОИЗВ(A3:A5;H3:H5)						
15		M(η)=	=СУММПРОИЗВ(C1:G1;C6:G6)						
16		D(ξ)=	=СУММПРОИЗВ(A3:A5^2;H3:H5)-C14^2						
17		D(η)=	=СУММПРОИЗВ(C1:G1^2;C6:G6)-C15^2						
18		σ(ξ)	=КОРЕНЬ(C16)						
19		σ(η)=	=КОРЕНЬ(C17)						
20		$K_{ξη}$=	=J6-C14*C15						
21		$r_{ξη}$=	=C20/C18/C19						
22		b1=	=C21*C19/C18						
23		b0=	=C15-C22*C14		M(η|ξ=x)=x				
24									

Рисунок 21 – Приклад реалізації розв’язання завдання 13 в MS Excel (розрахункові формули)

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бишевець Н. Г., Омецинська Н. В., Юсипів Т. В. Теорія ймовірностей та математична статистика з використанням табличного процесора MS EXCEL : навч. посіб. Таврійський національний університет імені В.І. Вернадського. Одеса : Гельветика, 2021. 233 с.
2. Веригіна І. В., Островська О. В., Проскурін Д. П. Теорія ймовірностей та математична статистика. Збірник задач : навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за технічними спеціальностями. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. 48 с. URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/27822.
3. Грудкіна Н. С., Кайдан Н. В., Колесников С. О., Дмитришин І. С. Використання СКМ Maple при розв'язанні задач з обчислення геометричної ймовірності. *Педагогічна Академія: наукові записки*. 2024. № 9. DOI: 10.5281/zenodo.13326522.
4. Грудкіна Н. С., Костіков О. А., Ровенська О. Г. До питання формування дослідницької компетентності здобувачів вищої освіти в процесі розв'язання задач з теорії ймовірності. *Педагогічна Академія: наукові записки*. 2024. № 10. DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.13891974.
5. Грудкіна Н. С., Самойленко Д. О., Міняйло Д. О. Використання системи комп'ютерної математики MAPLE для розв'язання задач інженерної математики з автоматизованим розрахунком. *Наукові відкриття та фундаментальні наукові дослідження: світовий досвід* : матеріали ІІІ Міжнародної наукової конференції, м. Вінниця, 24 листопада, 2023 р. Вінниця, 2023. С. 402-403.
6. Грудкіна Н. С., Колесников С. О., Старов Д. В., Чехута О. В. Впровадження ІКТ під час викладання математичних дисциплін здобувачам технічних, економічних та ІТ-спеціальностей. *Сучасні інформаційні технології, засоби автоматизації та електропривод* : матеріали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції, 18–20 квітня 2024 р. Краматорськ – Тернопіль, 2024. С. 204-206.
7. Задерей П. В., Лагода О. А., Нестеренко О. Б., Харитонова М. О. Інтегральне числення : навч. посіб. Київ : КНУТД, 2021. 216. URL: https://er.knutd.edu.ua/bitstream/123456789/19923/1/Integral_NP_2021.pdf.
8. Ічанська Н. В., Лозицький Д. Ю. Використання математичного апарату та ІКТ для розв'язання прикладних задач. *Науковий вісник Ужгородського університету.* Серія «Математика і інформатика». 2023. Т. 43. Вип. 2. С. 119-129. DOI: 10.24144/2616-7700.2023.43(2).
9. Михалевич В. М. Використання систем комп'ютерної математики у процесі навчання студентів ВНЗ : монографія. Вінниця : ВНТУ, 2016. 279 с.
10. Теорія ймовірностей і математична статистика = Theory of Probability and Mathematical Statistics : навчальний посібник для студентів спеціальностей 121 «Інженерія програмного забезпечення», 126

«Інформаційні системи та технології» / уклад.: Є. О. Покровський, С. Є. Покровський, О. В. Савчук. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 231 с. URL: https://ela.kpi.ua/handle/123456789/41905.

11. Практикум з теорії імовірностей та математичної статистики : навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей / А. М. Алілуйко та ін. Тернопіль : Підручники і посібники, 2018. 352 с.

12. Liengme B. V. Maple: A Primer. Morgan & Claypool Publishers, 2019. 171 p. DOI: https://doi.org/10.1088/2053-2571/ab0bb3.

13. Maple : веб-сайт. URL: https://www.maplesoft.com/products/Maple/ (дата звернення: 15.09.24).

Навчально-методичне видання

Грудкіна Наталія Сергіївна

Костіков Олександр Анатолійович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань

Самостійне електронне мережеве видання
Публікується в авторській редакції